

# Алгебры Понтрягина и LS-категория момент-угол комплексов во флаговом случае

Федор Вылегжанин

Аннотация. Для любого флагового симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  мы описываем мультиградуированный ряд Пуанкаре, минимальное число соотношений и степени этих соотношений в алгебре Понтрягина соответствующего момент-угол комплекса  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ . Мы вычисляем категорию Люстерника-Шнирельмана  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  для флаговых комплексов и даем нижнюю оценку в общем случае. Ключевым наблюдением является вырождение во втором листе спектральной последовательности Милнора-Мура для  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  в случае, когда  $\mathcal{K}$  флаговый.

Мы также показываем, что результаты Панова и Рэя об алгебрах Понтрягина пространств Дэвиса-Янушкевича верны для коэффициентов в произвольном кольце, и вводим  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку на алгебрах Понтрягина, аналогичную мультиградуировке на когомологиях момент-угол комплексов.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс на множестве вершин  $[m] = \{1, \dots, m\}$ . Мы изучаем следующие гомотопические инварианты соответствующего момент-угол комплекса  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ :

- его алгебру Понтрягина  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей;
- его категорию Люстерника-Шнирельмана, или LS-категорию  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ .

Алгебры Понтрягина момент-угол комплексов исследовались в [PR, GPTW, GIPS]. В случае, когда  $\mathbf{k}$  – поле, а комплекс  $\mathcal{K}$  флаговый, известен минимальный набор образующих алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ , состоящий из  $\sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$  элементов [GPTW, Theorem 4.3]. Но явное описание соотношений между ними, по-видимому, затруднительно. Мы решаем более простую задачу описания минимального числа и степеней определяющих соотношений, вычисляя  $\text{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  для флаговых  $\mathcal{K}$  (роль этого  $\mathbf{k}$ -модуля объясняется в Предложении 2.4(b)).

Бобен и Грбич [BG] получили ряд верхних и нижних оценок на LS-категорию момент-угол комплексов, уделяя особое внимание случаю, когда  $|\mathcal{K}|$  – многообразие малой размерности (но  $\mathcal{K}$  может быть нефлаговым). Мы вычисляем  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  для всех флаговых комплексов  $\mathcal{K}$  и даем новую нижнюю оценку в общем случае. Эти результаты также опираются на вычисление мультиградуированного модуля  $\text{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  для флаговых комплексов.

Для любого комплекса  $\mathcal{K}$  алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  вкладывается в алгебру Понтрягина  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  пространства Дэвиса-Янушкевича  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}$ . Мы вводим  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку на этих алгебрах и показываем, что теорема Панова и Рэя о структуре  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  (для случая коэффициентов в поле или в кольце целых чисел см. [BP, §8.4]) верна для любого коммутативного кольца  $\mathbf{k}$  с единицей:

**Теорема 1.1** (Теорема 3.1). *Рассмотрим  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированную  $\mathbf{k}$ -алгебру*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! := T(u_1, \dots, u_m) / (u_i^2 = 0, i = 1, \dots, m; u_i u_j + u_j u_i = 0, \{i, j\} \in \mathcal{K}), \deg u_i = (-1, 2e_i).$$

- (a)  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  как  $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры, где  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$  – алгебра Стэнли-Райснера. В частности, для любого  $n \geq 0$  имеем

$$H_n(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{-i+2|\alpha|=n} \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^i(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{2\alpha}, \quad i \geq 0, \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m.$$

- (b) *Есть естественное вложение  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ .*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57S12, 55M30; 57T35, 16S37, 13F55.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

(с) Если  $\mathcal{K}$  флаговый, то  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ .

Изоморфизм из пункта (а) задаёт следующую  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку на  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ :

$$H_n(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) = \bigoplus_{-i+2|\alpha|=n} H_{-i,2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}), \text{ и } H_{-i,2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^i(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{2\alpha}.$$

Вложение из пункта (b) согласовано с этой градуировкой. Заметим, что она аналогична мультиградуировке на  $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  из [BP, Theorem 4.5.7]:

$$H^n(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) = \bigoplus_{-i+2|\alpha|=n} H^{-i,2\alpha}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}), \text{ и } H^{-i,2\alpha}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_i^{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})_{2\alpha}.$$

Алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  также наделяется  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировкой как подалгебра в  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ . Используя резольвенту Фрёберга [Fr] для левого  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ -модуля  $\mathbf{k}$  и структуру свободного левого  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля на  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ , мы вычисляем:

**Теорема 1.2** (Теорема 4.5). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда*

$$\text{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}).$$

Здесь  $\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\}$  – полный подкомплекс в  $\mathcal{K}$ . Этот изоморфизм  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуирован в следующем смысле:

$$\text{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-|J|, 2J} \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}), \quad J \subset [m],$$

а остальные градуированные компоненты равны нулю.

(Если  $J \subset [m]$ , то мы пишем  $J$  вместо  $\sum_{j \in J} e_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ .)

**Следствие 1.3** (Следствие 4.6). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbb{F}$  – поле. Тогда минимальное копредставление алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$  содержит ровно  $\sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$  соотношений: для каждого  $J \subset [m]$  – ровно  $\dim \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$  соотношений степени  $(-|J|, 2J)$ .*

Из этого результата следуют известные критерии того, что  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$  – свободная алгебра или алгебра с одним соотношением [GPTW, GPS]. В Следствии 4.6 мы также оцениваем снизу число образующих и соотношений в случае коэффициентов в кольце главных идеалов.

Ряд Пуанкаре алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$  во флаговом случае вычислен Пановым и Рэем [PR]. Мы уточняем это вычисление, вводя мультиградуировку. Сопоставим каждому  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированному векторному пространству  $V = \bigoplus_{i,\alpha} V_{i,\alpha}$  формальный степенной ряд  $F(V; t, \lambda) := \sum_{i,\alpha} \dim(V_{i,\alpha}) t^i \lambda^\alpha$  от  $m+1$  переменных  $(t, \lambda) = (t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , где  $\lambda^\alpha := \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\alpha_j}$  при  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ . Обозначим также  $\tilde{\chi}(X) := \sum_i (-1)^i \dim \tilde{H}_i(X) = \chi(X) - 1$ .

**Теорема 1.4** (Теорема 4.9). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbb{F}$  – поле. Тогда*

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F}); t, \lambda)} = - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) t^{-|J|} \lambda^{2J}.$$

По теореме Милнора-Мура [MM], алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$  является универсальной обертывающей алгеброй для  $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$ . Поэтому рациональные гомотопические группы  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  также  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы. Мы получаем мультиградуированное уточнение [DS, Theorem 4.2.1]:

**Теорема 1.5** (Теорема 4.15). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Рассмотрим следующий  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный формальный степенной ряд:*

$$\sum_{\beta} w_{\beta} \lambda^{\beta} = - \ln \left( - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) (-\lambda)^J \right).$$

Тогда

$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \sum_{k|\alpha} \frac{\mu(k)}{k} w_{\alpha},$$

где  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ , а  $\mu(n)$  – функция Мёбиуса. В остальных случаях  $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{i,\beta} = 0$ .

Неотрицательность этих чисел дает некоторые ограничения на приведенные эйлеровы характеристики полных подкомплексов во флаговых комплексах  $\mathcal{K}$ . Эти ограничения (см. Пример 4.18) могут представлять независимый комбинаторный интерес, см. работу Устиновского [Us].

Как еще одно приложение Теоремы 1.2, мы доказываем в Предложении 5.15, что *спектральная последовательность Милнора-Мура*

$$E_{p,q}^2 \cong \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega X; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_q \Rightarrow H_{p+q}(X; \mathbb{F})$$

для  $X = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  вырождается во втором листе, если  $\mathcal{K}$  флаговый. Это позволяет вычислить *инвариант Тумера* [To] для таких  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ , что дает оценку снизу на LS-категорию  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  (см. Предложение 5.17). Заметим, что более простая нижняя оценка на  $\mathrm{cat}(X)$  через *суп-длину* может не обращаться в равенство для  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ , как показано в [BG, Section 5]. Все же мы ожидаем, что она точна для флаговых комплексов (см. Проблему 5.29).

Чтобы получить оценку сверху, заметим, что во флаговом случае *вещественный момент-угол комплекс*  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  является классифицирующим пространством коммутанта  $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$  *прямоугольной группы Кокстера*  $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ , ассоциированной с  $\mathcal{K}$  (см. [PV]). Используя неравенство  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \leq \mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  Бебена и Грбич [BG] и формулу Дранишникова [Dr] для виртуальной когомологической размерности  $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ , мы вычисляем  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  для всех флаговых  $\mathcal{K}$ :

**Теорема 1.6** (Теорема 5.18). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

$$\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = 1 + \max_{J \subset [m]} \mathrm{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J = 1 + \max_{I \in \mathcal{K}} \mathrm{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathrm{lk}_{\mathcal{K}} I.$$

Пусть  $\mathcal{K}^f$  – *флагификация*  $\mathcal{K}$ , то есть единственный флаговый симплициальный комплекс с тем же 1-остовом (*i-остов*  $\mathcal{K}$  – это симплициальный комплекс  $\mathrm{sk}_i \mathcal{K} := \{I \in \mathcal{K} : |I| \leq i+1\}$ ). Мы даем следующую нижнюю оценку на  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  в нефлаговом случае, которая наиболее полезна, когда  $\nu(\mathcal{K})$  мало (это число измеряет, насколько комплекс  $\mathcal{K}$  нефлаговый):

**Предложение 1.7** (Предложение 5.23 и Предложение 5.24). *Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс. Пусть  $\nu(\mathcal{K})$  – это наименьшее  $n \geq 0$ , такое что верно следующее:  $J \in \mathcal{K}$  всякий раз, когда  $J \subset I \in \mathcal{K}^f$  и  $|I \setminus J| \geq n$ . Тогда*

$$\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq 1 - \nu(\mathcal{K}) + \max_{J \subset [m]} \mathrm{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J^f.$$

Это позволяет вычислить  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  для остовов флаговых триангуляций многообразий:

**Следствие 1.8** (Следствие 5.27). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговая триангуляция  $d$ -мерного многообразия. Пусть  $\mathcal{L}$  – такой симплициальный комплекс, что  $\mathrm{sk}_i \mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathrm{sk}_j \mathcal{K}$  для некоторых  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq d$ . Тогда  $i+1 \leq \mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \leq j+1$ . В частности,  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = d+1$  и  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathrm{sk}_i \mathcal{K}}) = i+1$ .*

Работа имеет следующую структуру.

В Разделе 2 мы напоминаем основные свойства симплициальных комплексов и момент-угол комплексов. Далее обсуждаются мультиградуированные ассоциативные алгебры и связанные конструкции из гомологической алгебры.

В Разделе 3 мы доказываем Теорему 1.1 и описываем структуру левого  $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля на  $H_*(\Omega(\mathrm{CP}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ .

В Разделе 4 мы интерпретируем построенную Фрёбергом минимальную резольвенту левого  $H_*(\Omega(\mathrm{CP}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$  как свободную резольвенту  $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$ . С помощью этой резольвенты доказываются Теоремы 1.2, 1.4 и 1.5.

В Разделе 5 изучается LS-категория  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  и  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$  во флаговом случае. Мы вычисляем  $\mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  и показываем, что неравенство  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \leq \mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  обращается в равенство из-за вырождения спектральной последовательности Милнора-Мура. Наконец, мы обсуждаем оценки снизу на  $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  в общем случае и *суп-длину*  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  во флаговом случае.

**Благодарности.** Автор благодарит своего научного руководителя Т. Е. Панова за помощь, поддержку и ценные советы, Д. И. Пионтковского за помощь с алгебрами Кошуля и анонимного рецензента за полезные замечания и исправления.

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1. Симплициальные комплексы и полиэдральные произведения.** *Симплициальный комплекс*  $\mathcal{K}$  на множестве вершин  $V$  – это непустой набор подмножеств  $I \subset V$ , называемых *гранями* или *симплексами*, удовлетворяющий условию

- Если  $I \in \mathcal{K}$  и  $J \subset I$ , то  $J \in \mathcal{K}$ .

Из этого условия следует, что  $\emptyset \in \mathcal{K}$ . Элемент  $i \in V$  называется *призрачной вершиной*, если  $\{i\} \notin \mathcal{K}$ . Мы рассматриваем только комплексы без призрачных вершин, так что  $\{i\} \in \mathcal{K}$  для всех  $i \in V$ . Обычно  $V = [m] := \{1, \dots, m\}$ .

Каждому подмножеству  $J \subset [m]$  сопоставляется симплициальный комплекс  $\mathcal{K}_J := \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\}$  на множестве вершин  $J$ , называемый *полным подкомплексом*  $\mathcal{K}$  на  $J$ .

*Недостающей гранью* комплекса  $\mathcal{K}$  называется всякое  $J \subset [m]$ , такое что  $J \notin \mathcal{K}$ , но любое собственное подмножество  $J$  принадлежит  $\mathcal{K}$ . Комплекс  $\mathcal{K}$  *флаговый*, если все его недостающие грани двухэлементны. Полные подкомплексы флаговых комплексов флаговые. Флаговый комплекс однозначно определяется своим 1-остовом. Поэтому каждому  $\mathcal{K}$  соответствует единственный флаговый комплекс  $\mathcal{K}^f$  с тем же 1-остовом, называемый *флагификацией* комплекса  $\mathcal{K}$ . Ясно, что  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^f$ .

*Линк* симплекса  $I \in \mathcal{K}$  – это комплекс  $\text{lk}_{\mathcal{K}} I := \{J \in \mathcal{K} : I \cap J = \emptyset, I \cup J \in \mathcal{K}\}$ .

**Лемма 2.1** ([PT, Лемма 2.3]). *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплициальный комплекс, и  $I \in \mathcal{K}$ . Тогда  $\text{lk}_{\mathcal{K}} I$  – полный подкомплекс  $\mathcal{K}$ .*  $\square$

Пусть теперь  $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$  – набор пар топологических пространств,  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс на  $[m]$ . Соответствующее *полиэдральное произведение* – это следующее топологическое пространство:

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left( \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Мы пишем  $(X, A)^{\mathcal{K}} := (\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$  в случае  $X_1 = \dots = X_m = X$ ,  $A_1 = \dots = A_m = A$ . Также  $X^{\mathcal{K}} := (X, \text{pt})^{\mathcal{K}}$ .

*Момент-угол комплекс*  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$  и *вещественный момент-угол комплекс*  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$  – важные частные случаи этой конструкции. Гомологии и когомологии момент-угол комплексов хорошо известны:

**Теорема 2.2** (см. [BP, Theorem 4.5.8]). *Для любой группы коэффициентов,*

$$\begin{aligned} H_p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{p-|J|-1}(\mathcal{K}_J), & H_p(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J), \\ H^p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^{p-|J|-1}(\mathcal{K}_J), & H^p(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) &\cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J). \end{aligned} \quad \square$$

**2.2. Мультиградуированные ассоциативные алгебры.** В дальнейшем  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей,  $\otimes$  – тензорное произведение  $\mathbf{k}$ -модулей. В случае коэффициентов в поле мы обычно пишем  $\mathbb{F}$  вместо  $\mathbf{k}$ .

*Мультиградуировкой*  $\mathbf{k}$ -модуля будем называть градуировку аддитивной полугруппой вида  $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ ,  $k = 0, 1, 2$ . Мультистепень однородного элемента  $x$  обозначается как  $\deg x$  или  $|x|$ . Мы обозначаем элементы  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  буквами греческого алфавита, а элементы  $\mathbb{Z}^k$  – наборами из  $k$  латинских букв. Стандартный базис  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  обозначается  $e_1, \dots, e_m$ . Если  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  – мультииндекс, мы пишем  $|\alpha| := \sum_{i=1}^m \alpha_i$ .

Есть стандартные проекции  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $e_i \mapsto 1$  и  $\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(n_1, \dots, n_k) \mapsto n_1 + \dots + n_k$ . Поэтому каждый  $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный  $\mathbf{k}$ -модуль  $\mathbb{Z}$ -градуирован тотальной степенью:

$$V_n := \bigoplus_{i_1 + \dots + i_k + |\alpha| = n} V_{i_1, \dots, i_k, \alpha}.$$

Для градуировки однородных компонент мы используем соглашение  $\deg M_\alpha = \deg M^\alpha = \alpha$  с единственным исключением:  $\deg \text{Ext}_A^n = -n$ . Если  $M$  – свободный градуированный  $\mathbf{k}$ -модуль, обозначим как  $M^\#$  градуированно-двойственный  $\mathbf{k}$ -модуль:  $(M^\#)_\alpha := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(M_\alpha, \mathbf{k})$ .

*Мультиградуированной алгеброй* мы называем  $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированную связную  $\mathbf{k}$ -алгебру с единицей, являющуюся свободным  $\mathbf{k}$ -модулем конечного типа ( $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная алгебра  $A$  *связна*, если она связна как  $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра, то есть  $A_{<0} = 0$  и  $A_0 \cong \mathbf{k}$ ).

Примеры:

- (1)  $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная свободная ассоциативная алгебра (тензорная алгебра)  $T(a_1, \dots, a_N)$ , где  $a_i$  – произвольные образующие положительной тотальной степени;
- (2)  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная коммутативная  $\mathbf{k}$ -алгебра  $\mathbf{k}[m] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ ,  $\deg v_i = 2e_i$ ;
- (3)  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная алгебра *Стэнли-Райснера* симплициального комплекса  $\mathcal{K}$

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \left( \prod_{i \in I} v_i : I \notin \mathcal{K} \right), \quad \deg v_i = 2e_i;$$

- (4)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная внешняя  $\mathbf{k}$ -алгебра  $\Lambda[m] := \Lambda[u_1, \dots, u_m]$ ,  $\deg u_i = (-1, 2e_i)$ .

Теперь рассмотрим  $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированную  $\mathbf{k}$ -алгебру  $A$ , левые  $A$ -модули  $L, \tilde{L}$  и правый  $A$ -модуль  $R$ . Тогда, для любого  $i \geq 0$ ,  $\mathbf{k}$ -модули  $\text{Ext}_A^i(L, \tilde{L})$  и  $\text{Tor}_i^A(R, L)$   $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы. Поэтому  $\text{Ext}_A(L, \tilde{L})$  и  $\text{Tor}^A(R, L)$  –  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированные  $\mathbf{k}$ -модули. Например,

$$\text{если } x \in \text{Ext}_A^i(L, \tilde{L})_{j_1, \dots, j_k, \alpha}, \text{ то } \deg x = (-i, j_1, \dots, j_k, \alpha);$$

$$\text{если } y \in \text{Tor}_i^A(R, L)_{j_1, \dots, j_k, \alpha}, \text{ то } \deg y = (i, j_1, \dots, j_k, \alpha).$$

Изоморфизм  $\Lambda[m] \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  объясняет наш выбор градуировки на  $\Lambda[m]$ .

### 2.3. Ряды Пуанкаре и минимальные копредставления.

**Определение 2.3.** Пусть  $V = \bigoplus_{i, \alpha} V_{i, \alpha}$  –  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированное векторное пространство. Его *ряд Пуанкаре* – это формальный степенной ряд от  $m+1$  переменных  $(t, \lambda) = (t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ :

$$F(V; t, \lambda) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} \dim(V_{i, \alpha}) \cdot t^i \lambda^\alpha, \quad \lambda^\alpha := \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\alpha_i}.$$

Обычно  $V$  будет сосредоточено в степенях  $\mathbb{Z}_{\leq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ , поэтому  $F(V; t, \lambda) \in \mathbb{Z}[[t^{-1}, \lambda]]$ .

*Копредставлением* мультиградуированной алгебры называют эпиморфизм  $\pi : T(a_1, \dots, a_N) \rightarrow A$  вместе с выбором элементов  $r_1, \dots, r_M \in T(a_1, \dots, a_N)$ , называемых *соотношениями*, которые порождают идеал  $\text{Ker } \pi \subset T(a_1, \dots, a_N)$ . Мы предполагаем, что образующие имеют положительную тотальную степень, а соотношения однородны. Тогда  $A$  связна, и проекция  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbf{k}$  задает структуру левого  $A$ -модуля на  $\mathbf{k}$ . Кроме того, верны следующие стандартные свойства связных алгебр с единицей, с аналогичными доказательствами по индукции:

**Предложение 2.4.** Пусть  $\mathbb{F}$  – поле,  $A$  – мультиградуированная  $\mathbb{F}$ -алгебра.

- (а) Существует такая свободная резольвента левого  $A$ -модуля  $\mathbb{F}$  вида

$$\dots \xrightarrow{d} A \otimes_{\mathbb{F}} R_2 \xrightarrow{d} A \otimes_{\mathbb{F}} R_1 \xrightarrow{d} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F} \longrightarrow 0,$$

что  $d : R_n \rightarrow A_{>0} \otimes_{\mathbb{F}} R_{n-1}$ ,  $d : R_1 \rightarrow A_{>0}$ . Она называется *минимальной резольвентой* и единственна с точностью до изоморфизма. Под действием функтора  $\mathbb{F} \otimes_A (-)$  все дифференциалы обращаются в ноль, так что  $R_n \cong \text{Tor}_n^A(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ .

- (б) С точностью до естественной эквивалентности, есть взаимно-однозначное соответствие между копредставлениями  $A \simeq T(a_1, \dots, a_N)/(r_1, \dots, r_M)$  и точными последовательностями  $A$ -модулей вида  $A \otimes_{\mathbb{F}} R_2 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{F}} R_1 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F} \rightarrow 0$ . При этом соответствии множество  $\{a_1, \dots, a_N\}$  является базисом градуированного векторного пространства  $R_1$ , а  $\{r_1, \dots, r_M\}$  – базисом  $R_2$ .

В частности, существует минимальное копредставление  $A \simeq T(a_1, \dots, a_N)/(r_1, \dots, r_M)$ , такое что

$$\text{Tor}_1^A(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{F} \cdot a_i, \quad \text{Tor}_2^A(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \simeq \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{F} \cdot r_j.$$

Число образующих и соотношений в минимальном копредставлении в каждой степени – наименьшее возможное среди всех копредставлений  $A$ .

(с) Ряды Пуанкаре для  $A$  и  $\text{Tor}_n^A(\mathbb{F}, \mathbb{F})$  связаны тождеством

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot F(\text{Tor}_n^A(\mathbb{F}, \mathbb{F}); t, \lambda) = \frac{1}{F(A; t, \lambda)}.$$

*Доказательство.* (а) См. [BP, Proposition A.2.3].

(b) См. [Wa, §7].

(с) См. [BP, Proposition A.2.1].  $\square$

В случае произвольного кольца коэффициентов дифференциалы в комплексе, который получается из минимальной резольвенты применением функтора  $\mathbf{k} \otimes_A (-)$ , могут быть ненулевыми (см. замечание после [BP, Proposition A.2.3]). Тем не менее, каждое копредставление  $A$  соответствует некоторой резольвенте, и модуль  $\text{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  можно вычислить как гомологии комплекса  $\cdots \rightarrow \bigoplus \mathbf{k} \cdot r_j \rightarrow \bigoplus \mathbf{k} \cdot a_i \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0$ . Это позволяет оценить снизу число образующих и соотношений:

**Предложение 2.5.** Пусть  $\mathbf{k}$  – кольцо главных идеалов,  $A$  – мультиградуированная  $\mathbf{k}$ -алгебра. Обозначим за  $N_{i,\alpha}$  минимальное число порождающих  $\mathbf{k}$ -модуля  $\text{Tor}_i^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})_\alpha$ . Тогда каждое копредставление алгебры  $A$  содержит хотя бы  $N_{1,\alpha}$  образующих и хотя бы  $N_{2,\alpha}$  соотношений степени  $\alpha$ .

*Доказательство.* Пусть  $A = T(a_1, \dots, a_N)/(r_1, \dots, r_M)$  – копредставление. Построим точную последовательность

$$\bigoplus_{j=1}^M A \cdot r_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N A \cdot a_i \rightarrow A \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0,$$

как в [Wa, §7], и произвольно продолжим ее до свободной резольвенты левого  $A$ -модуля  $\mathbf{k}$ . Тогда  $\text{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  – это гомологии комплекса

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^M \mathbf{k} \cdot r_j \rightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{k} \cdot a_i \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0.$$

В частности,  $\text{Tor}_2^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})_\alpha$  – фактормодуль подмодуля свободного  $\mathbf{k}$ -модуля, имеющего базис  $\{r_j : \deg r_j = \alpha\}$ . Для колец главных идеалов верно, что подмодуль свободного модуля – свободный модуль не большего ранга [Al, Proposition 5.1]. Поэтому  $\mathbf{k}$ -модуль  $\text{Tor}_2^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})_\alpha$  может быть порожден  $\#\{r_j : \deg r_j = \alpha\}$  элементами, откуда  $\#\{r_j : \deg r_j = \alpha\} \geq N_{2,\alpha}$ . Аналогично,  $\#\{a_i : \deg a_i = \alpha\} \geq N_{1,\alpha}$ .  $\square$

**2.4. (Ко)алгебры Стэнли-Райснера.** Напомним, что алгебра Стэнли-Райснера – это  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная  $\mathbf{k}$  алгебра

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \left( \prod_{i \in I} v_i : I \notin \mathcal{K} \right), \quad \deg v_i = 2e_i.$$

Для каждого мультииндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  определим  $\text{supp } \alpha := \{j \in [m] : \alpha_j > 0\}$  и  $v^\alpha := \prod_{j=1}^m v_j^{\alpha_j} \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]$ . Тогда  $\{v^\alpha\}_{\text{supp } \alpha \in \mathcal{K}}$  – аддитивный базис для  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ , и

$$v^\alpha \cdot v^\beta = \begin{cases} v^{\alpha+\beta}, & \text{supp } \alpha \cup \text{supp } \beta \in \mathcal{K}; \\ 0, & \text{supp } \alpha \cup \text{supp } \beta \notin \mathcal{K}. \end{cases}$$

Рассмотрим также двойственную коалгебру  $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle := \mathbf{k}[\mathcal{K}]^\#$  с двойственным базисом  $\{\chi_\alpha\}_{\text{supp } \alpha \in \mathcal{K}}$ ,  $\chi_\alpha := (v^\alpha)^\#$ ,  $\deg \chi_\alpha = 2\alpha$ . Коумножение в  $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$  задано формулой

$$\Delta \chi_\alpha = \sum_{\alpha=\beta+\gamma} \chi_\beta \otimes \chi_\gamma,$$

где суммирование ведется по всем  $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ . В частности,

$$\Delta \chi_{ii} = 1 \otimes \chi_{ii} + \chi_i \otimes \chi_i + \chi_{ii} \otimes 1, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\Delta \chi_{ij} = 1 \otimes \chi_{ij} + \chi_i \otimes \chi_j + \chi_j \otimes \chi_i + \chi_{ij} \otimes 1, \quad \{i, j\} \in \mathcal{K}.$$

Нам понадобится следующее обозначение:  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]_{(s)}$  – это  $\mathbf{k}$ -подмодуль в  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$  с аддитивным базисом

$$\{v^\alpha \in \mathbf{k}[\mathcal{K}] : |\alpha| = s\}.$$

Аналогично определим модули  $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(s)}$ . Например,  $\chi_{ij} \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)}$ , при том что  $\deg \chi_{ij} = 2e_i + 2e_j$ .

**2.5. Бар- и кобар-конструкции.** Мы следуем [Pr, §1]; см. также [Mc, §7.1, §9.2]. Пусть  $A$  – связная  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная  $\mathbf{k}$ -алгебра с единицей, являющаяся свободным  $\mathbf{k}$ -модулем конечного типа. Пусть  $I := \text{Ker}(\varepsilon : A \rightarrow \mathbf{k}) = A_{>0} \subset A$  – аугментационный идеал. Также обозначим  $\bar{a} := (-1)^{1+|\alpha|} \cdot a$ . Тогда, для градуированного левого  $A$ -модуля  $L$  и правого  $A$ -модуля  $R$ , *двусторонняя бар-конструкция*  $\mathbb{V}(R, L) := R \otimes T(I) \otimes L$  – это  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный комплекс с градуировкой

$$\deg r[a_1 | \dots | a_s]l := (s, |r| + \sum_{i=1}^s |a_i| + |l|)$$

и дифференциалом  $\partial$  степени  $(-1, 0)$ :

$$-\partial(r[a_1 | \dots | a_s]l) := \bar{r}a_1[a_2 | \dots | a_s]l + \sum_{i=1}^{s-1} \bar{r}[\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_i a_{i+1} | \dots | a_s]l + \bar{a}[\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_{s-1}]a_s l.$$

Здесь  $r[a_1 | \dots | a_s]l$  – это традиционное обозначение для элемента

$$r \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_s) \otimes l \in R \otimes T(I) \otimes L = \mathbb{V}(R, L).$$

Хорошо известно, что  $\mathbb{V}(A, L)$  – свободная резольвента левого  $A$ -модуля  $L$ . Поэтому модуль  $\text{Ext}_A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  может быть вычислен как когомологии комплекса

$$\text{Hom}_A(\mathbb{V}(A, \mathbf{k}), \mathbf{k}) \cong (\mathbf{k} \otimes_A \mathbb{V}(A, \mathbf{k}))^\# \cong \mathbb{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k})^\#$$

(мы используем *изоморфизм сопряжения*  $\text{Hom}_A(M, N) \cong (N^\# \otimes_A M)^\#$ , который имеет место для левых  $A$ -модулей  $M, N$ , являющихся свободными  $\mathbf{k}$ -модулями конечного типа).

Этот комплекс совпадает с *кобар-конструкцией Адамса*  $\Omega_* A^\#$  (см. [Ad]), где коалгебра  $A^\# := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$  градуированно двойственна к  $A$ . Кобар-конструкция – это  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный  $\mathbf{k}$ -модуль  $\Omega_* A^\# \cong T(I^\#)$  с градуировкой

$$\deg[x_1 | \dots | x_s] := (-s, |x_1| + \dots + |x_s|)$$

и дифференциалом  $\partial^\#$  степени  $(-1, 0)$ : если  $\Delta x_i = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1 + \sum_r x'_{i,r} \otimes x''_{i,r}$ , то

$$\partial^\#[x_1 | \dots | x_s] = \sum_{i=1}^s \sum_r [\bar{x}_1 | \dots | \bar{x}_{i-1} | \bar{x}'_{i,r} | x''_{i,r} | x_{i+1} | \dots | x_s].$$

Кобар-конструкция является дифференциальной градуированной алгеброй относительно

$$[x_1 | \dots | x_s] \smile [y_1 | \dots | y_t] := [x_1 | \dots | x_s | y_1 | \dots | y_t].$$

Поэтому  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный  $\mathbf{k}$ -модуль  $H(\Omega_* A^\#)$  – ассоциативная алгебра.

Таким образом, мы получаем следующее:

**Предложение 2.6.** Пусть  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей. Пусть  $A$  – связная  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная  $\mathbf{k}$ -алгебра с единицей, являющаяся свободным  $\mathbf{k}$ -модулем конечного типа. Тогда  $\text{Ext}_A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong H(\Omega_* A^\#)$  как  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированные  $\mathbf{k}$ -модули, и этот изоморфизм задает на  $\text{Ext}_A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  структуру связной градуированной ассоциативной алгебры.  $\square$

### 3. АЛГЕБРЫ ПОНТЯГИНА ПРОСТРАНСТВ ДЭВИСА-ЯНУШКЕВИЧА

**3.1. Доказательство Теоремы 1.1.** Напомним формулировку теоремы:

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathcal{K}$  – симплицальный комплекс,  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированную  $\mathbf{k}$ -алгебру

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^\dagger := T(u_1, \dots, u_m) / (u_i^2 = 0, i = 1, \dots, m; u_i u_j + u_j u_i = 0, \{i, j\} \in \mathcal{K}), \deg |u_i| = (-1, 2e_i).$$

Тогда

- (a)  $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}; \mathbf{k}) \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]^\dagger}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  как градуированные алгебры;
- (b) Имеет место вложение  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^\dagger \hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}; \mathbf{k})$ .

(с) Если  $\mathcal{K}$  флаговый, то  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ .

*Доказательство.* (а) В [BP, Proposition 8.4.10] доказан изоморфизм градуированных  $\mathbf{k}$ -алгебр  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong H(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$ . С другой стороны,  $H(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle) \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  по Предложению 2.6, так как  $\mathbf{k}[\mathcal{K}] = (\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)^\#$  – свободный  $\mathbf{k}$ -модуль конечного типа.  
(б) Следуя [Lö, Corollary 1.1], докажем, что  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$  изоморфна “диагональной” подалгебре

$$D = \bigoplus_{i, \alpha: |\alpha|=i} \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^i(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{2\alpha} \subset \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}).$$

Обозначим

$$D_0 = \bigoplus_{i, \alpha: |\alpha|=i} \Omega_{-i}\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{2\alpha} \subset \Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle.$$

По соображениям размерности, любой элемент  $D_0$  имеет вид  $[\chi_{j_1} | \dots | \chi_{j_s}]$ , поэтому  $D_0 \cong T(\chi_1, \dots, \chi_m)$ .

Так как кобар-конструкция  $(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle, \partial^\#)$  сосредоточена в размерностях

$$\{(-i, 2\alpha) : 0 \leq i \leq |\alpha|\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m,$$

а  $\partial^\#$  имеет степень  $(-1, 0)$ , получаем  $D = D_0 / (D_0 \cap \text{Im } \partial^\#)$ . Заметим: из того, что  $D$  – алгебра, следует, что подмодуль  $D_0 \cap \text{Im } \partial^\# \subset D_0$  – двусторонний идеал. Пусть теперь

$$\varphi^\# : \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)} \rightarrow \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)} \otimes \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}$$

– непримитивная часть коумножения в  $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ . Так как  $\varphi^\#(\chi_{ii}) = \chi_i \otimes \chi_i$  для любого  $i = 1, \dots, m$  и  $\varphi^\#(\chi_{ij}) = \chi_i \otimes \chi_j + \chi_j \otimes \chi_i$  для любых  $\{i, j\} \in \mathcal{K}$ , имеем  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \cong D_0 / (\text{Im } \varphi^\#)$ .

Наконец, покажем, что  $D_0 \cap \text{Im } \partial^\# = (\text{Im } \varphi^\#)$  как двусторонние идеалы в  $D_0$ . Пусть  $f \in D_0 \cap \text{Im } \partial^\#$ . Так как  $\partial^\#$  имеет степень  $(-1, 0)$ , можно считать, что  $f$  однородный и имеет степень  $(-i, 2\alpha)$ ,  $|\alpha| = i$ . Имеем  $f = \partial^\# g$  для некоторого  $\deg g = (-i + 1, 2\alpha)$ . Обозначим  $V = \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}$  и  $W = \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)}$ . Из соображений размерности,

$$g \in \Omega_{-i+1}\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{2\alpha} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} V^{\otimes i} \otimes W \otimes V^{\otimes (n-i-2)}.$$

Так как  $\partial^\# V = 0$  и  $\partial^\#|_W = \varphi^\#$ , получаем

$$\partial^\# g \in \sum_{i=0}^{n-2} V^{\otimes i} \otimes \text{Im } \varphi^\# \otimes V^{\otimes (n-i-2)} \subset D_0 \cdot \text{Im } \varphi^\# \cdot D_0,$$

так что  $D_0 \cap \text{Im } \partial^\# \subset (\text{Im } \varphi^\#)$ . Наоборот: ограничение  $\partial^\#$  на  $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)} \subset I^\# \subset \Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$  совпадает с  $\varphi^\#$ . Следовательно,  $\text{Im } \varphi^\# \subset D_0 \cap \text{Im } \partial^\#$ .

Итак,

$$\text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \supset D = D_0 / (D_0 \cap \text{Im } \partial^\#) = D_0 / (\text{Im } \varphi^\#) \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!.$$

(с) Если  $\mathcal{K}$  – флаговый симплициальный комплекс, то  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$  – квадратичная алгебра:

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = T(v_1, \dots, v_m) / (v_i v_j = 0, \{i, j\} \notin \mathcal{K}; v_i v_j = v_j v_i, \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Следовательно,  $\mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$  принадлежит к классу квадратичных алгебр, рассмотренных Фрёбергом в [Fr]: его переменные  $X_i$  и  $Y_i$  соответствуют нашим  $v_i$  и  $u_i$ .

Так как выполнено условие В' из [Fr, Lemma 4], существует свободная резольвента  $(\mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!, d)$  для левого  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ -модуля  $\mathbf{k}$ :

$$(3.1) \quad \dots \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(2)} \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(1)} \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(0)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0.$$

Этот комплекс  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуирован:

$$\deg u_i = (-1, 2e_i), \quad \deg v_i = (0, 2e_i).$$

Тогда  $d$  имеет степень  $(1, 0)$ , и  $H^*((\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!)^\#, d^\#) \cong \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})_*$ . Из градуировки на  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$  следует, что  $\text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^i(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{2\alpha} = 0$  при  $i \neq |\alpha|$ . Следовательно,  $\text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = D$ .  $\square$



**Замечание 3.2.** Мы использовали результаты, сформулированные в [Fr, L , Pt] для алгебр над полем. Но аналогичные утверждения верны для произвольного кольца  $\mathbf{k}$ , если все  $\mathbf{k}$ -модули свободны и имеют конечный тип. Так, в доказательствах используется точность функтора  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k})$  для свободных  $\mathbf{k}$ -модулей и изоморфизмы сопряжения  $M^{\#\#} \cong M$ ,  $\text{Hom}_A(M, N^{\#}) \cong (N \otimes_A M)^{\#}$ , но не используется теорема об универсальных коэффициентах.

**Замечание 3.3.** Было бы интересно вывести (b) из (c) топологическими методами, используя флагификацию. Панов и Терио доказали в [PT], что у отображения  $\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}} \rightarrow \Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}^f}$  есть правое гомотопически обратное. Переходя к гомологиям, получаем, что у отображения  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированных алгебр  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k}[\mathcal{K}^f] \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$  есть  $\mathbf{k}$ -линейное сечение  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ . Однако неясно, мультипликативно ли сечение, и сохраняет ли оно  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку.

**Замечание 3.4.** Как видно из (c), во флаговом случае алгебра  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  сосредоточена в размерностях  $\{(-i, 2\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m : 0 \leq i = |\alpha|\}$ . Если  $\mathcal{K}$  нефлаговый, то это неверно (можно лишь утверждать, что она сосредоточена в размерностях  $\{(-i, 2\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m : 0 \leq i \leq |\alpha|\}$ ).

Так, можно показать, что каждая недостающая грань  $J \notin \mathcal{K}$  соответствует ненулевому элементу  $\mu_J \in \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}^2(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{2J} \cong H_{-2, 2J}(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ , который можно интерпретировать как “высшее коммутаторное произведение”  $\mu_J = [\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_k}]$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  (см. [BP, Example 8.4.6].) Если  $|J| \neq 2$ , то  $\mu_J$  не принадлежит “диагональной” подалгебре  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \subset H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ .

**3.2. Формула Кюннета для алгебр Понтрягина.** Имеем расщепимое главное расслоение

$$\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{i} \Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}} \xrightarrow{p} \mathbb{T}^m$$

$H$ -пространств (см. [BP, §8.4]) и, следовательно, точную последовательность алгебр Хопфа

$$1 \rightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \xrightarrow{i_*} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \xrightarrow{p_*} \Lambda[u_1, \dots, u_m] \rightarrow 0.$$

В частности,  $i_*$  и  $p_*$  – гомоморфизмы  $\mathbf{k}$ -алгебр. Отображение  $p : \Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{T}^m \simeq \Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^m$  индуцируется отображением симплицальных комплексов  $\mathcal{K} \hookrightarrow \Delta^{m-1}$ , поэтому элемент

$$u_i \in \text{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$$

переходит в элемент

$$u_i \in \text{Ext}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = H_*(\mathbb{T}^m; \mathbf{k}) \cong \Lambda[u_1, \dots, u_m].$$

Пусть  $I$  – подмножество в  $[m]$ . Упорядочим его элементы:  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $i_1 < \dots < i_k$ , и обозначим

$$u_I := u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k} \in \Lambda[u_1, \dots, u_m], \quad \hat{u}_I := u_{i_1} \cdot \dots \cdot u_{i_k} \in H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}).$$

Ясно, что  $\{u_I\}_{I \subset [m]}$  – аддитивный базис для  $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ . Морфизм  $p_*$  имеет  $\mathbf{k}$ -линейное сечение  $\sigma : \Lambda[u_1, \dots, u_m] \rightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ , заданное на базисе как  $\sigma(u_I) := \hat{u}_I$ . Если  $\text{sk}_1 \mathcal{K} \neq \text{sk}_1 \Delta^{m-1}$ , то это сечение не мультипликативно.

Морфизм  $i_*$  задает на  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  структуру левого  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля:  $x \cdot y := i_*(x)y$ . Рассмотрим  $\mathbf{k}$ -линейное отображение

$$T : H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m] \rightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}), \quad T(x \otimes u_I) := i_*(x)\hat{u}_I.$$

**Предложение 3.5.**  $T$  является изоморфизмом левых  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модулей. Кроме того, коммутативна следующая диаграмма  $\mathbf{k}$ -модулей:

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m] & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & \mathbf{k} \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m] \\ T \downarrow \cong & & \lambda \otimes u_I \mapsto \lambda u_I \downarrow \cong \\ H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) & \xrightarrow{p_*} & \Lambda[u_1, \dots, u_m] \end{array}$$

*Доказательство.* Пусть  $x_1, x_2 \in H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  и  $I \subset [m]$ . Имеем:

$$T(x_1 \cdot (x_2 \otimes u_I)) = T(x_1 x_2 \otimes u_I) = i_*(x_1 x_2)\hat{u}_I = i_*(x_1)i_*(x_2)\hat{u}_I = i_*(x_1)T(x_2 \otimes u_I) = x_1 \cdot T(x_2 \otimes u_I).$$

Следовательно,  $T$  –  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -линейное отображение.

$\Lambda[u_1, \dots, u_m]$  – свободный  $\mathbf{k}$ -модуль. Расслоение  $p$  тривиально, и  $\sigma$  – сечение гоморфизма  $p_*$ . По формуле Кюннета получаем, что отображение  $T$  – изоморфизм  $\mathbf{k}$ -модулей. Так как оно  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -линейно, это изоморфизм  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модулей.

Наконец, проверим коммутативность диаграммы (3.2):

$$\begin{array}{ccc} x \otimes u_I & \xrightarrow{\quad} & \varepsilon(x) \otimes u_I \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*(x)\widehat{u}_I & \xrightarrow{\quad} & p_*(i_*(x))u_I \end{array}$$

Так как  $p \circ i$  гомотопически тривиально, имеем  $p_* \circ i_* = \varepsilon$ .  $\square$

#### 4. СООТНОШЕНИЯ В АЛГЕБРАХ ПОНТЯГИНА ВО ФЛАГОВОМ СЛУЧАЕ

В этом разделе рассматриваются цепные комплексы свободных левых модулей над  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  и  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ . Эти алгебры  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы, поэтому комплексы  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы:  $\deg H_{-i, 2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) = (0, -i, 2\alpha)$ , и дифференциалы обычно имеют степень  $(-1, 0, 0)$ .

**4.1. Минимальная резольвента  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$ .** Пусть  $0 \neq \chi_\alpha \in \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$ , так что  $\text{supp } \alpha \in \mathcal{K}$ . Заметим, что  $\text{supp}(\alpha - e_j) \in \mathcal{K}$  для любого  $j \in \text{supp } \alpha$ . Поэтому корректно определен элемент  $\chi_{\alpha - e_j} \in \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$ . В этом разделе мы полагаем

$$\deg \chi_\alpha := (|\alpha|, -|\alpha|, 2\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m.$$

**Предложение 4.1.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда левый  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуль  $\mathbf{k}$  имеет минимальную резольвенту

$$(4.1) \quad \dots \xrightarrow{d} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(2)} \xrightarrow{d} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(1)} \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(0)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0$$

со следующим дифференциалом степени  $(-1, 0, 0)$ :

$$(4.2) \quad d : \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)} \rightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t-1)}, \quad \chi_\alpha \mapsto \sum_{j \in \text{supp } \alpha} u_j \otimes \chi_{\alpha - e_j}.$$

*Доказательство.* По Теореме 3.1, во флаговом случае верно  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle^!$ . Мы воспользуемся резольвентой Фрёберга [Fr] для алгебры  $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle^! \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$ . В этот раз переменные  $u_i$  и  $v_i$  соответствуют  $X_i$  и  $Y_i$ . Определение функции  $\text{Index}(m)$  (см. [Fr, p. 32]) симметрично, поэтому существует резольвента  $(\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle^! \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, d_1 + \dots + d_m)$  для левого  $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle^!$ -модуля  $\mathbf{k}$ .

Опишем дифференциалы Фрёберга  $d_1, \dots, d_m$  явно. Пусть  $x = u^{(\mu)} \otimes v^{(\nu)} \in \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle^! \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$  – произвольный моном, то есть  $x = u_{i_1} \dots u_{i_k} \otimes v_{j_1} \dots v_{j_l}$  для некоторых  $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in [m]$  (это представление, вообще говоря, не однозначно). Элемент  $d_j(x)$  определяется следующим образом:

- Если  $x$  не представим в виде  $c \cdot u^{(\mu)} \otimes v_j v^{(\nu')}$ , где  $c \in \mathbf{k}$ , то  $d_j(x) := 0$ ;
- Если  $x = c \cdot u^{(\mu)} \otimes v_j v^{(\nu')}$ , то  $d_j(x) := c \cdot u^{(\mu)} u_i \otimes v^{(\nu')}$ .

Алгебра  $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$  коммутативна, и любой моном  $v^{(\nu)} \neq 0$  однозначно представим в виде  $v^\alpha$ ,  $\text{supp } \alpha \in \mathcal{K}$ . Поэтому

$$d_j(u^{(\mu)} \otimes v^\alpha) = \begin{cases} 0, & j \notin \text{supp } \alpha; \\ u^{(\mu)} u_j \otimes v^{\alpha - e_j}, & j \in \text{supp } \alpha; \end{cases}$$

$$d(u^{(\mu)} \otimes v^\alpha) = \sum_{j=1}^m d_j(u^{(\mu)} \otimes v^\alpha) = \sum_{j \in \text{supp } \alpha} u^{(\mu)} u_j \otimes v^{\alpha - e_j}.$$

Заменяя  $v^\alpha \in \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(|\alpha|)}$  на  $\chi_\alpha \in \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(|\alpha|)}$ , мы получаем в точности дифференциал (4.2).  $\square$

**4.2. Свободная резольвента  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$ .** По Предложению 3.5, имеем изоморфизм  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированных левых  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модулей:

$$T : H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \rightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}), \quad a \otimes u_I \mapsto i_*(a)\widehat{u}_I.$$

Рассмотрим  $\mathbf{k}$ -модули  $M_t := \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)}$ . Они  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы:

$$\deg u_I \otimes \chi_\alpha = \deg u_I + \deg \chi_\alpha = (0 + |\alpha|, -|I| - |\alpha|, 2I + 2\alpha) = (t, -|I| - t, 2I + 2\alpha).$$

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда левый  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуль  $\mathbf{k}$  имеет свободную резольвенту

$$(4.3) \quad \cdots \rightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_2 \xrightarrow{\widehat{d}} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_1 \xrightarrow{\widehat{d}} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0$$

со следующим дифференциалом степени  $(-1, 0, 0)$ :

$$(4.4) \quad \widehat{d} : M_t \rightarrow \underbrace{\left( H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \right) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t-1)}}_{=M_{t-1}}, \quad u_I \otimes \chi_\alpha \mapsto \sum_{j \in \text{supp } \alpha} T^{-1}(\widehat{u}_I u_j) \otimes \chi_{\alpha - e_j}.$$

*Доказательство.* Цепной комплекс (4.1) – свободная резольвента левого  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$ . Алгебра  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  сама является левым модулем над  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ . Следовательно, (4.1) – свободная резольвента левого  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модуля  $\mathbf{k}$ .

Рассмотрим цепочку изоморфизмов  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -модулей:

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_t \xlongequal{\quad} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)} \xrightarrow{T \otimes \text{id}} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)}.$$

Мы докажем, что она задает изоморфизм между цепными комплексами (4.3) и (4.1):

$$(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M, \widehat{d}) \xrightarrow{T \otimes \text{id}} (H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, d).$$

Достаточно показать, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_t & \xrightarrow{\widehat{d}} & H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes M_{t-1} \\ T \otimes \text{id} \downarrow \cong & & T \otimes \text{id} \downarrow \cong \\ H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)} & \xrightarrow{d} & H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t-1)} \end{array}$$

коммутативна. Для произвольных  $x \in H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  и  $u_I \otimes \chi_\alpha \in \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(t)} = M_t$  имеем

$$\begin{array}{ccc} x \otimes (u_I \otimes \chi_\alpha) & \xrightarrow{\quad} & \sum_{j \in \text{supp } \alpha} x T^{-1}(\widehat{u}_I u_j) \otimes \chi_{\alpha - e_j} \\ \downarrow & & \\ i_*(x)\widehat{u}_I \otimes \chi_\alpha & \xrightarrow{\quad} & \sum_{j \in \text{supp } \alpha} i_*(x)\widehat{u}_I u_j \otimes \chi_{\alpha - e_j}. \end{array}$$

Но  $T(xT^{-1}(\widehat{u}_I u_j)) = i_*(x)T(T^{-1}(\widehat{u}_I u_j)) = i_*(x)\widehat{u}_I u_j$ , так как  $T$  –  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ -линейное отображение, а алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  действует на  $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  за счет гомоморфизма  $i_*$ .  $\square$

**Замечание 4.3.** С помощью резольвенты (4.3) можно получить копредставление алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ . Однако для явного описания  $T^{-1}$  требуется нетривиальное коммутаторное исчисление. Также, чтобы получить копредставление с помощью Предложения 2.4(b), нужна резольвента вида  $\cdots \rightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0$ , а не

$$\cdots \rightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0.$$

#### 4.3. Доказательства Теоремы 1.2 и Следствия 1.3.

**Предложение 4.4.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый комплекс. Тогда  $\text{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \simeq H(M, \bar{d})$ , где

$$\bar{d} : M_t \rightarrow M_{t-1}, \quad u_I \otimes \chi_\alpha \mapsto \sum_{j \in \text{supp } \alpha} (u_I \wedge u_j) \otimes \chi_{\alpha - e_j}.$$

*Доказательство.* Применив функтор  $\mathbf{k} \otimes_{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})} (-)$  к резольвенте (4.3), получаем дифференциал  $M_t \rightarrow M_{t-1}$ ,

$$u_I \otimes \chi_\alpha \mapsto ((\varepsilon \otimes \text{id}) \otimes \text{id}) \left( \sum_{j \in \text{supp } \alpha} T^{-1}(\widehat{u}_I u_j) \otimes \chi_{\alpha - e_j} \right) = \sum_{j \in \text{supp } \alpha} (\varepsilon \otimes \text{id})(T^{-1}(\widehat{u}_I u_j)) \otimes \chi_{\alpha - e_j}.$$

Гомологии этого комплекса изоморфны  $\text{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  по определению.

Из (3.2) следует, что  $(\varepsilon \otimes \text{id})(T^{-1}(\widehat{u}_I u_j)) = p_*(\widehat{u}_I u_j) = u_I \wedge u_j$ . Поэтому

$$\sum_{j \in \text{supp } \alpha} (\varepsilon \otimes \text{id})(T^{-1}(\widehat{u}_I u_j)) \otimes \chi_{\alpha - e_j} = \bar{d}(u_I \otimes \chi_\alpha). \quad \square$$

**Теорема 4.5.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей. Тогда

$$\text{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}).$$

Этот изоморфизм  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуирован в следующем смысле:

$$\text{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-|J|, 2J} \cong \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}),$$

а остальные градуированные компоненты равны нулю.

*Доказательство.* Сначала рассмотрим алгебру Кошуля кольца Стэнли-Райснера. Это следующая  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m$ -градуированная алгебра, снабженная дифференциалом степени  $(1, 0, 0)$ :

$$(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d), \quad \deg u_i = (0, -1, 2e_i), \quad \deg v_i = (1, -1, 2e_i); \quad du_i = v_i, \quad dv_i = 0.$$

Дифференциал продолжается на аддитивный базис по правилу Лейбница:  $d = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u_i} \otimes v_i$ .

Рассмотрим теперь двойственную коалгебру  $(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(\mathcal{K}), \delta)$ , где  $\delta = \sum_{i=1}^m u_i \otimes \frac{\partial}{\partial \chi_i}$ . Этот дифференциал совпадает с  $\bar{d}$ . То есть  $\text{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  – это гомологии комплекса, двойственного к алгебре Кошуля.

Напомним, как вычисляются когомологии алгебры Кошуля. По [BP, Lemma 3.2.6], факторизация по однородному ациклическому идеалу  $(u_i v_i, v_i^2)$  задает квази-изоморфизм

$$(\Lambda[m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d) \rightarrow (\Lambda[m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d) / (u_i v_i = v_i^2 = 0) =: R(\mathcal{K}).$$

В доказательстве [BP, Theorem 3.2.9] построен изоморфизм цепных комплексов

$$\widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} R^{*+1, -|J|, 2J}(\mathcal{K}), \quad I \mapsto \pm u_{J \setminus I} \otimes v^I$$

для всех  $J \subset [m]$ . Кроме того, прямая сумма задает изоморфизм комплексов

$$\bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} R(\mathcal{K}).$$

Переходя к  $\mathbf{k}$ -двойственным комплексам и затем к гомологиям, получаем изоморфизмы

$$\text{Tor}_{n+1}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-|J|, 2J} \cong H_n(R^{*+1, -|J|, 2J}(\mathcal{K})^\#) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_n(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}).$$

Их прямая сумма – искомый изоморфизм

$$\text{Tor}_{n+1}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_n(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}). \quad \square$$

Для краткости, обозначим минимальное число образующих  $\mathbf{k}$ -модуля  $M$  как  $\dim M$ .

**Следствие 4.6.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbf{k}$  – коммутативное кольцо с единицей.

- Если  $\mathbf{k}$  – кольцо главных идеалов, то любое копредставление алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}\mathcal{K}; \mathbf{k})$  содержит хотя бы  $\sum_{J \subset [m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J; \mathbf{k})$  образующих и  $\sum_{J \subset [m]} \dim \widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbf{k})$  соотношений;
- Если  $\mathbf{k} = \mathbb{F}$  – поле, то минимальное копредставление содержит ровно  $\sum_{J \subset [m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$  образующих и  $\sum_{J \subset [m]} \dim \widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$  соотношений.

*Доказательство.* (а) Следует из Теоремы 4.5 и Предложения 2.5.

(b) Следует из Теоремы 4.5 и Предложения 2.4(b).  $\square$

**Замечание 4.7.** Алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$   $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуирована, поэтому  $\mathbb{F}$ -модули  $\mathrm{Tor}_i^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$   $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированы. Следовательно,  $\dim \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$  соотношений в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$ , соответствующие подмножеству  $J \subset [m]$ , имеют степень  $(-|J|, 2J) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ . Аналогично, если  $\mathbf{k}$  – кольцо главных идеалов, то в любом копредставлении алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  есть хотя бы  $\dim \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbf{k})$  соотношений степени  $(-|J|, 2J)$ .

Заметим, что  $\dim \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbf{k})$  зависит от  $\mathbf{k}$ , поэтому число соотношений в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  тоже зависит. Например, пусть  $\mathcal{K}$  – флаговая триангуляция  $\mathbb{R}P^2$ . Тогда в градуированной компоненте степени  $(-m, 2[m])$  имеем

- хотя бы одно соотношение в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$ ;
- ровно одно соотношение в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}/2)$ ;
- ни одного соотношения в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$ , если  $\mathrm{char} \mathbb{F} \neq 2$ .

Естественно ожидать следующее: если  $\mathcal{K}$  – флаговая триангуляция  $\mathbb{R}P^2$ , то в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  есть такое соотношение  $r = 0$  степени  $(-m, 2[m])$ , что  $2r = 0$  следует из соотношений, имеющих меньшую степень.

**Замечание 4.8.** Недавно Цай Ли [Ca] получил метод, который строит по подмножеству  $J \subset [m]$  и по замкнутому симплицальному пути в  $\mathcal{K}_J$  соотношение в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  степени  $(-|J|, 2J)$ . Мы ожидаем, что

- это соотношение зависит только от гомотопического класса этого пути (в классе свободных замкнутых путей);
- если взять замкнутые симплицальные пути, порождающие фундаментальные группы всех связных компонент всех полных подкомплексов, то соответствующий набор соотношений будет достаточным.

Ожидания основаны на следующих соображениях. Над полем, “модуль минимальных соотношений” в  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$  изоморфен  $\bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_1(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$ . Но первые гомологии  $\mathcal{K}_J$  порождаются образами замкнутых путей, порождающих фундаментальные группы связных компонент, под действием гомоморфизма Гуревича.

Другим аргументом является аналогия между копредставлениями алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$  и группы  $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  (см. [PV, GIPS]). Как показал Цай Ли, аналогичный набор соотношений в  $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  является достаточным (это следует из теоремы ван Кампена).

#### 4.4. Мультиградуированные ряды Пуанкаре алгебр Понтрягина и супералгебр Ли.

**Теорема 4.9.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbb{F}$  – поле. Тогда

$$(4.5) \quad \frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F}); t, \lambda)} = - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) t^{-|J|} \lambda^{2J}.$$

*Доказательство.* Из Теоремы 4.5 следует, что

$$F\left(\mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F}); t, \lambda\right) = \sum_{J \subset [m]} \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{F}) t^{-|J|} \lambda^{2J}.$$

По Предложению 2.4(c),

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F}); \lambda)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F\left(\mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F}); t, \lambda\right) = \\ &= \sum_{J \subset [m]} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J) t^{-|J|} \lambda^{2J} = - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) t^{-|J|} \lambda^{2J}. \end{aligned} \quad \square$$

**Замечание 4.10.** Пусть  $n = \dim \mathcal{K}$ .  $h$ -числа комплекса  $\mathcal{K}$  определяются равенством

$$\sum_{i=0}^n h_i s^{n-i} = \sum_{I \in \mathcal{K}} (s-1)^{n-|I|}.$$

Следующая формула для  $\mathbb{Z}$ -градуированного ряда Пуанкаре алгебры  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})$  следует из результатов Панова и Рэя [PR], см. [BP, Proposition 8.5.4]:

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F}); t)} = (1+t)^{m-n} \sum_{i=0}^n h_i \cdot (-t)^i.$$

Приведем набросок доказательства того, что эта формула согласуется с (4.5) при  $t = \lambda_1 = \dots = \lambda_m$ . Надо проверить тождество

$$(4.6) \quad (1+t)^{m-n} \sum_{i=0}^n h_i \cdot (-t)^i = - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) t^{|J|}.$$

Подставив  $s = -1/t$  в определение  $h$ -чисел, получаем

$$(1+t)^{-n} \sum_{i=0}^n h_i \cdot (-t)^i = \sum_{I \in \mathcal{K}} (-t)^{|I|} (1+t)^{-|I|}.$$

С другой стороны,  $-\tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) = \sum_{I \in \mathcal{K}_J} (-1)^{|I|}$  за счет симплициальных гомологий. Поэтому (4.6) равносильно следующему тождеству, которое легко проверяется изменением порядка суммирования:

$$\sum_{J \subset [m]} \sum_{I \in \mathcal{K}_J} (-1)^{|I|} t^{|J|} = \sum_{I \in \mathcal{K}} (-1)^{|I|} \cdot t^{|I|} (1+t)^{m-|I|}. \quad \square$$

По теореме Милнора-Мура [MM], алгебра  $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$  является универсальной обертывающей для градуированной супералгебры Ли  $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$ . Поэтому  $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$  снабжается  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировкой:

$$\pi_n(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{n=-i+2|\alpha|} (\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-i, 2\alpha}, \quad (\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-i, 2\alpha} \subset H_{-i, 2\alpha}(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q}).$$

**Замечание 4.11.** Возникает вопрос:

- Есть ли естественная  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировка на  $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ ?

Если  $\mathcal{K}$  флаговый, то, возможно, такую градуировку можно ввести с помощью гомотопического разложения  $\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  из [PT, Corollary 7.3]. Это мотивировано таким рассуждением: по [PT, Theorem 1.1],  $\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  является гомотопическим ретрактом  $\Omega\mathcal{Z}_{\bar{\mathcal{K}}}$ , где  $\bar{\mathcal{K}}$  – несвязное объединение  $m$  точек. Но  $\mathcal{Z}_{\bar{\mathcal{K}}}$  – букет сфер, и в этом случае мультиградуировка на гомотопических группах предоставляется теоремой Хилтона-Милнора (см. доказательство [GPTW, Theorem 5.3(c)]). Однако, как и в Замечании 3.3, нам неизвестно, сохраняет ли мультиградуировку гомотопическое сечение, построенное в [PT].

Теперь применим Теорему 4.9 для вычисления мультиградуированного ряда Пуанкаре для  $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$  во флаговом случае. Пусть  $L$  – связная  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированная супералгебра Ли, а  $U(L)$  – ее универсальная обертывающая. Предполагается, что первая градуировка всегда неотрицательна или неположительна, поэтому можно делить на формальные степенные ряды и извлекать логарифмы. Зададим коэффициенты  $l_{i,\alpha}$  и  $u_{j,\beta}$  с помощью тождеств

$$F(L; t, \lambda) = \sum_{i,\alpha} l_{i,\alpha} t^i \lambda^\alpha, \quad \ln F(U(L); t, \lambda) = \sum_{j,\beta} u_{j,\beta} t^j \lambda^\beta.$$

Также обозначим

$$F(L; -t, -\lambda) = \sum_{i,\alpha} \tilde{l}_{i,\alpha} t^i \lambda^\alpha, \quad \ln F(U(L); -t, -\lambda) = \sum_{j,\beta} \tilde{u}_{j,\beta} t^j \lambda^\beta.$$

Ясно, что  $\tilde{l}_{i,\alpha} = (-1)^{i+|\alpha|} l_{i,\alpha}$ ,  $\tilde{u}_{j,\beta} = (-1)^{j+|\beta|} u_{j,\beta}$ .

**Лемма 4.12.** *Ряды Пуанкаре обладают следующими свойствами:*

- (1)  $F(V_1 \oplus V_2; t, \lambda) = F(V_1; t, \lambda) + F(V_2; t, \lambda)$ ;
- (2)  $F(V_1 \otimes V_2; t, \lambda) = F(V_1; t, \lambda) \cdot F(V_2; t, \lambda)$ .

*Доказательство.* Если  $\{v_i\}_{i \in I}$  – базис векторного пространства  $V$  и  $\deg v_i = (a_i, b_i)$ , то  $F(V; t, \lambda) = \sum_{i \in I} t^{a_i} \lambda^{b_i}$ .

- (1) Базис прямой суммы – это объединение базисов.
- (2) Базис тензорного произведения – это множество попарных тензорных произведений базисных векторов.  $\square$

**Теорема 4.13** ([MM]).

$$F(U(L); t, \lambda) = \prod_{i, \alpha} (1 - (-t)^i (-\lambda)^\alpha)^{(-1)^{i+|\alpha|+1} l_{i, \alpha}}.$$

*Доказательство.* Из теоремы Пуанкаре-Биркгоффа-Витта следует: если  $\{x_{i, \alpha}\}$  – однородный аддитивный базис для  $L$ , то  $U(L)$  изоморфна, как градуированное векторное пространство, свободной градуированно-коммутативной алгебре, порожденной  $\{x_{i, \alpha}\}$ . Следовательно, каждое слагаемое  $t^i \lambda^\alpha$  в  $F(L; t, \lambda)$  соответствует множителю

$$\begin{cases} F(\Lambda[x_{i, \alpha}]; t, \lambda), & i + |\alpha| \text{ нечетно,} \\ F(\mathbb{F}[x_{i, \alpha}]; t, \lambda), & i + |\alpha| \text{ четно} \end{cases} = \begin{cases} 1 + t^i \lambda^\alpha, & i + |\alpha| \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{1 - t^i \lambda^\alpha}, & i + |\alpha| \text{ четно} \end{cases} = (1 - (-1)^{i+|\alpha|} t^i \lambda^\alpha)^{(-1)^{i+|\alpha|+1}}$$

в  $F(U(L); t, \lambda)$ .  $\square$

**Лемма 4.14.**  $\tilde{l}_{i, \alpha} = \sum_{k|i, \alpha} \tilde{u}_{i/k, \alpha/k} \frac{\mu(k)}{k}$ , где  $\sum_{k|i, \alpha}$  обозначает суммирование по всем натуральным  $k$ , делящим  $i, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ , а  $\mu(n)$  – функция Мёбиуса.

*Доказательство.* По Теореме 4.13,  $F(U(L); -t, -\lambda) = \prod_{i, \alpha} (1 - t^i \lambda^\alpha)^{-\tilde{l}_{i, \alpha}}$ . Поэтому

$$\sum_{j, \beta} \tilde{u}_{j, \beta} t^j \lambda^\beta = - \sum_{i, \alpha} \tilde{l}_{i, \alpha} \ln(1 - t^i \lambda^\alpha) = \sum_{i, \alpha} \tilde{l}_{i, \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{ik} \lambda^{k\alpha}}{k} = \sum_{j, \beta} \sum_{k|j, \beta} \tilde{l}_{j/k, \beta/k} \frac{t^j \lambda^\beta}{k}.$$

Таким образом,  $\tilde{u}_{j, \beta} = \sum_{k|j, \beta} \tilde{l}_{j/k, \beta/k} \frac{1}{k}$ . Искомое тождество получается применением ( $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированной) формулы обращения Мёбиуса.  $\square$

**Теорема 4.15.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Рассмотрим  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуированный формальный степенной ряд

$$\sum_{\beta} w_{\beta} \lambda^{\beta} = - \ln \left( - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) (-\lambda)^J \right).$$

Тогда для всех  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$  верно

$$\dim(\pi_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \sum_{k|\alpha} \frac{\mu(k)}{k} w_{\alpha/k}.$$

В остальных случаях  $\dim(\pi_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{i, \beta} = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $L = \pi_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$ , так что  $U(L) = H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$  по теореме Милнора-Мура. Из Теоремы 4.9 имеем

$$\sum_{i, \beta} \tilde{u}_{i, \beta} t^i \lambda^{\beta} = - \ln \left( - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) (-t)^{-|J|} \lambda^{2J} \right) = - \ln \left( - \sum_{J \subset [m]} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) (-\lambda^2/t)^J \right) = \sum_{\alpha} w_{\alpha} t^{-|\alpha|} \lambda^{2\alpha}.$$

Поэтому  $\tilde{u}_{-|\alpha|, 2\alpha} = w_{\alpha}$ , а в остальных случаях  $\tilde{u}_{i, \beta} = 0$ . По Лемме 4.14,

$$\tilde{l}_{-|\alpha|, 2\alpha} = \sum_{k|-|\alpha|, 2\alpha} \tilde{u}_{-|\alpha|/k, 2\alpha/k} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k|\alpha} w_{\alpha/k} \frac{\mu(k)}{k},$$

и иначе  $\tilde{l}_{i, \beta} = 0$ . Наконец,  $\dim(\pi_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha} = l_{-|\alpha|, 2\alpha} = (-1)^{|\alpha|} \tilde{l}_{-|\alpha|, 2\alpha}$ .  $\square$

**Замечание 4.16.** Числа  $l_n := \dim \pi_{n+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} = \dim \pi_n(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} = \sum_{|\alpha|=n} l_{-|\alpha|, 2\alpha}$  для флаговых комплексов  $\mathcal{K}$  впервые были описаны Дэнемом и Суциу [DS, Theorem 4.2.1]. Они рассуждали похожим образом:  $\mathbb{Z}$ -градуированная версия Теоремы 4.13 дает

$$F(H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q}); t) = \prod_{r \geq 1} \frac{(1 + t^{2r-1})^{l_{2r}}}{(1 - t^{2r})^{l_{2r+1}}}.$$

Затем используется *формула Лёфволла*, связывающая  $F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q}); t)$  с биградуированным рядом Пуанкаре для  $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ . Иногда этот подход упрощает вычисления, как в [DS, Example 7.2.1], но в общем случае формула из Теоремы 4.15 более явная. Также она дает ответ с учетом мультиградуировки.

**Замечание 4.17.** В работе [Us] Устиновский интерпретировал *неотрицательность* чисел  $l_n = \dim(\pi_n(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})$  как полиномиальные неравенства, которым должны удовлетворять  $h$ -числа комплекса  $\mathcal{K}$  во флаговом случае ( $h$ -числа появляются как коэффициенты в формуле Панова-Рэя).

Аналогично, в мультиградуированном случае мы можем интерпретировать неотрицательность чисел  $l_{-|\alpha|, 2\alpha} = \dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha}$  как полиномиальные неравенства на приведенные эйлеровы характеристики полных подкомплексов в  $\mathcal{K}$ . Из этих неравенств следуют неравенства Устиновского, так как  $l_n = \sum_{|\alpha|=n} l_{-|\alpha|, 2\alpha}$ . Однако их комбинаторная интерпретация менее ясна. В частности, в мультиградуированном случае логарифм формального степенного ряда не выражается через многочлены Ньютона, как в [Us, Lemma 1.4].

**Пример 4.18.** Рассмотрим неравенство  $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha} \geq 0$  при  $\alpha = [m] = \sum_{i=1}^m e_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ . В этом случае  $k|\alpha$  только при  $k = 1$ . По Теореме 4.15,

$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-m, 2[m]} = (-1)^m w_{[m]}, \quad \sum_{\beta} w_{\beta} \lambda^{\beta} = -\ln \left( 1 - \sum_{\substack{J \subset [m], \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|} \tilde{\chi}(\mathcal{K}_J) \lambda^J \right).$$

Раскрывая правую часть по формуле  $-\ln(1-t) = \sum_{N \geq 1} t^N / N$  и смотря на коэффициент при  $\lambda^{[m]}$ , мы получаем следующее неравенство: для любого флагового комплекса  $\mathcal{K}$

$$(4.7) \quad \dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-m, 2[m]} = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N} \sum_{[m] = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_N} \prod_{i=1}^N \tilde{\chi}(\mathcal{K}_{J_i}) \geq 0.$$

Здесь набор подмножеств  $J_1, \dots, J_N$  упорядочен, поэтому каждое разбиение  $\{J_1, \dots, J_N\}$  множества  $[m]$  учитывается в сумме ровно  $N!$  раз.

Если  $\gcd(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1$ , то аналогичные вычисления дают неравенство

$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|, 2\alpha} = \sum_{N \geq 1} \frac{1}{N} \sum_{\alpha = J_1 + \dots + J_N} \prod_{i=1}^N \tilde{\chi}(\mathcal{K}_{J_i}) \geq 0.$$

## 5. LS-КАТЕГОРИЯ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ ВО ФЛАГОВОМ СЛУЧАЕ

**Определение 5.1.** Пусть  $X$  – топологическое пространство. Его *LS-категория*  $\text{cat}(X)$  – это наименьшее целое  $n$ , такое что найдется открытое покрытие  $X = U_0 \cup \dots \cup U_n$ , в котором каждое вложение  $U_i \hookrightarrow X$  гомотопно тривиальному отображению.

**Замечание 5.2.** В ранних источниках, таких как [Gi], покрытие обозначалось как  $U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Поэтому определение  $\text{cat}(X)$  было сдвинуто на 1. В остальных работах, на которые мы ссылаемся, используется современное соглашение.

Нижние и верхние оценки на  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  получены в работе [BG]. Мы воспользуемся следующим результатом:

**Предложение 5.3** ([BG, Corollary 3.13]). *Пусть  $\mathcal{K}$  – симплицальный комплекс без призрачных вершин. Тогда  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \leq \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ .*  $\square$

**5.1. LS-категория вещественных момент-угол комплексов во флаговом случае.** Для флаговых комплексов вычисление  $\text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$  сводится к проблеме из теории групп, решенной Дранишниковым [Dr].

**Теорема 5.4** (см. [PV]). *Если  $\mathcal{K}$  флаговый, то  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = B(\text{RC}'_{\mathcal{K}})$ , где  $\text{RC}'_{\mathcal{K}}$  – коммутант прямой моугольной группы Кокстера  $\text{RC}_{\mathcal{K}}$ .*  $\square$



**Определение 5.5.** *Когомологическая размерность*  $\text{cdim}_{\mathbf{k}} X$  топологического пространства  $X$  над кольцом  $\mathbf{k}$  – это наименьшее целое  $n$ , такое что  $\tilde{H}^i(X; \mathbf{k}) = 0$  для всех  $i > n$ . Аналогично, *гомологическая размерность*  $\text{hdim}_{\mathbf{k}} X$  – это наименьшее  $n$ , такое что  $\tilde{H}_i(X; \mathbf{k}) = 0$  для всех  $i > n$ .

**Определение 5.6.** *Когомологическая размерность*  $\text{cd } G$  дискретной группы  $G$  – это наименьшее целое  $n$ , такое что  $H^i(G; M) = 0$  для всех  $i > n$  и всех  $\mathbb{Z}[G]$ -модулей  $M$ .

Чтобы покрыть вырожденные случаи, положим  $\text{cdim}_{\mathbf{k}} \text{pt} := -1$  и  $\text{cd } 1 := 0$ . Заметим, что  $\text{cdim}_{\mathbf{k}} \emptyset := -1$ .

**Теорема 5.7.**  $\text{cd } G = \text{cat}(BG)$  для любой дискретной группы  $G$ .

*Доказательство.* По теореме Эйленберга-Ганеа [EG], неравенство  $\text{cd } G \neq \text{cat}(BG)$  возможно только в случае  $\text{cd } G = 1$ . Но в этом случае  $G$  свободна по теореме Столлинга-Свана [Sw]. Тогда  $BG$  – букет окружностей, поэтому  $\text{cat}(BG) = 1$ .  $\square$

**Предложение 5.8** ([Br, Proposition VIII.2.2]).  $\text{cdim}_{\mathbb{Z}} BG \leq \text{cd } G \leq \dim BG$ .  $\square$

**Следствие 5.9.** Если  $\mathcal{K}$  флаговый, то  $\text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \leq \text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}} = \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \leq \dim \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ .  $\square$

**Предложение 5.10.** Если  $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ , то  $\text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} = 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$ .

*Доказательство.* По Теореме 2.2,  $H^n(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})$ . Так как  $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ , у  $\mathcal{K}$  найдется недостающая грань; поэтому  $\tilde{H}^{s-1}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) \neq 0$ , где  $s \geq 2$  – число вершин в недостающей грани. Значит,  $\text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \geq 1$ , а при  $n \geq 1$  имеем  $H^n(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}) = \tilde{H}^n(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$ .  $\square$

Напомним понятие *виртуальной когомологической размерности* дискретной группы  $G$ : если  $G_1 \subset G$  – подгруппа конечного индекса, такая что  $\text{cd } G_1 < \infty$ , то  $\text{vcd } G := \text{cd } G_1$ . Согласно результату Серра (см. [Br, §VIII.11]), это число не зависит от выбора  $G_1$ .

**Предложение 5.11** (cf. [Dr, p. 142]). Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда

$$\text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}} = 1 + \max_{I \in \mathcal{K}} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \text{lk}_{\mathcal{K}} I.$$

*Доказательство.* Имеем  $\text{vcd } \text{RC}_{\mathcal{K}} = \text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}}$ , так как  $[\text{RC}_{\mathcal{K}} : \text{RC}'_{\mathcal{K}}] = |\mathbb{Z}_2^m| < \infty$  и  $\text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}} \leq \dim \mathcal{R}_{\mathcal{K}} < \infty$ . В [Dr] Дранишников получил следующую формулу:

$$\text{vcd } \text{RC}_{\mathcal{K}} = \max(\text{lcd}(\mathcal{K}), 1 + \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}), \text{ где } \text{lcd}(\mathcal{K}) := 1 + \max_{I \in \mathcal{K}, I \neq \emptyset} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \text{lk}_{\mathcal{K}} I$$

(в обозначениях [Dr], пустое множество не является симплексом). Осталось заметить, что  $\text{lk}_{\mathcal{K}} \emptyset = \mathcal{K}$ .  $\square$

**Предложение 5.12.** Для любого флагового комплекса  $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$  имеем  $\text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}} = \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} = 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$ .

*Доказательство.* По Следствию 5.9, Предложению 5.11, Лемме 2.1 и Предложению 5.10,

$$\text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \leq \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \text{cd } \text{RC}'_{\mathcal{K}} = 1 + \max_{I \in \mathcal{K}} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \text{lk}_{\mathcal{K}} I \leq 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J = \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}}. \quad \square$$

**Замечание 5.13.** Таким образом,

$$\max_{I \in \mathcal{K}} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \text{lk}_{\mathcal{K}} I = \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$$

для флаговых  $\mathcal{K}$ . На самом деле это тождество выполнено для всех симплицальных комплексов. Его можно получить, применив *комбинаторную двойственность Александра* (см. [BP, Corollary 2.4.6]) к результатам Айзенберга [Ai, Предложение 3.2]. Он доказал, что *s-линк-ациклические* симплицальные комплексы – это в точности *s-подкомплекс-ациклические* комплексы.

**5.2. Нижние оценки на LS-категорию момент-угол комплексов.** Пусть  $\mathbb{F}$  – поле,  $X$  – односвязный клеточный комплекс. Существует гомологическая спектральная последовательность в первом квадранте, называемая *спектральной последовательностью Милнора-Мура*, со следующими свойствами:

$$E_{p,q}^2 \cong \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega X; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_q \Rightarrow H_{p+q}(X; \mathbb{F}).$$

Ее можно построить так (см. [To, Section II.A]). Пусть  $(A, d)$  – связная дифференциальная градуированная алгебра над  $\mathbb{F}$ . Тогда приведенная бар-конструкция  $\bar{B}(A) := B(\mathbb{F}, \mathbb{F})$  (см. Подраздел 2.5) для  $A$  является бикомплексом. (На ней есть дифференциал  $\partial$  бар-конструкции и дифференциал  $d$ , продолженный с  $(A, d)$  на  $\bar{B}(A)$  по правилу Лейбница). Получаем спектральную последовательность со вторым листом

$$E^2 = H(H(\bar{B}(A), d), \partial) \cong H(\bar{B}(H(A)), \partial) \cong \mathrm{Tor}^{H(A)}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$$

(второе равенство следует из формулы Кюннета).

Спектральная последовательность Милнора-Мура соответствует случаю  $A = C_*(\Omega X; \mathbb{F})$ . В других подходах к построению этой спектральной последовательности используются естественные геометрические фильтрации на пространствах, слабо эквивалентных  $X$  :

- Конструкция Милнора классифицирующего пространства  $B_\infty G(X)$  топологической группы  $G(X) \simeq \Omega X$  [Mi] (см. также [BL, Раздел 6]);
- Конструкция расслоений-корасслоений Ганеа [Ga];
- Фильтрация Дж. Уайтхеда на пространстве отображений  $\Delta^\infty \rightarrow X$  (см. [Gi, §1]).

Эти конструкции приводят к изоморфным спектральным последовательностям, см. [Gi, §3]. Наличие геометрической интерпретации показывает, что спектральная последовательность Милнора-Мура сходится к  $H_*(X; \mathbb{F})$ .

LS-категория пространства  $X$  оценивается снизу *инвариантом Тумера*  $e_{\mathbb{F}}(X)$  :

**Теорема 5.14** ([Gi, Theorem 2.2], см. также [To, Theorem II.B.2]). *Для спектральной последовательности Милнора-Мура обозначим  $e_{\mathbb{F}}(X) := \max\{p : E_{p,*}^\infty \neq 0\}$ . Тогда  $\mathrm{cat}(X) \geq e_{\mathbb{F}}(X)$ .*  $\square$

**Предложение 5.15.** *Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс,  $\mathbb{F}$  – поле. Тогда спектральная последовательность Милнора-Мура для  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  над  $\mathbb{F}$  вырождается в  $E^2$ , и  $e_{\mathbb{F}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 1 + \max_{J \subset [m]} \mathrm{hdim}_{\mathbb{F}} \mathcal{K}_J$ .*

*Доказательство.* Вычислим размерности векторных пространств  $E_{*,*}^2$  and  $E_{*,*}^\infty$  с помощью Теоремы 4.5 и Теоремы 2.2:

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \dim E_{p,q}^2 &= \sum_i \dim \mathrm{Tor}_i^{H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \sum_i \sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{F}); \\ \sum_{p,q} \dim E_{p,q}^\infty &= \sum_i \dim H_i(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F}) = \sum_i \sum_{J \subset [m]} \dim \tilde{H}_{i-|J|-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{F}). \end{aligned}$$

Они равны, поэтому все дифференциалы тривиальны. Формула для инварианта Тумера следует из Теоремы 4.5:  $E_{p,*}^\infty \cong E_{p,*}^2 \cong \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{F})}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{F})$ .  $\square$

**Лемма 5.16.** *Пусть  $X$  – топологическое пространство с конечно порожденными группами гомологий. Тогда  $\mathrm{cdim}_{\mathbb{Z}} X = \max_{\mathbb{F}} \mathrm{hdim}_{\mathbb{F}} X$ , где максимум берется по всем полям  $\mathbb{F}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\mathrm{cdim}_{\mathbb{Z}} X = n$ , и пусть  $\mathbb{F}$  – поле. По теореме об универсальных коэффициентах,  $\tilde{H}_k(X; \mathbb{F})$  выражается через  $\tilde{H}^k(X; \mathbb{Z})$  и  $\tilde{H}^{k+1}(X; \mathbb{Z})$ . Следовательно,  $\tilde{H}_k(X; \mathbb{F}) = 0$  при  $k > n$ . Поэтому  $\mathrm{hdim}_{\mathbb{F}} X \leq n$  при всех  $\mathbb{F}$ .

Осталось показать, что  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{F}) \neq 0$  для некоторого  $\mathbb{F}$ . Так как  $\tilde{H}^n(X; \mathbb{Z}) \neq 0$ , возможны два случая:

- Нетривиальна свободная часть  $\tilde{H}^n(X; \mathbb{Z})$ . Тогда  $\tilde{H}^n(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ , откуда  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) \neq 0$ .
- Нетривиально  $p$ -кручение в  $\tilde{H}^n(X; \mathbb{Z})$  для некоторого  $p$ . Тогда нетривиально  $p$ -кручение в  $\tilde{H}_{n-1}(X; \mathbb{Z})$ . Значит, есть нетривиальное  $p$ -кручение в  $\tilde{H}_{n-1}(X; \mathbb{Z}/p)$  и  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}/p)$ . Таким образом,  $\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}/p) \neq 0$ .  $\square$

**Предложение 5.17.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$ .

*Доказательство.*  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq \max_{\mathbb{F}} e_{\mathbb{F}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 1 + \max_{J \subset [m]} \max_{\mathbb{F}} \text{hdim}_{\mathbb{F}} \mathcal{K}_J = 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$ .  $\square$

Теперь мы можем доказать Теорему 1.6. Напомним формулировку:

**Теорема 5.18.** Пусть  $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$  – флаговый симплицальный комплекс. Тогда

$$\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} = 1 + \max_{I \in \mathcal{K}} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \text{lk}_{\mathcal{K}} I = 1 + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J.$$

*Доказательство.* Предложения 5.3, 5.12, 5.17 дают циклические нестрогие неравенства.  $\square$

**Следствие 5.19.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговая триангуляция  $d$ -мерного многообразия. Тогда  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \text{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = d + 1$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J = d$ . Имеем

$$d = \text{hdim}_{\mathbb{Z}/2} \mathcal{K} \leq \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K} \leq \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J \leq \dim \mathcal{K} = d. \quad \square$$

**Замечание 5.20.** LS-категорию  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  для произвольных триангуляций одномерных и двумерных многообразий вычислили Бебен и Грбич [BG, Proposition 4.7 и Proposition 4.12]. В нефлаговом случае  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  может быть меньше, чем  $d + 1$ .

Обозначим множество недостающих граней комплекса  $\mathcal{K}$  как  $\text{MF}(\mathcal{K})$ . По определению,  $\text{MF}(\mathcal{K}) = \{I \subset [m] : I \notin \mathcal{K}, \text{ и } I \setminus \{i\} \in \mathcal{K}, \forall i \in I\}$ . Для получения оценок снизу в нефлаговом случае воспользуемся неравенством, замеченным Бебеном и Грбич:

**Предложение 5.21** (см. [BG, Lemma 3.11]). Пусть  $\mathcal{L}_0 \subset \dots \subset \mathcal{L}_s$  – фильтрация симплицальных комплексов, такая что  $\mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p \subset \text{MF}(\mathcal{L}_p)$  для всех  $p = 0, \dots, s-1$ . Тогда  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_s}) \leq \text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_0}) + s$ .

*Доказательство.* Рассуждение дословно повторяет доказательства лемм [BG, Lemma 3.10 и Lemma 3.11]. Ключевой шаг – проверка разложения

$$(5.1) \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p} = \bigsqcup_{I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p} \prod_{i \in I} (D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i \notin I} S^1.$$

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$ . Найдется симплекс  $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$ , такой что  $x \in \prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1$ . По предположению, для любого  $j \in I$  имеем  $I \setminus \{j\} \in \mathcal{L}_p$ . Если для некоторого  $j \in I$  верно  $x_j \in S^1$ , то

$$x \in \prod_{i \in I \setminus \{j\}} D^2 \times \prod_{i \notin I \setminus \{j\}} S^1 \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$$

– противоречие. Значит,  $x_j \in D^2 \setminus S^1$  для всех  $j \in I$ . Это рассуждение показывает, что

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p} \subset \bigsqcup_{I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p} \prod_{i \in I} (D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i \notin I} S^1.$$

Наоборот, пусть  $x \in \prod_{i \in I} (D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i \notin I} S^1$  для некоторого  $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$ . Очевидно,

$$x \in \prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}}.$$

Если  $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$ , то найдется симплекс  $J \in \mathcal{L}_p$ , такой что  $x \in \prod_{i \in J} D^2 \times \prod_{i \notin J} S^1$ . Получаем  $I \subset J$ , что противоречит  $I \notin \mathcal{L}_p$  и  $J \in \mathcal{L}_p$ . Значит,  $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$ . Тожество (5.1) проверено.  $\square$

Теперь мы введем число  $\nu(\mathcal{K})$ , которое измеряет, насколько комплекс  $\mathcal{K}$  нефлаговый. Напомним, что  $\mathcal{K}^f$  – единственный флаговый симплицальный комплекс на  $[m]$ , такой что  $\text{sk}_1 \mathcal{K}^f = \text{sk}_1 \mathcal{K}$ .

**Определение 5.22.** Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс. Рассмотрим следующую фильтрацию симплициальных комплексов:

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{K}, \quad \mathcal{L}_{p+1} := \mathcal{L}_p \cup \{I \in \text{MF}(\mathcal{L}_p) : |I| \geq 3\}$$

(на  $p$ -ом шаге к комплексу  $\mathcal{L}_p$  добавляются все его недостающие грани, кроме недостающих ребер).

Ясно, что фильтрация стабилизируется на флаговом симплициальном комплексе. Так как  $\text{sk}_1 \mathcal{L}_p = \text{sk}_1 \mathcal{L}_{p-1} = \dots = \text{sk}_1 \mathcal{K}$  для любого  $p$ , фильтрация стабилизируется на  $\mathcal{K}^f$ . Определим  $\nu(\mathcal{K})$  как наименьшее  $n \geq 0$ , такое что  $\mathcal{L}_n = \mathcal{K}^f$ .

**Предложение 5.23.** Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс. Тогда  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f}) \leq \text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) + \nu(\mathcal{K})$  или, эквивалентно,

$$\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq 1 - \nu(\mathcal{K}) + \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J^f.$$

*Доказательство.* Ясно, что фильтрация  $\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \subset \dots \subset \mathcal{L}_{\nu(\mathcal{K})} = \mathcal{K}^f$  из Определения 5.22 удовлетворяет условиям Предложения 5.21. Поэтому  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f}) \leq \text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) + \nu(\mathcal{K})$ . Второе неравенство следует из Теоремы 5.18.  $\square$

Число  $\nu(\mathcal{K})$  и комплексы  $\mathcal{L}_p$  можно описать явно:

**Предложение 5.24.** Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс. Тогда  $\nu(\mathcal{K})$  – это наименьшее  $n \geq 0$ , такое что верно следующее:  $J \in \mathcal{K}$  всякий раз, когда  $J \subset I \in \mathcal{K}^f$  и  $|I \setminus J| \geq n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим симплициальные комплексы

$$\mathcal{L}'_p := \{I \in \mathcal{K}^f \mid J \in \mathcal{K} \text{ для любого } J \subset I, \text{ такого что } |I \setminus J| \geq p\}.$$

Ясно, что  $\mathcal{L}'_p \subset \mathcal{L}'_{p+1}$ .

Условия “ $J \in \mathcal{K}$  всякий раз, когда  $J \subset I \in \mathcal{K}^f$  и  $|I \setminus J| \geq n$ ” и “ $\mathcal{L}'_n = \mathcal{K}^f$ ” эквивалентны. Поэтому достаточно показать, что  $\mathcal{L}'_p = \mathcal{L}_p$  для всех  $p \geq 0$ . Индукция по  $p$ .

База индукции:  $\mathcal{L}'_0 = \{I \in \mathcal{K}^f \mid J \in \mathcal{K} \text{ для всех } J \subset I\} = \mathcal{K} = \mathcal{L}_0$ .

Шаг индукции: пусть  $\mathcal{L}'_p = \mathcal{L}_p$ . Мы покажем, что  $\mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}'_{p+1}$  и  $\mathcal{L}'_{p+1} \setminus \mathcal{L}'_p \subset \mathcal{L}_{p+1}$ . Ясно, что отсюда следует  $\mathcal{L}'_{p+1} = \mathcal{L}_{p+1}$ .

(1) Пусть  $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$ . Тогда  $I \in \mathcal{K}^f$  и  $I \in \text{MF}(\mathcal{L}_p)$ .

Предположим, что  $J \subset I$  и  $|I \setminus J| \geq p+1$ . Так как  $|I \setminus J| \geq 1$ , найдется элемент  $i \in I \setminus J$ . Тогда  $J \subset I \setminus \{i\}$  и  $|(I \setminus \{i\}) \setminus J| \geq p$ . Также  $I \setminus \{i\} \in \mathcal{L}'_p$ , так как  $I \in \text{MF}(\mathcal{L}'_p)$ . Следовательно,  $J \in \mathcal{K}$ . Это рассуждение показывает, что  $I \in \mathcal{L}'_{p+1}$ .

(2) Пусть  $I \in \mathcal{L}'_{p+1} \setminus \mathcal{L}'_p$ , так что  $I \in \mathcal{K}^f$ . Чтобы показать, что  $I \in \mathcal{L}_{p+1}$ , мы докажем, что  $I \in \text{MF}(\mathcal{L}_p)$  и  $|I| \geq 3$ .

- Пусть  $i \in I$ . Предположим, что  $J \subset I \setminus \{i\}$  таково, что  $|(I \setminus \{i\}) \setminus J| \geq p$ . Тогда  $J \subset I$  и  $|I \setminus J| \geq p+1$ . Из  $I \in \mathcal{L}'_{p+1}$  получаем  $J \in \mathcal{K}$ . Следовательно,  $I \setminus \{i\} \in \mathcal{L}'_p$  для любого  $i \in I$ . Мы доказали, что  $I \in \text{MF}(\mathcal{L}'_p)$ .
- Пусть  $|I| \leq 2$ . Тогда  $I \in \text{sk}_1 \mathcal{L}'_{p+1}$ . Но  $\mathcal{L}'_{p+1} \subset \mathcal{K}^f$ , так что  $I \in \text{sk}_1 \mathcal{K}^f = \text{sk}_1 \mathcal{L}_{\nu(\mathcal{K})} = \dots = \text{sk}_1 \mathcal{L}_p$  – противоречие с  $I \notin \mathcal{L}_p$ .  $\square$

**Следствие 5.25.** Пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс. Пусть  $d = \dim \mathcal{K}^f$ , и  $\text{sk}_i \mathcal{K} = \text{sk}_i \mathcal{K}^f$  для некоторого  $i \leq d$ . Тогда  $\nu(\mathcal{K}) \leq d - i$ .

*Доказательство.* За счет Предложения 5.24 достаточно доказать следующее:  $J \in \mathcal{K}$  всякий раз, когда  $J \subset I \in \mathcal{K}^f$  и  $|I \setminus J| \geq d - i$ . Но если  $I \in \mathcal{K}^f$ , то  $|I| \leq d+1$ . Следовательно,  $|J| \leq i+1$ , то есть  $J \in \text{sk}_i \mathcal{K}^f = \text{sk}_i \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ . Итак,  $J \in \mathcal{K}$ , что и требовалось.  $\square$

**Пример 5.26.** Пусть  $\mathcal{K}$  –  $i$ -остов флагового комплекса  $\mathcal{K}^f$ ,  $2 \leq i \leq d = \dim \mathcal{K}^f$ . Тогда  $\nu(\mathcal{K}) \leq d - i$  по Следствию 5.25. С другой стороны, рассмотрим произвольный  $d$ -мерный симплекс  $I \in \mathcal{K}^f$  и выберем в нем подмножество  $J \subset I$ ,  $|J| = i+2$ . Тогда  $J \notin \mathcal{K}$  и  $|I \setminus J| = (d+1) - (i+2) = d - i - 1$ . Следовательно,  $\nu(\mathcal{K}) = d - i$ . В частности,  $\nu(\text{sk}_i \Delta^{m-1}) = m - i - 1$ .

Но в общем случае неравенство  $\nu(\mathcal{K}) \leq \min\{n : \text{sk}_{d-n} \mathcal{K} = \text{sk}_{d-n} \mathcal{K}^f\}$  может быть строгим. Например, для  $\mathcal{K} = \partial \Delta^2 \sqcup \partial \Delta^5$  имеем  $\nu(\mathcal{K}) = 1$  и  $d = 5$ , хотя  $\text{sk}_4 \mathcal{K} \neq \text{sk}_4 \mathcal{K}^f$ .

**Следствие 5.27.** Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговая триангуляция  $d$ -мерного многообразия. Пусть  $\mathcal{L}$  – такой симплицальный комплекс на  $[m]$ , что  $\text{sk}_i \mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \text{sk}_j \mathcal{K}$  для некоторых  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq d$ . Тогда  $i + 1 \leq \text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \leq j + 1$ . В частности,  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\text{sk}_i \mathcal{K}}) = i + 1$ .

*Доказательство.* По Следствию 5.19,  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = d + 1$ . Ясно что,  $\text{sk}_t \mathcal{K} = \text{sk}_t(\text{sk}_i \mathcal{K}) \subset \text{sk}_t \mathcal{L} \subset \text{sk}_t(\text{sk}_j \mathcal{K}) = \text{sk}_t \mathcal{K}$  для любого  $t \leq i$ . Поэтому  $\text{sk}_i \mathcal{L} = \text{sk}_i \mathcal{K}$  и  $\text{sk}_1 \mathcal{L} = \text{sk}_1 \mathcal{K}$ .

Комплекс  $\mathcal{K}$  флаговый, и  $\text{sk}_1 \mathcal{K} = \text{sk}_1 \mathcal{L}$ , так что  $\mathcal{K} = \mathcal{L}^f$ . Из Следствия 5.25 получаем  $\nu(\mathcal{L}) \leq d - i$ . По Предложению 5.23,  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \leq \text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) + \nu(\mathcal{L})$ . Таким образом,  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \geq (d + 1) - (d - i) = i + 1$ .

С другой стороны,  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \leq 1 + \dim \mathcal{L}$  по [BG, Lemma 3.11]. Верхняя оценка  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \leq j + 1$  теперь следует из  $\dim \mathcal{L} \leq \dim \text{sk}_j \mathcal{K} = j$ .  $\square$

Ясно, что аналогичное утверждение верно для любого флагового комплекса  $\mathcal{K}$ , такого что  $\dim \mathcal{K} = \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J = d$ .

**Пример 5.28.** Каждому простому  $n$ -мерному многограннику  $P$  соответствует триангуляция  $(n - 1)$ -мерной сферы  $\partial P^*$ . Момент-угол многообразие  $\mathcal{Z}_P$  – это соответствующий момент-угол комплекс  $\mathcal{Z}_{\partial P^*}$ . В работе [BL] Бухштабер и Лимонченко изучали некоторое семейство флаговых многогранников  $\mathcal{Q} = \{Q_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\dim Q_n = n$ . В частности, они вычислили LS-категорию соответствующих момент-угол многообразий [BL, Теорема 6.11]:  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n}) = n$ . Для получения оценки снизу на  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n})$  они построили нетривиальное произведение длины  $n$  в кольце  $H^*(\mathcal{Z}_{Q_n})$  и воспользовались известным неравенством  $\text{cat}(X) \geq \text{sup}(X)$  между LS-категорией и *суп-длиной* пространства  $X$ . По определению,  $\text{sup}(X) \geq n$ , если существуют  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{H}^*(X)$ , такие что  $\alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_n \neq 0$ .

Применяя к  $\mathcal{Z}_{Q_n}$  Следствие 5.19, мы получаем то же значение  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n}) = n$  другим методом. Также, по Предложению 5.15, спектральная последовательность Милнора-Мура для  $\mathcal{Z}_{Q_n}$  вырождается в  $E^2$ . Это усиливает результат из [BL, Теорема 6.11], где доказано вырождение этой спектральной последовательности в листе  $E^{n+1}$ .

**Проблема 5.29.** Неравенство  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq \text{sup}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  может быть строгим (см. [BG, Examples 5.8, 5.9]). Однако во всех известных примерах  $\mathcal{K}$  не является флаговым. Возникает вопрос:

- Для всех ли флаговых симплицальных комплексов верно  $\text{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \text{sup}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ ?

Так как во флаговом случае LS-категория (Теорема 5.18) и кольцо когомологий [BP, Theorem 4.5.8] момент-угол комплекса известны, вопрос допускает чисто комбинаторную формулировку:

- Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс на  $[m]$ . Обозначим  $d = \max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J$ . Всегда ли существует такой набор непересекающихся подмножеств  $A_1, \dots, A_{d+1} \subset [m]$ , что отображение

$$\tilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_1}) \otimes \dots \otimes \tilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_{d+1}}) \cong \tilde{H}^d(\mathcal{K}_{A_1} * \dots * \mathcal{K}_{A_{d+1}}) \rightarrow \tilde{H}^d(\mathcal{K}_{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{d+1}}),$$

индуцированное вложением  $\mathcal{K}_{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{d+1}} \hookrightarrow \mathcal{K}_{A_1} * \dots * \mathcal{K}_{A_{d+1}}$ , нетривиально?

(Классы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1} \in H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  можно считать  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -однородными, то есть  $\alpha_i \in \tilde{H}^{k_i}(\mathcal{K}_{A_i})$  для непересекающихся  $A_1, \dots, A_{d+1} \subset [m]$  и  $k_i \geq 0$ . Но тогда  $k_i = 0$  из соображений размерности.)

Перейдя, если нужно, от  $\mathcal{K}$  к  $\mathcal{K}_J$ , можно считать, что  $\max_{J \subset [m]} \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_J = \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}$  и  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{d+1}}$ . Наконец, можно считать, что классы  $\alpha_i \in \tilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_i})$  индуцированы образующей группы  $\tilde{H}^0(S^0)$  под действием симплицальных отображений  $\mathcal{K}_{A_i} \rightarrow S^0$  (любой элемент группы  $\tilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_i})$  является линейной комбинацией таких классов). Это позволяет переформулировать вопрос следующим образом:

- Пусть  $\mathcal{K}$  – флаговый симплицальный комплекс, и  $d = \text{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}$ . Обозначим как  $C_d = S^0 * \dots * S^0$  октаэдральную триангуляцию  $d$ -мерной сферы. Всегда ли существует полный подкомплекс  $\mathcal{K}_J$  и симплицальное отображение  $\mathcal{K}_J \rightarrow C_d$ , такое что соответствующий гомоморфизм  $\tilde{H}^d(C_d) \rightarrow \tilde{H}^d(\mathcal{K}_J)$  нетривиален?

Заметим: если  $X$  – конечный симплицальный комплекс и  $\text{cdim}_{\mathbb{Z}} X = d$ , то любой элемент  $\alpha \in \tilde{H}^d(X; \mathbb{Z})$  может быть индуцирован образующей группы  $\tilde{H}^d(S^d; \mathbb{Z})$  под действием некоторого *непрерывного* отображения  $f : X \rightarrow S^d$  (это следует из теории препятствий). По теореме

о симплициальной аппроксимации,  $f$  может быть сделано симплициальным после некоторого подразделения комплекса  $X$ . То есть, по сути, мы спрашиваем: “Достаточно ли подразбиты флаговые симплициальные комплексы?”

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ai] A. A. Айзенберг. Топологические приложения свойств колец Стенли-Райснера симплициальных комплексов. Тр. ММО, 73, №1 (2012), 47-85. [17](#)
- [BL] В. М. Бухштабер и И. Ю. Лимонченко. Произведения Масси, торическая топология и комбинаторика многогранников. Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 3-62. [18](#), [21](#)
- [PV] Т. Е. Панов и Я. А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Матем. сб., 207:11 (2016), 105-126. [3](#), [13](#), [16](#)
- [Ad] J. F. Adams. On the cobar construction. Proc Nat. Acad. Sci USA 42 (1956), 409-412. [7](#)
- [Al] P. Aluffi. Algebra: Chapter 0. Amer. Math. Soc., Providence, 2009. [6](#)
- [BG] P. Beben and J. Grbić. LS-category of moment-angle manifolds and higher order Massey products. Forum Mathematicum Vol. 33, 5 (2021), 1179-1205. [1](#), [3](#), [16](#), [19](#), [21](#)
- [BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. [1](#), [2](#), [4](#), [6](#), [8](#), [9](#), [12](#), [14](#), [17](#), [21](#)
- [Br] K. S. Brown. Cohomology of Groups. Springer-Verlag, 1982. [17](#)
- [Ca] Li Cai. Some calculations of the homology of loop spaces of moment-angle complexes using Hall words. Доклад на International Polyhedral Products Seminar от 16 декабря 2021 г. <http://math.princeton.edu/events/some-calculations-homology-loop-spaces-moment-angle-complexes-using-hall-words-2021-12> [13](#)
- [Dr] A. N. Dranishnikov. Boundaries of Coxeter groups and simplicial complexes with given links. J. of Pure and Appl. Algebra 137 (1999), 139-151. [3](#), [16](#), [17](#)
- [DS] G. Denham and A. I. Suciu. Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products. Pure and Appl. Math. Q. 3 (2007), 25-60. [2](#), [15](#), [16](#)
- [EG] S. Eilenberg and T. Ganea. On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups. Ann. of Math. Vol. 65, 3 (1957), 517-518. [17](#)
- [Fr] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series. Math. Scand. 37 (1975), no. 1, 29-39. [2](#), [8](#), [9](#), [10](#)
- [Ga] T. Ganea. Lusternik-Schnirelmann category and strong category. Illinois J. Math. 11(3) (1967), 417-427. [18](#)
- [Gi] M. Ginsburg. On the Lusternik-Schnirelmann category. Ann. of Math. Vol. 77, 3 (1963), 538-551. [16](#), [18](#)
- [GIPS] J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 152(1), 128-147. [1](#), [2](#), [13](#)
- [GPTW] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes. Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663-6682. [1](#), [2](#), [14](#)
- [Lö] C. Löfwall. On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. in Algebra, Algebraic Topology and their Interactions. J.-E. Roos ed. Lect. Notes Math. 1183., Springer-Verlag, Berlin/New York (1986), 291-338. [8](#), [9](#)
- [Mc] J. McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 2000. [7](#)
- [Mi] J. Milnor. Construction of Universal Bundles, II. Ann. of Math. Vol. 63, 3 (1956), 430-436. [18](#)
- [MM] J. W. Milnor and J. C. Moore. On the Structure of Hopf Algebras. Ann. of Math. Vol. 81, 2 (1965), 211-264. [2](#), [14](#), [15](#)
- [Pr] S. B. Priddy. Koszul resolutions. Trans. of the AMS 152 (1970), 39-60. [7](#), [9](#)
- [PR] T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293-322. [1](#), [2](#), [14](#)
- [PT] T. Panov and S. Theriault. The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes. Compositio Math. 155, no. 1 (2019), 206-228. [4](#), [9](#), [14](#)
- [Sw] R. G. Swan. Groups of Cohomological Dimension One. J. Algebra 12 (1969), 585-601. [17](#)
- [To] G. H. Toomer. Lusternik-Schnirelmann Category and the Moore Spectral Sequence. Math. Z. 138 (1974), 123-143. [3](#), [18](#)
- [Us] Yu. Ustinovskiy. On face numbers of flag simplicial complexes. Discrete Comput. Geom. 60, 688-697 (2018). [3](#), [16](#)
- [Wa] C. T. C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra. Ann. of Math. Vol. 72, 3 (1960), 429-444. [6](#)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА  
 НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»  
 Email address: [vylegf@gmail.com](mailto:vylegf@gmail.com)