

П. Е. Загорко

Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовых диаграммах с полным графом пересечений.

Весовой системой называют функцию на хордовых диаграммах, удовлетворяющую 4-членному соотношению Васильева. По алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 можно построить простейшую нетривиальную весовую систему. Полученная \mathfrak{sl}_2 -весовая система принимает значения в пространстве многочленов от одной переменной и полностью определяется рекуррентными соотношениями Чмутова-Варченко.

Хотя определение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы и довольно просто, ее вычисления очень трудоемки, поэтому конкретные значения известны лишь для небольшого числа хордовых диаграмм. Для явного вида значений на хордовых диаграммах с полным графом пересечений С. К. Ландо выдвинул гипотезу, которую поначалу удалось доказать лишь для коэффициентов при линейных членах значений весовой системы. В данной работе мы полностью доказываем эту гипотезу, пользуясь рекуррентными соотношениями Чмутова-Варченко и введенными нами линейными операторами добавления хорды к доле — подмножеству хорд диаграммы с концами на двух выделенных дугах. Также, опираясь на производящую функцию значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовых диаграммах с полным графом пересечений, мы доказываем изоморфность факторпространства долей по модулю рекуррентных соотношений пространству многочленов от двух переменных.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: хордовая диаграмма, 4-членные соотношения, \mathfrak{sl}_2 -весовая система, полный граф.

§ 1. Введение

Хордовые диаграммы и 4-членное соотношение на них возникли при изучении В. А. Васильевым инвариантов узлов. Инварианты Васильева конечного порядка описываются с помощью весовых систем — функций на хордовых диаграммах, удовлетворяющих 4-членному соотношению Васильева (см. [1]). Как показал М. Концевич (см. [2]), верно и обратное — по всякой весовой системе можно восстановить инвариант узла.

М. Концевич и Д. Бар-Натан (см. [2] и [3] соотв.) придумали способ сконструировать весовую систему по произвольной алгебре Ли, наделенной инвариантной билинейной формой. Простейшей весовой системой, получаемой с помощью этой конструкции, является \mathfrak{sl}_2 -весовая система, отвечающая алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 . Она принимает значения в пространстве многочленов от одной переменной — элемента Казимира в \mathfrak{sl}_2 .

По хордовой диаграмме можно построить граф пересечений ее хорд. Как показали С. Чмутов и С. Ландо в [4], значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы зависит

только от графа пересечений хордовой диаграммы, поэтому можно говорить о значении этой весовой системе на графах пересечений. Однако не для всякого графа существует хордовая диаграмма с данным графом пересечений. Поэтому возникает вопрос С. К. Ландо о существовании продолжения весовой системы на все пространство графов. Е. Красильников (см. [5]) доказал существование и единственность такого продолжения на множество графов с не более чем 8 вершинами.

Один из способов построить продолжение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы до инварианта графа — это угадать этот инвариант, предварительно посчитав достаточно большое количество значений на графах пересечений. П. Филишова (см. [6]) вычислила сначала значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на специальной серии хордовых диаграмм, а затем, в предположении существования продолжения инварианта на множество всех графов, нашла значения на серии графов, не являющихся графами пересечений. Однако даже подсчет значений на графах пересечений затруднителен, поскольку вычисления происходят в некоммутативной алгебре или, если смотреть с точки зрения рекуррентных соотношений ЧмUTOва-Варченко (см. [7]), задействуют экспоненциально большое по сравнению с числом хорд и их пересечений число диаграмм.

Полный граф является графом пересечений, но до настоящей работы значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на соответствующей ему хордовой диаграмме доказано не было. С. К. Ландо выдвинул гипотезу о форме производящей функции этих значений. А. Vigeni (см. [8]) удалось частично доказать эту гипотезу для производящей функции коэффициентов при линейном члене значений.

В данной работе мы доказываем гипотезу полностью, используя понятие доли — подмножества хорд диаграммы с концами на двух данных дугах окружности. Доли играют основную роль в доказательстве теоремы ЧмUTOва-Ландо о зависимости значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы только от графа пересечений хордовых диаграмм (см. [4]).

Мы вводим линейные операторы добавления хорды на пространстве долей и выписываем несколько соотношений, связывающих их. С помощью данных соотношений мы построили простой алгоритм вычисления значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовых диаграммах с полным графом пересечений, позволяющий явно выписать производящую функцию этих значений, которая совпала с предсказанной С. К. Ландо. Вид полученной производящей функции позволяет найти два удобных базиса в факторпространстве долей по модулю рекуррентных соотношений ЧмUTOва-Варченко и вывести изоморфность этого пространства пространству многочленов от двух переменных.

Автор очень благодарен Г. С. Минаеву, П. А. Зиновой (Филипповой), М. Э. Казаряну и С. К. Ландо за обсуждение темы работы и полезные советы.

§ 2. Хордовые диаграммы и весовая система $w_{\mathfrak{sl}_2}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Хордовая диаграмма порядка n* — ориентированная окружность, рассматриваемая с точностью до сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на

n пар. Каждую пару выбранных точек окружности мы для наглядности будем соединять *хордой* — отрезком или лежащей внутри окружности дугой.

По хордовой диаграмме можно построить простой граф, без кратных ребер и петель, называемый ее графом пересечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Граф пересечений* хордовой диаграммы — это граф, вершины которого соответствуют хордам диаграммы, а ребра соединяют те и только те вершины, хорды которых пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дуговая диаграмма порядка n* — ориентированная прямая, рассматриваемая с точностью до сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на n пар. Каждую пару выбранных точек прямой мы для наглядности будем соединять дугой, лежащей в фиксированной полуплоскости.

Хордовую диаграмму можно *представить* в виде дуговой диаграммы, "разрезав" окружность диаграммы в точке, отличной от $2n$ выбранных.

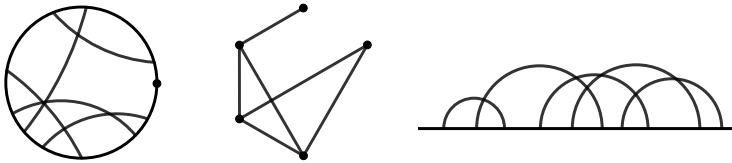


Рис. 1. Хордовая диаграмма с выбранной точкой разреза и соответствующие ей граф пересечений и дуговая диаграмма

Формальные линейные комбинации хордовых диаграмм с коэффициентами в \mathbb{C} образуют векторное пространство хордовых диаграмм. Аналогичные пространства образуют графы и дуговые диаграммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Весовой системой* называют линейную функцию w на векторном пространстве хордовых диаграмм, удовлетворяющей *4-членному соотношению*

$$w(\text{diagram 1}) - w(\text{diagram 2}) - w(\text{diagram 3}) + w(\text{diagram 4}) = 0. \quad (2.1)$$

В этом и следующих равенствах диаграммы могут содержать также хорды с концами на пунктирных дугах окружности, причем расположение этих хорд одинаково во всех слагаемых одного равенства. В выражениях для значений весовой системы мы в дальнейшем будем опускать саму функцию, отождествляя диаграмму с ее значением.

Покажем, как по произвольной алгебре Ли H с невырожденной инвариантной билинейной формой (\cdot, \cdot) можно построить весовую систему, где под инвариантностью билинейной формы имеется в виду выполнение равенства $([a, [b, c]]) = ([a, b], c)$ для любых $a, b, c \in H$. Выберем произвольный ортонормированный относительно (\cdot, \cdot) базис x_1, x_2, \dots, x_n . Построим функцию ω на пространстве дуговых диаграмм, принимающую значения в универсальной обертывающей алгебре H , следующим образом. Сопоставим каждой дуге диаграммы номер от 1 до n по числу элементов базиса; две разные дуги могут быть

под одним и тем же номером. Каждому концу дуги поставим в соответствие элемент базиса с индексом, равным номеру дуги. Перемножим элементы базиса в порядке их расположения на ориентированной прямой диаграммы. Для всевозможных отображений из множества дуг в множество $\{1, \dots, n\}$ сложим полученные произведения. Сумма этих произведений лежит в универсальной обертывающей алгебры H . В качестве примера приведем выражение для значения ω на дуговой диаграмме на рисунке 1:

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n \sum_{i_5=1}^n x_{i_1} x_{i_2} x_{i_1} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_2} x_{i_5} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}.$$

Для продолжения ω до весовой системы на пространстве хордовых диаграмм нужно проверить, что на разных дуговых представлениях одной хордовой диаграммы значения совпадают, и функция удовлетворяет 4-членному соотношению. Это гарантируется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [2].

1. ω не зависит от выбора ортонормированного базиса e_1, \dots, e_n ;
2. ω принимает одинаковые значения на разных представлениях одной хордовой диаграммы;
3. ω удовлетворяет 4-членному соотношению;
4. образ ω лежит в центре универсальной обертывающей H .

Простейший случай такой конструкции соответствует алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 . В этой алгебре Ли можно выбрать ортонормальный базис x_1, x_2, x_3 , который удовлетворяет соотношению $[x_i, x_j] = \varepsilon_{ijk} x_k$, где ε_{ijk} — символ Леви-Чевиты. Элемент $c := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ порождает центр универсальной обертывающей \mathfrak{sl}_2 . Сконструированная весовая система обозначается $w_{\mathfrak{sl}_2}$ и называется \mathfrak{sl}_2 -весовой системой. Она принимает значения в пространстве многочленов от одной переменной c .

Однако при вычислении значений на конкретных диаграммах удобнее пользоваться комбинаторными соотношениями \mathfrak{sl}_2 -весовой системы, приведенными ниже.

ТЕОРЕМА 2. Для весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ выполняются следующие свойства

- **Начальные значения.**

$$\bigcirc = 1, \quad \bigcirc \text{ с дугой} = c.$$

- **Мультипликативность.** Пусть множество хорд диаграммы разбивается на два дополнительных подмножества, таких что никакие две хорды из разных подмножеств не пересекаются. Тогда значение весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на всей хордовой диаграмме равно произведению значений на двух диаграммах, содержащих только хорды первого и только второго подмножества соответственно.

$$\bigcirc \text{ с двумя непересекающимися дугами} = \bigcirc \text{ с одной дугой} \cdot \bigcirc \text{ с одной дугой}.$$

- **Соотношения Чмутова-Варченко**, [7]. Пусть имеется хордовая диаграмма D со связным графом пересечений. Тогда

1. либо в диаграмме есть лист — хорда, пересекающая ровно одну хорду, тогда

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with leaf} &= (c - 1) \cdot \text{Diagram without leaf} \\
 w_{sl_2}(D) &= (c - 1)w_{sl_2}(D'),
 \end{aligned}$$

где через D' обозначена диаграмма D без листа;

2. либо найдется одна из двух троек хорд, изображенных в левых частях равенств (2.2) и (2.3), для которых выполняются 6-членные соотношения

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}, \tag{2.2}$$

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}. \tag{2.3}$$

Пользуясь только данными свойствами, мы можем вычислить значение весовой системы w_{sl_2} на любой хордовой диаграмме. На простейшей серии хордовых диаграмм, состоящих из n непересекающихся хорд, значение весовой системы w_{sl_2} принимает значение c^n в силу свойства мультипликативности. В общем случае вычислить значение на диаграмме с большим числом хорд и их пересечений непросто из-за быстро возрастающего при применении 4- и 6-членных соотношений числа диаграмм.

ТЕОРЕМА 3. [4; Теорема 4] *Значение sl_2 -весовой системы на хордовой диаграмме зависит только от ее графа пересечения.*

Мы изучаем значение весовой системы w_{sl_2} на серии хордовых диаграмм с полным графом пересечений.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. Обозначим через $K_n(c)$ значение весовой системы w_{sl_2} на хордовой диаграмме с полным графом пересечений с n вершинами (в Таблице 1 приведены многочлены $K_n(c)$ для небольших n).

| n | $K_n(c)$ |
|-----|---|
| 0 | 1 |
| 1 | c |
| 2 | $c^2 - c$ |
| 3 | $c^3 - 3c^2 + 2c$ |
| 4 | $c^4 - 6c^3 + 13c^2 - 7c$ |
| 5 | $c^5 - 10c^4 + 45c^3 - 79c^2 + 38c$ |
| 6 | $c^6 - 15c^5 + 115c^4 - 430c^3 + 657c^2 - 295c$ |

Таблица 1. Значения весовой системы на диаграммах с полным графом пересечений.

Основным результатом данной работы является доказательство гипотезы С. К. Ландо о последовательности многочленов $K_n(c)$.

ТЕОРЕМА 4 [8], ГИПОТЕЗА С. К. ЛАНДО, 2016. *Производящая функция последовательности многочленов $K_n(c)$ является цепной дробью*

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_n(c)t^n = \frac{1}{1 - \alpha_0(c)t - \frac{\beta_1(c)t^2}{1 - \alpha_1(c)t - \frac{\beta_2(c)t^2}{1 - \alpha_2(c)t - \frac{\beta_3(c)t^2}{1 - \dots}}}},$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\alpha_n(c) = c - n(n+1), \quad \beta_n(c) = -n^2c + \frac{n^2(n^2-1)}{4}.$$

Выражение в правой части равенства выше называется *бесконечной непрерывной дробью Якоби*. Это равенство следует понимать как равенство формальных степенных рядов в правой и левой частях выражения. Чтобы вычислить первые n коэффициентов степенного ряда бесконечной непрерывной дроби достаточно найти первые n коэффициентов степенного ряда ее приближения конечной дробью, которую можно получить, оставив только первые n коэффициентов при t или t^2 суммарно на всех уровнях дроби. Конечная же непрерывная дробь является рациональной функцией по t , и для нее легко вычислить заданный коэффициент степенного ряда.

В работе [8] было доказано, что коэффициенты при мономе c многочленов $K_n(c)$ совпадают с соответствующими коэффициентами цепной дроби. Абсолютные значения этих коэффициентов образуют последовательность *нормализованных медианных чисел Дженокки* [A000366](#).

§ 3. Разложение пучка по тривиальным долям

Эта часть работы посвящена построению простого алгоритма, вычисляющего значения \mathfrak{sl}_2 -веса системы на хордовых диаграммах с полным графом пересечений. Полученный алгоритм использует значения лишь небольшого числа диаграмм с меньшим количеством хорд или их пересечений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. [4] На окружности хордовой диаграммы выделим две непесекающиеся дуги. *Долей* хордовой диаграммы назовем такой набор ее хорд, что все концы хорд набора и только они располагаются на двух выделенных дугах окружности. Хорды, не принадлежащие доле, назовем *дополнительными*. Эти хорды образуют *дополнительную долю*.

К долям, также как и к хордовым диаграммам, можно применять 4- и 6-членные соотношения. Для значений простых долей, состоящих всего из двух и одной хорд, выполнено *3-членное соотношение*.

ЛЕММА 3.1. [6; Следствие 3] Для значений весовой системы w_{sl_2} выполняется 3-членное соотношение

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \tag{3.1}$$

Данное соотношение является простым следствием 4-членного: достаточно рассмотреть соотношение (2.1), в каждом слагаемом которого отсутствуют концы хорд на нижней пунктирной дуге.

Трехчленное соотношение является мотивирующим для следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Тривиальная доля с n хордами — доля, состоящая из n попарно непересекающихся хорд, концы каждой из которых лежат на разных дугах доли. Пучок из n хорд — доля с n попарно пересекающимися хордами, концы каждой из которых также лежат на разных дугах.

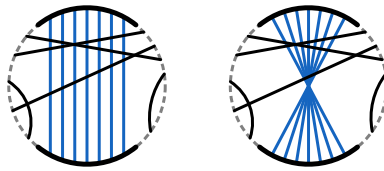


Рис. 2. Диаграмма с тривиальной долей (слева) и пучком из 7 хорд (справа). Выделенные дуги долей отмечены черным цветом, хорды синим. Набор дополнительных хорд у двух данных диаграмм одинаковый.

Лемма 3.1 утверждает, что значение весовой системы w_{sl_2} на диаграмме с пучком из двух хорд можно представить как разность значений на диаграммах с тривиальными долями из двух и одной хордой при любых одинаковых дополнительных долях во всех трех диаграммах. Это утверждение обобщается на пучки с произвольным числом хорд (см. Предложение 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Разложением доли по тривиальным долям называется такая линейная комбинация тривиальных с коэффициентами многочленами от s , что значение w_{sl_2} -весовой системы на данной доле и на линейной комбинации совпадают при любых одинаковых дополнительных долях. Долю, для которой разложение по тривиальным долям существует, будем называть разложимой.

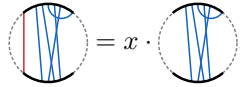
ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пучок из n хорд разложим по тривиальным долям, причем существует разложение, в котором тривиальная доля с наибольшим числом хорд состоит ровно из n хорд и входит в разложение с единичным коэффициентом.

Как мы выясним в дальнейшем, разложение по тривиальным долям существует и даже единственно для доли произвольного вида, и получить это разложение можно применением комбинаторных соотношений к хордам доли (см. Теорему 6). Для вычисления же значения весовой системы w_{sl_2} на хордовой диаграмме с полным графом пересечений на n вершинах достаточно знать конкретный вид хотя бы одного разложения пучка из n хорд.

Для сокращения дальнейших записей введем несколько удобных обозначений.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Пусть доля I разложима по тривиальным долям I_k , то есть $I = \sum_{k=0}^n p_k(c)I_k$ для некоторых многочленов $p_k(c)$. Сопоставим доле I с данным разложением многочлен $I(x, c) = \sum_{k=0}^n p_k(c)x^n$, который мы будем называть *многочленом разложения доли по тривиальным долям*. Например, x^n является многочленом разложения тривиальной доли I_n с n хордами. отождествим тривиальную долю с ее многочленом разложения $I_n = x^n$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3. Рассмотрим доли I и I' , которые отличаются одной хордой, принадлежащей I , не пересекающей другие хорды доли и с концами на разных выделенных дугах. Будем в таком случае писать, что $I = xI'$



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если I' разложима по тривиальным долям с многочленом разложения $I'(x, c)$, то I также раскладывается в линейную комбинацию тривиальных, причем многочлен $I(x, c) := xI'(x, c)$ является многочленом разложения для I .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Замыканием доли* назовем хордовую диаграмму с данной долей и пустой дополнительной.

ЛЕММА 3.2. Пусть разложимая по тривиальным доля I имеет многочлен разложения $I(x, c)$. Тогда значение весовой системы w_{st_2} на замыкании D доли I вычисляется подстановкой $x = c$

$$w_{st_2}(D) = I(x, c)|_{x=c} = I(c, c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для тривиальных долей I_n с n хордами $I_n(x, c) = x^n$, а значение на диаграмме с n непересекающимися хордами равно c^n ; для произвольной же разложимой доли I утверждение выполнено в силу линейности w_{st_2} .

Второе обозначение также касается долей, отличающихся от тривиальных на одну хорду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Введем на пространстве долей линейные операторы \tilde{T} и \tilde{S} , действующие на произвольной доле добавлением одной хорды следующим образом



Концы добавленных красных хорд совпадают с концами выделенных дуг.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определение оператора \tilde{S} предписывает добавлять к доле новую хорду с концами на нижней выделенной доле. Если же нас интересует только значение w_{st_2} -весовой системы на доле, а не конкретное расположение хорд в ней, то концы добавленной хорды можно расположить на верхней дуге:

граф пересечения от этого не изменится, а значит, не изменится и значение по Теореме 3. Аналогичным образом можно менять расположение хорды, добавленной оператором \tilde{T} (см. (3.2)).

$$(3.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Операторы \tilde{T} и \tilde{S} можно применять к обеим частям равенства для значений w_{sl_2} -векторной системы на долях: концы добавляемой каждым из операторов хорды лежат на концах выделенных дуг, и поэтому новую хорду можно считать принадлежащей дополнительной доле.

Данные операторы понадобятся для построения разложения по тривиальным долям пучка из n хорд.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого целого $n \geq 1$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x^{n+1}) &= (2x - 1)\tilde{T}(x^n) + (2c - x - x^2)\tilde{T}(x^{n-1}) + x^{n-1}(c - x)^2, \\ \tilde{S}(x^{n+1}) &= (2x - 1)\tilde{S}(x^n) + (2c - x - x^2)\tilde{S}(x^{n-1}) - x^{n-1}(c - x)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Перед тем как доказывать Предложение 2, отметим следующую зависимость между операторами \tilde{T} и \tilde{S} .

ЛЕММА 3.3. Для любого целого $k \geq 0$ выполняется соотношение

$$\tilde{T}(x^k) - \tilde{S}(x^k) = (x - c)x^k. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Это выражение следует из применения к левой части равенства 4-членного соотношения k раз, последовательно „вытаскивая“ по одной синей хорде из-под черной

$$(3.5)$$

Лемму 3.3 можно рассматривать как 4-членное соотношение для тривиальной доли: если в равенстве (3.5) заменить все синие хорды на одну, то получится обычное 4-членное соотношение. В силу линейности w_{sl_2} можно обобщить 4-членное соотношение на любую разложимую долю (то есть, как будет следовать из Теоремы 6, на любую долю). Это обобщение приведено в [9; Ch. 4, Ex. (14)].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Применим к $\tilde{S}(x^{n+1})$ первое 6-членного соотношение (2.2)

$$\tilde{S}(x^{n+1}) = 2x\tilde{S}(x^n) - x^2\tilde{S}(x^{n-1}) + \tilde{S}^2(x^{n-1}) - \tilde{T}^2(x^{n-1}). \quad (3.6)$$

Выразим разность последних двух долей $\tilde{S}^2(x^{n-1}) - \tilde{T}^2(x^{n-1})$ через линейные операторы \tilde{T} и \tilde{S} в первой степени. Для этого к обеим частям равенства (3.4) при $k = n - 1$ применим \tilde{T} и \tilde{S} .

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array}, \\ \tilde{T}^2(x^{n-1}) - \tilde{T}\tilde{S}(x^{n-1}) &= \tilde{T}(x^n) - c\tilde{T}(x^{n-1}); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array}, \\ \tilde{S}\tilde{T}(x^{n-1}) - \tilde{S}^2(x^{n-1}) &= \tilde{S}(x^n) - c\tilde{S}(x^{n-1}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Чтобы избавиться от последовательного применения операторов $\tilde{T}\tilde{S}$ и $\tilde{S}\tilde{T}$, воспользуемся 4-членным соотношением

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array}. \\ \tilde{S}\tilde{T}(x^{n-1}) - \tilde{T}\tilde{S}(x^{n-1}) &= \tilde{S}(x^n) - x\tilde{S}(x^{n-1}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Сложим выражения (3.7) и (3.8) с учетом равенства (3.9)

$$\tilde{T}^2(x^{n-1}) - \tilde{S}^2(x^{n-1}) = x\tilde{S}(x^{n-1}) + \tilde{T}(x^n) - c\tilde{S}(x^{n-1}) - c\tilde{T}(x^{n-1}).$$

Полученную в правой части линейную комбинацию долей подставим в (3.6) и, вспомнив, что \tilde{T} и \tilde{S} связаны Леммой 3.3, докажем обе рекуррентных формулы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для доли $\tilde{T}(x^n)$ существует разложение по тривиальным долям, доля с наибольшим числом хорд которого состоит ровно из $n+1$ хорды и входит в разложение с единичным коэффициентом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. При $n = 0$ имеем $\tilde{T}(1) = x$, для $n = 1$ утверждение следует из 3-членного соотношения (3.1). Индукция по n и Предложение 2 гарантируют разложимость доли $\tilde{T}(x^{n+1})$, а из вида рекуррентной формулы (3.3) в этом Предложении следует единичный коэффициент при старшем мономе многочлена разложения доли $\tilde{T}(x^{n+1})$. По предположению индукции старшие мономы многочленов разложения доли $\tilde{T}(x^n)$ и $\tilde{T}(x^{n-1})$ равны x^{n+1} и x^n соответственно. Подстановкой этих мономов в рекурренту получаем искомый старший моном x^{n+2}

$$\tilde{T}(x^{n+1}) = (2x - 1)x^{n+1} + \dots + (2c - x - x^2)x^n + \dots + x^{n-1}(c - x)^2 = x^{n+2} + \dots$$

Этот моном и соответствует тривиальной доле с $n + 2$ хордами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1 (АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПУЧКА). Проведем доказательство по индукции по числу хорд в пучке. Предположим, что пучок с n хордами разложим по тривиальным долям. Выделим в пучке с $n + 1$ -ой хордой подпучок с n хордами. По Замечанию 3 мы можем разложить этот подпучок по тривиальным долям, не нарушая равенства. Разложив его,

мы получим разложение пучка из $n + 1$ -ой хорды по долям вида $\tilde{T}(x^k)$, причем максимальный индекс k в разложении равен n , и $\tilde{T}(x^n)$ входит в разложение с единичным коэффициентом. Но каждая $\tilde{T}(x^k)$, в свою очередь, разложима по тривиальным, а значит, и пучок разложим. Тривиальная доля в разложении пучка с наибольшим числом хорд появляется из разложения $\tilde{T}(x^n)$, состоит из $n + 1$ -ой хорды и коэффициент при ней в разложении равен единице.

Лемма 3.2 и Предложение 1 вместе образуют *алгоритм вычисления* $K_n(c)$.

§ 4. Доказательство Теоремы 4

Введем линейный оператор T на пространстве многочленов от x с коэффициентами многочленами от c , определенный на базисных векторах x^n с помощью рекуррентного соотношения из Предложения 2

$$T(x^{n+1}) = (2x-1)T(x^n) + (2c-x-x^2)T(x^{n-1}) + x^{n-1}(c-x)^2; \quad T(1) = x, \quad T(x) = x^2 - x. \quad (4.1)$$

Аналогичным образом введем оператор S на пространстве многочленов

$$S(x^{n+1}) = (2x-1)S(x^n) + (2c-x-x^2)S(x^{n-1}) - x^{n-1}(c-x)^2; \quad S(1) = c, \quad S(x) = (c-1)x.$$

Из Леммы 3.2 следует, что значение w_{sl_2} -весовой системы на диаграмме с полным графом пересечений с n вершинами можно задать с помощью оператора T следующего вида

$$K_n(c) = T^n(1)|_{x=c}.$$

Определим новую переменную $y := x - c$. В терминах новой переменной

$$K_n(c) = T^n(1)|_{y=0}. \quad (4.2)$$

Замена переменной позволяет легче вычислять $K_n(c)$, поскольку в многочлен проще подставлять ноль: для этого достаточно знать свободный член $T^n(1)$ как многочлена от y . Поэтому мы будем рассматривать сам оператор T в базисе y^n . При смене базиса рекуррента (4.1) для $T(x^n)$ переходит в новую рекурренту для $T(y^n)$, которая обобщается в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого многочлена $p(y)$ выполняются следующие соотношения*

$$T(y^2 p(y)) = (2y - 1)T(y p(y)) + (-y - y^2)T(p(y)) + y^2 p(y),$$

$$S(y^2 p(y)) = (2y - 1)S(y p(y)) + (-y - y^2)S(p(y)) - y^2 p(y),$$

с начальными условиями

$$T(1) = y + c, \quad T(y) = (y - 1)(y + c),$$

$$S(1) = c, \quad S(y) = (c - 1)y - c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем рекурренту для оператора T , для S доказательство аналогично. Благодаря линейности T достаточно доказать рекуррентное соотношение только для мономов $p(y) = y^{n-1}$, $n \geq 1$.

Первое начальное условие задается определением оператора, второе следует из его линейности

$$T(y) = T(x) - cT(1) = x^2 - x - cx = (x - c - 1)x = (y - 1)(y + c).$$

Теперь докажем рекуррентное соотношение. Распишем для этого $T(y^2p(y))$, воспользовавшись линейностью T и равенством $y^2 = x^2 - 2cx + c^2$

$$T(y^2p(y)) = T(y^{n+1}) = T(x^2y^{n-1}) - 2cT(xy^{n-1}) + c^2T(y^{n-1}). \quad (4.3)$$

Каждое из слагаемых в правой части равенства выше можно выразить через $T(y^n)$ и $T(y^{n-1})$

$$T(xy^{n-1}) = T(y^n) + cT(y^{n-1}), \quad (4.4)$$

Для упрощения $T(x^2y^{n-1})$ воспользуемся равенством $y^{n-1} = (x - c)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{kn} x^k$ (где $\eta_{kn} = \binom{n-1}{k} (-c)^{n-k-1}$, хотя конкретные значения в данном случае не важны)

$$\begin{aligned} T(x^2y^{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{kn} T(x^{k+2}) = \\ &= (2x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{kn} T(x^{k+1}) + (2c - x - x^2) \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{kn} T(x^k) + (x - c)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{kn} x^k = \\ &= (2x - 1)T(xy^{n-1}) + (2c - x - x^2)T(y^{n-1}) + y^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Остается только подставить равенства (4.4) и (4.5) в равенство (4.3).

Для того, чтобы связать оператор T с производящей функцией, представленной в Теореме 4 в виде цепной дроби, нам потребуется Теорема Стилтjesа.

ТЕОРЕМА 5. [10; Stieltjes's expansion theorem for J-fractions] *Коэффициенты цепной дроби*

$$\frac{1}{1 - \alpha_0 t - \frac{\beta_0 t^2}{1 - \alpha_1 t - \frac{\beta_1 t^2}{1 - \alpha_2 t - \frac{\beta_2 t^2}{1 - \dots}}}} \quad (4.6)$$

и коэффициенты равного этой цепной дроби формального степенного ряда $\sum_{n \geq 0} d_n t^n$ связаны выражениями вида $d_p = k_{0p}$ для всех $p \geq 0$, где $k_{00} = 1$, $k_{rs} = 0$ для $r > s$ и выполняется следующее матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} & \cdots \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \cdots \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \cdots \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & \cdots \\ \cdots & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \cdots \\ \cdots & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & \cdots \\ 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ 0 & 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & k_{33} & \cdots \\ \cdots & & & & \end{pmatrix}.$$

Оказывается, в некотором базисе оператор T записывается в виде трехдиагональной матрицы такого же вида, как в правой части равенства Теоремы 5, с коэффициентами, указанными в Теореме 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор T в базисе $y_0 = 1, y_n = \prod_{m=1}^n \left(y + \frac{m(m-1)}{2}\right)$ записывается в виде бесконечной трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \cdots \\ & & & \cdots & \end{pmatrix},$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\alpha_m = c - m(m + 1), \quad \beta_{m-1} = -m^2c + \frac{m^2(m^2 - 1)}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 4 равносильно тому, что для элементов базиса y_i и их образа под действием оператора T выполняется следующее соотношение

$$T(y_k) = y_{k+1} + (c - k(k + 1))y_k + \left(-k^2c + \frac{k^2(k^2 - 1)}{4}\right)y_{k-1}.$$

Каждый y_i как многочлен делится на y_j с индексом $j \leq i$. Поэтому равенство выше можно переписать в следующем виде

$$T(y_k) = \left(y^2 + (c - k)y - c\frac{k(k + 1)}{2}\right)y_{k-1}. \quad (4.7)$$

Это тождество мы доказываем в дальнейшем по индукции. Легко проверить, что при $k = 1$ оно выполняется: $T(y_1) = T(y) = (y - 1)(y + c) = y^2 + (c - 1)y - c$ (см. (3)). Предположим, что при всех $k \leq n$ равенство (4.7) верно, покажем, что оно выполняется и для $k = n + 1$. Для этого выразим $T(y_{n+1})$ через y_n и y_{n-1} способом, аналогичным доказательству Предложения 3.

$$T(y_{n+1}) = T(y^2y_{n-1}) + n^2T(y y_{n-1}) + \frac{n^2(n^2 - 1)}{4}T(y_{n-1}).$$

Далее каждое из слагаемых в правой части выразим через $T(y_n)$ и $T(y_{n-1})$. Первое слагаемое правой части упрощается с помощью Предложения 3

$$T(y^2y_{n-1}) = (2y - 1)T(y y_{n-1}) + (-y^2 - y)T(y_{n-1}) + y^2y_{n-1}.$$

Для второго слагаемого имеем

$$T(y y_{n-1}) = T(y_n) - \frac{n(n - 1)}{2}T(y_{n-1}).$$

Подставляя последние два равенства в выражение для $T(y_{n+1})$, получим

$$T(y_{n+1}) = (2y + n^2 - 1)T(y_n) - \left(y^2 + (n^2 - n + 1)y + \frac{(n^2 - 2n)(n^2 - 1)}{4}\right)T(y_{n-1}) + y^2y_{n-1}.$$

К первому и второму слагаемому применим предположение индукции, а именно равенство (4.7) для $k = n$ и $k = n - 1$. Заметим, что коэффициент при $T(y_{n-1})$ раскладывается на множители

$$y^2 + (n^2 - n + 1)y + \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{4} = \left(y + \frac{n(n+1)}{2}\right) \left(y + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right).$$

Второй множитель $\left(y + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)$ в разложении равен отношению y_{n-1}/y_{n-2} . Тогда $T(y_{n+1})$ равен произведению y_{n-1} и многочлена третьей степени от y

$$\frac{T(y_{n+1})}{y_{n-1}} = y^3 + \left(c + \frac{n(n-3)}{2} - 1\right) y^2 - \left(2nc + c + \frac{n(n^2-1)}{2}\right) y - \frac{c(n^2-1)(n^2+2n)}{4}. \quad (4.8)$$

Коэффициент при y_{n-1} в равенстве (4.8) тоже раскладывается на множители

$$T(y_{n+1}) = \left(y^2 + (c - n - 1)y - \frac{c(n+1)(n+2)}{2}\right) \left(y + \frac{n(n-1)}{2}\right) y_{n-1}.$$

Остается только сгруппировать второй и третий множитель в y_n , чтобы доказать тождество (4.7), а значит, и Предложение 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(c)t^n$ — формальный степенной ряд, равный цепной дроби из Теоремы 4. Тогда $K_n(c) = d_n(c)$ для всех n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Предложению 4 запишем оператор T в базисе y_n в виде трехдиагональной матрицы A . Из Теоремы 5 следует, что

$$d_n(c) = (A^n)_{11},$$

так как умножение на A^n переводит j -ый столбец матрицы $(k_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ в $j+n$ -ый. Поскольку $y_0 = 1$, $y_k|_{y=0} = 0$ для всех целых $k \geq 1$, то

$$(A^n)_{11} = T^n(1)|_{y=0}.$$

По равенству (4.2) $T^n(1)|_{y=0} = K_n(c)$.

§ 5. Существование и единственность разложения произвольной доли по тривиальным долям

Доказательство основной теоремы построено на разложении пучка по тривиальным долям, для чего мы привели конкретный алгоритм разложения данного вида долей. Оказывается, что и в общем случае, для произвольной доли, можно найти такое разложение, причем оно единственно и строится при помощи комбинаторных соотношений. Существование разложения напрямую следует из комбинаторных соотношений, а для доказательства единственности мы воспользуемся найденным видом производящей функции для последовательности $K_n(c)$.

Перейдем к разложению по тривиальным долям произвольной доли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ). *Любая доля разложима по тривиальным долям, причем разложение можно получить применением комбинаторных соотношений к хордам доли.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Аркой* назовем хорду доли, концы которой расположены на одной выделенной дуге доли, а *мостом* — хорду доли с концами на разных дугах. Для арки определим также ее *длину* — число концов хорд, расположенных между концами арки на той же выделенной дуге доли, что и концы арки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Будем рассматривать доли только со связным графом пересечений. Проведем индукцию по числу хорд в доле и их пересечений.

Каждая хорда доли является либо мостом, либо аркой. Пусть в доле есть хотя бы одна арка. Выберем арку минимальной длины. Если ее длина равна одному, то данная хорда является листом, и доля упрощается удалением листа и умножением доли на $s - 1$. В противном случае длина минимальной арки не меньше двух (она не может быть равна нулю из-за связности графа пересечений доли), и арка минимальной длины с двумя соседними хордами доли будут расположены в одной из двух конфигураций, изображенных в левых частях 6-членных соотношений (см. (5.1) и (5.2)). Применив одно из этих соотношений к найденной тройке хорд, мы получим пять долей, в двух из которых хорд на одну меньше, чем в исходной доле, а в трех меньше их пересечений.

$$\begin{array}{c}
 \text{[Diagram 1]} = \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]} + \text{[Diagram 5]} - \text{[Diagram 6]} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{меньше пересечений}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{меньше хорд}}
 \end{array} \tag{5.1}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{[Diagram 1]} = \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]} + \text{[Diagram 5]} - \text{[Diagram 6]} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{меньше пересечений}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{меньше хорд}}
 \end{array} \tag{5.2}$$

По предположению индукции каждая из получившихся долей разложима, а значит, разложима и исходная доля.

Доля может состоять также только из мостов. Если такая доля не тривиальная, то в ней найдется два расположенных рядом конца пересекающихся мостов. Применив к этим двум хордам 4-членное соотношение (5.3), мы получим вместо одной доли три разложимые: в первой доле меньше пересечений хорд, поэтому она разложима по предположению индукции, другие же две содержат арку, то есть разложимы по рассуждению выше

$$\begin{array}{c}
 \text{[Diagram 1]} = \text{[Diagram 2]} + \underbrace{\text{[Diagram 3]} - \text{[Diagram 4]}}_{\text{есть арка}}
 \end{array} \tag{5.3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ). *Каждая доля имеет не более одного разложения по тривиальным долям.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует линейная комбинация тривиальных долей, значение $w_{s_1 s_2}$ -весовой системы на которой равно нулю при любой дополнительной доле, одинаковой у всех диаграмм. Покажем, что тогда существует линейная комбинация пучков с тем же свойством. Для этого разложим каждую тривиальную долю по пучкам. Такое разложение обратно разложению пучка по тривиальным долям и существует по Предложению 1. Коэффициент при пучке с наибольшим числом хорд в разложении по пучкам равен коэффициенту при тривиальной доле с максимальным числом хорд в исходном разложении по тривиальным долям, то есть не равен нулю.

Итак, существует такая линейная комбинация пучков, что значение весовой системы $w_{s_1 s_2}$ на ней при любой общей дополнительной доле будет равно нулю

$$w_{s_1 s_2} (p_n(c)B_n(D) + p_{n-1}(c)B_{n-1}(D) + \dots + p_0(c)B_0(D)) = 0,$$

где $B_k(D)$ — диаграмма, состоящая из пучка B_k с k хордами и дополнительной доли D , $p_k(c)$ — многочлен от c , и равенство выполнено при любой доле D . Подставим в линейную комбинацию пучков дополнительную долю $D = B_m$. Каждая полученная хордовая диаграмма $B_k(B_m)$ будет иметь полный граф пересечений с $n + m$ вершинами. Тогда для любого натурального m выполнено равенство

$$p_n(c)K_{n+m}(c) + p_{n-1}(c)K_{n+m-1}(c) + \dots + p_0(c)K_m(c) = 0,$$

то есть на последовательности $K_j(c)$ задана линейная рекуррента. Производящая функция последовательности, заданной линейной рекуррентой, рациональна. В свою очередь рациональная функция раскладывается в конечную цепную дробь вида (4.6), коэффициенты $\alpha_i(c)$ и $\beta_i(c)$ которой есть рациональные функции от c , равные нулю при достаточно большом i . Однако производящая функция последовательности $K_j(c)$ имеет вид бесконечной цепной дроби по Теореме 4, что приводит нас к противоречию.

Таким образом, мы доказали следующую общую теорему об устройстве пространства долей.

ТЕОРЕМА 6. Пусть J — векторное пространство долей, элементами которого являются линейные комбинации долей. Назовем два элемента в J эквивалентными, если один можно получить из другого применением к его хордам комбинаторных соотношений из Теоремы 2. Тогда тривиальные доли и пучки образуют два базиса в факторпространстве долей J/\sim по данному отношению эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тривиальные доли образуют базис по Теореме 6 и 7; Предложение 1 позволяет переходить от базиса из тривиальных долей к базису из пучков.

Список литературы

- [1] V. A. Vassiliev, “Cohomology of knot spaces”, *Theory of singularities and its applications*, **1** (1990), 23—69.

- [2] M. Kontsevich, “Vassiliev’s knot invariants”, *Adv. in Sov. Math*, **16**:2 (1993), 137–150.
- [3] D. Bar-Natan, “On the Vassiliev knot invariants”, *Topology*, **34**:2 (1995), 423–472.
- [4] S. Chmutov and S. Lando, “Mutant knots and intersection graphs”, *Algebr. Geom. Topol.*, **7**:3 (2007), 1579–1598.
- [5] E. Krasilnikov, “An Extension of the \mathfrak{sl}_2 Weight System to Graphs with $n \leq 8$ Vertices”, *Arnold Mathematical Journal*, **7**:4 (2021), 609–618.
- [6] П. А. Филиппова, “Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графами пересечений хордовых диаграмм”, *Матем. сб.*, **213**:2 (2022), 115–148; P. A. Filippova, “Values of the \mathfrak{sl}_2 weight system on a family of graphs that are not the intersection graphs of chord diagrams”, *Sb. Math.*, **213**:2 (2022), 235–267.
- [7] S. V. Chmutov, A. N. Varchenko, “Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from \mathfrak{sl}_2 ”, *Topology*, **36**:1 (1997), 153–178.
- [8] A. Bigeni, “A generalization of the Kreweras triangle through the universal \mathfrak{sl}_2 weight system”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2019, 309–326.
- [9] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press, 2012.
- [10] P. Flajolet, “Combinatorial aspects of Continued Fractions”, *Discrete Mathematics*, **32**:2 (1980), 125–161.

П. Е. Закорко (P. E. Zakorko)

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" , г. Москва

E-mail: pezakorko@edu.hse.ru