О задачах, эквивалентных 21-ой проблеме Гильберта

И.В. Вьюгин

Аннотация

В работе даны три формулировки 21-ой проблемы Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и доказана их эквивалентность. Исходно Гильбертом был поставлен вопрос о построении фуксова уравнения с предписанными особыми точками и монодромией. Другая формулировка заключается в вопросе построения фуксовой системы специального, почти треугольного вида. Третья дана на языке голоморфных расслоений с логарифмическими связностями, она позволяет применить к исследованию этой задачи аппарат векторных расслоений со связностью, показавший свою эффективность при решении А.А. Болибрухом 21-ой проблемы Гильберта для фуксовых систем. В конце работы приведены некоторые следствия из этих результатов.

1 Введение

В данной работе установлены связи между тремя обратными задачами монодромии аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Первая — задача восстановления фуксова (регулярного) уравнения по его представлению монодромии и набору особых точек. Эта задача является исходной (данной Гильбертом) формулировкой 21-ой проблемы Гильберта. Более известным вариантом проблемы является вторая задача — задача восстановления фуксовой системы по представлению монодромии, называемая проблемой Римана–Гильберта, или 21-ой проблемой Гильберта для линейных фуксовых систем. Третья — задача построения по монодромии логарифмической связности в голоморфном векторном расслоении, имеющем заданный тип расщепления. Найдены задачи второго и третьего типов, в точности эквивалентные первой задаче. В части 3 работы доказана эквивалентность этих трех задач. В следующих частях представлены некоторые следствия из этих результатов.

Интерпретация проблемы Римана–Гильберта для фуксовых систем как задачи построения логарифмической связности в голоморфном расслоении, а затем нахождения соответствующего тривиального расслоения, доказала свою эффективность в работах Х. Рерля и А.А. Болибруха. Здесь мы представляем аналогичную интерпретацию для задачи построения скалярного фуксова уравнения по монодромии. В отличие от предыдущей задачи, здесь эта интерпретация является достаточно сложным утверждением. Ответ получается следующим.

1) (F, ∇) — тривиально, т.е. $K = (0, \dots, 0)$ (определение типа расщепления K см. ниже) $\Longleftrightarrow$ по монодромии связности ∇ можно построить фуксову систему (заметим, что тривиальное расслоение всегда является полустабильным);
2) (F, ∇) — стабильна или полустабильна (определение см. ниже) с типом расщепления $K = (0, n-2, \dots, (n-2)(p-1)) \Longleftrightarrow$ по монодромии связности ∇ можно построить скалярное фуксово уравнение.

Заметим, что расслоение возникающее во втором пункте имеет самый разреженный тип расщепления среди полустабильных пар. В [2], в частности, показано, что для типа расщепления полустабильной пары выполнено неравенство $\forall i\ k_{i+1} - k_i \leqslant n-2$. В первом пункте, наоборот, возникает тривиальное расслоение. А.А. Болибрухом в работе [1] исследовалась задача восстановления уравнения с дополнительными "ложными" особенностями по монодромии. У него получено выражение для числа таких особых точек при условии, что монодромия неприводима (тогда условие стабильности пары выполняется автоматически). Его результаты были переизложены М. Зингером и М. Ван дер Пут (см. в [5]) в терминах дифференциальной теории Галуа.

В §4 получены две серии контрпримеров к 21-ой проблеме Гильберта. То, что 21-я проблема Гильберта для скалярных фуксовых уравнений имеет в общем случае отрицательное решение, следует из подсчета числа параметров, от которых зависят множества всевозможных представлений и уравнений (см. в [2]). При этом явно построены серии контрпримеров были только, когда А.А. Болибрух доказал, что контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта являются контрпримерами и к 21-ой проблеме Гильберта для скалярных уравнений, ответив на вопрос, поставленный Н.П. Еругиным. Эта теорема немного улучшена в [5], там показано, что система может быть выбрана почти верхнетреугольной. Таким образом, уже известные контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта являются контрпримерами и к этой задаче, но построенные нами серии не являются контрпримерами к проблеме Римана–Гильберта. Там же передоказана и усилена теорема А.А. Болибруха, утверждающая, что по монодромии фуксова уравнения всегда можно построить фуксову систему. Показано, что можно построить целое семейство таких систем.

В 5 разделе доказано, что фуксово уравнение с $n \geqslant 3$ особыми точками не может быть изомонодромно непрерывно продеформировано в некоторую окрестность, если параметрами деформации являются особые точки.

1.1 Фуксовы уравнения и системы

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}y}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)y = 0, \tag{1}$$

порядка p с мероморфными на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$ коэффициентами $b_1(z), \ldots, b_p(z)$, голоморфными вне множества особых точек $a_1, \ldots, a_n$.

Представлением монодромии или *монодромией* данного уравнения называется представление

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}) \tag{2}$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ в пространство невырожденных комплексных матриц порядка p, которое определяется следующим образом. В окрестности неособой точки z_0 рассмотрим базис $(y_1(z), \ldots, y_p(z))$ пространства решений уравнения (1). При аналитическом продолжении функций $y_1(z), \ldots, y_p(z)$ вдоль произвольной петли γ, с концами в точке z_0 и лежащей в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}$, базис $(y_1, \ldots, y_p)$ переходит в (вообще говоря, другой) базис $(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p)$. Два базиса связаны с помощью невырожденной матрицы перехода G_γ, соответствующей петле γ:

$$(y_1, \ldots, y_p) = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p)G_\gamma.$$

Отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma$ (которое зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ) и задает представление χ. *Матрицей монодромии* уравнения (1) в особой точке a_i (относительно базиса $(y_1, \ldots, y_p)$) называется матрица G_i, соответствующая простой петле γ_i, обходящей точку a_i, т. е. $G_i = \chi([\gamma_i])$.

Особая точка a_i уравнения (1) называется *фуксовой*, если коэффициент $b_j(z)$ имеет в этой точке полюс порядка не более j $(j = 1, \ldots, p)$. Согласно теореме Фукса (см. [2]) особая точка a_i является фуксовой тогда и только тогда, когда она *регулярна* (т. е. когда любое решение имеет не более, чем степенной рост в окрестности точки a_i). Уравнение (1) называется *фуксовым*, если все его особые точки фуксовы.

Задача о построении фуксова уравнения (1) с заданными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и заданным представлением монодромии (2) в общем случае имеет отрицательное решение, поскольку число параметров, от которых зависит такое уравнение, меньше числа параметров, от которых зависит множество представлений χ (см. [2]).

Наряду с уравнением (1) можно рассмотреть линейную систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)\, y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad B(z) \in \mathrm{Mat}_{p\times p}(\mathbb{C}) \tag{3}$$

из p уравнений, с мероморфной на сфере Римана матрицей $B(z)$, голоморфной вне точек $a_1, \ldots, a_n$. Представление монодромии данной системы определяется так же, как и для уравнения (1), нужно только вместо строки $(y_1, \ldots, y_p)$ рассмотреть *фундаментальную матрицу* $Y(z)$ — матрицу, столбцы которой образуют базис в пространстве решений системы.

Особая точка a_i системы (3) называется *фуксовой*, если матрица $B(z)$ имеет простой полюс (полюс первого порядка) в этой точке. Фуксова особая точка линейной системы всегда является регулярной, хотя регулярная особенность не обязана быть фуксовой (см. [2]). Система (3) называется *фуксовой*, если все ее особые точки фуксовы.

1.2 Локальная структура фундаментальной системы решений

Для фундаментальной матрицы фуксовой системы имеет место удобное локальное представление. Здесь мы будем считать, что $z = 0$ — фуксова особая точка уравнения или системы.

В окрестности регулярной особой точки $z = 0$ существует такая фундаментальная система решений, которая может быть представлена в следующей форме

$$Y(z) = U(z) z^A z^E, \qquad A = \begin{pmatrix} \varphi^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi^p \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho^1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \rho^p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $U(z)$ — голоморфная в нуле матрица, столбцы которой имеют ненулевые элементы (в случае системы), или голоморфный вектор, элементы которого не обращаются в ноль в нуле (в случае уравнения). Диагональные элементы φ^j — целые числа (целые части асимптотик решений), для которых выполнено условие

$$\varphi^1 \geqslant \ldots \geqslant \varphi^p, \tag{5}$$

а ρ^j — нормализованные логарифмы собственных значений матрицы G монодромии в нуле. Более точно

$$E = \frac{1}{2\pi i}\ln G, \quad \mathrm{spec}(E) = (\rho^1, \ldots, \rho^p),$$

причем ветвь логарифма выбирается так, что

$$\rho^j = \frac{1}{2\pi i}\ln \lambda^j, \qquad 0 \leqslant \mathrm{Re}\rho^j < 1,$$

где λ^j — собственные значения матрицы монодромии.

Описанный выше базис пространства решений всегда существует и называется *левелевским.* Базис, который получается как объединение левелевских базисов собственных (для оператора монодромии) подпространств, называется *слабо левелевским.* Если снять условие (5) и условие верхей треугольности матрицы E, но наложить условие, что матрица $z^A E z^{-A}$ голоморфна в нуле, то базис называют *ассоциированным.* Можно показать, что левелевский и слабо левелевский базисы всегда существуют и являются ассоциированными (см. в [2]).

Для ассоциированного базиса с учетом (4) матрицу коэффициентов системы можно записать в виде

$$B(z) = \frac{dU}{dz}U^{-1} + U(z)\frac{A + z^A E z^{-A}}{z}U^{-1}(z). \tag{6}$$

Величину $\beta^j = \varphi^j + \rho^j$ называют показателем. Из (6) видно, что показатели суть собственные числа вычетов матрицы коэффициентов системы.

Теорема 1. *(А. Левель [2]) Система (3) фуксова в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда матрица $U(z)$ из разложения (4) голоморфно обратима в $z = 0$, т.е.* $\det U(0) \neq 0$.

Достаточность будет следовать из вида (6) матрицы коэффициентов системы (3) при учете вида (4). Доказательство см. теор. 5.2 из [2].

Далее, когда речь пойдет о точке $z = a_i$, у всех матриц появится нижний индекс “i”, обозначающий точку.

1.3 Векторные расслоения с логарифмическими связностями

Мы рассматриваем голоморфные векторные расслоения на сфере Римана с логарифмическими связностями. Задавать расслоение со связностью мы будем с помощью координатного описания.

Говорят, что заданы локальные тривиализации расслоения, если заданы следующие три составляющие:

а) покрытие $\{U_i\}$ базы $\mathbf{B}$ открытыми окрестностями такое, что над каждым U_i расслоение F тривиально;

б) набор голоморфных невырожденных матричных функций

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(p, \mathbb{C}), \tag{7}$$

определенных в пересечениях окрестностей, удовлетворяющих условиям леммы 1 (см. ниже). Набор таких функций называют *коциклом*;

в) фиксированы локальные тривиализации s_i расслоения F над окрестностями U_i, то есть над каждой окрестностью U_i фиксирован набор из p локальных голоморфных сечений (вектор-функций $s_i^j(z) : U_i \to \mathbb{C}^p$) $(s_i) = (s_i^1(z), \ldots, s_i^p(z))$, образующих в каждой точке z окрестности U_i базис $(s_i^1(z), \ldots, s_i^p(z))$ в слое $\mathbf{L} = \mathbb{C}^p$.

Пусть окрестности U_i, U_j имеют непустое пересечение. Тогда определим функцию $g_{ij}(z)$ как функцию перехода между тривиализациями $s_i = g_{ij}s_j$.

Лемма 1. *По векторному расслоению F, покрытию $\{U_i\}$ и фиксированным тривиализациям $\{(s_i)\}$ расслоения F над $\{U_i\}$ можно построить набор отображений* (7)*, обладающих следующими свойствами:*

$$g_{ij}(z) \equiv (g_{ji}(z))^{-1},\ z \in U_i \cap U_j; \qquad g_{ji}(z) \cdot g_{ik}(z) \cdot g_{kj}(z) \equiv I,\ z \in U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{8}$$

И обратно, по любому покрытию $\{U_i\}$ многообразия $\mathbf{B}$ и по любому набору отображений (7)*, обладающих свойствами* (8)*, можно построить векторное расслоение $F' = (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{B}, \tilde{\pi}')$. Если набор отображений $\{g_{ij}\}$ был построен по векторному расслоению F, то расслоение F' будет эквивалентно расслоению F.*

При таком описании тотальное пространство $\mathbf{F}$ не фигурирует явно. Чтобы определить пространство $\mathbf{F}$, рассмотрим несвязное объединение $\tilde{F} = \bigsqcup U_i \times \mathbb{C}^p$ и введем на множестве $\tilde{F}$ следующее отношение эквивалентности $\sim$: если $x \in U_i \cap U_j$, то

$(x, v) \sim (x, g_{ji}(x)v), \quad (x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^p, \quad (x, g_{ji}(x)v) \in U_j \times \mathbb{C}^p;$

$(x, v) \sim (x, v), \qquad x \in U_i, \quad v \in \mathbb{C}^p.$

Из свойств (8) следует, что корректно определено отношение эквивалентности, и $\mathbf{F} = \tilde{F}/\sim$. Подробнее об этом можно прочитать в лекции 2 из [1].

Определение 1. *Говорят, что в векторном расслоении F задана связность ∇, если для любой тривиализации расслоения, т.е. покрытия $\{U_i\}$, набора коциклов $\{g_{ij}(z)\}$ и $\{(s_i)\}$, задан набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega_i\}$, удовлетворяющих соотношениям:*

$$\omega_i = (dg_{ij})g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_j g_{ij}^{-1}. \tag{9}$$

Определение 2. *Связность называют логарифмической (фуксовой), если дифференциальные формы $\{\omega_i\}$ имеют лишь полюсы первого порядка в окрестностях $\{U_i\}$, где они определены, соответственно.*

1.4 Конструкция семейства расслоений со связностью

Все пары (F, ∇) (расслоение со связностью) можно описать с помощью координатного описания: покрытия сферы Римана окрестностями $\{U_i\}$, над каждой из которых расслоение тривиально. Связность в этой окрестности определяется как система линейных дифференциальных уравнений

$$dy = \omega_i y, \qquad z \in U_i. \tag{10}$$

Базис горизонтальных сечений (s_i) связности — это фундаментальная система решений этой системы. Связность называют *логарифмической* или *фуксовой*, если, определяющие ее системы (10) фуксовы в своих окрестностях. Базисы систем, заданных в соседних окрестностях отождествляются по формуле $(s_i) = g_{ij}(z)(s_j)$ с помощью склеювающих функций $g_{ij}(z)$, определенных в пересечениях $U_i \cap U_j$, и образующих голоморфный коцикл. Благодаря формуле (4) и теореме 1 мы имеем локальную аналитическую классификацию линейных систем в окрестности фуксовой особой точки. Благодаря этому можно дать классификацию всех голоморфных расслоений с логарифмическими связностями на сфере Римана, с точностью до голоморфной эквивалентности расслоений и связностей. Подробно об этом см. в [2].

1.5 Глобальная классификация голоморфных расслоений над $\overline{\mathbb{C}}$

Каждое голоморфное расслоение на сфере Римана, согласно теореме Биркгофа–Гротендика, эквивалентно некоторому расслоению вида

$$\left(U_1 = \mathbb{C},\, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\},\, g_{1\infty} = (z-a_1)^K\right), \qquad K = \operatorname{diag}(k_1, \ldots, k_p),$$

где $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_p$, (заметим, что в цитированной литературе обычно рассматривается обратный порядок следования элементов). Набор целых чисел $(k_1, \ldots, k_p)$ называют *типом расщепления. Степенью расслоения* называют число

$$\deg F = \sum_{i=1}^{p} k_i,$$

а *наклоном* величину $\mu(F) = \frac{\deg F}{\mathrm{rk} F}$.

Кроме того, известно, что степень расслоения равна сумме показателей $\deg F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j$, где β_i^j – собственные значения вычетов связности в особой точке a_i, они же асимптотики решений ассоциированного базса.

Расслоение F называется стабильным (полустабильным) если для любого его подрасслоения F_{sub} выполнено неравенство $\mu(F) > \mu(F_{sub})$ $(\mu(F) \geqslant \mu(F_{sub}))$. Стабильных расслоений над сферой не бывает, но для нас будет важно понятие стабильного расслоения со связностью.

Подрасслоение называют *стабилизирующимся связностью*, если подпространство его горизонтальньных сечений является инвариантным относительно действия монодромии. Расслоение F со связностью ∇ называют *стабильной парой*, если для для любого его подрасслоения F_{sub}, которое стабилизируется связностью, выполнено соотношение $\mu(F) > \mu(F_{sub})$.

2 Формулировки

Мы приводим три эквивалентных формулировки 21-ой проблемы Гильберта, первая из которых является исходной, данной Гильбертом. В работе мы покажем эквивалентность этих трех задач.

I. Построить по представлению χ и набору точек $a_1, \ldots, a_n$ фуксово уравнение:

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}y}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)y = 0, \tag{11}$$

имеющее представление монодромии χ и заданный набор особых точек.

II. Построить по представлению χ и набору точек $a_1 = 0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = \infty$ фуксову систему (3) с матрицей коэффициентов вида

$$B(z) = \frac{\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix}}{z} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix}}{z - a_i} \tag{12}$$

с данной монодромией χ.

III. Построить голоморфное векторное расслоение F с логарифмической связностью ∇, имеющей заданную монодромию χ и набор особых точек $a_1, \ldots, a_n$, образующее стабильную пару с типом расщепления $K = (0, n-2, \ldots, (n-2)(p-1))$.

Далее мы, как правило, будем считать, что $a_0 = 0$, $a_n = \infty$. Это предположение не ограничивает общности, так как этого всегда можно добиться дробно-линейной заменой независимой переменной. Как известно, такие замены переводят фуксовы точки в фуксовы. Везде предполагается, что число особых точек $n \geqslant 3$. Случай $n = 2$ тривиально разбирается, но формально не все формулировки будут верны, так как в этом случае не бывает стабильных пар. Введем полезное обозначение:

$$D = \mathrm{diag}(0, 1, \ldots, \mathrm{p} - 1).$$

Сразу оговоримся, что в разных параграфах и в доказательствах теорем одни и те же обозначения могут обозначать разные объекты.

3 Основные теоремы

В этом параграфе содержатся три теоремы, доказывающие в совокупности эквивалентность трех приведенных выше формулировок 21-ой проблемы Гильберта для скалярных фуксовых уравнений.

T2: III $\Longrightarrow$ II
T3: II $\Longrightarrow$ I
T4: I $\Longrightarrow$ III

Теорема 2. *По представлению монодромии χ (2) и набору особых точек*

$$a_1 = 0,\, a_2, \ldots, a_{n-1},\, a_n = \infty, \quad n \geqslant 3$$

стабильной пары с типом расщепления

$$K = \mathrm{diag}(0, (n-2), \ldots, (n-2)(p-1)) = (n-2)D,$$

можно построить фуксову систему вида (3),(12).

Доказательство. Рассмотрим пару (F, ∇) (расслоение со связностью), заданную по условию теоремы. Ее можно представить в координатной форме. Рассмотрим две координатных окрестности: U_0 — малая окрестность нуля, не содержащая других особых точек, и $U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0$, и коцикл, задаваемый склеивающей функцией $g_{0\infty}(z) = z^K = z^{(n-2)D}$. Связность задают две формы ω_0 и ω_∞, которые фуксовы в U_0 и в U_∞, соответственно. Эти формы связаны соотношением:

$$\omega_0 = g_{0\infty}\omega_\infty g_{0\infty}^{-1} + dg_{0\infty} \cdot g_{0\infty}^{-1}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что для элементов $\omega_{kl}^0(z)$ и $\omega_{kl}^\infty(z)$ матричных форм ω_0 и ω_∞ выполнены следующие соотношения

$$\omega_{kl}^\infty(z) = z^{(n-2)(l-k)}\omega_{kl}^0(z). \tag{14}$$

Отсюда, а также из того, что формы ω_0 и ω_∞ имеют лишь простые полюсы в точках $a_1 \in U_0$ и $a_2, \ldots, a_n \in U_\infty$, соответственно, следует, что элементы форм $\omega_{kl}^0(z)$ и $\omega_{kl}^\infty(z)$ с номерами (k,l) для $l-k>1$, тождественно равны нулю. Действительно, соотношение (14) и условие $l-k>1$ дают то, что элемент $\omega_{kl}^\infty(z)$ имеет ноль порядка $\mathrm{ord}_0\,\omega_{kl}^\infty(z) = (n-2)(l-k)-1 \geqslant n-2$ в нуле, а полюса у $\omega_{kl}^\infty(z)$ есть лишь в точках $a_2, \ldots, a_n$, имеющие первый порядок, т.е. $\mathrm{ord}_{a_i}\,\omega_{kl}^\infty(z) \geqslant -1$, $i = 2, \ldots, n$. При этом, сумма порядков нулей минус сумма порядков полюсов дифференциальной формы на сфере Римана равна -2 (если она не является тождественно нулевой), а у элемента $\omega_{kl}^\infty(z)$ эта сумма должна быть не меньше, чем

$$\mathrm{ord}_0\,\omega_{kl}^\infty(z) + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{ord}_{a_i}\,\omega_{kl}^\infty(z) \geqslant -1 > -2.$$

Следовательно $\omega_{kl}^\infty(z) \equiv 0$ при $l-k>1$.

Так, наше расслоение со связностью заданы двумя почти треугольными формами ω_0 и ω_∞ и коциклом $g_{0\infty}(z)$. Вместо форм ω_0 и ω_∞ нам удобно будет рассмотреть форму

$$\omega = \Gamma(z)\omega_\infty\Gamma^{-1}(z) + \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1}, \qquad \Gamma(z) = \prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{z}{z-a_i}\right)^D. \tag{15}$$

Далее будем рассматривать регулярную систему $dy = \omega y$. Эта система имеет фуксовы особенности в нуле и бесконечности и регулярные — в точках $a_2, \ldots, a_{n-1}$.

$$\omega = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & \alpha_{kl}^i & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}{z-a_i}dz + \frac{\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}{z}dz \tag{16}$$

Из вида преобразования (15) следует, что функции $\alpha_{kl}^i(z)$ имеют полюса порядков, не выше, чем $k-l$ в точке a_i

$$\mathrm{ord}_{a_i}\alpha_{kl}^i(z) \geqslant l-k,$$

и голоморфны везде вне $z = a_i$, $i = 2, \ldots, n-1$, в частности, наддиагональные элементы получаются нулевыми везде, кроме последнего члена. То, что наддиагональ последнего коэффициента единичная, не следует из сказанного выше, но, в случае, когда ни один ее элемент не равен нулю, этого можно достичь подходящим постоянным диагональным калибровочным преобразованием. Случай, когда какой-то из наддиагональных элементов нулевой $\omega_{l,l+1}(z) \equiv 0$, противоречит условию стабильности исходной пары (F, ∇). Это будет сейчас показано.

Действительно, в этом случае расслоение и связность приводятся. Подрасслоение которое стабилизируется связностью, соответствует нижнему правому блоку форм связности и коцикла, но, легко видеть, что тип расщепления K_1 этого подрасслоения F_1 совпадает с концом типа расщепления расслоения F, то есть состоит из наибольших его элементов $K_1 = (k_{l+1}, \dots, k_p)$. Тогда его наклон больше наклона F

$$\mu(F_1) = \frac{k_{l+1} + \ldots + k_n}{n-l} = \frac{(n-2)(p+l-1)}{2} > \mu(F) = \frac{(n-2)(p-1)}{2}.$$

Так, мы получили противоречие с условием стабильности пары (F, ∇). Теперь доказано, что форма ω имеет вид (16).

Видно, что калибровочное преобразование $\tilde{y} = (z - a_i)^D y$ переводит систему (16) в фуксову в точке a_i $(d\tilde{y} = \omega_i \tilde{y})$, причем вычет матрицы коэффициентов преобразованной системы в точке $z = a_i$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} * & \frac{1}{a_i} & 0 & 0 \\ * & * & \frac{1}{a_i} & 0 \\ * & * & * & \frac{1}{a_i} \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

где “$*$” обозначают некоторые числа. Следовательно, фундаметальная матрица системы (16) в точке a_i имеет вид:

$$Y(z) = (z - a_i)^{-D} Y_i^0(z), \qquad (18)$$

где матрица $Y_i^0(z)$ — это фундаментальная матрица фуксовой в $z = a_i$ системы. Продолжив это, получим представление

$$Y(z) = T_i(z)(z - a_i)^{-D} Y^{0\prime}(z), \qquad T_i(z) = \left(\prod_{j=2}^{n-1} (z - a_j)^{-D} \right) \cdot (z - a_i)^D, \qquad (19)$$

где $Y^0(z)$ — фундаментальная матрица фуксовой в точках $a_2, \dots, a_{n-1}$ системы.

Далее нам потребуется лемма 2, которая приведена ниже. Так, согласно лемме 2, применив калибровочное преобразование

$$\tilde{y} = \Gamma_i(z) y,$$

к фундаментальной матрице $(z - a_i)^{-D} Y^{0\prime}(z)$, получим фундаментальную матрицу фуксовой в точке $z = a_i$ системы. Но, по скольку, матрица (19) имеет еще один множитель, нужно видоизменить преобразование из леммы 2 и рассмотреть сопряженное к нему

$$\tilde{y} = T_i \Gamma_i T_i^{-1} y.$$

Сопряженное преобразование $\tilde{\Gamma}_i = T_i \Gamma_i T_i^{-1}$ так же как исходное голоморфно обратимо вне точки $z = a_i$, это видно из нижней треугольности матрицы $\Gamma_i(z)$ и вида матрицы $T_i(z)$.

Тогда мы можем применять преобразования $y' = \tilde{\Gamma}_i y$ последовательно для всех точек $a_2, \ldots, a_{n-1}$ и получим фундаментальную матрицу системы $Y'(z) = \tilde{\Gamma}_2(z) \cdot \ldots \cdot \tilde{\Gamma}_{n-1}(z) Y(z)$. Полученная система и будет искомой системой вида (3),(12).

Лемма 2. *Можно помножить фундаментальную матрицу (18) на нижнетреугольную матрицу $\Gamma_i(z)$, голоморфно обратимую в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_i\}$ и мероморфную в a_i, т.е. $\Gamma_i(z)$ — матричный многочлен от $1/z$ с постоянными ненулевыми элементами на диагонали. Так, что получим матрицу вида*

$$Y_i'(z) = \Gamma_i(z) Y_i(z) = \Gamma_i(z)(z - a_i)^{-D} Y_i^0(z) = U_i{}'(z)(z - a_i)^{\Lambda_i - D}(z - a_i)^{E_i},$$

где $Y_i'(z)$ — фундаментальная матрица фуксовой в $z = a_i$ системы, т.е. $\det U_i'(0) \neq 0$.

Доказательство. Будем строить преобразование $\Gamma_i(z)$ в виде цепочки элементарных преобразований. Рассмотрим преобразования вида $\Gamma_i^{\alpha\beta}(z) = I + E_{\alpha\beta}$, $\alpha > \beta$, где $E_{\alpha\beta}$ содержит ненулевой элемент $e_{\alpha\beta}(z)$, стоящий на месте (α, β), который является многочленом степени $\alpha - \beta$ от $1/z$, причем такой, что для элементов матрицы $U_i(z)$ выполнено

$$u_{\alpha\beta}(z) - e_{\alpha\beta}(z) z^{\alpha-\beta} u_{\beta\beta}(z) = z^{\alpha-\beta} h_{\alpha\beta}(z),$$

с некоторой голоморфной функцией $h_{\alpha\beta}(z)$. Заметим, что это возможно всегда, когда $u_{\beta\beta}(a_i) \neq 0$. Для того, чтобы показать это, нам понадобится лемма 3. Действительно, из леммы 3 следует, что $u_{11}(a_i) \neq 0$, так как этот элемент совпадает с первым главным минором. Это позволяет применить преобразования $\Gamma_i^{\alpha 1}(z)$, $\alpha = 2, \ldots, p$, причем эти преобразования, как нижнетреугольные с единичной диагональю, не изменяют главных угловых миноров. Отсюда следует, что элемент $u_{22}'(a_i)$ преобразованной матрицы отличен от нуля, и мы можем продолжить применять преобразования. Таким образом, мы получим искомое преобразование $\Gamma_i(z)$ в виде произведения элементарных преобразований. □

Лемма 3. *Все главные угловые миноры матриц $U_i(a_i)$ системы (3),(12) при $i = 2, \ldots, n-1$ отличны от нуля.*

Для доказательства этой леммы нам понадобится конструкция мероморфного калибровочного преобразования, преобразующего регулярную систему с рациональными коэффициентами к системе эквивалентной фуксову уравнению.

3.1 Преобразование системы к уравнению

Рассмотрим регулярную систему вида (3) с рациональной матрицей коэффициентов $B(z)$. Возьмем p-мерный вектор-строку $t_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Далее определим мероморфные на сфере Римана вектор-функции $t_1(z), \ldots, t_p(z)$ по формулам

$$t_{j+1} = \frac{dt_j}{dz} + t_j B(z), \qquad j = 0, \ldots, p-1. \tag{20}$$

Рассмотрим матрицу $\Gamma(z)$, строками которой являются $t_0, t_1(z), \ldots, t_{p-1}(z)$. Видно, что если у строки t_0 отличен от нуля только первый элемент, то, учитывая почти треугольный вид (12) матрицы $B(z)$ коэффициентов системы, матрица $\Gamma(z)$ оказывается нижнетреугольной. Из неравенства нулю наддиагонали вычета (17) и формулы (20) получим, что на диагонали у нее стоят элементы $\gamma_{ii}(z)$, имеющие полюса порядка $(i-1)$ в точках $a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Теперь покажем, что преобразование $\tilde{y} = \Gamma(z)y$ приводит систему в систему, эквивалентную скалярному уравнению. Рассмотрим вектор-функцию $b(z) = (b_p(z), \ldots, b_1(z))$, удовлетворяющий соотношению

$$t_p(z) = -b(z)\,\Gamma(z),$$

и соответствующую ему матрицу

$$\widetilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \ldots & \ldots & -b_1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Из формул (20) следует, что

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \widetilde{B}\Gamma - \Gamma B,$$

поэтому преобразование $\tilde{y} = \Gamma(z)y$ переводит систему (3) в систему с матрицей коэффициентов

$$\Gamma B \Gamma^{-1} + \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1} = \Gamma B \Gamma^{-1} + \widetilde{B} - \Gamma B \Gamma^{-1} = \widetilde{B}$$

искомого вида.

3.2 Доказательство леммы 3

Доказательство леммы 3. Рассмотрим калибровочное преобразование $\tilde{y} = \Gamma(z)y$, построенное в предыдущем параграфе, которое приводит систему к виду, эквивалентному уравнению.

Теперь рассмотрим преобразование $\tilde{\Gamma}_i(z) = (z-a_i)^D\Gamma$, которое приводит систему к системе с матрицей коэффициентов вида

$$\widetilde{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & p-1 \end{pmatrix} \frac{1}{z-a_i} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 0 \\ -\tilde{b}_p & \ldots & \ldots & -\tilde{b}_1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\tilde{b}_k = (z-a_i)^{k-1}b_k$, $k = 2, \ldots, n-1$, которая сводится к уравнению (1) с помощью замены

$$y^1 = y, \quad y^2 = (z-a_i)y', \quad \ldots, \quad y^p = (z-a_i)^{p-1}y^{(p-1)}. \tag{23}$$

Заметим, что из вида формы (16) коэффициентов исходной системы и способа построения матриц $\Gamma(z)$ и $\Gamma_i(z)$ (из §3.1 и §3.2, соответственно) калибровочных преобразований следует, что преобразование $\tilde{\Gamma}_i(z)$ нижнетреугольное, с единичной диагональю и голоморфно обратимое в $z = a_i$. Такое преобразование не может изменить главных угловых миноров матрицы $U_i(a_i)$, то есть они равны главным угловым минорам матрицы $\tilde{\Gamma}_i(a_i)U_i(a_i)$.

Для системы, полученной из уравнения с помощью замены вида (23), известно, что ее главные угловые миноры отличны от нуля, например, из [1].

Действительно, рассмотрим ассоциированный базис решений фуксова в $z = a_i$ уравнения, состоящий из решений $u_1(z), \dots, u_p(z)$. Такой, что матрица монодромии G_i в точке $z = a_i$ имеет верхнетреугольный вид, например левелевский. Тогда определитель матрицы $U_i(a_i)$, полученной из уравнения с помощью замены (23), отличен от нуля по теореме Левеля, так как эта система (3),(22) фуксова в точке $z = a_i$. Теперь рассмотрим набор функций $u_1(z), \dots, u_k(z)$, $k < p$. Этот набор тоже является ассоциированным базисом решений уравнения

$$\frac{1}{W(u_1, \dots, u_k)} \det \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k & y \\ \frac{du_1}{dz} & \dots & \frac{du_k}{dz} & \frac{dy}{dz} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{d^k u_1}{dz^k} & \dots & \frac{d^k u_k}{dz^k} & \frac{d^k y}{dz^k} \end{pmatrix} = 0. \tag{24}$$

Это уравнение фуксово (по т. Фукса), так как оно регулярно. Это означает, что с помощью аналогичной (23) замене из него можно получить фуксову в $z = a_i$ систему. У этой системы будет соответствующая матрица $U_i^k(a_i)$, определитель которой отличен от нуля по теореме Левеля. Заметим, что из вида замены (23) и из левелевского разложения (4) видно, что эта матрица $U_i^k(a_i)$ — подматрица матрицы $U_i(a_i)$, стоящая на пересечении первых k строк и первых k столбцов. Таким образом, главные угловые миноры $U_i(a_i)$ — определители соответствующих матриц систем меньших размерностей и, соответственно, все они отличны от нуля. □

Теорема 3. *Если по монодромии χ и набору особых точек $a_1, \dots, a_n$ можно построить систему вида (3),(12), то можно построить и фуксово уравнение (11).*

Доказательство. Доказательство состоит в последовательном применении мероморфных калибровочных преобразований, приводящих в итоге систему вида (3),(12) в систему с матрицей коэффициентов вида (21), эквивалентную уравнению. Мы убедимся, что эти калибровочные преобразования не добавят новых особых точек, а то, что полученное в итоге уравнение будет фуксовым, следует из его регулярности, которая очевидным образом вытекает из регулярности исходной фуксовой системы.

Рассмотрим преобразование вида

$$\tilde{y} = \Gamma^i_{\alpha\beta} y, \qquad \Gamma^i_{\alpha\beta}(z) = I + E^i_{\alpha\beta}(z), \quad \alpha > \beta,$$

с матрицей $E^i_{\alpha\beta}(z)$, содержащей только один ненулевой элемент

$$e^i_{\alpha\beta}(z) = \sum_{k=1}^{\alpha-\beta} h^{ik}_{\alpha\beta} \frac{z}{(z-a_i)^k}, \qquad i = 2, \dots, n-1;$$
$$e^1_{\alpha\beta}(z) = const$$

на месте (α, β) с подходящими постоянными $h^{ik}_{\alpha\beta}$. Матрицы преобразований $\Gamma^i_{\alpha\beta}(z)$ голоморфно обратимы вне a_i, при $i = 2, \ldots, n-1$, и постоянны при $i = 1$. Система под действием этих преобразований перестанет быть фуксовой, но сохранит форму (12), только вместо постоянных матриц вычетов B_i будут стоять матрицы с полиномами от $1/(z-a_i)$. Назовем эти матричные функции $\tilde{B}_i$. Преобразование $\Gamma^i_{\alpha\beta}(z)$ при подходящем выборе постоянных $h^{ik}_{\alpha\beta}$ обнуляет элемент матрицы $\tilde{B}_i$ системы (3),(12), стоящий на месте $(\alpha-1, \beta)$, причем все остальные матрицы $\tilde{B}_j$ сохраняют нижнюю треугольность, а первые $\alpha-1$ строк системы вообще не изменятся. Элемент $e^i_{\alpha\beta}$ следует выбрать так: $e^i_{\alpha\beta} = a_i \cdot b^i_{\alpha-1,\beta}$, где $b^i_{\alpha-1,\beta}$ — элемент на $(\alpha-1, \beta)$ месте матрицы $\tilde{B}_i$.

Так, действуя в нужном порядке:

$$\Gamma^1_{21}, \ldots, \Gamma^{n-1}_{21}, \Gamma^1_{31}, \ldots, \Gamma^{n-1}_{31}, \Gamma^1_{32}, \ldots, ***, \ldots, \Gamma^{n-1}_{p,p-1},$$

обнулим все строки матрицы коэффициентов (12), кроме последней и кроме единичной наддиагонали вычета в нуле. Перейдем в следующей форме матрицы коэффициентов

$$\tilde{B}(z) = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

К полученной системе применим калибровочное преобразование вида:

$$\tilde{y} = \Gamma_f(z) y, \qquad \Gamma_f(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/z^2 & 1/z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/z^3 & -2/z^3 & 1/z^3 & 0 \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Оно построено с помощью процедуры параграфа §3.1. Эта система преобразуется в уравнение стандартной заменой.

Это преобразование преобразует систему в систему вида (22). □

Теорема 4. *По фуксову уравнению (1) можно построить стабильное расслоение с логарифмической связностью и типом расщепления $K = (n-2)D$ с теми же особыми точками и монодромией.*

Доказательство. Пусть точки $a_1 = 0$, $a_2, \ldots, a_n$ — особые точки фуксова уравнения (1), а точка $z = \infty$ — неособая. По уравнению (1) с помощью замены

$$y^1 = u, \quad y^2 = u', \ldots, \quad y^p = u^{(p-1)}$$

построим регулярную систему следующего вида

$$\frac{dy}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \ldots & \ldots & -b_1 \end{pmatrix} y \tag{25}$$

с теми же особыми точками и монодромией, что у уравнения (1). Легко видеть, что локально, в окрестности точки $z = a_i$, система (25) преобразованием вида

$$\tilde{y} = (z - a_i)^D y$$

приводится к фуксовой в точке $z = a_i$ системе. Преобразованная система будет иметь особенность в бесконечности. Чтобы преобразовать систему (25) к фуксовой в точках $a_2, \ldots, a_n$, и не имеющей особенности в бесконечности, воспользуемся калибровочным преобразованием вида

$$\tilde{y} = \Gamma(z) y, \qquad \Gamma(z) = \prod_{i=2}^{n} \left(\frac{z - a_i}{z} \right)^D,$$

голоморфно обратимым в бесконечности.

Преобразованная система

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \tilde{B}(z)\tilde{y}, \qquad \tilde{B}(z) = \Gamma B(z) \Gamma^{-1} + \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1}. \tag{26}$$

фуксова в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$. Система вида

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \tilde{B}_0(z)\tilde{y}, \qquad \tilde{B}_0(z) = \Gamma_0 B(z) \Gamma_0^{-1} + \frac{d\Gamma_0}{dz}\Gamma_0^{-1}, \tag{27}$$

с $\Gamma_0(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^D$, фуксова в нуле и связана с системой (26) следующим образом:

$$\tilde{B}(z) = z^{-(n-2)D} \tilde{B}_0 z^{(n-2)D} - (n-2)\frac{D}{z}.$$

С помощью полученных систем на сфере Римана может быть построено голоморфное расслоение с логарифмической связностью. Определим его с помощью следующего координатного описания

$$(F, \nabla) = \Big(U_0 \ni 0,\, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\},\, \omega_0 = \tilde{B}_0(z),\, \omega_\infty = \tilde{B}(z),\, g_{0\infty} = z^{(n-2)D} \Big).$$

Построенное расслоение имеет тип расщепления $K = (0, (n-2), \ldots, (n-2)(p-1))$, как и требуется в условии теоремы. Остается показать, что построенное расслоение со связностью образуют стабильную пару. Докажем это.

Предположим, что у представления монодромии (2) связности ∇ имеется подпредставление. Другими словами, пространство горизонтальных сечений (пространство решений соответствующей системы) имеет инвариантное подпространство. Здесь нам снова удобнее работать с системой вида (25). Рассмотрим базис $u_1(z), \ldots, u_p(z)$ пространства решений уравнения, причем такой, что первые l его элементов образуют базис инвариантного подпространства. Заметим, что фундаментальную матрица $Y(z)$ системы (25) имеет вид:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \ldots & u_p(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) & \ldots & u_p'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(p-1)}(z) & u_2^{(p-1)}(z) & \ldots & u_p^{(p-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Матрица $Y_i(z) = (z-a_i)^D Y(z)$ — фундаментальная матрица фуксовой в $z = a_i$ системы.

Теперь построим по формуле (24) уравнение, фундаментальными решениями которого будут функции $u_1(z), \dots, u_l(z)$, образующие инвариантное подпространство. Применение этой формулы корректно, так как функции $u_1(z), \dots, u_l(z)$ линейно независимы и порождают инвариантное относительно оператора монодромии пространство. Полученное уравнение не будет иметь особых точек, кроме $a_1, \dots, a_n$, так как их не было у исходного уравнения. Построенное уравнение

$$u^{(l)} + q_1(z)u^{(l-1)} + \ldots + q_l(z)u = 0 \tag{28}$$

регулярное, а значит фуксово. Следовательно, функции

$$r_j(z) = q_j(z) \cdot \prod_{i=1}^{n} (z-a_i)^j$$

голоморфны в $\mathbb{C}$. Уравнение (28) можно использовать как соотношение, выражающее старшую производную любой из функций $u_1(z), \dots, u_l(z)$ через младшие производные. С помощью этого соотношения нам удастся построить цепочку калибровочных преобразований, которые обнулят все элементы фундаментальной матрицы $Y_0(z)$, стоящие на пересечении первых l столбцов и последних $p-l$ строк.

Уравнение и его производные дадут соотношения для функций $u_k^{(l)}(z), \dots, u_k^{(p-1)}(z)$, при $k = 1, \dots, l$. Легко проверить, что соотношения будут иметь вид:

$$u^{(m)} = {}^m\tilde{q}_1(z)u^{(m-1)} + \ldots + {}^m\tilde{q}_m(z)u, \qquad m \geqslant l,$$

где функции $\tilde{r}_j(z) = \tilde{q}_j(z) \cdot \prod_{i=1}^n (z-a_i)^j$ тоже голоморфны в $\mathbb{C}$, так как это уравнение тоже фуксово.

Применим к фундаментальной матрице системы (25) следующую последовательность калибровочных преобразований

$$\tilde{y} = \Gamma_{l+1}(z) \cdot \ldots \cdot \Gamma_p(z)\, y,$$

где

$$\Gamma_m(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -{}^m\tilde{q}_m(z) & \dots & -{}^m\tilde{q}_1(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. преобразование $\tilde{y} = \Gamma_m(z)y$ вычитает из строки с номером $m+1$ предыдущие m строк, обнуляя при этом первые l элементов $(m+1)$-ой строки матрицы $Y(z)$.

Осталось убедиться, что данное преобразование не изменит порядков полюсов локальных форм связности ∇. Действительно, преобразование

$$(z-a_i)^D \Gamma_m (z-a_i)^{-D},$$

действующее на фуксову систему с фундаментальной матрицей $Y_i(z)$, голоморфно обратимо в точке a_i. Следовательно она не может изменить голоморфного типа расслоения.

Теперь видно, что любое подрасслоение F_1 расслоения F, инвариантное относительно действия монодромии, имеет тип расщепления совпадающий с началом типа расщепления F. Это доказывает стабильность пары (F, ∇), так как элементы типа расщепления возрастают. $\square$

4 Некоторые следствия

Введем два класса представлений. *Б-представлениями* называют приводимые представления, каждая образующая которых приводится к жордановой клетке. В этом классе А.А. Болибрухом были найдены первые контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта для фуксовых систем. Еще один класс представлений — это представления вида $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ с образующими $G_i = G_i^1 \oplus G_i^2$, $i = 1, \ldots, n$, такими, что спектры матриц G_i^1 и G_i^2 не пересекаются ни при одном i. Назовем их *расщепимыми.*

Следствие 1. *Б-представления и расщепимые представления с не менее, чем тремя образующими не могут быть реализованы как представления монодромии скалярных фуксовых уравнений.*

Доказательство. Про оба класса представлений можно показать, что по ним нельзя построить стабильноую пару. Про Б-представления это легко следует из доказательства теоремы 11.2 из [2].

Если представление расщепимо $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$, то, построенное по нему расслоение F со связностью будет иметь два подрасслоения F_1 и F_2, которые будут стабилизироваться связностью (инвариантны относительно действия монодромии). Подпредставлениям χ_1 и χ_2 отвечают подрасслоения F_1 и F_2, соответственно. Покажем, что

$$\deg F = \deg F_1 + \deg F_2. \tag{29}$$

В качестве ассоциированного базиса рассмотрим слабо левелевский. Инвариантные подпространства, отвечающие прямым слагаемым монодромии, порождаются частями слабо левелевского базиса, т.е. первые l векторов порождают первое инвариантное подпространство, а последние $p - l$ векторов — второе. Действительно, рассмотрим оператор $G_i = G_i' \oplus G_i''$, где G_1' и G_i'' — образующие подпредставлений. По условию, операторы G_i' и G_i'' не имеют одинаковых собственных значений, а, значит, каждый вектор из слабо левелевского базиса лежит ровно в одном из подпространств, в том, в котором лежит соответствующее собственное подпространство. Тогда степень подрасслоения F_1 равна сумме показателей, соответствующих подпредставлению χ_1: $\deg F_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \beta_i^j$, то же верно и для F_2, то есть $\deg F_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=l+1}^{p} \beta_i^j$. Следовательно, выполнено (29). Из (29) следует, что пара (F, ∇) не может быть стабильной.

Таким образом, из третьей формулировки 21-ой проблемы Гильберта следует, что для этих двух классов представлений она имеет отрицательное решение. $\square$

Замечание. В хорошо изученном классе фуксовых уравнений второго порядка с тремя особыми точками 0, 1 и ∞ указанные семейства представлений дают все классы нереализуемые такими уравнениями. В частности, к этому классу относится гипергеометрическое уравнение.

Это не трудно показать, воспользовавшись полученными формулировками. Например, по неприводимому представлению можно построить фуксову систему, а она постоянной калибровкой обязана приводиться к виду (3),(12). Действительно, вычет в точке $z = 1$ матрицы коэффициентов можно привести к нижнетреугольному виду, а вычет в нуле не сможет иметь такой вид, т.к. система неприводима. Далее, подходящим диагональным калибровочным преобразованием сделаем правый верхний элемент вычета в нуле единицей. Еще более удобной является третья формулировка, но она требует применения техники работы с расслоениями со связностью.

Следствие 2. *По монодромии фуксова уравнения можно построить бесконечное семейство фуксовых систем.*

Доказательство. Согласно теореме 4 по фуксову уравнению можно построить стабильную пару (F, ∇). С другой стороны, из теоремы 3 работы [3] вытекает, что из существования стабильной пары следует, что существует искомое семейство систем. $\square$

Основная трудность явного предъявления контрпримеров к 21-ой проблеме Гильберта для скалярных фуксовых уравнений состоит в сложной зависимости от положения особых точек. Как будет показано ниже, в случае $n \geqslant 4$ особых точек ответ к проблеме неустойчив относительно движения особых точек. Известным примером такой зависимости является случай четырех особых точек 0, 1, t и ∞ и неприводимой монодромии, принадлежащей $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Такие данные, как правило, нельзя реализовать скалярным фуксовым уравнением с четырьмя особыми точками, но можно реализовать уравнением с одной дополнительной, так называемой, “ложной” (без ветвления) особой точкой $w(t)$, положение которой зависит от t. Мы предполагаем, что монодромия постоянна. Функция $w(t)$ является решением уравнения Пенлеве 6 (см. [6]). Как правило, решения уравнений Пенлеве — это новые неизвестные функции, имеющие кроме точек 0, 1, ∞ еще и другие, так называемые подвижные, особенности. Эти особенности — те положения точки t, при которых существует скалярное фуксово уравнение, реализующее заданную монодромию. Таким образом, вопрос о возможности построения скалярного фуксова уравнения — это вопрос описания структуры дивизора.

5 Недеформируемость фуксовых уравнений

Известно, что фуксову систему с набором особых точек $a = (a_1, \dots, a_n)$ можно включить в семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \qquad \sum_{i=1}^{n} B_i(a) = 0,$$

зависящее от параметра a так, что эти системы будут иметь одно и то же представление монодромии (2). Такое семейство систем называется *изомонодромным.* Наиболее известное из таких семейств, задаваемое уравнением Шлезингера, называется шлезингеровским. В нерезонансном случае все изомонодромные деформации шлезингеровские или сводятся к ним сопряжением. Непрерывные изомонодромные деформации сохраняют показатели. Шлезингеровская деформация отличается от других еще и тем, что при ней сохраняются связи (отношения Y_i/Y_j) между ассоциированными базисами в разных точках. Аналогично деформациям систем можно определить деформацию расслоений со связностью.

В этом параграфе мы будем активно применять технику работы [4].

Теорема 5. *Стабильная пара $(F(a), \nabla(a))$ с типом расщепления $K = (k_1, \ldots, k_p)$, где $k_{l+1} - k_l > 1$, для некоторого l, при непрерывной деформации по параметру a не может сохранить тип расщепления.*

Доказательство. В работе [4] показано, что по паре $(F(a), \nabla(a))$ можно построить фуксову систему с той же монодромией, что у связности ∇, и с особыми точками $a_1, \ldots, a_n, \infty$:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{{}^*B_i(a)}{z - a_i}\right) y, \qquad \sum_{i=1}^{n} {}^*B_i = -K, \tag{30}$$

где K — тип расщепления расслоения F. Тогда, согласно теореме Левеля, фундаментальная матрица, соответствующая ассоциированному базису в бесконечности, примет вид:

$$Y(z) = U(z,a) z^K, \qquad U(z) = I + U_1(a)\frac{1}{z} + \ldots.$$

То, что K — не только набор нормирований в бесконечности, но и тип расщепления означает, что

$$Y(z) = U(z,a) z^K = z^K V(z,a), \qquad V(z) = I + V_1(a)\frac{1}{z} + \ldots.$$

То есть $U(z,a) = I + U_1(a)\frac{1}{z} + O(\frac{1}{z^2}) = z^K V(z,a) z^{-K}$. Отсюда, а также из того, что $k_{i+1} - k_i > 1$ следует, что

$$u_{ij}(a) \equiv 0, \qquad i \le l < j. \tag{31}$$

С другой стороны из формулы

$$\frac{\partial U_1(a)}{\partial a_i} =^* B_i(a), \tag{32}$$

полученной в [4] из уравнения Шлезингера и пфаффовой формы, задающей шлезингеровскую изомонодромную деформацию.

Таким образом из формул (31) и (32) следует, что система (30) имеет блочно нижнетреугольную форму. Но это, в свою очередь, означает, что подсистема, полученная в пересечении последних l столбцов и строк задает логарифмическую связность в подрасслоении F_1 с типом расщепления $(k_{p-l+1}, \ldots, k_p)$, что противоречит стабильности пары (F, ∇)

$$\mu(F_1) = \frac{k_{p-l+1} + \ldots + k_p}{l} > \frac{k_1 + \ldots + k_p}{p} = \mu(F).$$

□

Множество наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ определяется равенством нулю некоторых элементов матрицы коэффициентов вспомогательной системы, соответственно, оно является аналитическим подмножеством $\mathbb{C}^n$ положительной коразмерности.

Назовем уравнение резонансным, если какие-то его показатели (в одной точке) отличаются на целое число.

Следствие 3. *Нерезонансные уравнения с набором особых точек* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $n \geqslant 4$ *и монодромией* χ *не может быть включено в изомонодроминое семейство с параметрами* $a \in W$, *где* W *— некоторая область в* $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Согласно третьей формулировке существование уравнения эквивалентно существованию стабильной пары (F, ∇) с типом расщепления $K = (0, n-2, \ldots, (p-1)(n-2))$. По условию $n-2 > 1$, соответственно, это расслоение подпадает под условие теоремы 5, которая утверждает, что не существует изомонодромной деформации шлезингеровского типа, сохраняющей тип расщепления. Все деформации в нерезонансном случае сводятся к шлезингеровским, соответственно их не существует. □

Здесь также можно сказать, что множество наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, при которых существует фуксово уравнение с заданной монодромией является аналитическим множеством положительной коразмерности. В резонансном случае эти утверждения будут верными, но только для деформаций, сохраняющих связи между локальными системами.

Список литературы

[1] Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 206.*

[2] Болибрух А. А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. *М.: МЦНМО, 2000.*

[3] Болибрух А.А. Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // *Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.*

[4] Болибрух А.А. О tau-функции уравнения изомонодромных деформаций Шлезингера // *Матем. заметки. 2003. Т. 74. В. 2. С. 184-191.*

[5] Singer M., Van Der Put M. Galois Theory of Linear Differential Equations // *Springer.*

[6] Гонцов Р.Р., Побережный В.А. Различные варианты проблемы Римана–Гильберта для линейных дифференциальных уравнений // *УМН. 2008. Т. 63. В. 4. С. 147-184.*

[7] Вьюгин И.В. Об эквивалентных формулировках 21-ой проблемы Гильберта // *Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль., 2008, С. 62-63.*