ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА В РАБОТАХ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Юбилейная конференция победителей Конкурса Мебиуса прошлых лет

10-11 ноября 2007 года, Москва

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Александр Гайфуллин *(2005, первое место)*. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова и Независимый Московский университет.

Комбинаторная реализация циклов. Хорошо известна задача Н. Стинрода о реализации классов гомологий образами фундаментальных классов многообразий. Классическая теорема Р. Тома утверждает, что любой целочисленный класс гомологий может быть с некоторой кратностью реализован как образ фундаментального класса ориентированного гладкого многообразия. Доказательство Р. Тома неконструктивно — оно не позволяет явно строить требуемое многообразие. В докладе будет дана явная конструкция, которая по циклу строит комбинаторное многообразие, реализующее с некоторой кратностью целочисленный класс гомологий этого цикла. Конструкция основана на специальной процедуре локального комбинаторного разрешения особенностей цикла.

Евгений Горский *(первый победитель в номинации «Студенты», 2006)*. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Конфигурационные пространства и степенные структуры. Конфигурационные пространства, о которых пойдет речь в докладе — множества наборов точек на данном многообразии, обладающих некоторой «внутренней структурой». Простыми и естественными примерами таких пространств являются множество неупорядоченных наборов (различных или совпадающих) точек на данном многообразии. Задача, которая нас будет интересовать: как выразить численные инварианты (например, эйлеровы характеристики) этих пространств через соответвующие характеристики исходного многообразия?

Для множества неупорядоченных наборов точек на данном многообразии (симметрической степени) известна формула Макдональда, связывающая, например, его эйлерову характеристику с эйлеровой характеристикой исходного многообразия.

Понятие степенной структуры позволяет далеко обобщить формулу Макдональда. Оно было введено С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго и А. Мелье-Эрнандезом в 2002 г. как эффективный способ компактной записи некоторых комбинаторных формул. Вскоре выяснилось, что это понятие не только существенно упрощает запись, но и позволяет получать для них простые и прозрачные доказательства, а также получать новые интересные результаты.

Александр Кузнецов *(победитель первого конкурса Мебиуса, 1997).* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Производные категории когерентных пучков в современной алгебраической геометрии. Я постараюсь рассказать о современном подходе к алгебраической геометрии, основанном на использовании производных категорий когерентных пучков.

Иван Лосев *(2006, первое место).* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова и Независимый Московский университет.

Квантованные гамильтоновы действия редуктивных групп и их приложения. Доклад посвящен квантованным гамильтоновым действиям редуктивных групп на аффинных симплектических многообразиях проквантованных по Федосову. Он также описывает приложения таких действий к исследованию W-алгебр конечного типа и проблеме подъема центральных инвариантов.

Федор Петров *(2005, третье место).* Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Аффинная дифференциальная геометрия и геометрия чисел. Мы введем понятие аффинной площади поверхности выпуклого тела и расскажем о том, как оно помогает оценивать количество рациональных точек на поверхностях. Планируется сформулировать также несколько открытых вопросов, относящихся как к общей теории аффинных площадей, так и к геометрии чисел.

Геннадий Пифтанкин *(2005, второе место).* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

О «возрастание энтропии» в обратимых системах Пусть имеется динамическая система (M, μ, T), где $T\colon M \to M$ — автоморфизм вероятностного пространства M с мерой μ: $T^*\mu = \mu$. В статистической механике положение системы описывается вероятностной мерой ν

на M(которую можно интерпретировать как распределение начальных условий статистической системы). Пусть ν имеет измеримую плотностью ρ: $d\nu(x) = \rho(x)d\mu(x)$). Гиббс в качестве аналога термодинамической энтропии ввел в рассмотрение следующую величину $s(\rho) = -\int_M \rho \log \rho \, d\mu$, которую также называют информационной энтропией. Как известно, энтропия показывает меру неопределенности состояния системы, т. е. чем выше энтропия тем меньше информации о положение системы. К примеру, при $\rho = 1$ энтропия принимает максимальное значение $s(1) = 0$ (полная неопределенность), а при ρ равной δ-функции $s(\delta(x)) = -\infty$ (полная определенность). Обратимся к эволюции энтропии $s(T^{n*}\rho)$ с течением времени. Второй закон термодинамики гласит, что энтропия изолированной термодинамической системы не убывает как функция времени, а возрастает приближаясь к некоторому своему максимуму, т. е. с течением времени состояние системы становится все более и более неопределенным. Однако, Пуанкаре заметил, что энтропия Гиббса остается постоянной для всех конечных моментов времени, и потому не может являться аналогом термодинамической энтропией для обратимых систем. Козлов и Трещев показали, что все-таки имеется некоторый тип роста энтропии Гиббса, а именно, энтропия имеет положительный скачок на бесконечности. В докладе мы обсудим, так называемую грубую энтропию Гиббса, которая уже не сохраняется, имеет тенденцию к росту на конечных значениях времени и характер ее роста непосредственно связан с динамическими свойствами отображения T.

Юрий Притыкин *(2006, второе место в номинации «Студенты»)* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

О логических теориях и конечных автоматах на бесконечных последовательностях Известная теорема Клини утвержает эквивалентность двух определений регулярных (автоматных) множеств конечных слов над конечным алфавитом: с помощью регулярных выражений (получаемых из букв алфавита операциями конкатенации, объединения и итерации) и с помощью распознающих конечных автоматов. Аналогичная ситуация возникает и с множествами бесконечных слов: множества, описываемые формулами монадического языка второго порядка, можно эквивалентно определить как распознаваемые конечными автоматами специального типа.

После обсуждения этого соответствия мы перейдём к вопросам разрешимости логических теорий бесконечных слов (результаты Семёнова 1970-80-х гг.) и к недавним результатам об автоматах на последовательностях.

Михаил Скопенков *(2004, второе место).* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова Независимый Московский университет.

О зацеплениях и сингулярных зацеплениях. Доклад посвящен классификации многомерных зацеплений. Основным результатом является следующая явная формула. Эта формула усиливает результат Хэфлигера 1966 г. Обозначим через $L^m_{p,q}$ (соответственно, K^m_p) группу гладких вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$ (соответственно, $S^p \to S^m$) с точностью до гладкой изотопии.

Теорема. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant m-3$ и $2p+2q \leqslant 3m-6$. Тогда

$$L^m_{p,q} \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(SO/SO_{m-p-1}) \oplus K^m_p \oplus K^m_q.$$

Группы, стоящие в правой части, известны для многих размерностей, поэтому в большом диапазоне размерностей данная формула полностью описывает группу зацеплений.

Наш подход к классификации зацеплений основан на сведении ее к классификации сингулярных зацеплений, в интересующих нас размерностях проделанной Кошорке, Хабеггером и Кайзером. Это позволяет доказать сформулированную теорему с помощью наглядных геометрических рассуждений, не используя абстрактной алгебраической топологии. В докладе будут построены геометрические точные последовательности, связывающие группы зацеплений и сингулярных зацеплений.

Владлен Тиморин *(премия 1998).* Stony Brook University, USA; Jacobs University Bremen, Germany; Независимый Московский Университет.

Об отображениях, переводящих прямые в окружности Следующая конкретная задача была изначально мотивирована практическими вопросами номографии, но принадлежит широкому кругу задач, связанных с классическими геометрическими структурами: описать все (гладкие) отображения из открытой области проективного пространства в открытую область сферы, переводящие все прямые в окружности. Задача открыта даже в размерности 5. В докладе, я надеюсь объяснить связь этой задачи с классическими геометриями, (кватернионными и проч.) расслоениями Хопфа, дробно-квадратичными параметризациями квадрик.

Сергей Шадрин *(премия 2000 и второе место 2003)*. Цюрихский университет и НИИСИ РАН.

Двойные числа Гурвица для рода 0 (по совместной работе с М. Шапиро и А. Вайнштейном). Мы изучаем двойные числа Гурвица для рода о с помощью подсчета числа накрытий $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ с двумя точками ветвления и заданными характерами ветвлений. В силу недавних результатов Гульдена, Джексона и Вакила эти числа являются кусочно полиномиальными функциями от кратностей прообразов точек ветвления. Мы описываем разбиение пространства параметров на области полиномиальности, называемые камерами, и вычисляем разности полиномов, соответствующих соседним камерам. Кроме того, мы приводим явную формулу для полинома, соответствующего некоторой специальной камере, называемой вполне отрицательной. Эта формула позволяет нам вычислить двойные числа Гурвица в любой камере, прибавив к полиному, соответствующему вполне отрицательной камере, сумму разностей между соседними полиномами вдоль пути, соединяющего вполне отрицательную камеру с заданной камерой.