Проблема Стинрода о реализации циклов

Рождественский Василий Юрьевич

Аннотация

Рассматривается классическая проблема Стинрода о реализации циклов непрерывными образами многообразий. Основной целью работы является построение классов гомологий, которые могут быть реализованы только с достаточно большой кратностью. Для каждого натурального n строятся примеры классов гомологий размерности n такие, что минимальная кратность, с которой они могут быть реализованы, равняется наибольшему нечетному делителю числа $\left[\frac{n-1}{2}\right]!$. Доказывается, что при $n<24$ все n-мерные целочисленные классы гомологий реализуются с указанной выше кратностью.

Содержание

Москва 2021

1 Введение

Одной из классических проблем топологии является проблема Н. Стинрода о реализации циклов, сформулированная им в конце 1940-х годов (см. [11]):

> Существуют ли для заданного целочисленного класса гомологий $x \in H_n(X;\mathbb{Z})$ топологического пространства X гладкое замкнутое ориентированное многообразие M^n и непрерывное отображение $f\colon M^n \to X$ такие, что $f_*[M^n] = x$?

Этот вопрос тесно связан с близким ему вопросом о реализации целочисленных классов гомологий гладкого многообразия гладкими замкнутыми ориентированными подмногообразиями. Действительно, пространство X (которое без ограничения общности можно считать конечным клеточным комплексом) можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ большой размерности и взять его регулярную окрестность $V(X)$. Тогда задача о реализации классов гомологий пространства X в смысле Стинрода сведется к задаче о реализации классов гомологий многообразия $V(X)$ подмногообразиями. Более того, взяв дубль $V(X) \cup_{\partial V(X)} V(X)$ многообразия $V(X)$ можно свести задачу к задаче реализации классов гомологий подмногообразиями в замкнутом ориентированном многообразии.

В более современной терминологии проблема Стинрода есть задача об описании образа естественного гомоморфизма $\mu_{\mathrm{SO}*}\colon \mathrm{MSO}_n(X) \to H_n(X;\mathbb{Z})$. Аналогичную задачу интересно ставить и для других теорий бордизмов, среди которых особый интерес представляют комплексные бордизмы.

Первые результаты по проблеме Стинрода были получены Р. Томом в 1954 году (см. [17]). А именно, им были построены первые примеры не реализуемых по Стинроду классов и было доказано, что произвольный n-мерный целочисленный класс гомологий может быть реализован с некоторой кратностью, причем эту кратность можно выбрать единой для всех классов размерности n. В связи с этим результатом возникла следующая задача:

> Для каждого натурального n найти наименьшее натуральное число $k_{\mathrm{SO}}(n)$ такое, что всякий целочисленный n-мерный класс гомологий реализуем в смысле Стинрода с кратностью $k_{\mathrm{SO}}(n)$.

И аналогичная задача для комплексных бордизмов:

> Для каждого натурального n найти наименьшее натуральное число $k_{\mathrm{U}}(n)$ такое, что всякий целочисленный n-мерный класс гомологий может быть реализован непрерывным образом фундаментального класса гладкого замкнутого стабильно комплексного многообразия с кратностью $k_{\mathrm{U}}(n)$.

В работе [5] С. П. Новиков показал, что число $k_{\mathrm{SO}}(n)$ нечетно, и что все препятствия к реализации по Стинроду класса $x \in H_m(X;\mathbb{Z})$ лежат в p-кручении групп гомологий $H_{m-2r(p-1)-1}(X;\mathbb{Z})$, где p — нечетное простое число и $r > 0$. Аналогично, все препятствия к реализации класса $x \in H_m(X;\mathbb{Z})$ стабильно комплексным многообразием лежат в p-кручении групп гомологий $H_{m-2r(p-1)-1}(X;\mathbb{Z})$, где p — простое число и $r > 0$. В частности, если указанные группы гомологий не содержат p-кручения, то все препятствия к реализации нулевые и класс x реализуем. В работе [9] Э. Брауном и Ф. Петерсоном было доказано, что при $p > 2$ препятствия в простом p к реализации циклов ориентированными и стабильно комплексными многообразиями совпадают.

Таким образом число $k_{\mathrm{SO}}(n)$ явно выражается через число $k_{\mathrm{U}}(n)$, а именно является его максимальным нечетным делителем. По-видимому, этот результат можно извлечь и из работы [5], но явно он в ней не сформулирован.

В связи с результатом С. П. Новикова возник следующий естественный вопрос. Пусть задано натуральное число n. С какой кратностью может быть реализован класс гомологий $x \in H_m(X;\, \mathbb{Z})$, если группы $H_{m-2r(p-1)-1}(X;\, \mathbb{Z})$ не содержат p-кручения (а значит соответствующие препятствия нулевые) при условии $2r(p-1)+1>n$? Эта задача была полностью решена В. М. Бухштабером. А именно в работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Бухштабер [2])**.** *Пусть X — такой клеточный комплекс, что группы $H_{m-2r(p-1)-1}(X;\, \mathbb{Z})$ не содержат p-кручения при $2r(p-1)+1>n$ для всех простых p. Тогда всякий класс гомологий $x \in H_m(X;\, \mathbb{Z})$ реализуем образом фундаментального класса стабильно комплексного многообразия с кратностью*

$$k^s_{\mathrm{U}}(n) = \prod_{p \text{ простое}} p^{\left[\frac{n-1}{2(p-1)}\right]}.$$

Эта оценка является точной по n: для каждого n существуют число m, клеточный комплекс X, удовлетворяющий описанным выше условия об отсутствии кручения в группах гомологий, и класс гомологий $x \in H_m(X;\, \mathbb{Z})$ такие, что минимальная кратность, с которой класс x реализуем образом фундаментального класса стабильно комплексного многообразия равняется $k^s_{\mathrm{U}}(n)$.

В частности, при $n=m-1$ получаем, что всякий m-мерный целочисленный класс гомологий может быть реализован образом фундаментального класса стабильно комплексного многообразия с кратностью $k^s_{\mathrm{U}}(m-1)$. Следовательно, число $k_{\mathrm{U}}(m)$ делит число $k^s_{\mathrm{U}}(m-1)$.

Используя вышеупомянутый результат С. П. Новикова, несложно получить аналогичную теорему и для случая реализации классов гомологий замкнутыми ориентированными многообразиями.

Независимо, Г. Брамфилем в работе [10] был получен аналогичный результат, но при более слабом предположении.

Теорема 2 (Г. Брамфиль [10])**.** *Всякий $(q+n)$-мерный целочисленный класс гомологий $x \in H_{q+n}(X;\, \mathbb{Z})$ в $(q-1)$-связном клеточном комплексе X реализуем в смысле Стинрода с кратностью*

$$k^s_{\mathrm{SO}}(k) = \prod_{p \text{ простое},\ p>2} p^{\left[\frac{n-1}{2(p-1)}\right]}.$$

Эта оценка является точной по n: для каждого n существуют $(q-1)$-связный клеточный комплекс X и класс гомологий $x \in H_{q+n}(X;\, \mathbb{Z})$ такие, что минимальная кратность, с которой класс x реализуем в смысле Стинрода, равняется $k^s_{\mathrm{SO}}(n)$.

В частности, при $q=1$ получаем, что всякий m-мерный целочисленный класс гомологий может быть реализован образом фундаментального класса ориентированного многообразия с кратностью $k^s_{\mathrm{SO}}(m-1)$. Следовательно, число $k_{\mathrm{SO}}(m)$ делит число $k^s_{\mathrm{SO}}(m-1)$.

Обозначим через $\nu_p(a)$ максимальную степень вхождения простого числа p в a. Из результатов В. М. Бухштабера и Г. Брамфиля следует оценка :

$$\nu_p\bigl(k_{\mathrm{U}}(n)\bigr) \leqslant \left[\frac{n-2}{2(p-1)}\right].$$

Кроме того, используя то, что препятствия к реализации в размерностях $n-r$ при $r<n/2$ являются стабильными, из этих результатов также можно извлечь нижнюю оценку:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n-1}{2(p-1)}\right] \leqslant \nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big).$$

Основным результатом настоящей работы является существенное улучшение нижней оценки на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$, а также небольшое улучшение верхней. В результате впервые получена нижняя оценка на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$, асимптотически эквивалентная верхней. А именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого натурального n и простого p имеют место неравенства:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right] \leqslant \nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big) \leqslant \left[\frac{n-3}{2(p-1)}\right].$$

Таким образом при любом n число $k_{\mathrm{U}}(n)$ делится на число $\left[\frac{n-1}{2}\right]!$.

У этой теоремы имеется несколько интересных следствий.

Следствие 1. *Если существует такое l, что $2p^l+1 \leqslant n < 2p^l+1+2(p-1)$, то*

$$\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big) = \frac{p^l-1}{p-1}.$$

Таким образом, для каждого простого p имеется бесконечная серия размерностей n таких, что нижняя оценка на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$ точна. К сожалению, эти серии размерностей различны для различный простых чисел, и поэтому не понятно, имеется ли бесконечная серия размерностей, для который нижняя оценка является точной для всего числа $k_{\mathrm{U}}(n)$.

Доказательство. Несложно проверить, что при указанных ограничениях на n верхняя и нижняя оценка на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$ совпадают и равняются $\frac{p^l-1}{p-1}$. $\square$

Следствие 2. *Для любого простого p и любого n выполнено неравенство*

$$\left[\frac{n-3}{2(p-1)}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right] < \log_p\left(\frac{n-1}{2}\right) + 2,$$

и поэтому отношение верхней и нижней оценки на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$ стремится к 1, когда n стремится к бесконечности.

Другим результатом этой работы является явное вычисление чисел $k_{\mathrm{SO}}(n)$ и $k_{\mathrm{U}}(n)$ для маленьких значений n.

Теорема 4. *При $n<12$ имеет место равенство:*

$$k_{\mathrm{U}}(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]!.$$

При $n<24$ имееет место равенство:

$$k_{\mathrm{SO}}(n) = \prod_{p\ \textit{простое},\ p>2} p^{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]}.$$

В следующей таблице приведены значения числа $k_{\mathrm{SO}}(n)$ для $1 \leqslant n \leqslant 23$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k_{\mathrm{SO}}(n)$	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	15	15
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$k_{\mathrm{SO}}(n)$	45	45	315	315	315	315	2835	2835	2835	2835	31185	?

Наиболее сложным результатом, доказательству которого посвящена большая часть работы, является нижняя оценка на число $\nu_p\big(k_{\mathrm{U}}(n)\big)$. Сначала, в разделе 2.1, для каждого простого p строятся препятствия Φ_r к реализации циклов и доказываются их основные свойства. Эти препятствия являются ни чем иным, как дифференциалами спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для K-теории, локализованной в p, но для наших целей их удобней рассматривать как целочисленные высшие когомологические операции, заданные k-инвариантами спектра $\mathrm{bu}_{(p)}$. Рассмотрение именно целочисленных операций (а не операций по модулю p), является критически важным для настоящей работы. Изучение действия целочисленных высших операций на гомологиях является довольно трудной задачей, главным образом потому, что функтор гомологий не представим. Для того, чтобы разрешить эту трудность, в разделе 2.2 доказывается теорема двойственности 9, которая связывает действие операций Φ_r на гомологиях и на когомологиях. Наконец, раздел 2.3 посвящен доказательству следующей теоремы, являющейся основой для построения примера.

Теорема 5. *Пусть X такой клеточный комплекс конечного типа, что выполнены следующие два условия.*

1. $\widetilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = 0$.

2. *Существует класс $x \in H^n\big(X; \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такой, что на нем определена операция Φ_r и $\beta\chi(P^r)(x) \neq 0$, где P^r — приведенная степень Стинрода, χ — антипод в алгебре Стинрода и β: $H^*(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^{*+1}(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ — целочисленный оператор Бокштейна.*

Тогда для любого класса $a \in H_{n+2r(p-1)}(X; \mathbb{Z})$ такого, что $\langle a, \chi(P^r)(x)\rangle \neq 0$ и для любого m, взаимно простого с p, класс $mp^{r-1}a$ не реализуется образом фундаментального класса стабильно комплексного многообразия. Более того, такой класс a всегда существует.

Как видно из условий теоремы в дальнейшем нам потребуется понимание того, как операции $\chi(P^r)$ действуют на классах когомологий. Этому посвящена глава 3. Наконец, в главе 4, используя результаты главы 3 и теорему 5, строятся классы гомологий, доставляющие пример на искомую нижнюю оценку.

В главе 5, используя спектральную последовательность Атья—Хирцебруха для комплексных бордизмов, доказывается верхняя оценка на числа $k_{\mathrm{U}}(n)$, и доказывается точность нижней оценки при маленьких значениях n.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность Александру Александровичу Гайфуллину за постановку задачи, постоянное внимание на протяжении всей работы и указание на многочисленные ошибки, возникшие по ходу работы.

2 Построение и свойства высших операций Φ_r

В разделах 2.1 и 2.2 будем работать в стабильной гомотопической категории. Обозначим через p фиксированное простое число. Обозначим через $\mathbb{Z}_{(p)}$ кольцо целых чисел, локализованное в простом идеале (p).

2.1 Построение операций Φ_r и $\widetilde{\Phi}_r$

Для начала зафиксируем некоторые обозначения.

1. Обозначим через $\mathrm{bu}_{(p)}$ представляющий спектр для связной K-теории, локализованной в p. Обозначим через $u \in H^0\big(\mathrm{bu}_{(p)};\, \mathbb{Z}_{(p)}\big) = \mathbb{Z}_{(p)}$ стандартную образующую.

2. Определим спектр $\mathrm{bu}_{(p)}(r)$ как $2r$-й этаж башни Постникова спектра $\mathrm{bu}_{(p)}$. Таким образом:
$$\pi_i\big(\mathrm{bu}_{(p)}(r)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(p)}, & i = 2a,\ \ 0 \leqslant a < r; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Обозначим через $u_r \in H^0\big(\mathrm{bu}_{(p)}(r);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big) = \mathbb{Z}_{(p)}$ образующую такую, что она переходит в u при естественном отображении $\mathrm{bu}_{(p)} \to \mathrm{bu}_{(p)}(r)$.

4. Обозначим через $k^{2r+1} \in H^{2r+1}\big(\mathrm{bu}_{(p)}(r);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ k-инварианты спектра $\mathrm{bu}_{(p)}$.

5. Обозначим через β гомоморфизм Бокштейна для точной тройки
$$0 \to \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)} \to 0.$$

6. Обозначим через $\widetilde{k}^{2r+1} \in H^{2r}\big(\mathrm{bu}_{(p)}(r);\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такой фиксированный класс когомологий, что выполняется равенство $\beta\widetilde{k}^{2r+1} = k^{2r+1}$.

Для конечного спектра X через $D(X)$ будем обозначать спектр, двойственный ему по Спеньеру—Уайтхеду. Хорошо известны следующие свойства этой двойственности:

1. Для любой теории (ко)гомологий h выполнено, что $h^*\big(X\big)$ канонически изоморфно $h_{-*}\big(D(X)\big)$. Будем обозначать этот изоморфизм тоже буквой D.

2. Существует отображение $\eta\colon\ \mathbb{S} \to X \wedge D(X)$ такое, что для любых классов $x \in H^n\big(X;\, G\big)$ и $y \in H_n\big(X;\, G\big)$ выполнено равенство
$$\langle x,\, y\rangle = \eta^*\big(x \times D(y)\big) \in H^0\big(\mathbb{S};\, G\big) = G.$$

Определение 1. Пусть X — ограниченный снизу спектр конечного типа. На классе когомологий $x \in H^n\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ определим действие классов k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ по формулам:
$$k^{2r+1}(x)\colon = \cup_f f^*\big(\Sigma^n k^{2r+1}\big) \subset H^{n+2r+1}\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big);$$
$$\widetilde{k}^{2r+1}(x)\colon = \cup_f f^*\big(\Sigma^n \widetilde{k}^{2r+1}\big) \subset H^{n+2r}\big(X;\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big).$$
Здесь объединение берется по всем отображения $f\colon\ X \to \Sigma^n \mathrm{bu}_{(p)}(r)$ таким, что выполняется равенство $f^*\big(\Sigma^n u_r\big) = x$.

На классе гомологий $x \in H_n\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ определим действие классов k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ по формулам:

$$k^{2r+1}(x) \colon = \cup_f f \circ (\mathrm{id} \wedge k^{2r+1}) \subset \pi_n\ \big(X \wedge \Sigma^{2r+1} K(\mathbb{Z}_{(p)}\big) \cong H_{n-(2r+1)}\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big);$$

$$\widetilde{k}^{2r+1}(x) \colon = \cup_f f \circ (\mathrm{id} \wedge \widetilde{k}^{2r+1}) \subset \pi_n\ \big(X \wedge \Sigma^{2r} K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)})\big) \cong H_{n-2r}\big(X;\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big).$$

Здесь объедение берется по всем отображениям $f \colon \mathbb{S}^n \to X \wedge \mathrm{bu}_{(p)}(r)$ таким, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \wedge K(\mathbb{Z}_{(p)}) \\ \mathbb{S}^n \arrow[ur, "x"] \arrow[r, dotted, "f"] & X \wedge \mathrm{bu}_{(p)}(r) \arrow[u, "\mathrm{id}\wedge u_r"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна и

$$\mathrm{id} \wedge k^{2r+1} \colon X \wedge \mathrm{bu}_{(p)}(r) \to X \wedge \Sigma^{2r+1} K\big(\mathbb{Z}_{(p)}\big);$$

$$\mathrm{id} \wedge \widetilde{k}^{2r+1} \colon X \wedge \mathrm{bu}_{(p)}(r) \to X \wedge \Sigma^{2r} K\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big).$$

Стандартным образом проверяется, что это определение равносильно следующему:

$$k^{2r+1}(x) \colon = i_* D\Big(k^{2r+1}\big(D(x')\big)\Big) \subset H_{n-2r-1}\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big);$$

$$\widetilde{k}^{2r+1}(x) \colon = i_* D\Big(\widetilde{k}^{2r+1}\big(D(x')\big)\Big) \subset H_{n-2r}\big(X;\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big).$$

Здесь $i \colon Sk^{n+a}(X) \to X$ — вложение $(n+a)$-го остова, $a > 0$; $x' \in H^n\big(Sk^{n+a}(X);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ — такой класс, что $i_* x' = x$; двойственность Спеньера—Уайтхеда рассматривается для конечного спектра $Sk^{n+a}X$.
На классах (ко)гомологий клеточных пространств действие операций k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ определятся через действие операций k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ на классах (ко)гомологий соответствующего надстроечного спектра.

Обозначим через Φ одну из операций k^{2r+1} или $\widetilde{k}^{2r+1}$. Будем говорить, что операция Φ определена на классе x, если $\Phi(x) \neq \emptyset$. Если операция Φ определена на классе x и $0 \in \Phi(x)$, то будем говорить, что Φ действует нулем на классе x. Напрямую из определения следует, что для операции Φ выполнены следующие свойства:

Стабильность: для любого класса (ко)гомологий x с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{(p)}$:

$$\Phi(\Sigma x) = \Sigma \Phi(x).$$

Функториальность: если $x \in H_*\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$; $y \in H^*\big(Y;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ и $f \colon X \to Y$, то:

$$\Phi(f^* y) \supset f^* \Phi(y)$$

$$\Phi(f_* x) \supset f_* \Phi(x)$$

Так как действие операций k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ на гомологиях определяется через двойственность Спеньера—Уайтхеда и двойственность Спеньера—Уайтхеда индуцирует изоморфизм между когомологиями и гомологиями, то все общие утверждения для операций k^{2r+1} и $\widetilde{k}^{2r+1}$ будем формулировать и доказывать только для классов когомологий, подразумевая, что аналогичные утверждения верны и для классов гомологий. Единственное важное отличие, про которое надо помнить, заключается в том, что применение операций к классам когомологий увеличивает их размерность, тогда как для гомологий оно уменьшает размерность.

Операции k^{2r+1} непосредственным образом связаны с дифференциалами спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{K}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$, где K обозначает комплексную K-теорию. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6 (Maunder, [14]). *Дифференциалы d_{2r+1} спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{K}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ индуцированы действием операций k^{2r+1}. А именно, для ограниченного снизу спектра X, выполнены следующие утверждения.*

1. *На классе $x\in H^n\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ определен дифференциал $d_r^{n,0}$ тогда и только тогда, когда на нем определена операция k^{2r+1}.*

2. *Пусть класс $\tilde{x}\in E_r^{n,0}$ представлен классом $x\in E_2^{n,0}=H^n\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$. Тогда имеет место равенство смежный классов:*

$$d_r^{n,0}(\tilde{x})=k^{2r+1}(x).$$

В работах [1] и [2] В. М. Бухштабером были доказаны следующие свойства дифференциалов спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{K}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$.

Теорема 7 ([1, теорема 5]). *В спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{K}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ при $r\not\equiv 1 \mod 2(p-1)$ дифференциал d_r равен нулю.*

Теорема 8 ([2, теорема 2.1]). *В теории $K\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ для любого спектра X и всех r и s имеет место формула:*

$$d^{n,2s}_{2r(p-1)+1}(p^{r-1}x)=\varepsilon_r\big(\beta P^r(x)\big)\alpha \quad (\textit{по модулю образов предыдущих дифференциалов}),$$

где $\alpha\in K^{-2r(p-1)}(\mathrm{pt})\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ — образующая, $x\in E_2^{n,2s}$, $\varepsilon_r\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, βP^r — целочисленная операция Стинрода.

Из теорем 6 и 7 напрямую получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Если на классе $x\in H^*\big(X;\,\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ определена операция k^{2r+1} и $r\not\equiv 1 \mod 2(p-1)$, то операция k^{2r+1} действует на классе x нулем.*

Обозначим операцию $k^{2r(p-1)+1}$ через Φ_r.

Следствие 4. *Выполнены следующие свойства действия операций Φ_r.*

1. *Областью определения операции Φ_r являются те и только те классы, на которых определена и действует нулем операция Φ_{r-1}. Неопределенность операции Φ_r равняется объединению образов операции Φ_{r-1} на классах соответствующей размерности.*

2. *Для любых классов когомологий $x\in H^n\big(X;\,\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ и $y\in H^m\big(Y;\,\mathbb{Z}_{(p)}\big)$, на которых определена операция Φ_r, на классе $x\times y\in H^{n+m}\big(X\wedge Y;\,\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ операция Φ_r определена и*
$$\Phi_r(x\times y)\supset\Phi(r)\times y+(-1)^n x\times\Phi_r(y).$$

3. *Для всякого класса* $x\in H^n\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *операция* Φ_r *определена на классе* $p^{r-1}x$ *и*
$$\varepsilon_r\beta P^r(x)\in\Phi_r(p^{r-1}x).$$

Доказательство. Первый пункт следствия напрямую следует из теоремы 6 и следствия 3. Второй пункт следует из теоремы 6 и мультипликативности спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{K}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$. Наконец третий пункт следует из теорем 6 и 8. □

2.2 Двойственность для операций $\widetilde{\Phi}_r$

Обозначим операцию $\widetilde{k}^{2r(p-1)}$ через $\widetilde{\Phi}_r$. По определению 1 область определения операций Φ_r и $\widetilde{\Phi}_r$ совпадает и для любого класса x, на котором определена операция Φ_r, имеет место равенство $\Phi_r(x)=\beta\widetilde{\Phi}_r(x)$.

Определим $\mathrm{Indet}_n(\Phi_r,\,X)$ как множество $\Phi_r(0)$, где 0 рассматривается как элемент в $H_n\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$. Аналогично определим множества $\mathrm{Indet}^n(\Phi_r,\,X)$, $\mathrm{Indet}_n(\widetilde{\Phi}_r,\,X)$ и $\mathrm{Indet}^n(\widetilde{\Phi}_r,\,X)$. Так как пространство и размерность будут всегда понятны из контекста, то соответствующие индексы будут опускаться. Из предложения 3.5 работы [16] следует, что если операция Φ_r (соответственно $\widetilde{\Phi}_r$) определена на классе x, то ее неопределенность (то есть та группа, по которой она является смежным классом) равняется $\mathrm{Indet}(\Phi_r)$ (соответственно $\mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r)$). По определению 1 имеет место равенство $\mathrm{Indet}(\Phi_r)=\beta\ \mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r)$. Следующая лемма является прямым следствием формулы универсальных коэффициентов.

Лемма 1. *Пусть* $x\in H^*\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *такой класс целочисленных когомологий, что на нем определена и нетривиально действует операция* Φ_r*. Тогда существует класс* $y\in H_{*+2r(p-1)}\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *такой, что* $\langle\mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r),\,y\rangle=0$ *и* $\langle\widetilde{\Phi}_r(x),\,y\rangle\neq 0$.

Теорема 9. *Пусть* X *— связный спектр конечного типа и* $H^{\leqslant N}(X;\mathbb{Q})=0$ *для некоторого натурального* N*. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Для любого целочисленного класса* $x\in H^i\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *размерности меньше, чем* $N-2r(p-1)-1$*, следующие условия эквивалентны:*

   (a) *Операция* Φ_r *определена на классе* x*,*

   (b) $\langle x,\,\mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r)\rangle=0$.

2. *Пусть на классах* $x\in H^i\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *и* $y\in H_{i+2r(p-1)}\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ *определена операция* Φ_r *и* $i<N-2r(p-1)-1$*. Тогда выполнено равенство:*
$$\langle\widetilde{\Phi}_r(x),\,y\rangle=-\langle x,\,\widetilde{\Phi}_r(y)\rangle.$$
   Так как по пункту 1 теоремы $\langle x,\,\mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r)\rangle=0$ *и* $\langle\mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r),\,y\rangle=0$*, то это равенство корректно и есть равенство элементов группы* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}$.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по r.

База $r=1$.

По теореме 8 имеем, что $\Phi_1=\varepsilon_1\beta P^1$ — однозначная операция, поэтому утверждение 1 выполнено автоматически. Утверждение 2 было доказано в параграфе 4 главы 3 работы [17].

Переход $r=n\mapsto r=n+1$.

Сначала докажем утверждение 1. Для этого докажем равносильность следующих утверждений.

1. Операция Φ_{n+1} определена на классе x.

2. Операция Φ_n определена на классе x и $0 \in \Phi_n(x)$.

3. $\langle x, \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_n)\rangle = 0$ и $0 \in \Phi_n(x)$.

4. $\langle x, \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_n)\rangle = 0$ и для любого класса $y \in H_{i+2r(p-1)}\big(X;\ \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такого, что $\langle y, \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_n)\rangle = 0$ выполнено, что $\langle y, \widetilde{\Phi}_n(x)\rangle = 0$.

5. $\langle x, \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_n)\rangle = 0$ и для любого класса $y \in H_{i+2r(p-1)}\big(X; \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ на котором определена операция Φ_n выполнено, что $\langle y, \widetilde{\Phi}_n(x)\rangle = 0$.

6. Для любого класса $y \in H_{i+2r(p-1)}\big(X; \mathbb{Z}_{(p)}\big)$, на котором определена операция Φ_n выполнено, что $\langle \widetilde{\Phi}_n(y), x\rangle = 0$ (в частности $\langle \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_n), x\rangle = 0$).

7. $\langle x, \operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_{n+1})\rangle = 0$.

Равносильность пунктов 1 и 2 следует из пункта 1 следствия 4. Равносильность пунктов 2 и 3 следует из предположения индукции для первого пункта теоремы 9 для $r = n$. Равносильность пунктов 3 и 4 следует из леммы 1. Равносильность пунктов 4 и 5 следует из предположения индукции для первого пункта теоремы 9 для $r = n$. Равносильность пунктов 5 и 6 следует из пункта 2 теоремы 9 для $r = n$. Наконец, докажем равносильность пунктов 6 и 7. Заметим, что имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_{n+1})/\operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "\cong", "\beta"'] & \operatorname{Indet}(\Phi_{n+1}) \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Im}(\widetilde{\Phi}_n)/\operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "\cong", "\beta"'] & \operatorname{Im}(\Phi_n)
\end{tikzcd} \tag{1}$$

где равенство $\operatorname{Indet}(\Phi_{n+1}) = \operatorname{Im}(\Phi_n)$ следует из пункта 1 следствия 4; а горизонтальные изоморфизмы следуют из определения 1. Так как рациональные когомологии спектра X в рассматриваемых размерностях тривиальны, то для любого натурального m выполнено, что $\langle x, \operatorname{Ker}\ \beta\rangle = 0$, где $\operatorname{Ker}\ \beta \subset H_i\big(X;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)}\big)$. Таким образом равносильность пунктов 6 и 7 следует из изоморфности групп $\operatorname{Indet}(\widetilde{\Phi}_{n+1})/\operatorname{Ker}\beta$ и $\operatorname{Im}(\widetilde{\Phi}_n)/\operatorname{Ker}\beta$.

Теперь докажем утверждение 2. Так как теория $K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ является мультипликативной, то имеется каноническое отображение

$$\mu\colon \mathrm{bu}_{(p)}\big(r(p-1)\big) \wedge \mathrm{bu}_{(p)}\big(r(p-1)\big) \to \mathrm{bu}_{(p)}\big(r(p-1)\big).$$

Из теоремы 3.2 работы [12] следует, что при этом отображении выполнены равенства

$$\mu^*(u_{r(p-1)}) = u_{r(p-1)} \times u_{r(p-1)};$$

$$\mu^*(k^{2r(p-1)+1}) = k^{2r(p-1)+1} \times u_{r(p-1)} + u_{r(p-1)} \times k^{2r(p-1)+1}.$$

Так как $\beta\tilde{k}^{2r(p-1)+1} = k^{2r(p-1)+1}$, имеем, что:

$$\mu^*(\tilde{k}^{2r(p-1)+1}) = \tilde{k}^{2r(p-1)+1} \times u_{r(p-1)} + u_{r(p-1)} \times \tilde{k}^{2r(p-1)+1} + A, \tag{2}$$

где

$$A \in H^{2r(p-1)}\big(\mathrm{bu}_{(p)}\big(r(p-1)\big) \wedge \mathrm{bu}_{(p)}\big(r(p-1)\big); \mathbb{Z}_{(p)}\big).$$

Для каждой пары отображений

$$f\colon X\to \Sigma^i \mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\quad f^*\bigl(\Sigma^i u_{r(p-1)}\bigr)=x$$

и

$$g\colon D(X)\to \Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\quad g^*\bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}u_{r(p-1)}\bigr)=D(y)$$

имеем отображение

$$f\wedge g\colon X\wedge D(X)\to \Sigma^i \mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)\wedge \Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr),$$

такое, что

$$\bigl(c\circ f\wedge g\bigr)^*\bigl(\Sigma^{-2r(p-1)}u_{r(p-1)}\times u_{r(p-1)}\bigr)=x\times D(y),$$

где

$$c\colon \Sigma^i \mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)\wedge \Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)\to \Sigma^{-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)\wedge \mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)$$

стандартная гомотопическая эквивалентность. Следовательно, имеет место включение:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_r\bigl(x\times D(y)\bigr)\supset \bigcup_{f,g}\bigl(\mu\circ c\circ f\wedge g\bigr)^*\tilde{k}^{2r(p-1)+1}=\\ =\widetilde{\Phi}_r(x)\times D(y)+x\times\widetilde{\Phi}_r(D(y))+A\bigl(x\times D(y)\bigr),\end{aligned}\tag{3}$$

где объединение берется по всем парам отображений f и g как выше и

$$A\bigl(x\times D(y)\bigr):=\bigcup_{f,g}\bigl(f\wedge g\bigr)^*\Bigl(c^*\bigl(\Sigma^{-2r(p-1)}A\bigr)\Bigr).$$

По определению:

$$\begin{aligned}&c^*\bigl(\Sigma^{-2r(p-1)}A\bigr)\in H^0\Bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)\wedge \Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)=\\ &=\bigoplus_j H^j\Bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\otimes H^{-j}\Bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\oplus\\ &\oplus\mathrm{Tor}\Bigl(H^j\bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr),\,H^{1-j}\bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

Так как спектр $\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr)$ связен, то

$$\begin{aligned}&\bigoplus_j H^j\Bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\otimes H^{-j}\Bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\oplus\\ &\oplus\mathrm{Tor}\Bigl(H^j\bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr),\,H^{1-j}\bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)\Bigr)=\\ &=\bigoplus_{i\leqslant j\leqslant i+2r(p-1)+1} H^j\Bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\otimes H^{-j}\Bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\Bigr)\oplus\\ &\oplus\mathrm{Tor}\Bigl(H^j\bigl(\Sigma^i\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr),\,H^{1-j}\bigl(\Sigma^{-i-2r(p-1)}\mathrm{bu}_{(p)}\bigl(r(p-1)\bigr);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

Следовательно:

$$A\big(x\times D(y)\big)\subset \bigoplus_{i\leqslant j\leqslant i+2r(p-1)+1} H^j\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)\otimes H^{-j}\big(D(X);\mathbb{Z}_{(p)}\big)\oplus \\ \oplus \operatorname{Tor}\Big(H^j\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big),\, H^{1-j}\big(D(X);\mathbb{Z}_{(p)}\big)\Big). \quad (4)$$

По условиям теоремы $H^j\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)\otimes\mathbb{Q}=0$ при $j\leqslant i+2r(p-1)+1$. Поэтому из включения (4) следует, что множество $A\big(x\times D(y)\big)$ состоит только из классов конечного порядка.

Рассмотрим теперь каноническое отображение $\eta\colon \mathbb{S}\to X\wedge D(X)$. Заметим, что:

1. $\eta^*\Big(\widetilde{\Phi}_r\big(x\times D(y)\big)\Big)\subset\widetilde{\Phi}_r\Big(\eta^*\big(x\times D(y)\big)\Big)=0.$
2. $\eta^*\Big(A\big(x\times D(y)\big)\Big)=0$, так как множество $A\big(x\times D(y)\big)$, как было замечено выше, состоит только из классов конечного порядка.
3. По пункту 1b теоремы классы $\eta^*\big(\widetilde{\Phi}_r(x)\times D(y)\big)$ и $\eta^*\big(x\times\widetilde{\Phi}_r(D(y))\big)$ корректно определены (т.е. не зависят от выбора представителя в $\widetilde{\Phi}_r(x)$ и $\widetilde{\Phi}_r\big(D(y)\big)$ соответственно).

Применяя эти наблюдения к включению (3) получаем, что

$$\eta^*\big(\widetilde{\Phi}_r(x)\times D(y)\big)=-\eta^*\big(x\times\widetilde{\Phi}_r(D(y))\big).$$

И, следовательно, $\langle\widetilde{\Phi}_r(x),\, y\rangle=-\langle x,\,\widetilde{\Phi}_r(y)\rangle$. □

2.3 Приложение к проблеме реализации

Обозначим через $\omega\in H^0(\mathrm{MU};\mathbb{Z})$ универсальный класс Тома спектра Тома MU. Отображение спектров $\mathrm{MU}\to K(\mathbb{Z})$, классифицирующее класс ω, задает естественные преобразования соответствующих теорий гомологий и когомологий:

$$\mu^*\colon \mathrm{MU}^*(X)\to H^*(X;\mathbb{Z}),\qquad \mu_*\colon \mathrm{MU}_*(X)\to H_*(X;\mathbb{Z}).$$

Классы (ко)гомологий, лежащие в образе этого отображения будем называть U-реализуемыми. Если X является клеточным комплексом, то класс гомологий $x\in H_n(X;\mathbb{Z})$ является U-реализуемым, тогда и только тогда, когда он может быть реализован непрерывным образом фундаментального класса гладкого замкнутого стабильно комплексного многообразия. Если X — конечный спектр, то имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{MU}_*(X) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\mu_*"] & \mathrm{MU}^{-*}\big(D(X)\big) \arrow[d, "\mu_*"] \\ H_*(X;\mathbb{Z}) \arrow[r, "D"] & H^{-*}\big(D(X);\mathbb{Z}\big). \end{tikzcd}$$

Таким образом класс гомологий $a\in H_*(X;\mathbb{Z})$ конечного спектра X является U-реализуемым, тогда и только тогда, когда класс $D(a)\in H^{-*}\big(D(X);\mathbb{Z}\big)$ является U-реализуемым.

Лемма 2. *Если целочисленный класс гомологий $a \in H_n(X;\mathbb{Z})$ клеточного комплекса конечного типа X является U-реализуемым, то для любого простого p и любого r операции Φ_r определены и действуют нулем на классе a.*

Доказательство. Обозначим через $i\colon Sk^{n+1}(X)\to X$ — вложение остова и через $a' \in H_n\big(Sk^{n+1}(X);\ \mathbb{Z}\big)$ такой класс гомологий, что $i_*(a')=a$. Так как класс a является U-реализуемым, то по теореме о клеточной аппроксимации класс a' тоже является U-реализуемым. Обозначим через Y надстроечный спектр для пространства X и через $b\in H_n(Y;\mathbb{Z})$ класс, соответствующий классу a'. Так как свойство быть реализуемым сохраняется при надстройке, то класс b тоже будет U-реализуемым. По определению действия операций Φ_r на гомологиях клеточных комплексов для того, чтобы доказать, что операция Φ_r определена и действует нулем на классе a достаточно показать, что она определена и действует нулем на классе b. Напомним, что на классе b действие операций Φ_r определялось по формуле $\Phi_r(b)=D\big(\Phi_r(D(b))\big)$. Так как класс $D(b)$ является U-реализуемым, то существует отображение $f\colon D(Y)\to\Sigma^{-n}\mathrm{MU}$ такое, что $f^*(\Sigma^{-n}\omega)=D(b)$. Так как целочисленные когомологии $H^*(\mathrm{MU};\ \mathbb{Z})$ не содержат кручения и операции Φ_r имеют конечный порядок, то если операция Φ_r определена на классе ω, то она действует на нем нулем. По следствию 4 операция Φ_1 есть операция Стинрода и потому определена на всех классах, и операция Φ_r определена на всех классах, на которых определена и действует нулем операция Φ_{r-1}. Поэтому, индукцией по r получаем, что все операции $\Phi(r)$ определены и действуют на классе ω, и, следовательно, на классе $D(b)$, нулем. $\square$

Лемма 3. *Пусть X такой клеточный комплекс конечного типа, что выполнены следующие условия.*

1. *$\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q})=0$.*
2. *Существует класс $x\in H^n\big(X;\mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такой, что на нем определена операция Φ_r и $\beta\chi(P^r)(x)\neq 0$.*

Тогда для любого класса $a\in H_{n+2r(p-1)}(X;\mathbb{Z})$ такого, что $\langle a,\chi(P^r)(x)\rangle\neq 0$ и для любого целого m, взаимно простого с p, класс $mp^{r-1}a$ не U-реализуем. Более того, такой класс a всегда существует.

Доказательство. Так как класс ma тоже удовлетворяет условиям леммы, то лемму достаточно доказывать в случае $m=1$. По лемме 2 для того, чтобы доказать не U-реализуемость класса $p^{r-1}a$ достаточно показать, что операция Φ_r нетривиально действует на классе $p^{r-1}a$. По пункту 3 следствия 4 операция Φ_r определена на классе $p^{r-1}a$. Таким образом осталось доказать, что Φ_r действует на $p^{r-1}a$ не тривиально. По пункту 3 следствия 4 имеем, что $\varepsilon_r\beta P^r(a)\in\Phi_r(p^{r-1}a)$ и, следовательно,

$$\varepsilon_r P^r(a)\in\widetilde{\Phi}_r(p^{r-1}a)\mod \mathrm{Ker}\,\beta.$$

Применим теорему 9 к классам x и $p^{r-1}a$. Это дает, что:

1. $\langle \mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r),\, x\rangle=0$
2. $\langle \mathrm{Indet}(\widetilde{\Phi}_r),\, p^{r-1}a\rangle=0$
3. $\langle \widetilde{\Phi}_r(x),\, p^{r-1}a\rangle=-\langle\widetilde{\Phi}_r(p^{r-1}a),\, x\rangle$

Так как $\langle x, \operatorname{Ker}\beta\rangle = 0$ то получаем, что имеет место равенство

$$\langle \widetilde{\Phi}_r(p^{r-1}a), x\rangle = \langle \varepsilon_r P^r(a), x\rangle.$$

Из результатов параграфа 4 главы 3 работы [17] имеем

$$\langle P^r(a), x\rangle = \langle a, \chi(P^r)(x)\rangle.$$

Так как $\varepsilon_r \neq 0$ по пункту 3 следствия 4 и $\langle a, \chi(P^r)(x)\rangle \neq 0$ по условию теоремы, то получаем, что и $\langle \widetilde{\Phi}_r(p^{r-1}a), x\rangle \neq 0$. Так как x — целочисленный класс конечного порядка, то значит $0 \notin \beta\widetilde{\Phi}_r(p^{r-1}a) = \Phi_r(p^{r-1}a)$.
Теперь докажем существование класса a. Так как $\beta\chi(P^r)(x) \neq 0$, то $\chi(P^r)(x) \notin \operatorname{Ker}\beta$ и поэтому, по формуле универсальных коэффициентов, существует целочисленный класс $a \in H_{n+2r(p-1)}(X; \mathbb{Z})$ такой, что $\langle a, \chi(P^r)(x)\rangle \neq 0$. □

3 Действие операций $\chi(P^r)$

Для начала зафиксируем некоторые обозначения. Обозначим через $\mathcal{A}_p$ — алгебру Стинрода когомологических операций по модулю p; $P^i \in \mathcal{A}_p$, $p \neq 2$; $Sq^i \in \mathcal{A}_2$ — степени Стинрода; $\beta_p \in \mathcal{A}_p$ — гомоморфизм Бокштейна; $\mathcal{A}_p/(\beta_p)$ — фактор алгебры $\mathcal{A}_p$ по двустороннему идеалу, порожденному элементом β_p; χ — антипод в $\mathcal{A}_p$. Для алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ будем обозначать через $\mathcal{H}^*$ двойственную алгебру Хопфа.

Также нам потребуются следующие специальные обозначения:

$\mathit{\Gamma}$ — множество бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ натуральных чисел таких, что:

1. лишь конечное число x_i отлично от нуля;
2. $x_i \geqslant px_{i+1}$ для всех i,

снабженное правым лексикографическим порядком.

$\mathit{\Upsilon}$ — множество бесконечных последовательностей натуральных чисел, лишь конечное число которых отлично от нуля, снабженное правым лексикографическим порядком.

$\gamma : \mathit{\Gamma} \to \mathit{\Upsilon}$ — такое отображение, что

$$\gamma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 - px_2, x_2 - px_3, \ldots).$$

Очевидно, что γ биекция, сохраняющая порядок.

Обозначим через $\xi_i \in \mathcal{A}_p^*$ образующие Милнора. Хорошо известны следующие результаты.

Утверждение 1 ([13] стр.54; [15])**.** *Для $p = 2$ имеются изоморфизмы:*

$$\mathcal{A}_2^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots], \ \dim(\xi_i) = 2^i - 1;$$

$$\big(\mathcal{A}_2/(\beta_2)\big)^* = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2, \ldots].$$

А для $p > 2$:

$$\mathcal{A}_p^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots] \otimes_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \Lambda(\tau_0, \ldots, \tau_n, \ldots), \ \dim(\xi_i) = 2(p^i - 1), \ \dim(\tau_i) = 2p^i - 1;$$

$$\big(\mathcal{A}_p/(\beta_p)\big)^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots].$$

Для последовательности $I=(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\in\varUpsilon$ положим

$$\xi^I=\xi_1^{x_1}\xi_2^{x_2}\dots\xi_n^{x_n};\quad \tau^I=\tau_0^{x_1}\tau_1^{x_2}\dots\tau_{n-1}^{x_n}.$$

По предыдущему утверждению множество $\{\xi^I \ |I\in\varUpsilon\}$ образует базис в $\mathcal{A}_2^*$; $\{\xi^I\tau^{I'} \ |I,\ I'\in\varUpsilon\}$ — базис в $\mathcal{A}_p^*$, $p>2$; $\{\xi^{2I} \ |I\in\varUpsilon\}$ — базис в $\big(\mathcal{A}_2/(\beta_2)\big)^*$; $\{\xi^I \ |I\in\varUpsilon\}$ — базис в $\big(\mathcal{A}_p/(\beta_p)\big)^*$, $p>2$. С помощью верхней звездочки будем обозначать соответствующие двойственные базисы (базисы Милнора) в двойственных алгебрах.

Утверждение 2 ([15] §7, cor.6). *В алгебре $\mathcal{A}_p$ выполнено равенство:*

$$\chi(P^i)=(-1)^i\sum_{I\in\varUpsilon_i}(\xi^I)^*,\ \ p>2;$$

$$\chi(Sq^i)=\sum_{I\in\varUpsilon_i}(\xi^I)^*,\ \ p=2,$$

где $\varUpsilon_i$ – множество последовательностей $I\in\varUpsilon$ таких, что степень элемента ξ^I равняется $2i(p-1)$ для $p>2$ и i для $p=2$.

Следствие 5. *В фактор алгебре $\mathcal{A}_p/(\beta_p)$ выполнено равенство:*

$$\chi(P^i)=(-1)^i\sum_{I\in\varUpsilon_i}(\xi^I)^*,\ \ p>2;$$

$$\chi(Sq^{2i})=\sum_{I\in\varUpsilon_i}(\xi^{2I})^*,\ \ p=2.$$

Доказательство. По утверждению 1 при отображении π: $\mathcal{A}_p\to\mathcal{A}_p/(\beta_p)$ имеем, что:

$$\pi\big((\xi^I\tau^{I'})^*\big)=\begin{cases}(\xi^I)^*, & \text{если } I'=0;\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$

при $p>2$ и

$$\pi\big((\xi^I)^*\big)=\begin{cases}(\xi^I)^*, & \text{если } I=2I' \text{ для некоторого } I'\in\varUpsilon;\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$

при $p=2$. Сопоставляя это с утверждением 2, получаем утверждение следствия. □

Лемма 4 ([15],лемма 8). *Для любых последовательностей I, $J\in\varGamma$ имеют место равенства:*

$$\langle\xi^{\gamma(J)},\, P^I\rangle=\begin{cases}0, \text{ если } I<J;\\ \pm1, \text{ если } I=J,\end{cases}$$

для $p>2$ и

$$\langle\xi^{\gamma(J)},\, Sq^I\rangle=\begin{cases}0, \text{ если } I<J;\\ 1, \text{ если } I=J,\end{cases}$$

для $p=2$.

Хорошо известно, что при $p>2$ операции P^I; $I\in\Gamma$ образуют базис в алгебре $\mathcal{A}_p/(\beta_p)$; а при $p=2$ операции Sq^{2I}; $I\in\Gamma$ образуют базис в алгебре $\mathcal{A}_2/(\beta_2)$ (см. [6] предл. 3.5). Эти базисы будем называть базисами Картана—Серра в $\mathcal{A}_p/(\beta_p)$. Все дальнейшие утверждения верны для всех простых p, если в случае $p=2$ обозначать Sq^{2i} через P^i.

Следствие 6. *Операция $\chi(P^r)$, расписанная по базису Картана—Серра в алгебре $\mathcal{A}_p/(\beta_p)$, в качестве ненулевого слагаемого содержит операцию $P^{I^r_{\max}}$, где последовательность $I^r_{\max}$ максимальна среди таких последовательностей I из Γ, что степень P^I равна $2r(p-1)$.*

Доказательство. По лемме 4 матрица перехода от базиса Картана—Серра к базису Милнора является верхнетреугольной с ±1 на диагонали. Поэтому и матрица перехода от базиса Милнора к базису Картана—Серра является верхнетреугольной с ±1 на диагонали. Поэтому операция $\sum_{I\in\Upsilon_r}(\xi^I)^*$, расписанная по базису Картана—Серра, содержит с коэффициентом ±1 операцию $P^{I^r_{\max}}$. По следствию 5 имеем, что $\chi(P^r)=(-1)^r\sum_{I\in\Upsilon_r}(\xi^I)^*$. Это завершает доказательство. □

Для операции P^I; $I\in\Gamma$ ее дефект будем обозначать $\mathrm{ex}(P^I)$. По определению $\mathrm{ex}(P^I)\colon=2|\gamma(I)|$, где $|J|$ — сумма всех членов последовательности J. Для натурального числа r определим $\mathrm{ex}(r)$ по формуле

$$\mathrm{ex}(r)\colon=\min\{\mathrm{ex}(P^I)|I\in\Gamma;\ \deg(P^I)=2r(p-1)\}.$$

Теорема 10. *Верны следующие утверждения:*

1. $\mathrm{ex}(P^{I^r_{\max}})=\mathrm{ex}(r)$,
2. $\mathrm{ex}(r)-\mathrm{ex}(r-1)$ *равно* 2 *либо* $-2(p-1)$.

Доказательство. По определению для операции P^I; $I\in\Gamma$ степени $2r(p-1)$ имеем, что $|I|=r$; $\mathrm{ex}(P^I)=2|\gamma(I)|$. Пусть

$$\gamma(I)=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,0,\ldots).$$

Тогда легко видеть, что

$$x_1+x_2(1+p)+x_3(1+p+p^2)+\cdots+x_n(1+p+\cdots+p^{n-1})=r. \tag{5}$$

Таким образом первый пункт теоремы равносилен тому, что среди последовательностей из Υ, удовлетворяющих (5), максимальная последовательность имеет минимальную сумму членов. Множество последовательностей из Υ, удовлетворяющих условию (5), обозначим Υ^r.

Лемма 5. *Пусть для последовательности $J\in\Upsilon^r$ выполнены следующие два условия.*

1. $x_i\leqslant p$ *для всех* i.
2. *Если* $x_i=p$, *то* $x_j=0$ *для всех* $j<i$.

Тогда последовательность J максимальна среди последовательностей из Υ^r.

Доказательство. Пусть последовательность $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots\ )\in\Upsilon^r$ удовлетворяет условиям леммы и $Y=(y_1, y_2, \ldots)\in\Upsilon^r$. Докажем, что $X\geqslant Y$ от противного. Пусть найдется i такое, что $y_i>x_i$ и $y_j=x_j$ при $j>i$. Заметим, что так как X и Y лежат в Υ^r, то должно выполняться равенство:

$$x_1+x_2(1+p)+\cdots+x_i(1+p+\cdots+p^{i-1})=y_1+y_2(1+p)+\cdots+y_i(1+p+\cdots+p^{i-1}).$$

Так как $y_i>x_i$, то из этого следует, что

$$x_1+x_2(1+p)+\cdots+x_{i-1}(1+p+\cdots+p^{i-2})\geqslant(1+p+\cdots+p^{i-1}).$$

Пусть s — наименьший индекс такой, что $x_{s+1}\neq 0$. Тогда из условий леммы следует неравенство:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2(1+p)+\cdots+x_{i-1}(1+p+\cdots+p^{i-2})\leqslant\\ &\quad\leqslant p(1+p+\cdots+p^s)+(p-1)(1+p+\cdots+p^{s+1})+\cdots+(p-1)(1+p+\cdots+p^{i-2}).\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}&p(1+p+\cdots+p^s)+(p-1)(1+p+\cdots+p^{s+1})+\cdots+(p-1)(1+p+\cdots+p^{i-2})=\\ &\qquad=1+p+\cdots+p^{i-1}-(i-s-1)<1+p+\cdots+p^{i-1}.\end{aligned}$$

Противоречие. □

Пусть теперь $J=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)\in\Upsilon^r$ некоторая последовательность. Сейчас мы явно опишем алгоритм того, как из нее получить максимальную последовательность и как при этом меняется сумма ее членов. Наш алгоритм будет состоять из действий двух типов.

1) Если какой-то $x_i>p$, то делаем замену:
$x_i\mapsto x_i-(p+1)$,
$x_{i+1}\mapsto x_{i+1}+1$,
$x_{i-1}\mapsto x_{i-1}+p$.

2) Если $x_i=p$ и $x_{i-k}>0$, то делаем замену:
$x_i\mapsto x_i-p$,
$x_{i+1}\mapsto x_{i+1}+1$,
$x_{i-k}\mapsto x_{i-k}-1$,
$x_{i-k-1}\mapsto x_{i-k-1}+p$.

Заметим теперь, что оба этих действия строго увеличивают последовательность, причем действие типа 1) не увеличивает сумму членов (оно ее не меняет если $i>1$ и уменьшает на p если $i=1$) и действие типа 2) тоже не увеличивает сумму членов (оно ее не меняет если $i-k>1$ и уменьшает на p если $i-k=1$). Осталось заметить, что если к последовательности нельзя применить действия типа 1) и 2) то она удовлетворяет условиям леммы 5 и поэтому является максимальной.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть

$$\gamma(I^{r-1}_{max})=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

По лемме 5 имеются два случая.

1) Среди чисел x_i ни одно не равно p. Тогда из леммы 5 следует, что

$$\gamma(I^r_{max})=(x_1+1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

2) Найдется i такое, что $x_i = p$. Тогда из леммы 5 следует, что

$$\gamma(I^r_{max}) = (0, \ldots, 0, x_{i+1}+1, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Таким образом $\mathrm{ex}(r) - \mathrm{ex}(r-1)$ равно 2 (случай 1) либо $-2(p-1)$ (случай 2). $\square$

По ходу доказательства мы показали, что для любого r в Υ^r содержится последовательность, удовлетворяющая условия леммы 5. Таким образом верно следующее утверждение.

Следствие 7. *Последовательность $J \in \Upsilon^r$ является максимальной в Υ^r тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям.*

1. *$x_i \leqslant p$ для всех i.*
2. *Если $x_i = p$, то $x_j = 0$ для всех $j < i$.*

Лемма 6. *Операция $\chi(P^r)$ нетривиально действует на классе*

$$\underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{\mathrm{ex}(r)/2} \in H^{\mathrm{ex}(r)}\big(\underbrace{K(\mathbb{Z}, 2) \times \cdots \times K(\mathbb{Z}, 2)}_{\mathrm{ex}(r)/2}; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big),$$

где $\iota \in H^2(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — образующая.

Доказательство. Введем на множестве мономов от ι левый лексикографический порядок:

$$\iota^{a_1} \times \iota^{a_2} \times \cdots \times \iota^{a_{\mathrm{ex}(r)/2}} > \iota^{b_1} \times \iota^{b_2} \times \cdots \times \iota^{b_{\mathrm{ex}(r)/2}},$$

если последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{ex}(r)/2})$ больше последовательности $(b_1, b_2, \ldots, b_{\mathrm{ex}(r)/2})$ относительно левого лексикографического порядка.

Распишем операцию $\chi(P^r)$ по базису Картана—Серра:

$$\chi(P^r) = \sum_{J \in \Upsilon^r} \varepsilon_J P^{\gamma^{-1}(J)}.$$

По определению числа $\mathrm{ex}(r)$ имеются два случая:

1) $2|J| = \mathrm{ex}(\gamma^{-1}(J)) > \mathrm{ex}(r)$.

Тогда

$$P^{\gamma^{-1}(J)}(\underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{\mathrm{ex}(r)/2}) = 0,$$

так как степень класса $\underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{\mathrm{ex}(r)/2}$ равняется $\mathrm{ex}(r)$.

2) $2|J| = \mathrm{ex}(\gamma^{-1}(J)) = \mathrm{ex}(r)$.

Пусть

$$J = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Прямым вычислением проверяется, что класс $P^{\gamma^{-1}(J)}(\underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{\mathrm{ex}(r)/2})$, расписанный в сумму мономов от ι, содержит с единичным коэффициентом моном

$$\underbrace{\iota^{p^n} \times \cdots \times \iota^{p^n}}_{x_n} \times \underbrace{\iota^{p^{n-1}} \times \cdots \times \iota^{p^{n-1}}}_{x_{n-1}} \times \cdots \times \underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{x_1}, \tag{6}$$

причем моном (6) максимален среди всех мономов, содержащихся с ненулевым коэффициентом в $P^{\gamma^{-1}(J)}(\underbrace{\iota\times\cdots\times\iota}_{\mathrm{ex}(r)/2})$.

Заметим теперь, что если J, $J'\in\Upsilon^r$; $J>J'$ и

$$J=(x_1,x_2,\ldots,x_n,0,\ldots);\qquad J'=(y_1,y_2,\ldots,y_m,0,\ldots),$$

то

$$\underbrace{\iota^{p^n}\times\cdots\times\iota^{p^n}}_{x_n}\times\underbrace{\iota^{p^{n-1}}\times\cdots\times\iota^{p^{n-1}}}_{x_{n-1}}\times\cdots\times\underbrace{\iota\times\cdots\times\iota}_{x_1}>$$
$$>\underbrace{\iota^{p^m}\times\cdots\times\iota^{p^m}}_{y_m}\times\underbrace{\iota^{p^{m-1}}\times\cdots\times\iota^{p^{m-1}}}_{y_{m-1}}\times\cdots\times\underbrace{\iota\times\cdots\times\iota}_{y_1}.$$

Поэтому если последовательность J максимальна, то для любой другой последовательности $J'\in\Upsilon^r$ класс $P^{\gamma^{-1}(J')}(\underbrace{\iota\times\cdots\times\iota}_{\mathrm{ex}(r)/2})$, расписанный в сумму мономов от ι, не содержит моном (6). Осталось лишь заметить, что максимальной последовательностью в Υ^r является последовательность $\gamma(I^r_{max})$ и по следствию 6 имеем, что $\varepsilon_{\gamma(I^r_{max})}\neq 0$. $\square$

Лемма 7. *Для натурального числа n наибольшее натуральное число k такое, что выполнено неравенство $n>\mathrm{ex}(k)+2k(p-1)$, равняется*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right].$$

Доказательство. Из пункта 2 теоремы 10 следует, что если $n>\mathrm{ex}(k)+2k(p-1)$, то $n>\mathrm{ex}(k-1)+2(k-1)(p-1)$. Таким образом максимальное число k, для которого выполнено неравенство $n>\mathrm{ex}(k)+2k(p-1)$, равняется количеству натуральных чисел r, для которых выполнено неравенство $n-1\geqslant\mathrm{ex}(r)+2r(p-1)$. Именно это число мы и будем считать.

Заметим, что по следствию 7 и пункту 1 теоремы 10 каждое натуральное число r представимо единственным способом в виде

$$r=x_1+x_2(1+p)+x_3(1+p+p^2)+\cdots+x_m(1+p+\cdots+p^{m-1}),\tag{7}$$

где

$$\begin{array}{ll}x_i\leqslant p \text{ для всех } i & \text{(условие 1)}\\ \text{если } x_i=p, \text{ то } x_j=0 \text{ для всех } j<i & \text{(условие 2)}\end{array}$$

и имеет место равенство $\mathrm{ex}(r)=2\left(\sum_i x_i\right)$ и, как следствие, равенство

$$\mathrm{ex}(r)+2r(p-1)=2(px_1+p^2x_2+\cdots+p^mx_m).$$

Поэтому неравенство $n-1\geqslant\mathrm{ex}(r)+2r(p-1)$ можно переписать в виде

$$\left[\frac{n-1}{2p}\right]\geqslant x_1+px_2+\cdots+p^{m-1}x_m.\tag{8}$$

Посчитаем теперь число последовательностей $\{x_i\}$, удовлетворяющих условиям 1,2 и неравенству (8). Это и будет искомым числом.

Для начала заметим, что число последовательностей $\{x_i\}$, удовлетворяющих неравенству (8) и таких, что $x_i<p$ для всех i, равно $\left[\frac{n-1}{2p}\right]$ (это следует из единственности p-ичной записи числа).

Посчитаем теперь число последовательностей, у которых $x_j=p$. Тогда из условия 2 следует, что $x_i=0$ при $i<j$ и $x_i\neq p$ при $i>j$. Поэтому неравенство (8) можно переписать в виде

$$\left[\frac{n-1}{2p^{j+1}}\right]\geqslant x_{j+1}+px_{j+2}+\cdots+p^{m-1}x_m,$$

где все $x_{j+m}<p$. Откуда получаем, что число таких последовательностей равно $\left[\frac{n-1}{2p^{j+1}}\right]$. Следовательно, число последовательностей $\{x_i\}$, удовлетворяющих условиям 1,2 и неравенству (8), равно $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]$. □

4 Построение примера

С точностью до гомотопической эквивалентности спектр $\mathrm{bu}_{(p)}(s)$ можно реализовать как Ω-спектр. Обозначим q-й член этого спектра через $\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s)$. Таким образом имеем, что

$$\pi_i\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s)\bigr)=\begin{cases}\mathbb{Z}_{(p)}, & i=q+2k,\ 0\leqslant k<s;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Так как пространства $\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s)$ являются $(q-1)$-связными, то естественные отображения $H^{q+1}\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(q+1,\,s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)\to H^q\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)$ являются изоморфизмами. Выберем образующие $a_{q,s}\in H^q\bigl(\mathrm{bu}_p(q,\,s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)=\mathbb{Z}_{(p)}$ так, чтобы они переходили в друг друга при этом изоморфизме.

Лемма 8. *Существуют классы $a_{q,s,i}\in H^{q+2i}\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)$; $0\leqslant i<s$ такие, что $a_{q,s,0}=a_{q,s}$ и имеют место следующие изоморфизмы:*

$$H^*(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s);\,\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[a_{q,s,0},\,a_{q,s,1},\,\ldots,\,a_{q,s,s-1}],\quad q\ \textit{четное};$$
$$H^*(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s);\,\mathbb{Q})\cong\Lambda_{\mathbb{Q}}(a_{q,s,0},\,a_{q,s,1},\,\ldots,\,a_{q,s,s-1}),\quad q\ \textit{нечетное}.$$

Доказательство. Так как спектр $\mathrm{bu}_{(p)}(s)$ получается из спектра $\mathrm{bu}_{(p)}(s+1)$ заклеиванием $2(s+1)$-й гомотопической группы, то имеются гомотопические расслоения

$$\mathrm{bu}_{(p)}(s+1)\to\mathrm{bu}_{(p)}(s)\xrightarrow{k^{2s+1}}\Sigma^{2s+1}K\bigl(\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)$$

и, следовательно, гомотопические расслоения членов соответствующих Ω-спектров

$$\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s+1)\to\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s)\xrightarrow{k_q^{2s+1}}K\bigl(\mathbb{Z}_{(p)},\,q+2s+1\bigr),$$

где k_q^{2s+1} является образом стабильного класса k^{2s+1} при каноническом отображении $H^*\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)\to H^{*+q}\bigl(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s);\,\mathbb{Z}_{(p)}\bigr)$. В частности, так как класс k^{2s+1} имел конечный порядок, то и класс k_q^{2s+1} тоже имеет конечный порядок. Используя точную последовательность Пуппе, получаем гомотопическое расслоение

$$K\bigl(\mathbb{Z}_{(p)},\,q+2s\bigr)\to\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s+1)\to\mathrm{bu}_{(p)}(q,\,s)\tag{9}$$

такое, что $\tau(\iota_{q+2s}) = k_q^{q+2s+1}$, где τ — трансгрессия в спектральной последовательности расслоения и $\iota_{q+2s} \in H^{q+2s}\big(K(\mathbb{Z}_{(p)},\, q+2s);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ — образующая.
Далее будем доказывать лемму индукцией по s.

База $s = 1$.
Имеем, что $\mathrm{bu}_{(p)}(q,\, 1) = K\big(\mathbb{Z}_{(p)},\, q\big)$. Для $K\big(\mathbb{Z}_{(p)},\, q\big)$ утверждение леммы хорошо известно и доказано, например, на стр. 224 [7].

Переход $s \mapsto s+1$.
Рассмотрим спектральную последовательность расслоения (9) с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Пусть q — четное. Тогда:

$$H^*\big(K\big(\mathbb{Z}_{(p)},\, q+2s\big);\, \mathbb{Q}\big) = \mathbb{Q}[\iota_{q+2s}]$$

и по предположению индукции

$$H^*\big(\mathrm{bu}_p(q,\, s);\, \mathbb{Q}\big) = \mathbb{Q}[a_{q,s,0},\, a_{q,s,1},\, \ldots,\, a_{q,s,s-1}].$$

Так как класс $k_q^{2s(p-1)+1}$ имеет конечный порядок, то все дифференциалы в спектральной последовательности тривиальны и, следовательно, имеется изоморфизм:

$$H^*\big(\mathrm{bu}_p(q,\, s+1);\, \mathbb{Q}\big) \cong \mathbb{Q}[a'_{q,s+1,0},\, a'_{q,s+1,1},\, \ldots,\, a'_{q,s+1,s}].$$

Так как $H^*\big(\mathrm{bu}_p(q,\, s+1);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big) \otimes \mathbb{Q} \cong H^*\big(\mathrm{bu}_p(q,\, s+1);\, \mathbb{Q}\big)$, то классы $a'_{q,s+1,i}$ можно выбрать так, чтобы они были определены с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{(p)}$.
Случай нечетного q разбирается аналогично. $\square$

Лемма 9. *При $q > \mathrm{ex}(r)$ на классе $a_{q,r(p-1)}$ нетривиально действует целочисленная операция Стинрода $\beta\chi(P^r)$.*

Доказательство. В доказательстве леммы 8 было показано, что k-инварианты $k_q^{2k+1} \in H^{q+2k+1}\big(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\, k);\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ пространства $\mathrm{bu}_{(p)}(q,\, s)$ имеют конечный порядок. Так как целочисленные когомологии пространства $K(\mathbb{Z},\, 2)$ не содержат кручения, то из стандартной теории препятствий следует, что существует отображение

$$f\colon \underbrace{K(\mathbb{Z},\, 2) \times \cdots \times K(\mathbb{Z},\, 2)}_{\mathrm{ex}(r)/2} \to \mathrm{bu}_{(p)}\big(\mathrm{ex}(r),\, r(p-1)\big)$$

такое, что $f^*(a_{\mathrm{ex}(r),r(p-1)}) = \underbrace{\iota \times \cdots \times \iota}_{\mathrm{ex}(r)/2} =: u$. Для $q = \mathrm{ex}(r) + n$ обозначим через g_n композицию отображений

$$g_n\colon \Sigma^n K(\mathbb{Z},\, 2)^{\mathrm{ex}(r)/2} \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n \mathrm{bu}_{(p)}\big(\mathrm{ex}(r),\, 2r(p-1)\big) \to \mathrm{bu}_{(p)}\big(q,\, 2r(p-1)\big).$$

Тогда легко видеть, что $g_n^*(a_{q,r(p-1)}) = \Sigma^n u$. По лемме 6 операция $\chi(P^r)$ нетривиально действует на классе u и, следовательно, на классе $a_{q,r(p-1)}$. Докажем теперь, что при $n > 0$ класс $\chi(P^r)(a_{q,2r(p-1)})$ не является целочисленным и, следовательно, операция $\beta\chi(P^r)$ действует на нем не тривиально. Предположим, что это не так, и найдется класс $z \in H^{q+2r(p-1)}\big(\mathrm{bu}_{(p)}(q,\, 2r(p-1));\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$, приведение которого по модулю p равняется $\chi(P^r)(a_{q,2r(p-1)})$. Тогда приведение по модулю p класса $g_n^*(z)$ равняется $\chi(P^r)(\Sigma^n u) \neq 0$ и, следовательно, класс $g_n^*(z)$ не равен нулю. Так как когомологии $H^*\big(\Sigma^n K(\mathbb{Z},\, 2)^{\mathrm{ex}(r)/2};\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ не содержат кручения, то класс $g_n^*(z)$ имеет бесконечный порядок и, следовательно, класс z имеет бесконечный порядок. Раз класс z имеет бесконечный порядок, то по лемме 8 найдется натуральное m такое, что

$$mz \in \Lambda_{\mathbb{Z}_{(p)}}(a_{q,2r(p-1),0},\, a_{q,2r(p-1),1},\, \ldots,\, a_{q,2r(p-1),2r(p-1)-1}), \quad q \text{ нечетное};$$

$$mz \in \mathbb{Z}_{(p)}[a_{q,2r(p-1),0},\, a_{q,2r(p-1),1},\, \ldots,\, a_{q,2r(p-1),2r(p-1)-1}], \quad q \text{ четное}.$$

Так как при $n > 0$ все произведения в когомологиях $H^*\big(\Sigma^n K(\mathbb{Z}, 2)^{\mathrm{ex}(r)/2}; \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ тривиальны, то $g_n^*(mz) = 0$. Но так как $g_n^*(mz) = mg_n^*(z)$ и класс $g_n^*(z)$ имеет бесконечный порядок, то класс $g_n^*(z)$ должен равняться нулю. Противоречие. □

Определим пространство $R_p(q, s)$ как гомотопический слой отображения

$$f\colon \mathrm{bu}_{(p)}(q, s) \to \prod_{i=0}^{s-1} K(\mathbb{Z}_{(p)}, q+2i)$$

такого, что $f^*(\iota_{q+2i}) = pa_{q,s,i}$, где $\iota_n \in H^n\big(K(\mathbb{Z}_{(p)}, n); \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ — образующая. Обозначим через $\pi\colon R_p(q, s) \to \mathrm{bu}_{(p)}(q, s)$ вложение слоя. Обозначим через $v_{q,s}$ класс $\pi^* a_{q,s}$.

Лемма 10. *Верны следующие свойства пространства $R_p(q, s)$.*

1. $\widetilde{H}^*(R_p(q, s); \mathbb{Q}) = 0$.
2. *Операция Φ_r определена на классе $v_{q,r(p-1)}$.*
3. *При $q > \mathrm{ex}(r)$ операция $\beta\chi(P^r)$ нетривиально действует на классе $v_{q,r(p-1)}$.*

Доказательство. Утверждение 1 леммы сразу следует из того, что по лемме 8 отображение f индуцирует изоморфизм на рациональных когомологиях. Операция Φ_r определена на классе $v_{q,r(p-1)}$, так как в качестве искомого отображения можно взять отображение π. Теперь докажем третий пункт леммы. Используя точную последовательность Пуппе для расслоения f, получаем гомотопическое расслоение

$$\prod_{i=0}^{r(p-1)-1} K\big(\mathbb{Z}_{(p)}, q+2i-1\big) \to R_p\big(q, r(p-1)\big) \xrightarrow{\pi} \mathrm{bu}_{(p)}\big(q, r(p-1)\big) \tag{10}$$

такое, что $\tau(\iota_{q+2i-1}) = pa_{q,r(p-1),i}$, где τ — трансгрессия. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения (10) с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Так как кольцо когомологий $H^*\big(K(\mathbb{Z}_{(p)}, n); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big)$ мультипликативно порождено операциями Стинрода от класса ι_n, трансгрессия коммутирует с операциями Стинрода и спектральная последовательность расслоения мультипликативна, то все дифференциалы в этой спектральной последовательности равны нулю. Следовательно, отображение

$$\pi^*\colon H^*\big(\mathrm{bu}_{(p)}(q, r); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big) \to H^*\big(R_p(q, r); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big)$$

является вложением. Так как по лемме 9 при $q > \mathrm{ex}(r)$ класс

$$\chi(P^r)(a_{q,r(p-1)}) \in H^{q+2r(p-1)}\big(\mathrm{bu}_{(p)}(q, r); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\big)$$

не целочисленный, то значит класс

$$\pi^*\Big(\chi(P^r)(a_{q,r(p-1)})\Big) = \chi(P^r)(v_{q,r(p-1)})$$

тоже не является целочисленным и поэтому $\beta\chi(P^r)(v_{q,r(p-1)}) \neq 0$. □

Обозначим через $R(n)$ пространство

$$\bigvee_p R_p\left(n-2\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]\Big)(p-1),\ \Big(\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]\Big)(p-1)\right),$$

где при $q\leqslant 0$ полагаем $R_p(q,s):=\mathrm{pt}$.

Теорема 11. *В пространстве $R(n)$ существует класс гомологий $x\in H_n(X;\mathbb{Z})$ такой, что минимальное натуральное число A такое, что класс Ax является* U*-реализуемым, равняется*

$$\prod_{p\ \textit{простое}} p^{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]}.$$

Доказательство. Обозначим через $k_p(n)$ число $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]$. По лемме 10 пространство $R_p\big(n-k_p(n)(p-1),\,k_p(n)(p-1)\big)$ удовлетворяет всем условия леммы 3 и, следовательно, по лемме 3 существует класс

$$r_p(n)\in H_n\Big(R_p\big(n-k_p(n)(p-1),\,k_p(n)(p-1)\big);\,\mathbb{Z}\Big)$$

такой, что класс $p^{k_p(n)-1}$ не является U-реализуемым. Полагая

$$r(n)=\sum_p r_p(n)\in H_n\big(R(n);\,\mathbb{Z}\big),$$

получаем, что минимальная кратность, с которой класс $r(n)$ является U-реализуемым делится на $\prod_p p^{k_p(n)}$. При необходимости умножая класс $r(n)$ на некоторое натуральное число, получаем искомый класс гомологий. $\square$

5 Верхние оценки на кратность реализации циклов

Основной целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 12. *При $n<2p^2+2p$ имеет место равенство:*

$$\nu_p\big(k_U(n)\big)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right].$$

Перед тем как доказывать эту теорему докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 11. *В спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории гомологий $\mathrm{MU}_*\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ конечного клеточного комплекса X для любого простого числа p и всех неотрицательных t и s имеют место следующие равенства.*

1. *При* $t\not\equiv 1 \mod 2(p-1)$
$$d^t=0.$$

2. *При* $t=2r(p-1)+1$
$$d_{s,0}^{2r(p-1)+1}(p^{r-1}x)=\sum_i \theta_{r,i}(x)a_{r,i}\quad (\textit{по модулю предыдущих дифференциалов}).$$

Здесь $a_{r,i} \in \mathrm{MU}_{2r(p-1)}(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ такие элементы, что множество $\{a_{r,i}\}$ образует базис $\mathrm{MU}_*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ как $\mathbb{Z}_{(p)}$-модуля; $x \in E^2_{s,0}$; $\theta_{r,i}$ — некоторые целочисленные операции Стинрода степени $2r(p-1)+1$ и порядка p.

Доказательство. Так как спектральная последовательность Атья—Хирцебруха стабильна, то теорему достаточно доказать для случая, когда X — конечный спектр. Так как двойственность Спеньера—Уайтхеда переводит спектральную последовательность Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ спектра X в спектральную последовательность Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU}^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ спектра $D(X)$, то достаточно доказать когомологический вариант теоремы для спектра $D(X)$. В когомологическом варианте утверждение 1 теоремы было доказано в общем случае в лемме 2 работы [1]. Докажем теперь утверждение 2. Рассмотрим отображение

$$f\colon D(X) \to \Sigma^{-s} K\big(\mathbb{Z}_{(p)}\big),$$

классифицирующее класс $D(x)$ (напомним, что $x \in E^2_{s,0}\big(X;\, \mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\big) = H_s\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$). Обозначим через $\iota \in H^0\big(K(\mathbb{Z}_{(p)});\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ — фундаментальный класс и рассмотрим спектральную последовательность Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU}^* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ спектра $K\big(\mathbb{Z}_{(p)}\big)$. Так как все классы в $H^{>0}\big(K(\mathbb{Z}_{(p)});\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ являются p-кручением, то все дифференциалы в этой спектральной последовательности аннулируются умножением на p; а так как дифференциал d_t равен нулю при $t \not\equiv 1 \mod 2(p-1)$, то из этого следует, что класс $p^{r-1}\iota$ лежит в $E^{0,0}_{2r(p-1)+1}$. Так как класс когомологий в $H^{>0}\big(K(\mathbb{Z}_{(p)});\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ есть целочисленная операция Стинрода порядка p, то, по модулю предыдущих дифференциалов, образ $d^{0,0}_{2r(p-1)+1}(p^{r-1}\iota)$ можно представить в виде $\sum_i \theta_{r,i} a^{r,i} = \sum_i \theta_{r,i}(\iota) a^{r,i}$, где $\{a^{r,i}\}$ – двойственный (относительно двойственности Спеньера—Уайтхеда) к $\{a_{r,i}\}$ базис в $\mathrm{MU}^*(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Наконец, используя стабильность и функториальность относительно отображения f спектральной последовательности Атья—Хирцебруха, утверждение 2 доказывается для класса $D(x)$ спектра $D(X)$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 12. *Для конечного клеточного комплекса X дифференциал $d^{n-1}_{n,0}$ в спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ комплекса X всегда равен нулю.*

Доказательство. Если n нечетно, то $\mathrm{MU}_{n-2}(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = 0$ и утверждение леммы выполнено автоматически. Поэтому далее будем считать, что n четное. Докажем утверждение леммы от противного. Предположим, что найдется класс $x \in H_n(X;\, \mathbb{Z}_{(p)})$ такой, что $0 \notin d^{n-1}_{n,0}(x)$. Заметим, что тогда существует класс $y \in H^1(X,\, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)})$ такой, что $\langle W(d^{n-1}_{n,0}(x)),\, y\rangle = 0$ и $\langle d^{n-1}_{n,0}(x),\, y\rangle \neq 0$, где $W(d^{n-1}_{n,0}(x))$ есть объединение образов предыдущих дифференциалов. Обозначим $f\colon X \to K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)},\, 1)$ классифицирующее отображение для класса y. Так как четномерные целочисленные гомологии пространства $K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(p)},\, 1)$ тривиальны, то $d^{n-1}_{n,0}(f_* x) = 0$; и так как спектральная последовательность Атья—Хирцебруха функториальна, то $f_*\big(d^{n-1}_{n,0}(x)\big) \subset d^{n-1}_{n,0}(f_* x) = 0$. Поэтому

$$0 \neq \langle d^{n-1}_{n,0}(x),\, y\rangle = \langle d^{n-1}_{n,0}(x),\, f^*\iota\rangle = \langle f_* d^{n-1}_{n,0}(x),\, \iota\rangle = 0,$$

где $\iota \in H^1\big(K(\mathbb{Q});\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ — фундаментальный класс. Противоречие. $\square$

Теорема 13. *Для любого целочисленного класса гомологий x размерности n топологического пространства X класс*

$$\prod_{p \text{ простое}} p^{[\frac{n-3}{2p-2}]} x$$

является U-реализуемым.

Доказательство. Из предложения 5.1 работы [3] следует, что теорему достаточно доказать в случае, когда X — конечный клеточный комплекс. Для клеточных комплексов утверждение теоремы равносильно тому, что для всех простых p класс $p^{[\frac{n-3}{2p-2}]}x$ лежит в ядре всех дифференциалов спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ комплекса X. По пункту 2 леммы 11 класс $p^{[\frac{n-3}{2p-2}]}x$ лежит в $\Big(2\big([\frac{n-3}{2p-2}]+1\big)(p-1)+1\Big)$-ом листе спектральной последовательности Атья—Хирцебруха для теории $\mathrm{MU} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ комплекса X. Все старшие дифференциалы равны нулю по лемме 12 и размерностным соображениям. □

Лемма 13. *Верны следующие свойства действия целочисленных операций Стинрода на гомологиях конечных клеточных пространств.*

1. *Все целочисленные операции Стинрода порядка p и степени $2r(p-1)+1$, где $r \leqslant p$ действуют нулем на всех целочисленных классах гомологий размерности не больше, чем $2rp$.*

2. *Все целочисленные операции Стинрода порядка p и степени $2(p+2)(p-1)+1$ действуют нулем на всех целочисленных классах гомологий размерности меньше, чем $2p^2+2p$.*

Доказательство. Сначала докажем первый пункт леммы. Из описания алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ (см. [18] § 4.L) следует, что все целочисленные операции Стинрода степени $2r(p-1)+1$, где $r \leqslant p$ имеют вид $a\beta P^r$, где $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Пусть операция βP^r нетривиально действует на классе $x \in H_n\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$. Тогда существует целочисленный класс конечного порядка $y \in H^{n-2r(p-1)}\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такой, что $\langle P^r(x),\, y\rangle \neq 0$. Из результатов параграфа 4 главы 3 работы [17] имеем, что

$$0 \neq \langle P^r(x),\, y\rangle = \langle x,\, \chi(P^r)(y)\rangle = (-1)^r \langle x,\, P^r(y)\rangle.$$

Если размерность класса y меньше, чем $2r$, то $P^r(y)=0$ по соображению дефекта, а если $\dim(y)=2r$, то $P^r(y)=y^p$ является целочисленным классом конечного порядка. В обоих случаях получаем, что $\langle x,\, P^r(y)\rangle = 0$. Поэтому $n-2r(p-1) > 2r$ и, следовательно, $n > 2rp$.

Теперь докажем второй пункт леммы. Из описания алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ (см. [18] § 4.L) следует, что все целочисленные операции Стинрода степени $2(p+2)(p-1)+1$ имеют вид $a\beta P^{p+2} + b\beta P^{p+1}P^1$, где $a,\, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Рассуждая аналогично предыдущему пункту получаем, что если одна из операций βP^{p+2} или $\beta P^{p+1}P^1$ нетривиально действует на классе $x \in H_n\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$, то существует класс $y \in H^{n-2(p+2)(p-1)}\big(X;\, \mathbb{Z}_{(p)}\big)$ такой, что либо $\langle x,\, \chi(P^{p+2})(y)\rangle \neq 0$, либо $\langle x,\, \chi(P^{p+1}P^1)(y)\rangle \neq 0$. Так как обе операции $\chi(P^{p+2})$ и $\chi(P^{p+1}P^1)$ являются линейными комбинациями операций P^{p+2} и $P^{p+1}P^1$, то это условие равносильно тому, что либо $\langle x,\, P^{p+2}(y)\rangle \neq 0$, либо $\langle x,\, P^{p+1}P^1(y)\rangle \neq 0$. Если размерность класса y меньше четырех, то $P^{p+2}(y)=0$ и $P^{p+1}P^1(y)=0$ по соображению дефекта. Поэтому $4 \leqslant n-2(p+2)(p-1)$ и, следовательно, $n \geqslant 2p^2-2p$. □

Теперь приступим к доказательству теоремы 12.

Доказательство. По теореме 11 имеет место неравенство

$$\nu_p\big(k(n)\big) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n-1}{2p^i}\right].$$

Таким образом для того, чтобы доказать теорему 12, достаточно доказать, что при $n < 2p^2 + 2p$ для любого класса гомологий $x \in H_n(X;\,\mathbb{Z})$ конечного клеточного комплекса X класс $p^{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right]}x$ лежит в ядре всех дифференциалов для теории $\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ комплекса X. Разберем три случая.

1. Пусть $2kp+1 \leqslant n \leqslant 2(k+1)p$, где $0 \leqslant k < p$.
   Тогда $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right] = k$ и по лемме 11 имеем, что

   $$p^k x \in E_{n,0}^{2(k+1)(p-1)+1}\big(X;\,\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\big)$$

   и

   $$d^{2(k+1)(p-1)+1} p^k x = \sum_j \theta_{k+1,j}(x) a_{k+1,j} \quad \text{(по модулю предыдущих дифференциалов).} \qquad (11)$$

   Так как размерность класса x не больше чем $2(k+1)p$, где $k<p$, то по лемме 13 все целочисленные операции Стинрода степени $2(k+1)(p-1)+1$ действуют на классе x нулем и, следовательно, дифференциал 11 равен нулю. Все старшие дифференциалы при $n<2p^2$ равны нулю по размерностным соображениям, а при $n=2p^2$ дифференциал $d_{n,0}^{2(p+1)(p-1)+1}$ равен нулю по лемме 12, и все старшие дифференциалы по размерностным соображениям.

2. Пусть $2p^2+1 \leqslant n < 2p^2+2p$.
   Тогда $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2p^i}\right] = p+1$ и по лемме 11 имеем, что

   $$p^{p+1} x \in E_{n,0}^{2(p+2)(p-1)+1}\big(X;\,\mathrm{MU}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}\big)$$

   и

   $$d^{2(p+2)(p-1)+1} p^k x = \sum_j \theta_{p+2,j}(x) a_{p+2,j} \quad \text{(по модулю предыдущих дифференциалов).} \qquad (12)$$

   Так как размерность класса x меньше чем $2p^2+2p$, то по лемме 13 все целочисленные операции Стинрода степени $2(p+2)(p-1)+1$ действуют на классе x нулем и, следовательно, дифференциал 12 равен нулю. Все старшие дифференциалы равны нулю по размерностным соображениям.

$\square$

Список литературы

[1] *Бухштабер В. М.* Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья—Хирцебруха // Матем. сб. — 1969. — Т. 78 (120), № 2. — С. 307—320.

[2] *Бухштабер В. М.* Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья—Хирцебруха, II // Матем. сб. — 1970. — Т. 83 (125), № 1 (9). — С. 61—76.

[3] *Гайфуллин А. А.* Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и реализация циклов асферичными многообразиями // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 263. — С. 44—63.

[4] *Мей Дж. П.* Общий алгебраический подход к операциям Стинрода // *Стинрод Н.*, *Эпстейн Д.* Когомологические операции. — М.: Наука, 1983. — С. 151—223.

[5] *Новиков С. П.* Гомотопические свойства комплексов Тома // Матем. сб. — 1962. — Т. 57 (99), № 4. — С. 407—442.

[6] *Стинрод Н., Эпстейн Д.* Когомологические операции. — М.: Наука, 1983.

[7] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

[8] *J. F. Adams*, On Chern characters and the structure of the unitary group // Proc. Camb. Phil. Sos. — 1961. — 57:2. — P. 189–199.

[9] *Edgar H. Brown, Jr. and Franklin P. Peterson.* A spectrum whose $\mathbb{Z}_p$ cohomology is the algebra of reduced p^{th} powers // Topology. — 1966. — V. 5. — P. 149—154.

[10] *G. Brumfiel*, On integral PL characteristic classes // Topology. — 1969. — V. 8. — P. 39—46.

[11] *Eilenberg S.* On the problems of topology // Ann. Math. Ser. 2 — 1949. — V. 50. — P. 247—260.

[12] *Kahn D.* Induced maps for Postnikov systems // Transac. A. math. soc. — 1963 — V. 107. — P. 432-450.

[13] *Kochman S. O.* Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences. — American math. society press, 1966.

[14] *C. R. F. Maunder*, The spectral sequence of an extraordinary cohomology theory // Proc. Camb. Phil. Sos. — 1963. — V. 59. — P. 567—574.

[15] *Milnor J.* The Steenrod algebra and its dual // Ann. Math. Ser. 2 — 1958. — V. 67. — P. 150—171.

[16] *Thomas E., Zahler R.* Generalized higher order cohomology operations and stable homotopy groups of spheres // Advances in math. — 1976. — V. 20. — P. 287—328.

[17] *R. Thom*, Quelques propriétés globales des variétés différentiables // Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86. Русский перевод см. в Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий // Расслоенные пространства и их приложения: сб. статей / Под ред. В. Г. Болтянского, Е. Б. Дынкина, М. М. Постникова. — М.: ИЛ, 1958. — С. 293—351.

[18] *Hatcher A.* Algebraic topology. — Cambridge Univ. Press, 2002.