Энтропия унитарного оператора в $\mathbb{C}^J$

Чернышев А.О.

1 Введение и основные определения

Пусть $\mathcal{X}$ – непустое множество и $\mathcal{B}$ – σ-алгебра подмножеств $X \subset \mathcal{X}$. Рассмотрим пространство с мерой $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$, где μ – вероятностная мера: $\mu(\mathcal{X}) = 1$.

Скажем, что $\chi = \{Y_1, \ldots, Y_J\}$ – разбиение множества $\mathcal{X}$, если

$$Y_j \in \mathcal{B}, \quad \mu(\mathcal{X} \setminus \cup_{1\le j\le J} Y_j) = 0, \quad \mu(Y_j \cap Y_k) = 0, \quad \forall\, j,k \in \{1, \ldots, J\}, \quad k \ne j. \tag{1.1}$$

Пусть $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – эндоморфизм пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$. Это означает, что для любого $X \in \mathcal{B}$ множество $F^{-1}(X)$ (полный прообраз X) также лежит в $\mathcal{B}$ и $\mu(X) = \mu(F^{-1}(X))$. Обратимые эндоморфизмы называются автоморфизмами. Пусть $\mathrm{End}(\mathcal{X})$ обозначает полугруппу всех эндоморфизмов пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$. Имеется две стандартные конструкции, связанные с произвольным $F \in \mathrm{End}(\mathcal{X}, \mu)$.

(1). Всякий такой F порождает изометрию (унитарный оператор, если F – автоморфизм) U_F на $L^2(\mathcal{X}, \mu)$ (оператор Купмана):

$$L^2(\mathcal{X}, \mu) \ni f \mapsto U_F f = f \circ F, \qquad U_F = \mathrm{Koop}(F).$$

(2). Для любого $F \in End(\mathcal{X}, \mu)$ можно вычислить его метрическую энтропию (известную также под названием энтропия Колмогорова-Синая) $h(F)$.

В [1, 3, 13] ставится вопрос об определении функции $\mathfrak{h}$ на полугруппе изометрических операторов $\mathrm{Iso}(L^2(\mathcal{X}, \mu))$ так, чтобы диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{End}(\mathcal{X},\mu) \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "\mathrm{Koop}"] & \\ \mathbb{R}_+ & & \mathrm{Iso}(L^2(\mathcal{X},\mu)) \arrow[ll, "\mathfrak{h}"'] \end{tikzcd}$$

была коммутативна.

Напомним конструкцию метрической энтропии эндоморфизма. Пусть $\mathcal{S}_{n,K}$ – множество всех отображений $\{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, K\}$. Для любого разбиения $\chi = \{X_0, \ldots, X_K\}$ и для любого $\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}$ определим измеримое множество $\mathbf{X}_\sigma \subset \mathcal{X}$

$$\mathbf{X}_\sigma = F^{-n}(X_{\sigma(n)}) \cap \ldots \cap F^{-1}(X_{\sigma(1)}) \cap X_{\sigma(0)}.$$

Определим $h_F(\chi, n)$ с помощью равенства

$$h_F(\chi, n+1) = -\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}} \mu(\mathbf{X}_\sigma) \log \mu(\mathbf{X}_\sigma).$$

Известно (см. [11]), что h_F как функция второго аргумента, субаддитивна: $h_F(\chi, n+m) \le h_F(\chi, n) + h_F(\chi, m)$. Отсюда следует существование предела

$$h_F(\chi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h_F(\chi, n).$$

Кроме этого, в [11] доказано, что при измельчении разбиения χ функция $h_F(\chi)$ не убывает. Метрическая энтропия эндоморфизма F определяется как

$$h(F) = \sup_{\chi} h_F(\chi).$$

В статьях [1, 3, 13] по аналогичной схеме строится энтропия $\mathfrak{h}$ унитарного оператора. Конструкция энтропии унитарного оператора основана на понятии μ-нормы, которое будет сформулировано далее.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{X}, \mu)$ со скалярным произведением и нормой

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{X}} f\overline{g}\, d\mu, \qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, g\rangle}.$$

Для любого ограниченного оператора W на $\mathcal{H}$ пусть $\|W\|$ – операторная норма в пространстве L^2, определенная равенством

$$\|W\| = \sup_{\|f\|=1} \|Wf\|.$$

Для любого $X \in \mathcal{B}$ рассмотрим ортогональный проектор

$$\widehat{\mathbf{1}}_X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \mathcal{H} \ni f \mapsto \widehat{\mathbf{1}}_X f = \mathbf{1}_X \cdot f,$$

где $\mathbf{1}_X$ – индикатор множества X.

Пусть W – ограниченный оператор на $\mathcal{H}$. Для любого разбиения $\chi = \{Y_0, ..., Y_J\}$ множества $\mathcal{X}$ определим

$$\mathcal{M}_\chi(W) = \sum_{j=0}^{J} \mu(Y_j) \|W\widehat{\mathbf{1}}_{Y_j}\|^2. \tag{1.2}$$

Определим μ-норму оператора W равенством

$$\|W\|_\mu = \inf_{\chi} \sqrt{\mathcal{M}_\chi(W)}. \tag{1.3}$$

Группу унитарных операторов на $\mathcal{H}$ обозначим $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Пусть $\chi = \{X_0, \dots, X_K\}$ – разбиение $\mathcal{X}$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}$. В [3] предложено следующее определение энтропии $\mathfrak{h}_\mu(U)$ оператора $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, мотивированное тем, что для $U_F = \mathrm{Koop}(F)$ выполнено $\mathfrak{h}_\mu(U_F) = h(F)$. Рассмотрим

$$\mathfrak{X}_\sigma = \widehat{\mathbf{1}}_{X_{\sigma(n)}} U \widehat{\mathbf{1}}_{X_{\sigma(n-1)}} U \dots U \widehat{\mathbf{1}}_{X_{\sigma(0)}}. \tag{1.4}$$

Определим

$$\mathfrak{h}_\mu(U, \chi, n) = -\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}} \|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2 \log \|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2,$$

$$\mathfrak{h}_\mu(U, \chi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathfrak{h}_\mu(U, \chi, n), \qquad \mathfrak{h}_\mu(U) = \sup_{\chi} \mathfrak{h}_\mu(U, \chi). \tag{1.5}$$

Если предел (1.5) существует, то $\mathfrak{h}_\mu(U)$ называется энтропией оператора $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. К сожалению, неизвестно, всегда ли существует предел (1.5)? Есть ли монотонность функции $\mathfrak{h}_\mu(U, \chi)$ при измельчении разбиения? В [1] предложено другое определение энтропии $\mathfrak{h}(U)$ оператора $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ (оно формулируется в разделе 3) такое, что для операторов Купмана $U_F = \mathrm{Koop}(F)$: $\mathfrak{h}(U_F) = h(F)$. Конструкция энтропии $\mathfrak{h}(U)$ основана на том, что оператору $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ставится в соответствие бистохастический оператор $\mathbf{B} = b(U)$. После этого определение становится идеологически близким к конструкции из [9, 10]. Недостатком второго определения является тот факт, что отображение $U \mapsto b(U)$ пока удается определить лишь для нескольких специальных (хотя и естественных) классов унитарных операторов.

Результаты, полученные в данной статье, относятся к случаю, когда множество $\mathcal{X}$ конечно: $\#\mathcal{X} = J$ и мера j-й точки равна $\mu_j > 0$, $\sum_{j\in\mathcal{X}} \mu_j = 1$. В этой ситуации вместо $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ мы будем использовать обозначение $\mathcal{U}(J, \mu)$. Матрица $\mathbf{B}$ – бистохастическая, если

$$\mathbf{B}E_+ = E_+, \qquad E_-\mathbf{B} = E_-, \qquad \mathbf{B}_{jk} \ge 0 \text{ для любого } j, k \in \mathbb{Z}_J, \tag{1.6}$$

где $E_+ = (1, \dots, 1)^T$, $E_- = (1, \dots, 1)$. Другими словами, $\mathbf{B}$ – это матрица с неотрицательными элементами с единичными суммами по каждой строке и по каждому столбцу. Пусть $\mathcal{B}(J)$ – полугруппа бистохастических матриц. В данной статье будут установлены следующие факты:

• Пусть $W = (W_{jk}) \in L(\mathcal{H})$ – оператор на $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^J$. Тогда

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{j\in\mathcal{X}} \mu_j |W_{jk}|^2.$$

• μ-Норма оператора $\|\cdot\|_\mu$ – норма на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

• Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\chi = \{X_0, \dots, X_K\}$, $\kappa = \{Y_0, \dots, Y_N\}$ – произвольные разбиения множества $\mathcal{X}$. Тогда

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{n=0}^{K} \sum_{m=0}^{N} \|\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W \widehat{\mathbf{1}}_{Y_m}\|_\mu^2.$$

• Пусть $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$. Предположим, что κ – подразбиение разбиения χ. Тогда $\mathfrak{h}(U, \chi, n) \le \mathfrak{h}(U, \kappa, n)$.

• Пусть b – отображение, сопоставляющее всякому оператору $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$ на $\mathcal{H}$ оператор $\mathbf{B} = b(U) \in \mathcal{B}(J)$ по формуле $\mathbf{B}_{jk} = \frac{\mu_j}{\mu_k} |U_{jk}|^2$. Для вычисления энтропии $\mathfrak{h}$ оператора $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ полезно рассмотреть операторы

$$\mathbf{B}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}^k, \qquad \mathbf{B}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{B}_n. \tag{1.7}$$

В разделе 5 будет доказано, что $\mathbf{B}_\infty \in \mathcal{B}(J)$ и является ортогональным проектором на собственное подпространство единицы Π_1 оператора $\mathbf{B}$. Пусть $E_\mu = (\mu_0, \dots, \mu_{J-1})^T$. В разделе 6 мы докажем, что энтропия оператора $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$ вычисляется по следующей формуле

$$\mathfrak{h}(U) = -\sum_{j,k\in\mathcal{X}} \alpha_k \mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk}, \quad b(U) = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}_\infty E_\mu = \alpha. \tag{1.8}$$

В частности, если мера равномерно распределена между точками $\mathcal{X}$, то есть $\mu_0 = \ldots = \mu_{J-1} = \frac{1}{J}$, мы получим

$$\mathfrak{h}(U) = -\frac{1}{J} \sum_{j,k \in \mathcal{X}} \mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk}. \tag{1.9}$$

• В разделе 7 устанавливается связь двух определений. Пусть $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$, $\chi_{\odot} = \{\{0\}, \ldots, \{J-1\}\}$ – разбиение $\mathcal{X}$ на одноточечные множества, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}$. Тогда

$$\mathfrak{h}_\mu(U, \chi_\odot) = \mathfrak{h}(U).$$

• Пусть $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ – подмножества бистохастических операторов у которых кратность собственного значения единица равна единице и больше либо равна 2 соответственно, S_J – группа перестановок J элементов. В разделе 8 получены следующие свойства энтропии $\mathfrak{h}(U)$ оператора $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$:

1. Значение функции $\mathfrak{h}(U)$ определяется соответствующим бистохастическим оператором $\mathbf{B} = b(U)$.
2. Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{U}(J, \mu)$ – диагональные. Тогда $\mathfrak{h}(U) = \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1 U \mathcal{D}_2)$.
3. Пусть $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$. Тогда

$$\max_{b(U) \in \mathbf{M}_1} \mathfrak{h}(U) = \log J.$$

4. Пусть $\sigma \in S_J$ – перестановка, $(U_\sigma)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}} \delta_{\sigma(j)k} \in \mathcal{U}(J, \mu)$, $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$ такой, что $b(U) \in \mathbf{M}_1$. Тогда $\mathfrak{h}(U) = \mathfrak{h}(U_\sigma^{-1} U U_\sigma)$.

• Назовем энтропией оператора $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$ число $\mathfrak{h}(\mathbf{B}) = \mathfrak{h}(U)$, определенное в (1.8). В разделе 9 доказывается, что для почти каждого бистохастического оператора его энтропия определяется равенством (1.9). Обратим внимание, что энтропия таких операторов не требует вычисления элементов матрицы $\mathbf{B}_\infty$.

• В разделе 10 мы применяем формулу (1.8) для вычисления энтропии конкретных операторов:

1. Пусть $\mathcal{D} \in \mathcal{U}(J, \mu)$ – диагональный унитарный оператор. Тогда $\mathfrak{h}(\mathcal{D}) = 0$.
2. Пусть $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $F \in \mathrm{Aut}(\mathcal{X}, \mu)$. Тогда $F = \sigma$ – перестановка J элементов. В таком случае $U_\sigma = \mathrm{Koop}(\sigma)$. В разделе 10 доказывается, что $\mathfrak{h}(U_\sigma) = 0$.
3. Пусть $F_J \in \mathcal{U}(J, \mu)$ – оператор Фурье, который определяется в разделе 10. Тогда энтропия оператора F_J равна $\mathfrak{h}(F_J) = \log J$.

В данной работе, при вычислении энтропии унитарного оператора, естественным образом возникает бистохастический оператор. В сравнении с нашей работой, в статьях [9, 10] бистохастический оператор выступает отправной точкой в построении энтропии. В [9, 10] аксиоматически вводится понятие энтропии бистохастического оператора на множестве измеримых функций, область значений которых содержится в отрезке $[0, 1]$.

Соотношения, аналогичные (1.8), встречались в различных областях математики. Например, в теории динамических систем метрическая энтропия марковской меры $\mu_{\Pi,p}$ определяется выражением $-\sum_{j,k=1}^N p_j \pi_{ij} \log \pi_{ij}$ (см. [11]), где $\pi_{i,j}, p$ – стохастическая матрица и вектор из единичного симплекса соответственно, определяющие марковскую меру $\mu_{\Pi,p}$. Подчеркнем, что вектор $a = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{J-1})$ в формуле (1.8) также из единичного симплекса, то есть $\sum_{j=0}^{J-1} \alpha_j =$

1, поэтому по бистохастической матрице $\mathbf{B}$ и вектору a определяется марковская мера $\mu_{\mathbf{B},a}$ (см., например [11]). Таким образом, формула (1.8) в теории динамических систем означает энтропию марковской меры $\mu_{\mathbf{B},a}$. В теории информации известно (см. [8]), что в случае, когда марковская цепь неприводима, апериодична и положительно рекуррентна, ее стационарное распределение μ единственно и ее энтропия равна $-\sum_{j,k=1}^{N}\mu_j P_{jk}\log P_{jk}$, где P_{jk} – элементы бистохастической матрицы, а стационарное распределение μ удовлетворяет соотношениям $\mu_j=\sum_{i=1}^{N}\mu_i P_{ij}$ для любых $j\in\{1,\dots,N\}$. В работах [4, 5, 12] энтропия унитарных операторов вычисляется согласно равенствам аналогичным (1.8). Отметим также, что определения энтропии, имеющиеся в литературе, основаны на конструкциях отличных от μ-нормы.

2 μ-Норма оператора

Пусть $\mathcal{X}$ – конечное множество из J элементов. Иногда нам будет полезно использовать на $\mathcal{X}$ структуру кольца $\mathbb{Z}_J=\mathbb{Z}/J\mathbb{Z}$. Поэтому мы будем полагать $\mathcal{X}=\mathbb{Z}_J$. В данном случае σ-алгебра $\mathcal{B}$ состоит из всех подмножеств $X\subset\mathcal{X}$. Предположим, что $\mu(\{j\})=\mu_j>0$, $j\in\mathbb{Z}_J$. Тогда $\mathcal{H}=\mathbb{C}^J$ со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}_J}\mu_j x_j\overline{y_j}$.

Пусть $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – пространство линейных операторов на $\mathcal{H}$. В данном случае линейные операторы на $\mathcal{H}$ отождествляются с $J\times J$-матрицами.

В частности, для любого $X\subset\mathcal{X}$

$$\widehat{\mathbf{1}}_X=\operatorname{diag}\big(\mathbf{1}_X(0),\dots,\mathbf{1}_X(J-1)\big),\qquad \mathbf{1}_X(j)=\begin{cases}1, & \text{если } j\in X\\ 0, & \text{если } j\notin X.\end{cases}$$

2.1 μ-Норма и подразбиение

Лемма 2.1. *Пусть $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\chi=\{Y_0,\dots,Y_K\}$ – разбиение множества $Y\in\mathcal{B}$. Тогда*

$$\mu(Y)\|W\widehat{\mathbf{1}}_Y\|^2\geq\sum_{j=0}^{K}\mu(Y_j)\|W\widehat{\mathbf{1}}_{Y_j}\|^2.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующих замечаний

$$\|W\widehat{\mathbf{1}}_{Y_j}\|\leq\|W\widehat{\mathbf{1}}_Y\|,\qquad\sum_{j=0}^{K}\mu(Y_j)=\mu(Y).$$

□

Следствие 2.1. *Из леммы 2.1 следует, что $\mathcal{M}_{\chi'}(W)\leq\mathcal{M}_{\chi}(W)$, если χ' – подразбиение χ. Поэтому μ-норма достигается на разбиении на одноточечные множества.*

2.2 Вычисление μ-нормы оператора W

Лемма 2.2. *Пусть $W\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда*

$$\|W\widehat{\mathbf{1}}_{\{j\}}\|^2=\frac{1}{\mu_j}\sum_{k\in\mathbb{Z}_J}\mu_k|W_{kj}|^2.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{H}$,

$$\|W\widehat{\mathbf{1}}_{\{j\}}x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k x_j W_{kj} \overline{x_j W_{kj}} = |x_j|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k |W_{kj}|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{\mu_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k |W_{kj}|^2.$$

Поэтому

$$\|W\widehat{\mathbf{1}}_{\{j\}}\|^2 \leq \frac{1}{\mu_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k |W_{kj}|^2.$$

Возьмем вектор $x_* = (0, \dots, \mu_j^{-1/2}, 0, \dots, 0), \quad \|x_*\| = 1$, где только j-я компонента ненулевая. Тогда

$$\|W\widehat{\mathbf{1}}_{\{j\}}x_*\|^2 = \frac{1}{\mu_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k |W_{kj}|^2.$$

Так что норма оператора $W\widehat{\mathbf{1}}_{\{j\}}$ достигается на векторе x_*. □

Лемма 2.3. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда*

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j |W_{jk}|^2.$$

Доказательство. В силу следствия 2.1 будем вычислять μ-норму на самом мелком разбиении $\{\{0\}, ..., \{J-1\}\}$. Согласно лемме 2.2 и (1.2), (1.3)

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k \|W\widehat{\mathbf{1}}_{\{k\}}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k \frac{1}{\mu_k} \sum_{s\in\mathbb{Z}_J} |W_{sk}|^2 \mu_s = \sum_{s,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_s |W_{sk}|^2.$$

□

2.3 μ-Норма оператора – норма на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Замечание 2.1. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $D_\mu = diag(\sqrt{\mu_0}, \dots, \sqrt{\mu_{J-1}})$. Тогда $\|W\|_\mu = \|D_\mu W\|_F$, где $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса, то есть $\|W\|_F^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} |W_{jk}|^2$.*

Доказательство. Данное замечание вытекает из леммы 2.3. □

Лемма 2.4. $\|\cdot\|_\mu$ *– норма на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Пусть $\|W\|_\mu = 0$. Тогда, согласно замечанию 2.1, $D_\mu W = 0$. Поэтому $W = 0$. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено $\|\lambda W\|_\mu = \|D_\mu \lambda W\|_F = |\lambda| \|D_\mu W\|_F = |\lambda| \|W\|_\mu$. Неравенство треугольника вытекает из следующих неравенств:

$$\|A + B\|_\mu = \|D_\mu A + D_\mu B\|_F \leq \|D_\mu A\|_F + \|D_\mu B\|_F = \|A\|_\mu + \|B\|_\mu.$$

Лемма доказана. □

Отметим, что в бесконечномерном случае μ-норма, как правило, является полунормой. Соответствующие примеры можно найти в [3].

Лемма 2.5. *Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда $\|AB\|_\mu \le \|A\|_\mu \|B\|_F$.*

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца.

$$\begin{aligned}\|AB\|_\mu^2 &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j |(AB)_{jk}|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j \Big| \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_J} A_{j\alpha} B_{\alpha k}\Big|^2 \\ &\le \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_J} |A_{j\alpha}|^2 \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_J} |B_{\alpha k}|^2 = \sum_{j,\alpha\in\mathbb{Z}_J} \mu_j |A_{j\alpha}|^2 \sum_{\alpha,k\in\mathbb{Z}_J} |B_{\alpha k}|^2 \\ &\le \|A\|_\mu^2 \|B\|_F^2.\end{aligned}$$

□

2.4 Аддитивность

Замечание 2.2. *Для любого разбиения $\chi = \{X_0, \dots, X_K\}$ множества $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_J$*

$$\sum_{n=0}^{K} \widehat{\mathbf{1}}_{X_n} = \widehat{\mathbf{1}}_{\mathcal{X}}.$$

Лемма 2.6. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\chi = \{X_0, \dots, X_K\}$, $\kappa = \{Y_0, \dots, Y_N\}$ – произвольные разбиения множества $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_J$. Тогда*

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{n=0}^{K} \sum_{m=0}^{N} \|\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W \widehat{\mathbf{1}}_{Y_m}\|_\mu^2.$$

Доказательство. Вычислим элементы матрицы $\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W \widehat{\mathbf{1}}_{X_m}$:

$$(\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W \widehat{\mathbf{1}}_{Y_m})_{jk} = \mathbf{1}_{X_n}(j) W_{jk} \mathbf{1}_{Y_m}(k).$$

Согласно лемме 2.3 и замечанию 2.2

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{K} \sum_{m=0}^{N} \|\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W \widehat{\mathbf{1}}_{Y_m}\|_\mu^2 &= \sum_{n=0}^{K} \sum_{m=0}^{N} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j \mathbf{1}_{X_n}(j) |W_{jk}|^2 \mathbf{1}_{Y_m}(k) \\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j \sum_{n=0}^{K} \mathbf{1}_{X_n}(j) |W_{jk}|^2 \sum_{m=0}^{N} \mathbf{1}_{Y_m}(k) \\ &= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j |W_{jk}|^2 = \|W\|_\mu.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Следствие 2.2. *Из леммы 2.6 вытекает аддитивность слева и справа:*

$$\|W\|_\mu^2 = \sum_{n=0}^{K} \|\widehat{\mathbf{1}}_{X_n} W\|_\mu^2, \qquad \|W\|_\mu^2 = \sum_{m=0}^{N} \|W \widehat{\mathbf{1}}_{Y_n}\|_\mu^2.$$

Доказательство. В самом деле, если в лемме 2.6 положить $\kappa = \{\mathcal{X}\}$, то мы получим первое равенство следствия. Если положить $\chi = \{\mathcal{X}\}$, то получим второе. □

Отметим, что в общем случае (когда мощность множества $\mathcal{X}$ бесконечна) аддитивность слева установлена в [3]. Там же получено неравенство

$$\|W\|_\mu^2 \leq \sum_{m=0}^{N} \|W\widehat{\mathbf{1}}_{Y_n}\|_\mu^2.$$

Есть ли аддитивность справа в случае $\#\mathcal{X} = \infty$ – неизвестно.

2.5 Вычисление $\|\widehat{g_1}W\widehat{g_2}\|_\mu^2$

Лемма 2.7. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\widehat{g}_1, \widehat{g}_2$ – диагональные операторы. Тогда*

$$\|\widehat{g_1}W\widehat{g_2}\|_\mu^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_j |(\widehat{g_1})_j|^2 |W_{jk}|^2 |(\widehat{g_2})_k|^2.$$

Доказательство. Вычислим элементы матрицы $\widehat{g_1}W\widehat{g_2}$:

$$(\widehat{g_1}W\widehat{g_2})_{jk} = (\widehat{g_1})_j W_{jk} (\widehat{g_2})_k.$$

Согласно лемме 2.3 получим требуемое. □

3 Определение энтропии унитарного оператора, [1]

3.1 Унитарный оператор

Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $W^* = (W^*_{jk})$ – оператор, сопряженный к W, то есть

$$\langle Wx, y\rangle = \langle x, W^*y\rangle \text{ для любых } x, y \in \mathcal{H}.$$

Тогда $W^*_{jk} = \frac{\mu_k}{\mu_j}\overline{W_{kj}}$.

Лемма 3.1. *Оператор $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \frac{\mu_n}{\mu_k} U_{mk}\overline{U_{nk}} = \delta_{mn}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} \frac{\mu_k}{\mu_n} U_{km}\overline{U_{kn}} = \delta_{nm}. \tag{3.1}$$

Доказательство. По определению унитарного оператора $U^*U = UU^* = I$. □

3.2 Отображение $b\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Пусть $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mu_0, \dots, \mu_{J-1})$, $(\mathbf{W}_{jk}) = (|W_{jk}|^2) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Рассмотрим отображение $b\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такое, что $b(W) = \mathbf{AWA}^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{B} = b(W), \qquad \mathbf{B}_{jk} = \frac{\mu_j}{\mu_k}\mathbf{W}_{jk}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.2. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда существует $\nu = b(W) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что для любых $\widehat{g_1}, \widehat{g_2}$ – диагональных операторов выполнено*

$$\|\widehat{g_1} W \widehat{g_2}\|^2_\mu = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \mu_k |(\widehat{g_1})_j|^2 \nu_{jk} |(\widehat{g_2})_k|^2. \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.7 равенство в утверждении леммы выполнено тогда и только тогда, когда для любых диагональных операторов $\widehat{g_1}, \widehat{g_2}$

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} |(\widehat{g_1})_j|^2 \big(\mu_j |W_{jk}|^2 - \mu_k \nu_{jk}\big) |(\widehat{g_1})_k|^2 = 0.$$

Следовательно

$$\nu_{jk} = \frac{\mu_j}{\mu_k} |W_{jk}|^2 = \big(b(W)\big)_{jk}.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3.1. *Пусть $W = U \in \mathcal{U}(J,\mu)$. Тогда оператор $\nu = b(U)$, определенный равенством (3.2), является бистохатическим.*

Доказательство. Замечание 3.1 вытекает из леммы 3.1, положив $m = n$. □

Отображение b полезно рассмотреть на группе унитарных операторов, то есть когда $b\colon \mathcal{U}(J,\mu) \to \mathcal{B}(J)$.

Замечание 3.2. *Отображение $b\colon \mathcal{U}(J,\mu) \to \mathcal{B}(J)$ не является сюрьективным.*

Доказательство. Действительно, прямым вычислением можно убедиться, что для бистохастической матрицы

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не существует унитарной U такой, что $b(U) = \mathbf{B}$. □

3.3 Определение энтропии

Рассмотрим набор диагональных операторов
$\mathbf{G} = \{\widehat{g_0}, \ldots, \widehat{g_n}\}$, $n \geq 1$. Для всякого $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ определим

$$\mathcal{I}_W(\mathbf{G}) = \sum_{j_0,\ldots,j_n\in\mathbb{Z}_J} \mu_{j_0} |(\widehat{g_n})_{j_n}|^2 \nu_{j_n j_{n-1}} |(\widehat{g_{n-1}})_{j_{n-1}}|^2 \ldots |(\widehat{g_1})_{j_1}|^2 \nu_{j_1 j_0} |(\widehat{g_0})_{j_0}|^2, \tag{3.4}$$

где $\nu = b(W)$.

Следующая лемма устанавливает связь $\mathcal{I}_W(\mathbf{G})$ с $\|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu$, где оператор $\mathfrak{X}_\sigma$ определен соотношением (1.4).

Лемма 3.3. *Пусть $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда выполнены следующие утверждения:*
- *Если $n = 1$, то $\mathcal{I}_W(\{\widehat{g_0}, \widehat{g_1}\}) = \|\widehat{g_1} W \widehat{g_0}\|^2_\mu$.*
- *Пусть $W = U_F$, где $F = Aut(\mathbb{Z}_J)$, $\mathbf{G} = \{\widehat{g_0}, \ldots, \widehat{g_n}\}$. Тогда*

$$\mathcal{I}_{U_F}(\mathbf{G}) = \|\widehat{g_n} U_F \widehat{g_{n-1}} \ldots U_F \widehat{g_0}\|^2_\mu.$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 3.2. Докажем второе. Так как $F = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_J)$, то F – перестановка J элементов. Поэтому $U_F = \mathrm{Koop}(F)$: $(U_F)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{F(j)\}}(k)$. В таком случае

$$\mathbf{B}_F = b(U_F), \qquad (\mathbf{B}_F)_{jk} = \mathbf{1}_{\{F(j)\}}(k).$$

Согласно (3.4)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{U_F}(\mathbf{G}) &= \sum_{j_0,\dots,j_n\in\mathbb{Z}_J} |(\widehat{g_n})_{j_n}|^2(\mathbf{B}_F)_{j_nj_{n-1}}|(\widehat{g_{n-1}})_{j_{n-1}}|^2\dots(\mathbf{B}_F)_{j_1j_0}|(\widehat{g_0})_{j_0}|^2\mu_{j_0}\\
&= \sum_{j_0,\dots,j_n\in\mathbb{Z}_J} |(\widehat{g_n})_{j_n}|^2\mathbf{1}_{\{F(j_n)\}}(j_{n-1})|(\widehat{g_{n-1}})_{j_{n-1}}|^2\dots\mathbf{1}_{\{F(j_1)\}}(j_0)|(\widehat{g_0})_{j_0}|^2\mu_{j_0}\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}_J} |(\widehat{g_n})_j|^2|(\widehat{g_{n-1}})_{F(j)}|^2|(\widehat{g_{n-1}})_{F^2(j)}|^2\dots|(\widehat{g_0})_{F^n(j)}|^2\mu_{F^n(j)}.
\end{aligned}$$

Вычислим элементы матрицы $\widehat{g_n}U_F\widehat{g_{n-1}}\dots U_F\widehat{g_0}$:

$$\begin{aligned}
\big(\widehat{g_n}U_F\widehat{g_{n-1}}\dots U_F\widehat{g_0}\big)_{jk} &= \sum_{j_{n-1},\dots,j_1\in\mathbb{Z}_J} (\widehat{g_n})_j(U_F)_{jj_{n-1}}(\widehat{g_{n-1}})_{j_{n-1}}\dots(U_F)_{j_1k}(\widehat{g_0})_k\\
&= \sum_{j_{n-1},\dots,j_1\in\mathbb{Z}_J} \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}(\widehat{g_n})_j\mathbf{1}_{\{F(j)\}}(j_{n-1})\dots\mathbf{1}_{\{F(j_1)\}}(k)(\widehat{g_0})_k\\
&= \sqrt{\frac{\mu_{F^n(j)}}{\mu_j}}(\widehat{g_n})_j(\widehat{g_{n-1}})_{F(j)}\dots(\widehat{g_0})_{F^n(j)}\mathbf{1}_{\{F^n(j)\}}(k).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 2.3

$$\begin{aligned}
\|\widehat{g_n}U_F\widehat{g_{n-1}}\dots U_F\widehat{g_0}\|^2_\mu &= \sum_{j\in\mathbb{Z}_J} |(\widehat{g_n})_j|^2|(\widehat{g_{n-1}})_{F(j)}|^2|(\widehat{g_{n-1}})_{F^2(j)}|^2\dots|(\widehat{g_0})_{F^n(j)}|^2\mu_{F^n(j)}\\
&= \mathcal{I}_{U_F}(\mathbf{G}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Пусть $\sigma\in\mathcal{S}_{n,K}$. Для любого разбиения $\chi = \{X_0,\dots,X_K\}$ множества $\mathcal{X}$ рассмотрим $\mathbf{G}_\sigma = \mathbf{G}_\sigma(\chi) = \{\widehat{\mathbf{1}}_{X_{\sigma(0)}},\dots,\widehat{\mathbf{1}}_{X_{\sigma(n)}}\}$. Для любого оператора $U\in\mathcal{U}(J,\mu)$ определим

$$\mathfrak{h}(U,\chi,n) = -\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n,K}} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi))\log\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)).$$

$$\mathfrak{h}(U,\chi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathfrak{h}(U,\chi,n), \qquad \mathfrak{h}(U) = \sup_\chi\mathfrak{h}(U,\chi). \tag{3.5}$$

Если предел (3.5) существует, то $\mathfrak{h}(U)$ называется энтропией оператора U.

Данная конструкция была предложена в [1]. В работе [1] было показано, что для регулярных (см. [13]) унитарных операторов на $L^2(\mathbb{T}^n,\mu)$, где $\mathbb{T}^n$ – тор, μ – мера Лебега на $\mathbb{T}^n$ ($d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n}dx$), для купмановских операторов на $L^2(\mathcal{X},\mu)$ и для конечномерных операторов на $\mathbb{C}^J$ с "равномерной" мерой предел (3.5) существует. Кроме этого, в [1] показано, что на перечисленных операторах, функция $\mathfrak{h}(U,\chi)$ приближается к верхней грани (3.5) при измельчении разбиения $\mathcal{X}$.

В данной статье рассматривается случай $\#\mathcal{X}<\infty$. В отличие от [1] мы не предполагаем, что мера μ распределена равномерно между точками $\mathcal{X}$. В этом случае существование предела (3.5) неочевидно. Также неясно верно ли, что к верхней грани (3.5) функция $\mathfrak{h}(U,\chi)$ приближается при измельчении разбиения.

3.4 Вычисление $\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi))$

Лемма 3.4. *Пусть* $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\chi = \{X_0, \ldots, X_K\}$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}$. *Тогда*

$$\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) = \sum_{j_0,\ldots,j_n \in \mathbb{Z}_J} \mu_{j_n} |U_{j_n j_{n-1}} \ldots U_{j_1 j_0}|^2 \mathbf{1}_{X_{\sigma(n)}}(j_n) \ldots \mathbf{1}_{X_{\sigma(0)}}(j_0)$$

Доказательство. Используя (3.4) и равенство $\nu = b(U)$, получим требуемое. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть* $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\chi_\odot = \{\{0\}, \ldots, \{J-1\}\}$ – *разбиение* $\mathcal{X}$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}$ *на отдельные точки. Тогда*

$$\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) = \mu_{\sigma(n)} |U_{\sigma(n)\sigma(n-1)} U_{\sigma(n-1)\sigma(n-2)} \ldots U_{\sigma(1)\sigma(0)}|^2.$$

4 Монотонность $\mathfrak{h}$ при измельчении разбиения

Перед доказательством основного утверждения данного раздела докажем две вспомогательные леммы. Рассмотрим отображение $p\colon \mathbb{Z}_{k+1} \to \mathbb{Z}_k$ такое, что

$$p(j) = j \text{ если } j \in \{0, 1, \ldots, k\} \text{ и } p(k+1) = k.$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}$, $A_\sigma = \{\lambda \in \mathcal{S}_{n,k+1} \mid p \circ \lambda = \sigma\}$. *Тогда*

$$\mathcal{S}_{n,k+1} = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}} A_\sigma.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in A_{\sigma'} \cap A_{\sigma''}$ при $\sigma' \neq \sigma''$. Тогда $\sigma' = p \circ \lambda = \sigma''$. Поэтому $A_{\sigma'} \cap A_{\sigma''} = \varnothing$.

Докажем следующее включение $\mathcal{S}_{n,k+1} \subset \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}} A_\sigma$. Пусть $\lambda \in \mathcal{S}_{n,k+1}$, $M = \{m \in \mathbb{Z}_J \mid \lambda(m) = k+1\}$. Возьмем $\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}$ такое, что для любого $m \in M$ $\sigma(m) = k$, а для любого $m \in \mathbb{Z}_J \setminus M$ $\sigma(m) = \lambda(m)$. Тогда если $m \in M$, то $p \circ \lambda(m) = p(k+1) = k = \sigma(m)$, а если $m \in \mathbb{Z}_n \setminus M$, то $p \circ \lambda(m) = \lambda(m) = \sigma(m)$, то есть $p \circ \lambda = \sigma$. Обратное включение $\mathcal{S}_{n,k+1} \supset \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,k}} A_\sigma$ выполнено по определению множества A_σ. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\kappa = \{Y_0, \ldots, Y_{k+1}\}$ является подразбиением разбиения $\chi = \{X_0, \ldots, X_k\}$ таким, что $X_0 = Y_0, \ldots, X_{k-1} = Y_{k-1}$, $X_k = Y_k \cup Y_{k+1}$. Рассмотрим набор $\mathbf{G}_\lambda(\kappa) = \{\widehat{\mathbf{1}}_{Y_{\lambda(0)}}, \ldots, \widehat{\mathbf{1}}_{Y_{\lambda(n)}}\}$, $\lambda \in \mathcal{S}_{n,k+1}$.

Лемма 4.2. *Пусть* $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$. *Тогда*

$$\sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) = \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)).$$

Доказательство. Пусть $M = \{m \in \mathbb{Z}_n \colon \sigma(m) \in \{0, \dots, k-1\}\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) &= \sum_{j_0,\dots,j_n \in \mathbb{Z}_J} \mu_{j_n} |U_{j_n j_{n-1}} \dots U_{j_1 j_0}|^2 \mathbf{1}_{X_{\sigma(n)}}(j_n) \dots \mathbf{1}_{X_{\sigma(0)}}(j_0) \\
&= \sum_{j_0,\dots,j_n \in \mathbb{Z}_J} \mu_{j_n} |U_{j_n j_{n-1}} \dots U_{j_1 j_0}|^2 \prod_{m \in M} \mathbf{1}_{Y_{\sigma(m)}}(j_m) \prod_{m \in \mathbb{Z}_J \setminus M} \mathbf{1}_{X_k}(j_m) \\
&= \sum_{j_0,\dots,j_n \in \mathbb{Z}_J} \mu_{j_n} |U_{j_n j_{n-1}} \dots U_{j_1 j_0}|^2 \prod_{m \in M} \mathbf{1}_{Y_{\sigma(m)}}(j_m) \sum_{\lambda \in A_\sigma} \prod_{m \in \mathbb{Z}_J \setminus M} \mathbf{1}_{Y_{\lambda(m)}}(j_m) \\
&= \sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

□

Следствие 4.1. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$. Тогда*

$$\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \leq \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) \text{ для любого } \lambda \in A_\sigma.$$

Лемма 4.3. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J, \mu)$. Предположим, что κ – подразбиение разбиения χ. Тогда $\mathfrak{h}(U, \chi, n) \leq \mathfrak{h}(U, \kappa, n)$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что разбиение $\kappa = \{Y_0, \dots, Y_{k+1}\}$ является подразбиением разбиения $\chi = \{X_0, \dots, X_k\}$ таким, что $X_0 = Y_0, \dots, X_{k-1} = Y_{k-1},\ X_k = Y_k \cup Y_{k+1}$. Тогда, используя лемму 4.1, получим:

$$\mathfrak{h}(U, \kappa, n) - \mathfrak{h}(U, \chi, n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,K}} \Delta_\sigma,$$

$$\Delta_\sigma = \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) - \sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)).$$

Согласно лемме 4.2 и следствию 4.1, получим:

$$\begin{aligned}
\Delta_\sigma &= \sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi)) - \sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \\
&= \sum_{\lambda \in A_\sigma} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa)) \log \frac{\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi))}{\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\lambda(\kappa))} \geq 0.
\end{aligned}$$

□

5 Свойства бистохастических матриц

Множество $\mathcal{B}(J)$ – замкнутая полугруппа, причем для любого $\lambda \in \mathrm{Spec}(\mathbf{B})$ имеем $|\lambda| \leq 1$ (см. [2]). Полугруппа $\mathcal{B}(J)$ является выпуклым многогранником (этот многогранник называют многогранником Биркгофа). Многогранник Биркгофа лежит внутри $(J^2 - 2J + 1)$-мерного аффинного подпространства J^2-мерного пространства всех вещественных $J \times J$ матриц – это подпространство задаётся системой линейных уравнений (1.6). Внутри этого подпространства накладывается J^2 линейных неравенств, по одному на каждую координату, требующих неотрицательности координат.

Каждую перестановку $\sigma \in S_J$ можно связать с перестановочной матрицей $\mathbf{B}_\sigma$, в которой в j-й строке и в k-м столбце стоит 1 тогда и только тогда, когда $\sigma(j) = k$, на других позициях матрицы $\mathbf{B}_\sigma$ стоят нули. Теорема Биркгофа-фон-Неймана утверждает, что выпуклый многогранник Биркгофа является выпуклой оболочкой матриц перестановок, то есть для любой $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$ существуют $\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^k \theta_k = 1$ и существуют матрицы перестановки $P_1, \ldots, P_k$ такие, что $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^k \theta_j P_j$. Матрицы перестановки являются вершинами многогранника Биркгофа.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$. Тогда жордановы клетки $\mathbf{B}$, соответствующие собственным значениям равным по модулю 1, тривиальны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{J}_k(e^{i\phi})$ – клетка жордановой формы размера $k \times k$ соответствующая собственному значению $e^{i\phi}$. Будем доказывать лемму от противного. Так как $\mathcal{B}(J)$ – полугруппа, то $\mathbf{B}^N$ – бистохастическая. Приведем матрицу $\mathbf{B}$ в жорданову форму: $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{J}C$, тогда $\mathbf{B}^N = C^{-1}\mathbf{J}^N C$. В клетке $\mathbf{J}_k(e^{i\phi})$ найдутся элементы по модулю большие N. Поэтому равентво $\|\mathbf{B}^N\|_{L^1} = 1$ не будет выполнено. Противоречие. $\square$

Наряду со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathcal{H}$, определенным в разделе 2, рассмотрим скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{C}^J$ такое, что для любых $x, y \in \mathbb{C}^J$

$$(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_J} x_j \overline{y_j}. \tag{5.1}$$

Лемма 5.2. *Пусть $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$, Π_1 – собственное подпространство единицы матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_n$ – оператор, определенный формулой (1.7). Тогда*

- $\mathbf{B}_n \in \mathcal{B}(J)$,
- *существует предел* $\mathbf{B}_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{B}_n$,
- $\mathbf{B}_\infty \in \mathcal{B}(J)$,
- $\mathbf{B}_\infty$ – *ортогональный проектор на* Π_1 *в* $\big(\mathbb{C}^J, (\cdot, \cdot)\big)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из выпуклости множества $\mathcal{B}(J)$. Докажем второе. Приведем $\mathbf{B}$ к жорданову виду: $\mathbf{B} = C^{-1}\mathbf{J}C$. Тогда

$$\mathbf{B}_n = C\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{J}^k\Big)C^{-1} = C\mathbf{J}_n C^{-1}.$$

Клетки $\mathbf{J}_n$, не соответствующие собственному значению по модулю равному 1, при переходе к пределу обнулятся. Если клетка соответствует собственному значению $e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, то она, согласно лемме 5.1, имеет размер 1×1. Тогда $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\phi} \to 0$ $(n \to \infty)$. Третье утверждение леммы следует из замкнутости $\mathcal{B}(J)$. Последнее утверждение леммы является следствием эргодической теоремы фон Неймана [7]. $\square$

6 Энтропия унитарного оператора

6.1 Вычисление энтропии

Пусть $E_\mu = (\mu_0, \dots, \mu_{J-1})^T$. Согласно лемме 4.3 энтропию унитарного оператора U будем вычислять на самом мелком разбиении $\chi_\odot = \{\{0\}, \{1\}, \dots, \{J-1\}\}$.

Теорема 6.1. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\mathbf{B}_\infty$ – оператор из леммы 5.2, $\mathbf{B}_\infty E_\mu = \alpha$. Тогда*

$$\mathfrak{h}(U) = -\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \alpha_k \mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk}, \quad b(U) = \mathbf{B}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Согласно следствию 3.1 функцию $\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot))$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}$ можно выразить через элементы соответствующей бистохастической матрицы $\mathbf{B}$ по формуле

$$\mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) = \mathbf{B}_{\sigma(n)\sigma(n-1)} \dots \mathbf{B}_{\sigma(1)\sigma(0)} \mu_{\sigma(0)}.$$

Преобразуем $\mathfrak{h}(U, \chi_\odot, n) = \mathfrak{h}(U, n)$.

$$\begin{aligned}
-\mathfrak{h}(U,n) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n,J-1}} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n,J-1}} \mathbf{B}_{\sigma(n)\sigma(n-1)} \dots \mathbf{B}_{\sigma(1)\sigma(0)} \mu_{\sigma(0)} \log \left(\mathbf{B}_{\sigma(n)\sigma(n-1)} \dots \mathbf{B}_{\sigma(1)\sigma(0)} \mu_{\sigma(0)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_0,\dots,j_n\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{j_n j_{n-1}} \dots \mathbf{B}_{j_1 j_0} \mu_{j_0} \log \mathbf{B}_{j_k j_{k-1}} + \sum_{j_0\in\mathbb{Z}_J} \mu_{j_0} \log \mu_{j_0} = \sum_{k=0}^{n} S_k,
\end{aligned}$$

где для $k \in \{1, \dots, n\}$

$$S_k = \sum_{j_0,\dots,j_n\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{j_n j_{n-1}} \dots \mathbf{B}_{j_1 j_0} \mu_{j_0} \log \mathbf{B}_{j_k j_{k-1}}, \qquad S_0 = \sum_{j_0\in\mathbb{Z}_J} \mu_{j_0} \log \mu_{j_0}.$$

Поскольку $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$, используя равенства (1.6), получим

$$S_k = \sum_{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{j_k j_{k-1}} \dots \mathbf{B}_{j_1 j_0} \mu_{j_0} \log \mathbf{B}_{j_k j_{k-1}} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{\alpha\beta} (\mathbf{B}^{k-1})_{\beta\gamma} \mu_\gamma \log \mathbf{B}_{\alpha\beta}.$$

Пусть $\mathbf{B}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathbf{B}^k$. Тогда

$$\mathfrak{h}(U,n) = -n \sum_{j,k,m\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{jk} (\mathbf{B}_n)_{km} \mu_m \log \mathbf{B}_{jk} - S_0.$$

Используя лемму 5.2, вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{h}(U,n)}{n}$:

$$\mathfrak{h}(U) = -\sum_{j,k,m\in\mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{jk} (\mathbf{B}_\infty)_{km} \mu_m \log \mathbf{B}_{jk} = -\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J} \alpha_k \mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk}.$$

Теорема доказана. □

Напомним, что $\mathbf{M}_1 \subset \mathcal{B}(J)$ – подмножество бистохастических матриц у которых собственное значение 1 имеет кратность 1.

Лемма 6.1. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $b(U) = \mathbf{B} \in \mathbf{M}_1$. Тогда*

$$\mathfrak{h}(U) = -\frac{1}{J} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_J} \mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Согласно лемме 5.2 $\mathbf{B}_\infty$ – бистохастический оператор, являющийся ортогональным проектором на одномерное подпространство $\Pi_1 = \{u : u = \alpha(1,\dots,1)^T\}$. Прямым вычислением можно показать, что $(\mathbf{B}_\infty)_{jk} = \frac{1}{J}$ и $\alpha_j = \frac{1}{J}$. Лемма доказана. □

6.2 Энтропия в случае равномерного распределения меры между точками

Лемма 6.2. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\mu_0 = \ldots = \mu_{J-1} = \frac{1}{J}$, $b(U) = \mathbf{B}$. Тогда энтропия $\mathfrak{h}(U)$ унитарного оператора U вычисляется по формуле (6.2).*

Доказательство. В этом случае $E_\mu = (1/J,\dots,1/J)$. Согласно теореме 6.1

$$\alpha_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}_J} (\mathbf{B}_\infty)_{kj} \frac{1}{J} = \frac{1}{J}.$$

□

7 Связь функции $\mathfrak{h}_\mu(U,\chi,n)$ с энтропией $\mathfrak{h}(U)$

В введении было дано определение энтропии $\mathfrak{h}_\mu(U)$ унитарного оператора (см. формулы (1.4), (1.5)), отличающиеся от определения из раздела 3. В данном разделе устанавливается связь двух определений.

Лемма 7.1. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\chi_\odot = \{\{0\},\dots,\{J-1\}\}$ – разбиение $\mathcal{X}$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}$. Тогда*

$$\|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2 = \mu_{\sigma(n)} |U_{\sigma(n)\sigma(n-1)} U_{\sigma(n-1)\sigma(n-2)} \ldots U_{\sigma(1)\sigma(0)}|^2, \qquad \|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2 = \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)).$$

Доказательство. Вычислим элементы матрицы $\mathfrak{X}_\sigma$:

$$(\mathfrak{X}_\sigma)_{a_n a_0} = \sum_{a_1,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{Z}_J} \mathbf{1}_{\{\sigma(n)\}}(a_n) U_{a_n a_{n-1}} \ldots U_{a_1 a_0} \mathbf{1}_{\{\sigma(0)\}}(a_0),$$

где $a_0, a_n \in \mathbb{Z}_J$. Используя лемму 2.3 получим утверждение леммы. □

Лемма 7.2. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\chi_\odot = \{\{0\},\dots,\{J-1\}\}$ – разбиение $\mathcal{X}$, $\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}$. Тогда*

$$\mathfrak{h}_\mu(U,\chi_\odot) = \mathfrak{h}(U).$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из леммы 7.1. В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\mu(U,\chi_\odot,n) &= -\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}} \|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2 \log \|\mathfrak{X}_\sigma\|_\mu^2 \\ &= -\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n,J-1}} \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) \log \mathcal{I}_U(\mathbf{G}_\sigma(\chi_\odot)) = \mathfrak{h}(U,\chi_\odot,n). \end{aligned}$$

Есть вопрос: если существует предел (1.5), то верно ли, что для любого разбиения χ множества $\mathcal{X}$ выполнено $\mathfrak{h}(U,\chi) \le \mathfrak{h}(U,\chi_\odot)$? Если ответ на этот вопрос положительный, то $\mathfrak{h}_\mu(U,\chi_\odot)$ является энтропией унитарного оператора U в смысле первого определения (см. формулы (1.4), (1.5)).

□

8 Свойства энтропии $\mathfrak{h}$

В качестве следствия теоремы 6.1 получаем, что энтропия $\mathfrak{h}(U)$ унитарного оператора U зависит только от $b(U) \subset \mathcal{B}(J)$.

Лемма 8.1. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$, $\mathbf{B}_\infty$ – оператор из леммы 5.2, $\mathbf{B}_\infty E_\mu = \alpha$, где E_μ определён в подразделе 6.1. Тогда*
- $\sum_{j\in\mathbb{Z}_J} \alpha_j = 1$,
- *для любого $j \in \mathbb{Z}_J$ выполнено $\alpha_j > 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 5.2 $\mathbf{B}_\infty \in \mathcal{B}(J)$. Поэтому для всякого $j \in \mathbb{Z}_J$

$$\alpha_j = (\mathbf{B}_\infty E_\mu)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}_J} (\mathbf{B}_\infty)_{jk}\mu_k > 0.$$

Докажем равенство в утверждении леммы 8.1:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_j} \alpha_j = \sum_{j\in\mathbb{Z}_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}_j} (\mathbf{B}_\infty)_{jk}\mu_k = 1.$$

□

8.1 Умножение на унитарный диагональный оператор

Лемма 8.2. *Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{U}(J,\mu)$ – диагональные. Тогда $\mathfrak{h}(U) = \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1 U \mathcal{D}_2)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_j = \operatorname{diag}(d_{j1},\dots,d_{jJ})$. Вычислим элементы матрицы $\mathcal{D}_1 U \mathcal{D}_2$. Так как $(\mathcal{D}_1 U \mathcal{D}_2)_{jk} = d_{1j}U_{jk}d_{2k}$, причем $|d_{jk}| = 1$, то $|U_{jk}|^2 = |d_{1j}U_{jk}d_{2j}|^2$.

□

8.2 Инвариантность $\mathfrak{h}$ относительно сопряжений оператором U_σ

В доказательстве леммы 3.3 по перестановке J элементов σ строится унитарный оператор $U_\sigma = \mathrm{Koop}(\sigma)$ и бистохастическая матрица $\mathbf{B}_\sigma = b(U_\sigma)$.

Лемма 8.3. *Пусть $\sigma \in S_J$, $(U_\sigma)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{\sigma(j)\}}(k) \in \mathcal{U}(J,\mu)$, пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$ такой, что $b(U) = \mathbf{B} \in \mathbf{M}_1$. Тогда*

$$\mathfrak{h}(U) = \mathfrak{h}(U_\sigma^{-1} U U_\sigma).$$

Доказательство. Прямым вычислением можно получить элементы матрицы U_σ^{-1}: $(U_\sigma^{-1})_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_{\sigma^{-1}(j)}}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{\sigma^{-1}(j)\}}(k)$. Пусть $b(U) = \mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})$. Тогда

$$(U_\sigma^{-1}UU_\sigma)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_{\sigma^{-1}(j)}}{\mu_{\sigma^{-1}(k)}}}\sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}U_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)}, \qquad \big(b(U_\sigma^{-1}UU_\sigma)\big)_{jk} = \mathbf{B}_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(k)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы 8.3.

□

8.3 Максимальное значение энтропии

Лемма 8.4. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$. Максимальное значение энтропии на подмножестве унитарных матриц таких, что $b(U) \in \mathbf{M}_1$ равно $\log J$, то есть*

$$\max_{b(U)\in\mathbf{M}_1} \mathfrak{h}(U) = \log J.$$

Доказательство. При доказательстве будем использовать неравенство Йенсена, примененное к выпуклой функции $x\log x$. Согласно лемме 6.1 имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(U) &= -\frac{1}{J}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J}\mathbf{B}_{jk}\log\mathbf{B}_{jk}\\ &\le -\sum_{k\in\mathbb{Z}_J}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_J}\frac{1}{J}\mathbf{B}_{jk}\right)\log\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_J}\frac{1}{J}\mathbf{B}_{jk}\right) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}_J}\frac{1}{J}\log\frac{1}{J} = -\log\frac{1}{J}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство достигается на операторе Фурье (см. лемму 10.4). □

9 Энтропия как функция на $\mathcal{B}(J)$

Каждому бистохастическому оператору $\mathbf{B}$ сопоставим число (6.1) и назовем это число энтропией $\mathfrak{h}(\mathbf{B})$ бистохастического оператора $\mathbf{B}$.

Матрица $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$ определена своим минором M "без последней строки и столбца". Последнее можно понять из определения бистохастических матриц, выразив элементы, стоящие в последней строке и столбце, через остальные. Поскольку всякая бистохастическая матрица имеет собственное значение 1, то $\mathcal{B}(J) = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$, где подмножества $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ определены в разделе 1 в описании результатов работы.

Лемма 9.1. *Бистохастическая матрица $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_2$ тогда и только тогда, когда ее минор M "без последней строки и последнего столбца" имеет собственное значение равное единице.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ имеет кратное собственное значение единица, $a = (\alpha_1,\dots,\alpha_J)^T \neq e = (1,\dots,1)^T$ – собственный вектор соответствующий собственному значению 1. Тогда, воспользовавшись формулами (1.6), получим

$$\sum_{k=1}^{J-1}\mathbf{B}_{jk}\alpha_k + \Big(1-\sum_{k=1}^{J-1}\mathbf{B}_{jk}\Big)\alpha_J = \alpha_j, \quad j = 1,\dots,J-1,$$

$$\sum_{k=1}^{J-1}\mathbf{B}_{jk}(\alpha_k-\alpha_J) = \alpha_j-\alpha_J, \quad j = 1,\dots,J-1.$$

Таким образом, $(\alpha_1 - \alpha_J, \dots, \alpha_{J-1} - \alpha_J)^T$ – собственный вектор рассматриваемого минора с собственным значением 1.

Докажем лемму 9.1 в обратную сторону. Пусть существует $b = (\beta_1, \dots, \beta_{J-1}) \neq 0$ такой, что $\sum_{k=1}^{J-1} \mathbf{B}_{jk}\beta_k = \beta_j, \quad j = 1, \dots, J-1$. Возьмем ненулевой вектор $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_J) = (\beta_1, \dots, \beta_{J-1}, 0)^T \neq e$. Вектор a является собственным вектором с собственным значением 1 для $\mathbf{B}$, что следует из следующих равенств. Если $j \in \{1, \dots, J-1\}$, то

$$\sum_{k=1}^{J} \mathbf{B}_{jk}\alpha_k = \sum_{k=1}^{J-1} \mathbf{B}_{jk}\beta_k = \beta_j = \alpha_j.$$

В оставшемся случае (когда $j = J$), используя (1.6), получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{J} \mathbf{B}_{Jk}\alpha_k &= \sum_{k=1}^{J-1} \Big(1 - \sum_{j=1}^{J-1} \mathbf{B}_{jk}\Big)\beta_k = \sum_{k=1}^{J-1} \beta_k - \sum_{k,j=1}^{J-1} \mathbf{B}_{jk}\beta_k \\ &= \sum_{k=1}^{J-1} \beta_k - \sum_{j=1}^{J-1} \beta_j = 0 = \alpha_J.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

9.1 Граница $\partial\mathcal{B}(J)$

Множество $\partial\mathcal{B}(J) = \{\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J) \,|\, \exists\, j, k \in \{1, \dots, J\}\ \mathbf{B}_{jk} = 0\}$ является границей многогранника Биркгофа $\mathcal{B}(J)$.

Лемма 9.2. *Пусть* $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_2$. *Тогда* $\mathbf{B} \in \partial\mathcal{B}(J)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_2$ не лежит на границе многогранника Биркгофа. Тогда все элементы $\mathbf{B}$ – положительные числа. Теорема Перрона [2] утверждает, что матрица с положительными элементами всегда имеет наибольшее, положительное, вещественное собственное значение, причем это собственное значение является простым корнем характеристического многочлена. Кроме этого, теорема Перрона утверждает, что собственный вектор, соответствующий этому собственному значению, положительный, то есть каждая его компонента – положительное число. Поскольку все элементы матрицы $\mathbf{B}$ – положительные, все собственные значения матрицы $\mathbf{B}$ по модулю меньше либо равны единице и вектор $e = (1, \dots, 1)^T$ – собственный вектор с собственным значением 1 матрицы $\mathbf{B}$, то по теореме Перрона собственное значение 1 является простым корнем характеристического многочлена матрицы $\mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_1$. Лемма доказана. □

9.2 Мера Лебега λ на $\mathcal{B}(J)$

Всякую вещественную матрицу размера $J \times J$ можно отождествить с точкой в пространстве $\mathbb{R}^{J^2}$. Рассмотрим $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^{J^2}$ – аффинное подпространство размерности $J^2 - 2J + 1$, заданное системой линейных неоднородных уравнений (1.6). В $\mathbb{A}$ есть стандартная мера Лебега (индуцируемая стандартной евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^{J^2}$), обозначаемая ниже λ.

Следствие 9.1. *Мера λ множества бистохастических матриц у которых собственное значение 1 имеет кратность как минимум 2 равна нулю:* $\lambda(\mathbf{M}_2) = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 9.2 выполнено $\mathbf{M}_2 \subseteq \partial\mathcal{B}(J)$. Поэтому $\lambda(\mathbf{M}_2) \leq \lambda(\partial\mathcal{B}(J)) = 0$. Последнее равенство выполнено, так как мера границы выпуклого многогранника равна нулю. Лемма доказана. □

Таким образом, показано, что для почти всех $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_1$ энтропия $\mathfrak{h}(\mathbf{B})$ вычисляется по формуле (6.2), которая, в отличие от (6.1), зависит только от элементов матрицы $\mathbf{B}$. Отметим, что функция в правой части (6.2) является непрерывной относительно элементов матрицы $\mathbf{B}$ внутри многогранника Биркгофа $\mathcal{B}(J)$.

Замечание 9.1. *На множестве нулевой меры* $\mathbf{M}_2$ *(на границе многогранника Биркгофа* $\mathcal{B}(J)$*) энтропия* $\mathfrak{h}(\mathbf{B})$ *бистохастического оператора* $\mathbf{B}$ *имеет разрыв.*

Доказательство. Рассмотрим следующие бистохастические операторы:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2. \qquad \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 - \frac{2}{n} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_1,$$

где $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \mathbf{B}_n = \mathbf{B}$. Согласно теореме 6.1 вычислим $\mathfrak{h}(\mathbf{B})$. Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathbf{B}^k = \mathbf{B}$. Поэтому $\mathbf{B}_\infty = \mathbf{B}$. Значит

$$\mathbf{B}_\infty E_\mu = \Big(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \mu_3\Big).$$

Поэтому

$$\mathfrak{h}(\mathbf{B}) = -4 \cdot \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = (\mu_1 + \mu_2) \log 2.$$

Согласно лемме 6.1 вычислим следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{h}(\mathbf{B}_n) = -\frac{1}{3}\Big(4 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{3} \log 2.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{2}{3} \log 2 - (\mu_1 + \mu_2) \log 2 = \Big(\frac{2}{3} - \mu_1 - \mu_2\Big) \log 2 = (\mu_3 - 1/3) \log 2.$$

Таким образом, если $\mu_3 > 1/3$, то энтропия $\mathfrak{h}$ при подходе к границе имеет разрыв первого рода со скачком вверх. Если $\mu_3 < 1/3$, то имеет место разрыв первого рода со скачком вниз. □

10 Примеры

10.1 Оператор умножения

Лемма 10.1. *Пусть* $\mathcal{D} \in \mathcal{U}(J, \mu)$ *– диагональный унитарный оператор. Тогда* $\mathfrak{h}(\mathcal{D}) = 0$.

Доказательство. Поскольку $b(\mathcal{D})$ – единичная матрица, то $\mathfrak{h}(\mathcal{D}) = 0$. □

10.2 Оператор Купмана

Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_J$, μ_j – мера j-й точки. Пусть $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_J)$. Тогда $F = \sigma \in S_J$. В лемме 8.3 с перестановкой σ был связан унитарный оператор $U_\sigma = \mathrm{Koop}(\sigma)$.

Лемма 10.2. *Пусть $U_\sigma = Koop(\sigma)$. Тогда $\mathfrak{h}(U_\sigma) = 0$.*

Доказательство. Все элементы матрицы $b(U_\sigma)$ либо единицы, либо нули. Используя утверждение теоремы 6.1 получим требуемое. □

10.3 Унитарные операторы энтропия которых равна нулю

Пусть

$$\mathcal{K} = \{U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \colon U = \mathcal{D}U_\sigma\}, \text{ где}$$

$\mathcal{D}$ – диагональный унитарный оператор, U_σ – оператор Купмана, отвечающий перестановке σ.

Лемма 10.3. *Пусть $U \in \mathcal{U}(J,\mu)$ и $\mathfrak{h}(U) = 0$. Тогда $U \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Согласно лемме 8.1 для всякого $j \in \mathbb{Z}_J$ $\alpha_j > 0$. Поэтому из условия $\mathfrak{h}(U) = 0$, согласно теореме 6.1, вытекает, что для любых $j,k \in \mathbb{Z}_J$

$$\mathbf{B}_{jk} \log \mathbf{B}_{jk} = 0.$$

Поэтому $\mathbf{B}_{jk} = 0$ или $\mathbf{B}_{jk} = 1$. Так как $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(J)$, то $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\sigma$ – перестановочная матрица, определённая в разделе 5. В соответствии с определением отображения b (см. подраздел 3.2):

$$U_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{\sigma(j)\}}(k)e^{i\phi_{jk}} = \sqrt{\frac{\mu_{\sigma(j)}}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{\sigma(j)\}}(k)e^{i\phi_{j\sigma(j)}} = \mathcal{D}_j(U_\sigma)_{jk}, \text{ где}$$

$(\mathcal{D})_j = e^{i\phi_{j\sigma(j)}}$ – диагональный унитарный оператор, $(U_\sigma)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}\mathbf{1}_{\{\sigma(j)\}}(k)$ – оператор Купмана. □

10.4 Оператор Фурье

Рассмотрим унитарный конечномерный оператор Фурье

$$(F_J)_{jk} = \sqrt{\frac{\mu_k}{\mu_j}}\frac{1}{\sqrt{J}}\exp\Big(\frac{2\pi i}{J}jk\Big).$$

Лемма 10.4. *Пусть F_J – оператор Фурье. Тогда $\mathfrak{h}(F_J) = \log J$.*

Доказательство. Поскольку $b(F_J)_{jk} = \frac{1}{J}$, $b(F_J) \in \mathbf{M}_1$. В соответствии с леммой 6.1

$$\mathfrak{h}(F_J) = -\frac{1}{J}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_J}\frac{1}{J}\log\frac{1}{J} = \log J.$$

□

Список литературы

[1] К. А. Афонин, Д. В. Трещев Энтропия унитарного оператора на $L^2(\mathbb{T}^n)$ Матем. сб. 213 7 2022

[2] Ф. Р. Гантмахер Теория матриц М.: Наука 1968

[3] Д. В. Трещев μ-Норма оператора Избранные вопросы математики и механики Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова Труды МИАН 2020 310 280–308 МИАН М.

[4] Accardi L., Ohya M., and Watanabe N. Doubly stochastic operators with zero entropy Open Systems and Information Dynamics 4 41–87 1997

[5] Beck C. and Graudenz D. Symbolic dynamics of successive quantum-mechanical measurements Phys. Rev. A 46 6265–6276 1992

[6] Collet P. and Eckmann J.-P. Concept and results in chaotic dynamics: a short course Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2006

[7] Coudene Y. Ergodic Theory and Dynamical Systems Springer, London 2016

[8] Cover T.M and Thomas J.A. Elements of Information Theory New York: Wiley 1991

[9] Downarowicz T. and Frej B. Measure-theoretic and topological entropy of operators on function spaces Ergodic Theory and Dynamical Systems 25 455–481 2005

[10] Downarowicz T. and Frej B. Doubly stochastic operators with zero entropy. arXiv:1803.07882v1 [math.DS]

[11] Katok, A., Hasselblatt, B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems Cambridge: Cambridge University Press 1995

[12] Srinivas M. D. Quantum generalization of Kolmogorov entropy J. Math. Phys. 19 1952–1961 1978

[13] Treschev D. μ-Norm and Regularity J. Dyn. Differ. Equations 33 3 1269–1295 2020