

Санкт-Петербургский государственный университет

**ВАХРИНА Анастасия Олеговна**

Выпускная квалификационная работа

**Асимптотика числа  
выпуклых триангуляций  
проективной плоскости  
с тремя разными особыми точками**

Образовательная программа  
магистратура «Современная математика»  
Направление и код: 01.04.01 «Математика»  
Шифр ОП: ВМ.5832.2020

Научный руководитель:  
Доцент СПбГУ,  
Кандидат физико-математических наук,  
Н. С. Калинин

Рецензент:  
Научный сотрудник  
Математического института  
Макса Планка  
Р. Г. Матвеев

Санкт-Петербург  
2023

### Аннотация

Рассматриваются триангуляции  $\mathbb{R}P^2$  такие, что все вершины, кроме трёх, имеют степень 6, а три вершины имеют степени 3, 4 и 5. В данной работе мы докажем, что количество таких триангуляций из не более чем  $n$  треугольников растёт как  $C \cdot n^2 + O(n^{3/2})$ , где  $C = \frac{\sqrt{3}}{80} (\mathcal{L}(\frac{\pi}{2}) + \mathcal{L}(\frac{\pi}{3}) + \mathcal{L}(\frac{\pi}{6})) \zeta^{-1}(4)\zeta(Eis, 2)$ , где  $\mathcal{L}$  — функция Лобачевского, а  $\zeta(Eis, 2) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0} \frac{1}{|a+b\omega|^4}$ , где  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ .

## Содержание

1	Введение	2
2	Поднятие триангуляции на сферу	2
3	Вспомогательные функции	3
4	Развёртка октаэдра на плоскость	5
5	Задание триангуляции одним вектором	7
6	Асимптотика	9

# 1 Введение

Рассмотрим так называемые *выпуклые* триангуляции  $\mathbb{R}P^2$ , то есть такие, что каждая вершина триангуляции содержится не более чем в 6 треугольниках. Пусть также все треугольники триангуляции являются равносторонними со стороной 1, и каждая вершина триангуляции содержится ровно в 6 треугольниках, кроме 3 вершин, которые содержатся в меньшем количестве треугольников. Назовём *дефектом* вершины триангуляции число  $(6-k)\pi/3$ , где  $k$  — количество треугольников, содержащих данную вершину. В таких терминах выпуклые триангуляции — это в точности те, у которых дефект каждой вершины неотрицательный. С помощью эйлеровой характеристики несложно также вычислить, что сумма дефектов всех вершин триангуляции проективной плоскости в точности равна  $2\pi$ , так как эйлерова характеристика проективной плоскости равна 1. В случае ровно трёх вершин с положительным дефектом это даёт нам три возможные ситуации: дефекты  $2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3$  (все три вершины содержатся ровно в 4 треугольниках), дефекты  $\pi/3, \pi/3, 4\pi/3$  (две вершины содержатся в 5 треугольниках, а одна — в 2 треугольниках) и дефекты  $\pi, 2\pi/3, \pi/3$  (вершины содержатся в 3, 4 и 5 треугольниках). Первый случай разобран в статье [2], второй — в работе [3], нас же будет интересовать последний случай.

Рассмотрим накрытие проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  двумерной сферой  $S^2$ . Рассматриваемые триангуляции индуцируют на  $S^2$  метрику, плоскую везде, кроме 6 точек с так называемыми коническими особенностями. Согласно теореме Александра [1], такая плоская метрика с коническими особенностями на  $S^2$  может быть реализована как поверхность (возможно, вырожденного) выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^3$  с внутренней метрикой. В рассматриваемом нами случае с 3 коническими точками на  $\mathbb{R}P^2$  мы получаем, что накрывающая сфера  $S^2$  изометрична центрально-симметричному октаэдру с 6 вершинами.

В данной статье мы поймём, как растёт количество классов изометрии описанных триангуляций  $\mathbb{R}P^2$  при росте количества треугольников, и докажем теорему 4.

## 2 Поднятие триангуляции на сферу

Назовём *триангуляцией*  $\mathbb{R}P^2$  вложенный граф без петель и мультирёбер такой, что каждую грань этого графа ограничивает ровно 3 ребра. Рассмотрим триангуляции  $T$  проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  такие, что все вершины  $T$ , кроме трёх, имеют валентность 6, а три вершины  $A, B, C$  имеют валентности 3, 4 и 5.

Триангуляция  $T$  индуцирует метрику на  $\mathbb{R}P^2$ , плоскую везде, кроме тех точек  $A, B, C$ , такую что длина каждого ребра триангуляции равна 1, а на универсальном накрытии  $S^2$  — метрику, плоскую везде, кроме 6 точек. По теореме Александра [1], эта метрика реализуется как внутренняя метрика некоторого центрально-симметричного октаэдра  $F$ . Проекция рёбер  $F$  дают 6 геодезических путей на  $\mathbb{R}P^2$  между вершинами  $A, B, C$ , которые делят  $\mathbb{R}P^2$  на 4 треугольника  $ABC$ . Выберем один из этих треугольников и обозначим его  $\Delta$ .

Рассмотрим множество фиксированных триангуляций  $\{T, A, B, C, \Delta\}$  про-

ективной плоскости. Назовём две триангуляции  $(T_1, A_1, B_1, C_1, \Delta_1)$  и  $(T_2, A_2, B_2, C_2, \Delta_2)$  *изометричными*, если существует отображение  $T_1 \rightarrow T_2$ , такое что  $A_1 \mapsto A_2$ ,  $B_1 \mapsto B_2$ ,  $C_1 \mapsto C_2$ , и  $\Delta_1 \mapsto \Delta_2$ .

**Определение 1.** Обозначим  $f(n)$  количество классов изометрии фиксированных триангуляций  $\mathbb{R}P^2$ , состоящих не более чем из  $n$  треугольников.

Заметим, что каждой фиксированной триангуляции  $(T, A, B, C, \Delta)$  можно поставить в соответствие триангуляцию  $(\tilde{T}, A, B, C)$  сферы  $S^2$  такую, что выбранный треугольник  $\Delta$  есть проекция центрально-симметричных треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  соответствующего октаэдра  $F$ . Более точно, есть

**Лемма 1** (см. лемма 2.1 статьи [2]). *Существует биекция между фиксированными триангуляциями  $(T, A, B, C, \Delta)$  с  $n$  треугольниками на  $\mathbb{R}P^2$  и триангуляциями  $(\tilde{T}, A, B, C)$  с  $2n$  треугольниками на сфере  $S^2$ .*

Таким образом,  $f(n) = \#\{(\tilde{T}, A, B, C) \text{ с не более чем } 2n \text{ треугольниками}\}$ .

### 3 Вспомогательные функции

По статье [4], мы разбиваем наш октаэдр на параллелограммы со сторонами  $(a, b)$ ,  $(a, c)$ ,  $(a, d)$ ,  $(b, c)$ ,  $(b, d)$ ,  $(c, d)$  и углами между ними  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  соответственно (две копии каждого параллелограмма), см. рис. 1.

Тогда несложно подсчитать, что площадь такого октаэдра будет равна

$$Q(a, b, c, d) = \sqrt{3}(ab + cd) + (bc + da) + 2(ac + bd)$$

Заметим, что  $Q(a, b, c, d)$  является квадратичной формой сигнатуры  $(1, 3)$ , поскольку

$$Q(a, b, c, d) = \frac{1}{8} \left( (3 + \sqrt{3})(a + b + c + d)^2 - (3 - \sqrt{3})(a + b - c - d)^2 - (\sqrt{3} - 1)(a - b + c - d)^2 - (1 + \sqrt{3})(a - b - c + d)^2 \right)$$

Мы знаем, что октаэдр состоит из  $2n$  правильных треугольников, причём площадь каждого треугольника  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Тогда

$$2n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = Q(a, b, c, d)$$

и, таким образом,  $n = \frac{2}{\sqrt{3}}Q(a, b, c, d)$ .

Определим

$$X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \mid Q(a, b, c, d) \leq 1\}$$

**Теорема 1.**

$$\text{Vol}(X) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left( \text{Л}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

где  $\text{Л}(x) = -\int_0^x \log |2 \sin(x)| dx$  — функция Лобачевского.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{Q}$  — билинейная симметричная форма, соответствующая  $Q$ . Определим следующую 3-форму:

$$\forall v_0 \in \mathbb{R}^4, \alpha: \bigwedge^3 T_{v_0} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (v_1, v_2, v_3) \mapsto \text{Vol}_{\bar{Q}}(v_0, v_1, v_2, v_3).$$

Согласно работе [4],

$$\int_{v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4, Q(v)=1} \alpha = \text{Л}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Пусть  $Q'(v) = Q'(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 x_i^2$ , а  $\bar{Q}'$  — соответствующая билинейная симметричная форма. Обозначим за  $\omega$  стандартную евклидову форму объёма:

$$\omega(v_0, v_1, v_2, v_3) = \text{Vol}_{\bar{Q}'}(v_0, v_1, v_2, v_3).$$

Пусть  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^4$ ,  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ , и  $A$  — матрица элементов  $v_0, v_1, v_2, v_3$  в базисе  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_{v_0}(v_1, v_2, v_3) &= \text{Vol}_{\bar{Q}}(v_0, v_1, v_2, v_3) = \\ &= \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \sqrt{|\det \bar{Q}(v_i, v_j)|} = \\ &= \text{sign}(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \det A \cdot \sqrt{|\det \bar{Q}(e_i, e_j)|} = \\ &= \omega(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \sqrt{|\det \bar{Q}(e_i, e_j)|} \end{aligned}$$

$$\det \bar{Q}(e_i, e_j) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}.$$

$$\alpha_{v_0}(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_0, v_1, v_2, v_3) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогда  $Q^{-1}dQ \wedge \alpha = \sqrt{3}\omega$ . Действительно,

$$\begin{aligned} (Q^{-1}dQ \wedge \alpha)(v_0, v_1, v_2, v_3) &= Q(v_0)^{-1} \cdot 2\bar{Q}(v_0, v_0)\alpha_{v_0}(v_1, v_2, v_3) = \\ &= \sqrt{3}\omega(v_0, v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Осталось посчитать объём  $X$ :

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(X) &= \int_X \omega = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_X Q^{-1} dQ \wedge \alpha = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 q^{-1} dq \int_{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4, Q(a,b,c,d)=q} \alpha = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 q^{-1} q^2 dq \int_{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4, Q(a,b,c,d)=1} \alpha = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 q dq \left( \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right).
\end{aligned}$$

□

Посчитаем также две вспомогательные функции:

$$g(n) = \# \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{>0}^4 \mid Q(a, b, c\sqrt{3}, d\sqrt{3}) \leq n \right\} \quad (1)$$

$$h(n) = \# \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_{>0}^4 \mid Q\left(a, b, \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{d}{\sqrt{3}}\right) \leq n \right\} \quad (2)$$

**Теорема 2.**

$$g(n) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \left( \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) n^2 + O(n^{3/2}) \quad (3)$$

$$h(n) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) n^2 + O(n^{3/2}) \quad (4)$$

*Доказательство.* Заметим, что  $g(n)$  — это количество точек решётки со сторонами  $1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ , лежащих в  $X\sqrt{n}$ . Поскольку объём единичного параллелограмма этой решётки равен 3, то  $g(n) \approx \frac{1}{3} \text{Vol}(X)n^2$ .

Аналогично,  $h(n)$  — это количество точек решётки со сторонами  $1, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ , лежащих в  $X\sqrt{n}$ . Объём единичного параллелограмма этой решётки равен  $\frac{1}{3}$ , и  $h(n) \approx 3 \text{Vol}(X)n^2$ .

Подсчёт погрешности повторяет доказательство теоремы 3.1 в работе [2].

□

## 4 Развёртка октаэдра на плоскость

Пусть  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ . Рассмотрим решётку Эйзенштейна:  $Eis = \mathbb{Z} \oplus \omega^2 \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ . Мы можем нарисовать на этой решётке развёртку октаэдра  $ABCA'B'C'$  так, что все вершины  $A, B, C, A', B', C' \in Eis$ .

Точнее, пусть  $(\tilde{T}, A, B, C)$  — триангуляция центрально-симметричного октаэдра  $ABCA'B'C'$ . Возьмём грани  $ABC$ ,  $ACB'$ ,  $AB'C'$ ,  $AC'B$ , разрежем по ребру  $AB$  и отобразим получившуюся развёртку на плоскость так, что  $A$  попадёт в  $0 \in Eis$ , а вершины триангуляции  $\tilde{T}$  — в решётку  $Eis$ . Легко видеть, что полученная конструкция достраивается до полноценной развёртки октаэдра на плоскость согласованно с триангуляцией. В частности, все вершины октаэдра  $A, B, C, A', B', C'$  отображаются в решётку  $Eis$ .

Пусть векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{C}$  соединяют точку  $0 \in Eis$  с точками Торричелли граней  $ABC$ ,  $ACB'$ ,  $AB'C'$ ,  $AC'B$  развёртки октаэдра соответственно. Как известно из статьи [4], такая четвёрка векторов с углами  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{d}) = \frac{\pi}{2}$  единственным с точности до изометрии образом задаёт развёртку октаэдра  $F$ .

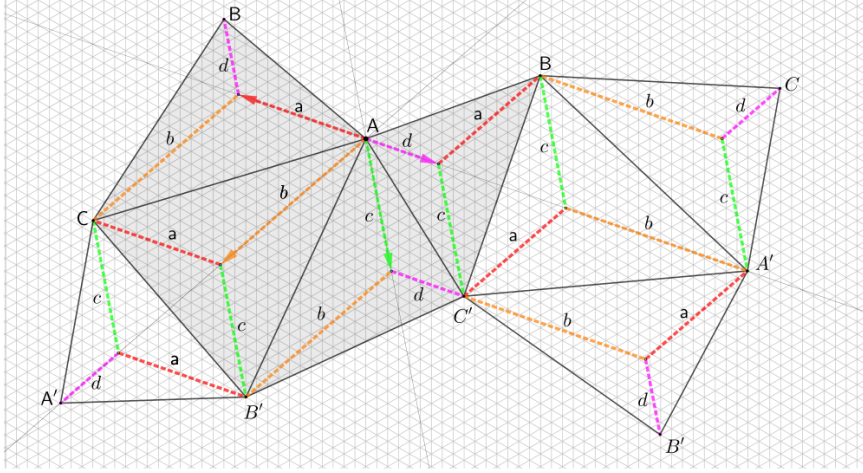


Рис. 1: Развёртка октаэдра для случая с дефектами  $2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3$ . Иллюстрация взята из статьи [2].

Рассмотрим решётку  $\widetilde{Eis} = \frac{1}{2}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{2}\omega^2\mathbb{Z}$ .

**Лемма 2.**  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \widetilde{Eis}$

*Доказательство.*  $\vec{a} + \vec{b} \in Eis$ ,  $\vec{b} + \vec{c} \in Eis$ ,  $\vec{c} + \vec{d} \in Eis$ ,  $\vec{d} - \vec{a} \in Eis$ , следовательно,  $2\vec{a} \in Eis$ ,  $2\vec{b} \in Eis$ ,  $2\vec{c} \in Eis$ ,  $2\vec{d} \in Eis$ .  $\square$

Каждый элемент в  $\widetilde{Eis}$  имеет следующий вид:  $k \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2}$ , где  $\vec{e}_x = 1$ ,  $\vec{e}_y = \omega^2$ , а  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Определим следующие подмножества решётки  $\widetilde{Eis}$ :

$$\widetilde{Eis}_{00} = \left\{ k \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2} \mid k \equiv 0 \pmod{2}, m \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

$$\widetilde{Eis}_{10} = \left\{ k \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2} \mid k \equiv 1 \pmod{2}, m \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

$$\widetilde{Eis}_{01} = \left\{ k \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2} \mid k \equiv 0 \pmod{2}, m \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

$$\widetilde{Eis}_{11} = \left\{ k \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2} \mid k \equiv 1 \pmod{2}, m \equiv 1 \pmod{2} \right\}$$

**Лемма 3.** Если один из векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  лежит в множестве  $\widetilde{Eis}_{ij}$ ,  $i, j \in \{0, 1\}$ , то и все  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \widetilde{Eis}_{ij}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{a} = k_a \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m_a \cdot \frac{\vec{e}_y}{2}$ ,  $\vec{b} = k_b \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + m_b \cdot \frac{\vec{e}_y}{2}$ . Тогда  $\vec{a} + \vec{b} = \frac{k_a + k_b}{2} \cdot \vec{e}_x + \frac{m_a + m_b}{2} \cdot \vec{e}_y$ . Как известно,  $\vec{a} + \vec{b} \in Eis$ , следовательно,  $\frac{k_a + k_b}{2} \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{m_a + m_b}{2} \in \mathbb{Z}$ . Значит,  $\vec{a} \in \widetilde{Eis}_{ij} \Leftrightarrow \vec{b} \in \widetilde{Eis}_{ij}$ . Аналогичные рассуждения показывают, что  $\vec{b} \in \widetilde{Eis}_{ij} \Leftrightarrow \vec{c} \in \widetilde{Eis}_{ij}$  и  $\vec{c} \in \widetilde{Eis}_{ij} \Leftrightarrow \vec{d} \in \widetilde{Eis}_{ij}$ .  $\square$

**Теорема 3.**  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \widetilde{Eis}_{00} = Eis$

*Доказательство.* Докажем от противного. Пусть  $\vec{a} \in \widetilde{Eis}_{10}$  и имеет вид  $\vec{a} = (2k + 1) \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + 2m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Заметим, что  $\vec{b}$  пропорционально  $\vec{a}\omega = ((2k + 1) \cdot \frac{\vec{e}_x}{2} + 2m \cdot \frac{\vec{e}_y}{2})(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = (2k - 2m + 1) \frac{\vec{e}_x}{2} + (2k + 1) \frac{\vec{e}_y}{2} \in \widetilde{Eis}_{11}$  — и, как несложно видеть, такой вектор никогда не бывает пропорционален вектору из  $\widetilde{Eis}_{10}$ , а по лемме 3  $\vec{a} \in \widetilde{Eis}_{10} \Rightarrow \vec{b} \in \widetilde{Eis}_{10}$ . Противоречие.

Для случаев  $\vec{a} \in \widetilde{Eis}_{01}$  и  $\vec{a} \in \widetilde{Eis}_{11}$  рассуждения аналогичны.  $\square$

## 5 Задание триангуляции одним вектором

Каждый элемент в  $Eis$  имеет следующий вид:  $k \cdot \vec{e}_x + m \cdot \vec{e}_y$ , где  $\vec{e}_x = 1$ ,  $\vec{e}_y = \omega^2$ , а  $k, m \in \mathbb{Z}$ . Определим следующие подмножества решётки  $Eis$ :

$$Eis_0 = \{k \cdot \vec{e}_x + m \cdot \vec{e}_y \mid k + m \equiv 0 \pmod{3}\}$$

$$Eis_1 = \{k \cdot \vec{e}_x + m \cdot \vec{e}_y \mid k + m \equiv 1 \pmod{3}\}$$

$$Eis_2 = \{k \cdot \vec{e}_x + m \cdot \vec{e}_y \mid k + m \equiv 2 \pmod{3}\}$$

Введём новое понятие — множество *примитивных векторов*:

**Определение 2.**

$$\text{Prim } Eis = \{v \in Eis \setminus \{0\} \mid \exists w \in Eis, n \in \mathbb{N}, n \neq 1: nw = v\}$$

Пусть  $\vec{z} \in \text{Prim } Eis$  — вектор в  $\text{Prim } Eis$ , пропорциональный  $\vec{a}$ . Рассмотрим отдельно два случая: когда  $\vec{z} \in Eis_0$ , и когда  $\vec{z} \in Eis_1 \cup Eis_2$ .

1) Пусть  $\vec{z} \in Eis_1 \cup Eis_2$ .

**Лемма 4.** Вектор  $\vec{b}$  пропорционален вектору  $\omega\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , вектор  $\vec{c}$  — вектору  $(\sqrt{3}\omega^{3/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , а вектор  $\vec{d}$  — вектору  $(\sqrt{3}\omega^{5/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ .



*Доказательство.* По определению из раздела 4, имеем  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{d}) = \frac{\pi}{2}$ . Заметим, что при повороте на  $\frac{\pi}{3}$  решётка переходит сама в себя, и, соответственно, если  $\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , то  $\omega\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , и аналогично из  $(\sqrt{3}\omega^{3/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$  следует  $(\sqrt{3}\omega^{5/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ . Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать, что вектор  $(\sqrt{3}\omega^{3/2})\vec{z} = (\omega + \omega^2)\vec{z}$  является примитивным вектором.

Заметим, что для произвольного вектора  $\vec{y} \in Eis$  вектор  $(\omega + \omega^2)\vec{y}$  также принадлежит решётке  $Eis$ , образует с вектором  $\vec{y}$  угол  $\frac{\pi}{2}$ , и имеет длину  $|(\omega + \omega^2)\vec{y}| = \sqrt{3}|\vec{y}|$ . Таким образом, если  $\vec{y} \in \text{Prim } Eis$ , то либо  $(\omega + \omega^2)\vec{y}$ , либо  $\frac{1}{3}(\omega + \omega^2)\vec{y}$  также лежат в  $\text{Prim } Eis$  (так как  $\frac{1}{3}(\omega + \omega^2)^2\vec{y} = -\vec{y} \in \text{Prim } Eis$ ).

Пусть  $\vec{z} = k + m\omega^2$ . Рассмотрим  $\vec{z}(\omega + \omega^2) = (k - 2m) + (2k - m)\omega^2$ . Заметим, что, поскольку  $k + m \not\equiv 0 \pmod{3}$ , то  $k - 2m \equiv m - 2k \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Значит,  $\frac{1}{3}(\omega + \omega^2)\vec{z} \notin Eis$  (и, в частности, не принадлежит  $\text{Prim } Eis$ ), и тогда  $(\sqrt{3}\omega^{3/2})\vec{z} = (\omega + \omega^2)\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , что и требовалось.  $\square$

Получаем, что в случае  $\vec{z} \in Eis_1 \cup Eis_2$  четвёрка векторов, определяющая развёртку, выглядит следующим образом:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \vec{z} \cdot (a, b\omega, c\sqrt{3}\omega^{3/2}, d\sqrt{3}\omega^{5/2}), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Заметим, что площадь октаэдра в этом случае равна  $|\vec{z}|^2 \cdot Q(a, b, c\sqrt{3}, d\sqrt{3})$ , площадь одного треугольника —  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , следовательно, всего треугольников в октаэдре  $\frac{4}{\sqrt{3}}|\vec{z}|^2 \cdot Q(a, b, c\sqrt{3}, d\sqrt{3})$ . Вспомним, что  $f(n)$  — количество триангуляций  $(\tilde{T}, A, B, C)$  с не более чем  $2n$  треугольниками, стало быть, это даёт нам условие  $\frac{2}{\sqrt{3}}|\vec{z}|^2 \cdot Q(a, b, c\sqrt{3}, d\sqrt{3}) < n$ .

2) Пусть  $\vec{z} \in Eis_0$ .

**Лемма 5.** Вектор  $\vec{b}$  пропорционален вектору  $\omega\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , вектор  $\vec{c}$  — вектору  $(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^{3/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ , а вектор  $\vec{d}$  — вектору  $(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^{5/2})\vec{z} \in \text{Prim } Eis$ .

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству леммы 4: достаточно показать, что вектор  $(\frac{1}{\sqrt{3}}\omega^{3/2})\vec{z} = \frac{1}{3}(\omega + \omega^2)\vec{z}$  является примитивным.

Действительно, пусть  $\vec{z} = k + m\omega^2$ . Рассмотрим  $\vec{z}(\omega + \omega^2) = (k - 2m) + (2k - m)\omega^2$ . Заметим, что, поскольку  $k + m \equiv 0 \pmod{3}$ , то  $k - 2m \equiv m - 2k \equiv 0 \pmod{3}$ . Значит, вектор  $\frac{1}{3}(\omega + \omega^2)\vec{z}$  принадлежит решётке, а тогда и является примитивным, что и требовалось.  $\square$

Получаем, что в случае  $\vec{z} \in Eis_0$  четвёрка векторов, определяющая развёртку, выглядит следующим образом:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \vec{z} \cdot (a, b\omega, c \cdot \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{3}}, d \cdot \frac{\omega^{5/2}}{\sqrt{3}}), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Заметим, что площадь октаэдра в этом случае равна  $|\bar{z}|^2 \cdot Q(a, b, \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{d}{\sqrt{3}})$ , площадь одного треугольника —  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , следовательно, всего треугольников в октаэдре  $\frac{4}{\sqrt{3}}|\bar{z}|^2 \cdot Q(a, b, \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{d}{\sqrt{3}})$ . Вспомним, что  $f(n)$  — количество триангуляций  $(\bar{T}, A, B, C)$  с не более чем  $2n$  треугольниками. Стало быть, это даёт нам условие  $\frac{2}{\sqrt{3}}|\bar{z}|^2 \cdot Q(a, b, \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{d}{\sqrt{3}}) < n$ .

Напоследок заметим, что векторы  $\bar{z}$  и  $\omega\bar{z}$  дают нам изометричные триангуляции, и тогда, суммируя предыдущие абзацы, получаем

$$f(n) = \frac{1}{6} \left( \#\{z \in \text{Prim } Eis \cap Eis_0 \mid \frac{2}{\sqrt{3}}|\bar{z}|^2 \cdot Q(a, b, \frac{c}{\sqrt{3}}, \frac{d}{\sqrt{3}}) < n\} + \#\{z \in \text{Prim } Eis \cap (Eis_1 \cup Eis_2) \mid \frac{2}{\sqrt{3}}|\bar{z}|^2 \cdot Q(a, b, c\sqrt{3}, d\sqrt{3}) < n\} \right)$$

## 6 Асимптотика

Обозначим

$$E_0 = \text{Prim } Eis \cap Eis_0,$$

$$E_{\neq 0} = \text{Prim } Eis \cap (Eis_1 \cup Eis_2).$$

В статье [2] было получено, что

$$\sum_{z \in E_0} |z|^{-4} = \frac{1}{10} \zeta^{-1}(4) \zeta(Eis, 2)$$

и

$$\sum_{z \in E_{\neq 0}} |z|^{-4} = \frac{9}{10} \zeta^{-1}(4) \zeta(Eis, 2),$$

где  $\zeta(L, s) = \sum_{\gamma \in L \setminus 0} \langle \gamma, \gamma \rangle^s$  — дзета-функция Эйнштейна.

Итак, приступим к подсчёту  $f(n)$ .

**Теорема 4.**

$$f(n) = \frac{\sqrt{3}}{80} \left( \text{Л}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \zeta^{-1}(4) \zeta(Eis, 2) n^2 + O(n^{3/2}) \quad (5)$$

*Доказательство.* Будем действовать аналогично теореме 4.2 работы [2]:

$$\begin{aligned}
6f(n) &= \sum_{z \in E_0} h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^{-2}n\right) + \sum_{z \in E_{\neq 0}} g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|z|^{-2}n\right) = \\
&= \frac{3}{4} \text{Vol}(X) \left( 3 \sum_{z \in E_0} (|z|^{-4}n^2 + O(|z|^{-2}n)^{3/2}) + \frac{1}{3} \sum_{z \in E_{\neq 0}} (|z|^{-4}n^2 + O(|z|^{-2}n)^{3/2}) \right) \\
&= \frac{3}{4} \text{Vol}(X)n^2 \left( 3 \sum_{z \in E_0} |z|^{-4} + \frac{1}{3} \sum_{z \in E_{\neq 0}} |z|^{-4} \right) + O(n^{3/2}) = \\
&= \frac{3}{4} \text{Vol}(X)n^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{10} \zeta^{-1}(4)\zeta(Eis, 2) + O(n^{3/2}) = \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{40} \left( \text{Л}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{Л}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \zeta^{-1}(4)\zeta(Eis, 2)n^2 + O(n^{3/2})
\end{aligned}$$

□

Таким образом, наша работа вместе с [2] и [3] даёт подсчёт асимптотики количества любых триангуляций  $\mathbb{R}P^2$  с тремя особыми точками.

В дальнейшем было бы интересно решить аналогичную задачу в размерности 3 для проективного пространства  $\mathbb{R}P^3$ , где линки вершин будут уже изученными триангуляциями двумерной сферы.

## Список литературы

- [1] A.D. Alexandrov. Existence of a convex polyhedron and of a convex surface with a given metric. *Mat. sbornik*, 11(1–2): 15–65
- [2] Mikhail Chernavskikh, Altan Erdnigor, Nikita Kalinin, Alexandr Zakharov. Equilateral convex triangulations of  $\mathbb{R}P^2$  with three conical points of equal defect. *arXiv preprint*, arXiv:2111.04680v03, 2022
- [3] Мария Ханина. Асимптотика числа триангуляций проективной плоскости. *Выпускная квалификационная работа, СПбГУ*, 2023
- [4] Z. Wang. Shapes of centrally symmetric octahedra with prescribed cone-deficits. *Advances in Geometry*, 21(2):179–185, 2021.