ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

КОРОТКИЕ SL_2-СТРУКТУРЫ НА ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Выполнил аспирант
4-го года обучения
Стасенко Роман Олегович

Научный руководитель:
к.ф.м.н., доцент Тимашев Дмитрий Андреевич

Москва
2023

Содержание

1 ВВЕДЕНИЕ

В теории алгебр Ли известна классическая конструкция Титса-Кантора-Кёхера, позволяющая по простой йордановой алгебре J построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, имеющую следующий вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J). \tag{1.1}$$

В этой конструкции коммутатор элементов второго слагаемого определяется как обычный коммутатор матриц плюс определенная добавка из первого слагаемого. Более точно, если отождествить $\mathfrak{sl}_2(J)$ с $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes J$, то коммутатор элементов второго слагаемого вычисляется по следующей формуле:

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = 2(X,Y)[L_a, L_b] + [X,Y] \otimes ab, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), a, b \in J,$$

где через L_c обозначен линейный оператор умножения на элемент $c \in J$, и

$$(X,Y) = \operatorname{tr}(XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

Конструкцию Титса-Кантора-Кёхера можно интерпретировать как линейное представление группы $SL_2(\mathbb{C})$ автоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$, которое разлагается на неприводимые представления размерностей 1 и 3. Равенство (1.1) является не чем иным как изотипным разложением данного представления.

Естественным обобщением данного линейного представления является следующее понятие:

Определение 1. *Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi : S \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.*

В этой терминологии конструкцию Титса-Кантора-Кёхера будем называть очень короткой SL_2-структурой. Полный анализ данной конструкции можно найти в [1, раздел 3].

Некоторые частные случаи S-структур были изучены в работах [1] и [2]. Мы же рассмотрим еще один случай S-структур, а именно — короткие SL_2-структуры.

Наиболее естественно рассматривать короткие SL_2-структуры на полупростых алгебрах Ли, в связи с замечательными алгебраическими свойствами последних. Однако, очевидно, что рассмотрение короткой SL_2-структуры на полупростой алгебре Ли, сводится к рассмотрению таких структур на каждой простой компоненте этой алгебры. Поэтому далее везде будем считать алгебру $\mathfrak{g}$ простой и $S = SL_2(\mathbb{C})$.

Дифференциал отображения Φ задает линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ дифференцированиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{d}\,\Phi : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{der}(\mathfrak{g}).$$

Так как алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{inn}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$. Следовательно, образ алгебры $\mathfrak{sl}_2$ под действием отображения $\mathrm{d}\,\Phi$ в $\mathfrak{g}$ состоит из присоединенных операторов алгебры $\mathfrak{g}$.

Изотипное разложение данного представления имеет вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} V_i \otimes J_i.$$

В этой формуле V_i обозначает пространство $(i+1)$-мерного неприводимого представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$, а J_i — векторное пространство, на котором алгебра $\mathfrak{sl}_2$ действует тривиально, и которое отвечает за кратность вхождения неприводимого представления V_i в $\mathfrak{g}$ (а именно, размерность J_i равна этой кратности). Подпространство $\mathfrak{g}_0$ — это изотипная компонента, отвечающая одномерному представлению алгебры $\mathfrak{sl}_2$.

Определение 2. *SL_2-структура называется короткой, если представление $\mathrm{d}\,\Phi$ разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3.*

Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$ размерности 2 есть ее тавтологическое представление, а неприводимое представление размерности 3 — присоединенное представление. Таким образом, для коротких SL_2–структур изотипное разложение будет иметь вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes J_2. \tag{1.2}$$

Важно отметить, что случаи $J_1 = 0$ (который соответствует очень короткой SL_2-структуре) и $J_1 \neq 0$ существенно отличаются друг от друга. Далее везде будем предполагать, что $J_1 \neq 0$.

С помощью операции коммутирования на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а также инвариантного скалярного умножения, векторное пространство J_1 наделяется структурой симплектического пространства, а пространство J_2 — структурой йордановой алгебры симметрических операторов в J_1. Также алгебра $\mathfrak{g}_0$ является подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{sp}(J_1)$.

Оказывается, что среди коротких SL_2-структур с данным J_1 есть максимальная в том смысле, что пространство J_2 и алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ в ней максимально возможные по включению. А именно, для этой короткой SL_2-структуры $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1)$, а в качестве пространства J_2 выступает йорданова алгебра всех симметрических операторов симлектического пространства J_1. Будем называть данную йорданову алгебру канонической. Мы опишем максимальную короткую SL_2-структуру в разделе 3 данной работы.

В разделе 4 мы построим соответствие между простыми алгебрами Ли с короткой SL_2-структурой и так называемыми простыми симплектическими структурами Ли-Йордана вида $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$, где J_2 — простая йорданова подалгебра алгебры всех симметрических операторов пространства J_1, $\mathfrak{g}_0$ — редуктивная подалгебра в алгебре всех симплектических операторов на пространстве J_1, а δ_0 — некоторое симметрическое билинейное отображение, которое мы опишем ниже. В этом и заключается основной результат работы, сформулированный в теореме 8 пункта 4.2.

В разделе 5 будет проведена полная классификация коротких SL_2-структур на простых алгебрах Ли с указанием простой симплектической структуры Ли-Йордана, которая соответствует каждой SL_2-структуре.

По результатом данной работы в 4 выпуске журнала «Математический сборник» от 2023 года опубликована статья с одноименным названием.

2 Изотипное разложение

В этом разделе и везде далее все алгебры, алгебраические группы и линейные представления рассматриваются над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

2.1 Коммутационные формулы

Рассмотрим произвольную редуктивную алгебраическую группу S. Для ее неприводимого представления ρ обозначим через V_ρ пространство этого представления. Следующие леммы можно найти в [1, раздел 1, пункт 1.2]:

Лемма 1. *Пусть ρ, σ и τ — неприводимые представления группы S. Предположим, что $\rho \otimes \sigma$ содержит τ с кратностью один и пусть*

$$p : V_\rho \times V_\sigma \to V_\tau$$

— фиксированное ненулевое S-эквивариантное билинейное отображение (определенное с точностью до скалярного множителя). Пусть U_ρ, U_σ и U_τ — векторные пространства, на которых группа S действует тривиально. Тогда любое S-эквивариантное билинейное отображение

$$P : (V_\rho \otimes U_\rho) \times (V_\sigma \otimes U_\sigma) \to V_\tau \otimes U_\tau$$

задается формулой

$$P(a \otimes x, b \otimes y) = p(a, b) \otimes \nu(x, y),$$

где

$$\nu : U_\rho \times U_\sigma \to U_\tau$$

— некоторое билинейное отображение.

Лемма 2. *Пусть ρ и τ — неприводимые представления группы S. Предположим, что $\mathrm{Sym}^2\rho$ и $\Lambda^2\rho$ содержат τ с кратностью не больше, чем один, и пусть*

$$p : V_\rho \times V_\rho \to V_\tau \text{ и } q : V_\rho \times V_\rho \to V_\tau$$

— фиксированные ненулевые S-эквивариантные симметрическое и кососимметрическое билинейные отображения соответственно (определенные с точностью до скалярного множителя) в тех случаях, когда $\mathrm{Sym}^2\rho$ или $\Lambda^2\rho$ содержат τ; в противном случае положим $p = 0$ или $q = 0$). Пусть U_ρ и U_τ — векторные пространства, на которых группа S действует тривиально. Тогда любое S-эквивариантное кососимметрическое билинейное отображение

$$P : (V_\rho \otimes U_\rho) \times (V_\rho \otimes U_\rho) \to V_\tau \otimes U_\tau$$

задается формулой

$$P(a \otimes x, b \otimes y) = p(a, b) \otimes \phi(x, y) + q(a, b) \otimes \psi(x, y),$$

где

$$\phi : U_\rho \times U_\sigma \to U_\tau \text{ и } \psi : U_\rho \times U_\sigma \to U_\tau$$

— некоторое кососимметрическое и симметрическое билинейные отображения соответственно.

Сохраняя предположения и обозначения введения, рассмотрим короткую SL_2структуру на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В данном пункте мы выведем основные коммутационные формулы, возникающие при коммутировании двух произвольных элементов из изотипных компонент алгебры $\mathfrak{g}$.

Коммутатор на $\mathfrak{g}$ дает SL_2-эквивариантные билинейные отображения:

$$\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g}_i \otimes \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad (i \neq j),$$
$$\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i \longrightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}_i \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Согласно формуле Клебша-Гордана для тензорного произведения неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ имеем:

$$V_i \otimes V_j \simeq V_{i+j} \oplus V_{i+j-2} \oplus \ldots \oplus V_{|i-j|}. \tag{2.1}$$

Поэтому для коммутаторов изотипных компонент алгебры $\mathfrak{g}$, выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}
[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_i, \qquad i = 0, 1, 2, \\
[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \\
[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \\
[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_1.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

В частности, $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ — подалгебры, причем на подалгебре $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ индуцируется очень короткая SL_2-структура.

Введем на пространстве $\mathbb{C}^2$ SL_2-инвариантную кососимметрическую билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по следующему правилу:

$$\langle u, v \rangle := \det(u, v), \qquad \forall u, v \in \mathbb{C}^2.$$

Также определим SL_2-инвариантную симметрическую билинейную форму на $\mathfrak{sl}_2$ по правилу:

$$(X, Y) := \mathrm{tr}(XY), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2.$$

Наконец, зададим симметрическое билинейное отображение $S : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathfrak{sl}_2$ с помощью следующей формулы:

$$S(u, v)w = \langle w, u \rangle v + \langle w, v \rangle u.$$

Для полноты изложения материала докажем одно вспомогательное предложение, хорошо известное специалистам. Оно нам понадобится для дальнейших рассуждений.

Рассмотрим произвольную простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, на которой задан инволютивный нетождественный автоморфизм θ. Собственными значениями автоморфизма θ являются 1 и -1, поэтому будет иметь место разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v},$$

где

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} : \theta(\xi) = \xi\}$$

и

$$\mathfrak{v} = \{\eta \in \mathfrak{g} : \theta(\eta) = -\eta\}.$$

Предложение 1. *Подпространство $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли и ее присоединенное действие на подпространстве $\mathfrak{v}$ точно.*

Доказательство. В силу определения инволютивного автоморфизма выполнены следующие соотношения:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h},$$
$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{v}] \subseteq \mathfrak{v}.$$

Откуда видно, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли и присоединенно действует на подпространстве $\mathfrak{v}$. Докажем, что заданное действие точно.

Для этого рассмотрим ядро неэффективности данного действия:

$$\mathfrak{k} := \{\xi \in \mathfrak{h} : [\xi, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{v}\}.$$

Заметим, что поскольку $\theta \neq \mathrm{id}$, то $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Очевидно, что $\mathfrak{k} \lhd \mathfrak{h}$, а так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ и $\mathfrak{k}$ коммутирует с $\mathfrak{v}$, то $\mathfrak{k}$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, откуда заключаем, что $\mathfrak{k} = 0$ или $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, но по определению $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$, поэтому $\mathfrak{k} = 0$. Тем самым присоединенное действие $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{v}$ точно. ∎

Теперь пусть на $\mathfrak{g}$ задана короткая SL_2-структура. Отметим, что действие элемента $-\mathrm{id}$ группы SL_2 на алгебре $\mathfrak{g}$ задает на ней инволютивный автоморфизм, для которого подалгебра $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ является пространством неподвижных точек, а $\mathfrak{g}_1$ — подпространством, на котором этот автоморфизм действует умножением на -1. Из доказанного выше предложения следует, что присоединенное действие алгебры $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ на пространстве $\mathfrak{g}_1$ точно. Имея это в виду, элементы пространства J_2, а также алгебры $\mathfrak{g}_0$, можно отождествить с соответствующими им операторами в J_1.

Начиная с этого момента, договоримся обозначать элементы пространства J_1 маленькими латинскими буквами $a, b, c...$, а элементы пространства J_2 и алгебры $\mathfrak{g}_0$ — большими латинскими буквами $A, B, C, ...$

Согласно лемме 1, а также представлению элементов пространства J_2 и алгебры $\mathfrak{g}_0$ операторами в J_1, нетрудно вывести следующие коммутационные формулы:

$$[D, u \otimes a] = u \otimes Da, \qquad \forall D \in \mathfrak{g}_0, u \in \mathbb{C}^2, a \in J_1;$$

$$[D, X \otimes A] = X \otimes \nu(D, A), \qquad \forall D \in \mathfrak{g}_0, X \in \mathfrak{sl}_2, A \in J_2;$$

$$[X \otimes A, v \otimes b] = Xv \otimes Ab, \qquad \forall v \in \mathbb{C}^2, X \in \mathfrak{sl}_2, b \in J_1, A \in J_2.$$

Здесь $\nu : \mathfrak{g}_0 \times J_2 \to J_2$ — билинейное отображение.

Чтобы вычислить отображение ν, необходимо рассмотреть действие оператора $\nu(D, A) \in J_2$ на произвольный вектор $b \in J_1$. Для этого рассмотрим тождество Якоби для $X \otimes A \in \mathfrak{g}_2$, $v \otimes b \in \mathfrak{g}_1$ и $D \in \mathfrak{g}_0$:

$$\big[[D, X \otimes A], v \otimes b\big] + \big[[X \otimes A, v \otimes b], D\big] + \big[[v \otimes b, D], X \otimes A\big] = 0.$$

Пользуясь коммутационными соотношениями, указанными выше, нетрудно заключить, что:

$$\nu(D, A) = [D, A], \qquad \forall D \in \mathfrak{g}_0, A \in J_2. \tag{2.3}$$

Таким образом, с помощью формулы (2.3) задано действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на пространстве J_2.

Коммутирование двух элементов из $\mathfrak{g}_2$ согласно лемме 2 осуществляется по формуле:

$$[X \otimes A, Y \otimes B] = [X, Y] \otimes (A \circ B) + \frac{1}{2}(X, Y)\Delta(A, B), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2.$$

Здесь значком $\circ$ обозначена коммутативная бинарная операция, которая наделяет пространство J_2 структурой коммутативной алгебры, а $\Delta : J_2 \times J_2 \to \mathfrak{g}_0$ — кососимметрическое билинейное отображение. Коэффициент $\frac{1}{2}$ взят для удобства дайльнейших вычислений.

Таким образом, мы имеем векторное пространство J_1, на котором действует алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$, а также коммутативная алгебра J_2 линейных операторов пространства J_1 (относительно умножения $\circ$). В дальнейшем мы покажем, что пространство J_1 есть симплектическое пространство, алгебра J_2 — подалгебра в йордановой алгебре всех симметрических операторов пространства J_1, а алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(J_1)$.

Пользуясь всеми вышеописанными договоренностями, можно выписать полный список коммутационных формул:

$$[D, u \otimes a] = u \otimes Da, \qquad \forall D \in \mathfrak{g}_0, u \in \mathbb{C}^2, a \in J_1; \tag{2.4}$$

$$[D, X \otimes A] = X \otimes [D, A], \qquad \forall D \in \mathfrak{g}_0, X \in \mathfrak{sl}_2, A \in J_2; \tag{2.5}$$

$$[u \otimes a, v \otimes b] = S(u, v) \otimes \varphi(a, b) + \langle u, v\rangle \delta(a, b), \qquad \forall u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1; \tag{2.6}$$

$$[X \otimes A, v \otimes b] = Xv \otimes Ab, \qquad \forall v \in \mathbb{C}^2, X \in \mathfrak{sl}_2, A \in J_2, b \in J_1; \tag{2.7}$$

$$[X \otimes A, Y \otimes B] = [X, Y] \otimes (A \circ B) + \frac{1}{2}(X, Y)\Delta(A, B),\ \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2. \tag{2.8}$$

Здесь:

$\varphi : J_1 \times J_1 \to J_2$ — кососимметрическое билинейное отображение,

$\delta : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0$ — симметрическое билинейное отображение,

$\Delta : J_2 \times J_2 \to \mathfrak{g}_0$ — кососимметрическое билинейное отображение,

$\circ$ — коммутативная билинейная бинарная операция на J_2.

2.2 Свойства изотипных компонент

Рассмотрим произвольную короткую SL_2-структуру на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Выпишем тождества Якоби на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из которых выведем необходимые нам для дальнейших рассуждений тождества.

Для любого вектора $u \in \mathbb{C}^2$ будем обозначать через u^* такой элемент пространства $(\mathbb{C}^2)^*$, что $u^*(v) = \langle v, u \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{C}^2$. Тогда будет верна следующая формула для отображения S (здесь тензоры типа (1,1) интерпретируются как линейные операторы):

$$S(u,v) = u \otimes v^* + v \otimes u^*, \qquad \forall u, v \in \mathbb{C}^2.$$

Теперь докажем одну вспомогательную лемму, упрощающую дальнейшие выкладки.

Лемма 3. *Для любых трех векторов $u, v, w \in \mathbb{C}^2$ и оператора $X \in \mathfrak{sl}_2$ выполнены равенства:*

a) $\langle Xu, v \rangle = -\langle u, Xv \rangle$;

b) $u \otimes (Xv)^* = -(u \otimes v^*) \cdot X$, $Xv \otimes u^* = X \cdot (v \otimes u^*)$;

c) $(X, S(u,v)) = 2\langle Xu, v \rangle$;

d) $\langle u, v \rangle w + \langle v, w \rangle u + \langle w, u \rangle v = 0$;

e) $u \otimes v^* - v \otimes u^* = \langle u, v \rangle \operatorname{id}$;

f) $[X, S(u,v)] = 2\big(S(u, Xv) + \langle u, v \rangle X\big)$;

g) $S(Xu, v) - S(u, Xv) = 2\langle u, v \rangle X$.

Доказательство.

a) Очевидно, что $\langle Bu, Bv \rangle = \langle u, v \rangle, \forall B \in SL_2, u, v \in \mathbb{C}^2$. Дифференцируя в единице это равенство, получим требуемое.

b) Так как данные равенства представляют из себя операторные равенства, то проверим их применительно к произвольному вектору $w \in \mathbb{C}^2$:

$$(Xv \otimes u^*)w = \langle w, u \rangle Xv = X(\langle w, u \rangle v) = \big(X \cdot (v \otimes u^*)\big)w;$$

$$(u \otimes (Xv)^*)w = \langle w, Xv \rangle u = -\langle Xw, v \rangle u = \big(-(u \otimes v^*) \cdot X\big)w.$$

c)
$$\begin{aligned}(X, S(u,v)) &= \operatorname{tr}(X \cdot (u \otimes v^* + v \otimes u^*)) = \operatorname{tr}((u \otimes v^*) \cdot X) + \operatorname{tr}((v \otimes u^*) \cdot X) = \\ &= -\operatorname{tr}(u \otimes (Xv)^*) - \operatorname{tr}(v \otimes (Xu)^*) = \langle Xv, u \rangle + \langle Xu, v \rangle = \\ &= \langle Xu, v \rangle + \langle Xu, v \rangle = 2\langle Xu, v \rangle.\end{aligned}$$

d) Левая часть этого тождества представляет собой трилинейное кососимметрическое отображение на пространстве $\mathbb{C}^2$. Следовательно, оно равно нулю.

e) Докажем это операторное тождество для произвольного $w \in \mathbb{C}^2$. Имеем:

$$(u \otimes v^* - v \otimes u^*)w = \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v = -\langle v, w \rangle u - \langle w, u \rangle v = \langle u, v \rangle w.$$

f)
$$\begin{aligned}2S(u, Xv) + 2\langle u, v \rangle X &= 2(u \otimes (Xv)^* + (Xv) \otimes u^*) + 2\langle u, v \rangle X = \\ &= -2(u \otimes v^*) \cdot X + 2X \cdot (v \otimes u^*) + 2(u \otimes v^*) \cdot X - 2(v \otimes u^*) \cdot X = \\ &= [X, 2(v \otimes u^*)] = [X, u \otimes v^* + v \otimes u^* + v \otimes u^* - u \otimes v^*] = \\ &= [X, S(u,v)] + [X, v \otimes u^* - u \otimes v^*] = [X, S(u,v)] + [X, \langle v, u \rangle \operatorname{id}] = [X, S(u,v)].\end{aligned}$$

$$g)\, S(Xu,v) - S(u,Xv) = Xu\otimes v^* + v\otimes (Xu)^* - u\otimes (Xv)^* - Xv\otimes u^* = \\ = X\cdot (u\otimes v^* - v\otimes u^*) + (u\otimes (v)^* - v\otimes (u)^*)\cdot X = \\ = \langle u,v\rangle X + \langle u,v\rangle X = 2\langle u,v\rangle X.$$

■

Перейдем непосредственно к выводу необходимых нам для дальнейших рассуждений тождеств. Для этого нам понадобятся некоторые факты из теории йордановых алгебр, краткое изложение которых будет приведено ниже. Все эти факты можно найти в [4].

Определение 3. *Алгебра J, в которой для произвольных $a,b\in J$ справедливы тождества $ab=ba$, $(a^2b)a=a^2(ba)$ называется йордановой алгеброй.*

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра. Векторное пространство A с операцией йорданова умножения:

$$a\circ b = \frac{1}{2}(ab+ba), \qquad \forall a,b\in A,$$

образует алгебру A^+, которая является йордановой. Йорданова алгебра, вкладывающаяся в алгебру A^+ для некоторой ассоциативной алгебры A называется *специальной йордановой алгеброй.*

Обозначим через L_c оператор умножения на элемент $c\in J$ некоторой йордановой алгебры J. Тогда преобразования вида $[L_a, L_b]$, где $a,b\in J$ являются дифференцированиями алгебры J. Их линейные комбинации называются *внутренними дифференцированиями.* Они образуют идеал, который обозначают $\mathfrak{inn}(J)$, в алгебре Ли $\mathfrak{der}(J)$ всех дифференцирований.

Определение 4. *Йорданова алгебра J называется полупростой, если на алгебре J задано невырожденное скалярное умножение $(\cdot,\cdot)$, обладающее свойством ассоциативности:*

$$(ab,c) = (a,bc), \qquad \forall a,b,c\in J.$$

Определение 5. *Йорданова алгебра J называется простой, если она не содержит нетривиальных (отличных от 0 и J) идеалов.*

Простая йорданова алгебра является полупростой. Если йорданова алгебра J полупроста, то, во-первых, она является прямой суммой своих простых идеалов, во-вторых, J содержит единицу, а, в-третьих, $\mathfrak{der}(J) = \mathfrak{inn}(J)$.

Также для полупростых йордановых алгебр верна следующая теорема:

Теорема 1. *Если J конечномерная полупростая йорданова алгебра над полем $\mathbb{C}$, то алгебра $\mathfrak{der}(J)$ полупроста.*

Доказательство. Из [5, глава VIII, пункт 4] следует, что для полупростой йордановой алгебры J над $\mathbb{C}$ алгебра дифференцирований $\mathfrak{der}(J)$ редуктивна. Согласно теории очень коротких SL_2-структур, построенной в [1, раздел 3], для простой йордановой алгебры J алгебра ее дифференцирований $\mathfrak{der}(J)$ совпадает с подпространством $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с очень короткой SL_2-структурой (то есть имеющая вид (1.1)), которая однозначно соответствует данной йордановой алгебре J. Из классификации всех таких структур следует, что компонента $\mathfrak{g}_0$ для очень короткой SL_2-структуры полупроста. Для полупростой йордановой алгебры все дифференцирования внутренние, значит алгебра Ли $\mathfrak{der}(J)$ будет также полупроста. ■

Вернемся к рассмотрению короткой SL_2-структуры на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что на редуктивной подалгебре Ли $\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_2$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ индуцируется очень короткая SL_2-структура. Из теории очень коротких SL_2-структур в частности следует, что алгебра J_2

наделяется структурой йордановой алгебры и алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ действует на J_2 дифференцированиями.

Для удобства в дальнейшем будем называть йорданову алгебру J_2 *йордановой алгеброй короткой SL_2-структуры* на $\mathfrak{g}$. Наконец, с помощью тождества Якоби полностью определяется умножение на алгебре J_2:

Теорема 2. *Йорданова алгебра $J_2 \subset \mathfrak{gl}(J_1)$ короткой SL_2-структуры на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является специальной с классическим умножением, определенным по формуле:*

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA), \qquad \forall A, B \in J_2, \tag{2.9}$$

причем отображение $\Delta : J_2 \times J_2 \to \mathfrak{g}_0$ удовлетворяет следующему сооотношению:

$$\Delta(A, B) = [A, B], \quad \forall A, B \in J_2,$$

где равенство выше понимается как равенство линейных операторов на J_1.

Доказательство. Рассмотрим тождество Якоби для двух элементов из $\mathfrak{g}_2$ и одного элемента из $\mathfrak{g}_1$ ($w \in \mathbb{C}^2$, $X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2, c \in J_1$):

$$\big[[X \otimes A, Y \otimes B], w \otimes c\big] + \big[[Y \otimes B, w \otimes c], X \otimes A\big] + \big[[w \otimes c, X \otimes A], Y \otimes B\big] = 0.$$

Используя коммутаторные соотношения (2.4)–(2.8), из этого равенства получим:

$$YXw \otimes BAc + [X, Y]w \otimes (A \circ B)c + \frac{1}{2}(X, Y)w \otimes \Delta(A, B)c - XYw \otimes ABc = 0. \tag{2.10}$$

В равенстве (2.10) поменяем местами A и B, воспользовавшись коммутативностью умножения на J_2 и кососимметричностью Δ. Получим:

$$YXw \otimes ABc + [X, Y]w \otimes (A \circ B)c - \frac{1}{2}(X, Y)w \otimes \Delta(A, B)c - XYw \otimes BAc = 0. \tag{2.11}$$

Сложив тождество (2.11) с (2.10), получим:

$$YXw \otimes (BAc + ABc) + 2[X, Y]w \otimes (A \circ B)c - XYw \otimes (BAc + ABc) = 0;$$

$$[Y, X]w \otimes (BAc + ABc) + 2[X, Y]w \otimes (A \circ B)c = 0;$$
$$[Y, X]w \otimes (BAc + ABc - 2(A \circ B)c) = 0,$$

откуда получим первое утверждение теоремы.

Вычтя из (2.10) тождество (2.11), получим

$$(X, Y)w \otimes \Delta(A, B)c + YXw \otimes (BAc - ABc) - XYw \otimes (ABc - BAc) = 0;$$

$$(X, Y)w \otimes \Delta(A, B)c - (YXw + XYw) \otimes ([A, B]c) = 0.$$

Нетрудно проверить, что:

$$(XY + YX)w = (X, Y)w, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2, w \in \mathbb{C}^2.$$

Откуда и следует второе утверждение теоремы. ∎

В связи с только что доказанной теоремой 2, в последующих рассуждениях везде, где употребляется йорданова алгебра, по умолчанию будем считать, что эта алгебра специальная с классическим умножением, определенным по формуле (2.9).

Для простоты дальнейших рассуждений, мы будем понимать под образом произвольного билинейного отображения $\psi : U\times V \to W$ образ однозначно соответствующего ему отображения из $U\otimes V$ в W. Из теории очень коротких SL_2-структур следует, что образ отображения Δ действует на йордановой алгебре J_2 внутренними дифференцированиями, причем данное действие точное. Тогда из теоремы 2 и тождества (2.5) следует, что данное действие вычисляется по следующей формуле для произвольных $A, B, C \in J_2$:

$$[[A, B], C] = ABC + CBA - BAC - CAB = \\ = 4\big(A\circ (B\circ C) - B\circ (A\circ C)\big) = 4[L_A, L_B](C).$$

Таким образом, мы можем считать, что

$$\mathfrak{inn}(J_2) = [J_2, J_2] = \big\langle [A, B] : A, B \in J_2\big\rangle.$$

2.3 Инвариантное скалярное умножение

На простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует единственное с точностью до пропорциональности инвариантное скалярное умножение. Зафиксируем его и в дальнейшем будем обозначать это умножение круглыми скобками $(\cdot,\cdot)$. Из леммы Шура следует, что относительно данного скалярного умножения на $\mathfrak{g}$ векторные пространства $\mathfrak{g}_i$, где $i \in \{0, 1, 2\}$, попарно ортогональны друг другу, то есть выполнены следующие соотношения:

$$(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0, \quad i \neq j. \tag{2.12}$$

С помощью зафиксированного скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ введем на пространстве J_1 и алгебре J_2 скалярное умножение следующим образом.

$$(u\otimes a, v\otimes b) = \langle u, v\rangle \alpha(a, b);$$

$$(X\otimes A, Y\otimes B) = \frac{1}{2}(X, Y)\beta(A, B),$$

где α — кососимметрическая билинейная форма на J_1, а β — симметрическая билинейная форма на J_2. Коэффициент $1/2$ в последней формуле необходим для удобства дальнейших вычислений.

Очевидно,что обе полученные формы невырождены. Форму α назовем *кососкалярным умножением на* J_1, а форму β — *скалярным умножением на* J_2. Для краткости в дальнейшем будем обозначать форму β с помощью круглых скобок $(\cdot,\cdot)$, а форму α с помощью угловых скобок $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Для введенных скалярного и кососкалярного умножений верно следующее предложение:

Предложение 2. *Скалярные умножения на симплектическом пространстве J_1 и алгебрах $\mathfrak{g}_0$ и J_2 обладают следующими свойствами:*

1) $\big(A, \varphi(a, b)\big) = \langle Aa, b\rangle = \langle a, Ab\rangle, \qquad \forall a, b \in J_1, A \in J_2;$

2) $\big(D, \delta(a, b)\big) = \langle Da, b\rangle = -\langle a, Db\rangle, \qquad \forall a, b \in J_1, D \in \mathfrak{g}_0;$

3) $\big(D, [A, B]\big) = \big([D, A], B\big) = -\big(A, [D, B]\big), \qquad \forall A, B \in J_2, D \in \mathfrak{g}_0;$

4) $(A\circ B, C) = (A, B\circ C), \qquad \forall A, B, C \in J_2.$

Доказательство.

1). Рассмотрим $X \in \mathfrak{sl}_2, u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1, A \in J_2$. Тогда из инвариантности скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следует, что:

$$\big(X \otimes A, [u \otimes a, v \otimes b]\big) = \big([X \otimes A, u \otimes a], v \otimes b\big). \tag{2.13}$$

Используя соотношения (2.4)–(2.8), получим:

$$\big(X \otimes A, [u \otimes a, v \otimes b]\big) = \big(X \otimes A, S(u, v) \otimes \varphi(a, b)\big);$$

$$\big([X \otimes A, u \otimes a], v \otimes b\big) = \big(Xu \otimes Aa, v \otimes b\big).$$

Откуда, пользуясь введенным выше определением скалярного умножения на пространствах J_1 и J_2, получим, что:

$$\frac{1}{2}\big(X, S(u, v)\big)\big(A, \varphi(a, b)\big) = \langle Xu, v\rangle\langle Aa, b\rangle.$$

Согласно лемме 3 $(X, S(u, v)) = 2\langle Xu, v\rangle$, откуда и следует первое равенство пункта 1.

Второе равенство пункта 1 легко следует из первого с заменой a на b, а b на a и кососимметричности отображения φ.

2). Рассмотрим $D \in \mathfrak{g}_0, u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1$. Тогда из инвариантности скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следует, что:

$$\big(D, [u \otimes a, v \otimes b]\big) = \big([D, u \otimes a], v \otimes b\big). \tag{2.14}$$

Используя соотношения (2.4)–(2.8) и (2.12), получим:

$$\big(D, [u \otimes a, v \otimes b]\big) = \langle u, v\rangle\big(D, \delta(a, b)\big);$$

$$\big([D, u \otimes a], v \otimes b\big) = \big(u \otimes Da, v \otimes b\big).$$

Откуда, пользуясь введенным выше определением кососкалярного умножения на пространстве J_1, получим

$$\langle u, v\rangle\big(D, \delta(a, b)\big) = \langle u, v\rangle\langle Da, b\rangle.$$

Разделив полученное равенство на $\langle u, v\rangle$, мы получим первое равенство пункта 2. Второе равенство пункта 2 легко следует из первого с заменой a на b, а b на a и симметричности отображения δ.

3). Рассмотрим $D \in \mathfrak{g}_0, X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2$. Тогда из инвариантности скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следует, что:

$$\big(D, [X \otimes A, Y \otimes B]\big) = \big([D, X \otimes A], Y \otimes B\big). \tag{2.15}$$

Используя соотношения (2.4)–(2.8) и теорему 2, из (2.15) получим:

$$\frac{1}{2}\big(X, Y\big)\big(D, [A, B]\big) = \big(X \otimes [D, A], Y \otimes B\big) = \frac{1}{2}\big(X, Y\big)\big([D, A], B\big).$$

Откуда и следует первое равенство пункта 3). Второе равенство пункта 3 легко следует из первого с заменой A на B, а B на A.

4). Рассмотрим $X, Y, Z \in \mathfrak{sl}_2, A, B, C \in J_2$. Тогда из инвариантности скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следует, что:

$$\big(X \otimes A, [Y \otimes B, Z \otimes C]\big) = \big([X \otimes A, Y \otimes B], Z \otimes C\big). \tag{2.16}$$

Используя соотношения (2.4)–(2.8), из (2.16) получим:

$$\frac{1}{2}\big(X,[Y,Z]\big)\big(A,B\circ C\big)=\frac{1}{2}\big([X,Y],Z\big)\big(A\circ B,C\big)$$

Так как $\big(X,[Y,Z]\big)=\big([X,Y],Z\big)$, то из равенства выше можно получить равенство пункта 4). ■

Из предложений 2 и теоремы 2 в частности следует, что J_2 является полупростой йордановой алгеброй и $\mathfrak{der}(J_2)=\mathfrak{inn}(J_2)=[J_2,J_2]\subset\mathfrak{g}_0$. Также из предложения 2 следует, что алгебра J_2 состоит из симметрических операторов симлектического пространства J_1, в то время как $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{sp}(J_1)$.

2.4 Короткие SL_2-структуры и $\mathbb{Z}$-градуировки

Рассмотрим произвольную короткую SL_2-структуру на прострой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. С помощью отображения $\mathrm{d}\,\Phi$ алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$ вкладывается в $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})=\mathfrak{inn}(\mathfrak{g})\simeq\mathfrak{g}$. Обозначим через e,f,h базисные элементы алгебры $\mathrm{d}\,\Phi(\mathfrak{sl}_2)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[e,f]=h,\quad [h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f. \tag{2.17}$$

Пусть

$$\tilde{e}=\mathrm{d}\,\Phi^{-1}(e),\quad \tilde{f}=\mathrm{d}\,\Phi^{-1}(f),\quad \tilde{h}=\mathrm{d}\,\Phi^{-1}(h).$$

Рассмотрим оператор $\mathrm{ad}(h)$. Так как размерности неприводимых представлений Φ не превосходят 3, то собственные значения оператора $\mathrm{ad}(h)$ не превосходят по модулю 2. Тогда относительно оператора $\mathrm{ad}(h)$ алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму собственных подпространств:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{-2}\oplus\mathfrak{g}^{-1}\oplus\mathfrak{g}^{0}\oplus\mathfrak{g}^{1}\oplus\mathfrak{g}^{2},\quad \mathfrak{g}^k=\{\xi\in\mathfrak{g}:[h,\xi]=k\xi\}. \tag{2.18}$$

Очевидно, что:

$$\mathfrak{g}^0=\mathfrak{g}_0\oplus(\tilde{h}\otimes J_2),\quad \mathfrak{g}^{-1}=e_{-1}\otimes J_1,\quad \mathfrak{g}^{1}=e_{1}\otimes J_1,\quad \mathfrak{g}^{-2}=\tilde{f}\otimes J_2,\quad \mathfrak{g}^{2}=\tilde{e}\otimes J_2,$$

где $\{e_{-1},e_1\}$ — собственный базис пространства $\mathbb{C}^2$ относительно оператора $\tilde{h}$.

Разложение (2.18) является $\mathbb{Z}$-градуировкой, то есть $[\mathfrak{g}^k,\mathfrak{g}^l]\subset\mathfrak{g}^{k+l}$, где $\mathfrak{g}^m=0$ при $|m|>2$.

Без ограничения общности можно считать, что элемент h принадлежит фиксированной подалгебре Картана $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и даже положительной камере Вейля по отношению к некоторому выбору положительных корней.

Таким образом, если $\Pi=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ — система простых корней алгебры $\mathfrak{g}$, то

$$\alpha_i(h)\geqslant 0,\qquad \forall i=\overline{1,n}.$$

Обозначим $p_i=\alpha_i(h)\in\mathbb{Z}_+$. Ясно, что $\mathbb{Z}$-градуировка (2.18) полностью определяется набором $\{p_1,...,p_n\}$. Каждое из подпространств $\mathfrak{g}^k$ есть сумма корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, отвечающих корням $\alpha=k_1\alpha_1+...+k_n\alpha_n$ с условием:

$$k_1p_1+\cdots+k_np_n=k, \tag{2.19}$$

и подалгебры Картана $\mathfrak{t}$ в случае $k=0$.

Обозначим через $\alpha_{\max}$ старший корень алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как максимальное собственное значение оператора $\mathrm{ad}(h)$ равно 2, то $\alpha_{\max}(h)=2$. Если $\alpha_{\max}=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$, то из условия, что $\alpha_{\max}(h)=2$, получим, что

$$l_1p_1+\cdots+l_np_n=2.$$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{g}^0$. Очевидно, что $\mathfrak{g}^0$ является подалгеброй Ли. Имеет место разложение:

$$\mathfrak{g}^0 = \tilde{\mathfrak{g}}^0 \oplus \langle h \rangle,$$

где $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ — ортогональное дополнение к h. Рассмотрим представление $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ на пространстве $\mathfrak{g}^2$, являюшееся ограничением присоединенного представления. Обозначим

$$\Pi_0 = \{\alpha_i \in \Pi : p_i = 0\}.$$

Ясно, что Π_0 — система простых корней полупростой части $\tilde{\mathfrak{g}}^0$.

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{g}^k$ для $k \neq 0$. Разложим его в прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}^k_{(\nu)}$, где каждое $\mathfrak{g}^k_{(\nu)}$ есть сумма корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, отвечающих корням с фиксированными коэффициентами при простых корнях $\alpha_i \notin \Pi_0$ (и с условием (2.19)).

Очевидно, что каждое из подространств $\mathfrak{g}^k_{(\nu)}$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}^0$. Верно следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [3, глава 3, § 3, пункт 3.5]:

Теорема 3. *Представление $\mathfrak{g}^0$ в каждом $\mathfrak{g}^k_{(\nu)}$ неприводимо.*

Из данной теоремы немедленно следует, что и представление $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ в каждом $\mathfrak{g}^k_{(\nu)}$ неприводимо.

Заметим, что в нашем случае представление $\tilde{\mathfrak{g}}^0 : \mathfrak{g}^2$ всегда неприводимо, так как, вообще говоря, возможны лишь три случая:

1. существует ровно один простой корень α_i с ненулевым значением $p_i = 2$, и в разложении старшего корня по простым корням этот корень стоит с коэффициентом 1;

2. существует ровно два простых корня α_i и α_j с ненулевыми значениями $p_i = p_j = 1$, в разложении старшего корня по простым корням коэффициенты при этих корнях равны 1;

3. существует ровно один простой корень α_i с ненулевым значением $p_i = 1$, и в разложении старшего корня по простым корням этот простой корень стоит с коэффициентом 2.

Случай 1 не реализуется, так как при нем $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{-1} = 0$, что не так для коротких SL_2-структур. В случае 3 простой корень один, поэтому $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_{(\nu)}$, а значит представление неприводимо. В случае 2 в разложении старшего корня по простым корням коэффициенты при корнях с ненулевыми значениями на h равны 1, значит и во всех положительных корнях коэффициенты при этих корнях не превосходят 1, то есть $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^2_{(\nu)}$, и, опять же, представление неприводимо.

2.5 Простота йордановой алгебры короткой SL_2-структуры

Теорема 4. *Пусть на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана короткая SL_2-структура и J_2 — йорданова алгебра этой структуры. Тогда J_2 проста.*

Доказательство. Данный факт несложно доказать для очень коротких SL_2структур. Действительно, в этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{sl}_2 \otimes J_2$, где J_2 — йорданова алгебра, а $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{der}(J_2) = \mathfrak{inn}(J_2)$. Если йорданова алгебра J_2 имеет какой-либо нетривиальный идеал I, то подпространство $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{sl}_2 \otimes I$ является нетривиальным идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$, что несложно следует из коммутационных формул.

В случае коротких SL_2-структур такой прямой способ доказательна неприменим, так как при коммутировании с самим собой слагаемого $\mathbb{C}^2 \otimes J_1$ возникает слагаемое из $\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2$, что препятствует описанному выше способу конструирования идеала в $\mathfrak{g}$. Однако случай коротких SL_2-структур можно свести к уже разобранному случаю очень коротких SL_2-структур.

Для этого заметим, что при ограничении короткой SL_2-структуры на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на подалгебру Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$, получается очень короткая SL_2-структура, заданная на алгебре Ли $\mathfrak{h}$. Данная алгебра Ли, вообще говоря, не является простой, однако она редуктивна, в связи с невырожденностью скалярного умножения. Так как полупростой элемент h (как в целом и вся алгебра $\mathfrak{sl}_2$) тривиально действует на центр алгебры $\mathfrak{h}$, то заменяя алгебру на ее коммутант $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, можно считать алгебру $\mathfrak{h}$ полупростой.

Для удобства выберем систему простых корней для $\mathfrak{h}$ следующим образом. Очевидно, что системой корней алгебры $\mathfrak{h}$ являются корни алгебры $\mathfrak{g}$, принимающие значения 0, 2 или -2 на элементе h. Будем считать положительными корнями алгебры $\mathfrak{h}$ положительные корни алгебры $\mathfrak{g}$ принимающие значение 0 на элементе h, также корни алгебры $\mathfrak{g}$, принимающие значение -2 на h. Тогда ясно, что простыми корнями полупростой алгебры $\mathfrak{h}$ являются все простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}$, принимающие нулевое значение на элементе h, а также младший корень алгебры $\mathfrak{g}$. Очевидно, что, вообще говоря, алгебра Ли $\mathfrak{h}$ содержит несколько простых компонент, однако ровно в одной из них содержится подпространство $\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2$ (а именно в той, простым корнем которой является младший корень алгебры $\mathfrak{g}$). Поэтому можно считать алгебру $\mathfrak{h}$ простой, что полностью сводит вопрос к случаю очень коротких SL_2-структур, а для него уже доказано, что йорданова алгебра J_2 проста. ∎

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}_0$. В связи с коммутационными соотношениями (2.2) подпространство $[J_2, J_2] \subset \mathfrak{g}_0$ является идеалом алгебры $\mathfrak{g}_0$. Обозначим через $\mathfrak{i}_0$ ортогональное дополнение к $[J_2, J_2]$ в $\mathfrak{g}_0$ относительно введенного выше скалярного умножения. Подпространство $\mathfrak{i}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ также является идеалом алгебры $\mathfrak{g}_0$ и в силу невырожденности скалярного умножения на $\mathfrak{g}_0$ сумма размерностей идеалов $\mathfrak{i}_0$ и $[J_2, J_2]$ равна размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

Рассмотрим действие идеала $\mathfrak{i}_0 \triangleleft \mathfrak{g}_0$ на йорданову алгебру J_2. Используя доказанное выше предложение 2, имеем $\forall A, B \in J_2, D \in \mathfrak{i}_0$:

$$\big([D, A], B\big) = \big(D, [A, B]\big) = 0. \tag{2.20}$$

Следовательно, $[D, A] = 0, \forall A \in J_2$, то есть D — элемент ядра действия $\mathfrak{g}_0$ на J_2. Обратно, если $[D, A] = 0, \forall A \in J_2$, то из равенства (2.20) следует, что $\big(D, [A, B]\big) = 0, \forall A, B \in J_2$, то есть $D \in \mathfrak{i}_0$. Откуда немедленно следует, что $\mathfrak{i}_0$ — это в точности ядро действия $\mathfrak{g}_0$ на J_2. Из того, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ действует на J_2 коммутированием, а умножение на J_2 является классическим нетрудно вывести, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ действует на йордановой алгебре J_2 дифференцированиями. Тогда, так как $\mathfrak{i}_0$ — это ядро этого действия, то $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{i}_0 \subset \mathfrak{Der}(J_2)$. Но из простоты алгебры J_2 следует, что

$$\mathfrak{Der}(J_2) = [J_2, J_2],$$

то есть

$$\mathfrak{g}_0/\mathfrak{i}_0 \subset [J_2, J_2].$$

Тогда имеется разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ в прямую сумму двух идеалов:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{i}_0 \oplus [J_2, J_2]. \tag{2.21}$$

Из классификации всех коротких SL_2-структур, описанной в разделе 5 данной статьи, будет, в частности, следовать, что, вообще говоря, $\mathfrak{i}_0 \neq 0$, то есть алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ полностью не определяется йордановой алгеброй J_2, что отличает случай коротких SL_2-структур от очень коротких. Более того, алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ не определяется полностью даже парой $(J_1; J_2)$, что также будет видно из классификации всех коротких SL_2-структур.

Заметим, что из простоты йордановой алгебры Ли J_2 следует, что J_2 содержит единицу. Более того, верна следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана короткая SL_2-структура, причем J_1 — симплектическое пространство, а J_2 — йорданова алгебра данной структуры. Обозначим единичный элемент J_2 за $\mathbb{I}$. Тогда $\mathbb{I} = \mathrm{id}$, то есть*

$$\mathbb{I}a = a, \quad \forall a \in J_1.$$

Доказательство.

Для начала выведем необходимые нам для доказательства тождества. Рассмотрим тождество Якоби для произвольных $X \in \mathfrak{sl}_2, u, v \in \mathbb{C}^2, A \in J_2, a, b \in J_1$:

$$\big[[X \otimes A, u \otimes a], v \otimes b\big] + \big[[u \otimes a, v \otimes b], X \otimes A\big] + \big[[v \otimes b, X \otimes A], u \otimes a\big] = 0.$$

Воспользовавшись равенствами (2.4)–(2.8), получим:

$$\begin{aligned} S(Xu, v) \otimes \varphi(Aa, b) + \langle Xu, v\rangle \delta(Aa, b) +& \\ + \big[S(u,v), X\big] \otimes \big(\varphi(a,b) \circ A\big) + \frac{1}{2}\big(S(u,v), X\big)\big[\varphi(a,b), A\big] +& \\ + \langle u, v\rangle X \otimes \big[\delta(a,b), A\big] - S(Xv, u) \otimes \varphi(Ab, a) - \langle Xv, u\rangle \delta(Ab, a) = 0.& \end{aligned} \quad (2.22)$$

Откуда

$$\langle Xu, v\rangle \delta(Aa, b) + \frac{1}{2}\big(S(u,v), X\big)\big[\varphi(a,b), A\big] - \langle Xv, u\rangle \delta(Ab, a) = 0.$$

Применяя к полученному равенству лемму 3, получим первое из необходимых нам тождеств:

$$\big[A, \varphi(a,b)\big] = \delta(Aa, b) - \delta(a, Ab). \quad (2.23)$$

Далее, из (2.22) также следует, что:

$$\begin{aligned} S(Xu, v) \otimes \varphi(Aa, b) + \big[S(u,v), X\big] \otimes \big(\varphi(a,b) \circ A\big) +& \\ + \langle u, v\rangle X \otimes \big[\delta(a,b), A\big] - S(Xv, u) \otimes \varphi(Ab, a) = 0.& \end{aligned} \quad (2.24)$$

В полученном равенстве поменяем местами элементы a и b и воспользуемся кососимметричностью отображения φ и симметричностью отображения δ. Получим:

$$\begin{aligned} S(Xu, v) \otimes \varphi(Ab, a) - \big[S(u,v), X\big] \otimes \big(\varphi(a,b) \circ A\big) +& \\ + \langle u, v\rangle X \otimes \big[\delta(a,b), A\big] - S(Xv, u) \otimes \varphi(Aa, b) = 0.& \end{aligned} \quad (2.25)$$

Сложив равенства (2.24) и (2.25), получим:

$$\big(S(Xu, v) - S(Xv, u)\big) \otimes \big(\varphi(Ab, a) + \varphi(Aa, b)\big) + 2\langle u, v\rangle X \otimes \big[\delta(a,b), A\big] = 0.$$

Из леммы 3 следует, что $S(Xu, v) - S(Xv, u) = 2\langle u, v\rangle X$, откуда получим второе из необходимых нам тождеств:

$$\big[A, \delta(a,b)\big] = \varphi(Aa, b) - \varphi(a, Ab). \quad (2.26)$$

Рассмотрим тождество Якоби для произвольных $D \in \mathfrak{g}_0, u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1$:

$$\big[[D, u \otimes a], v \otimes b\big] + \big[[u \otimes a, v \otimes b], D\big] + \big[[v \otimes b, D], u \otimes a\big] = 0.$$

Воспользовавшись равенствами (2.4)–(2.8), получим:

$$\begin{aligned} S(u, v) \otimes \varphi(Da, u) + \langle u, v\rangle \delta(Da, b) -& \\ - S(u,v) \otimes \big[D, \varphi(a,b)\big] - \langle u, v\rangle \big[D, \delta(a,b)\big] +& \\ + S(u,v) \otimes \varphi(a, Db) + \langle u, v\rangle \delta(a, Db) = 0.& \end{aligned}$$

Откуда:
$$\langle u,v\rangle\delta(Da,b)-\langle u,v\rangle\big[D,\delta(a,b)\big]+\langle u,v\rangle\delta(a,Db)=0.$$
Поделив полученное равенство на $\langle u,v\rangle$, получим:
$$\big[D,\delta(a,b)\big]=\delta(Da,b)+\delta(a,Db). \tag{2.27}$$
Теперь у нас есть все необходимое для доказательства утверждения теоремы.

Рассмотрим оператор $\mathbb{I}\in J_2$. Так как $\mathbb{I}^2=\mathbb{I}$, то $J_1=J_1^0\oplus J_1^1$, где
$$J_1^0=\operatorname{Ker}\mathbb{I},\qquad J_1^1=\operatorname{Im}\mathbb{I}.$$
Мы докажем, что $J_1^0=0$, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Ясно, что $J_2=J_2\circ\mathbb{I}$, а значит вся йорданова алгебра J_2 тривиально действует на J_1^0.

Докажем, что J_1^0 — инвариантное подпространство для всей алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. В силу тривиальности действия йордановой алгебры J_2 на J_1^0 коммутант $[J_2,J_2]\subset\mathfrak{g}_0$ также тривиально действует на J_1^0, поэтому в силу разложения (2.21), достаточно доказать, что J_1^0 инвариантно относительно действия идеала $\mathfrak{i}_0$. Имеем для любых $D\in\mathfrak{i}_0, a\in J_1^0$
$$\mathbb{I}(Da)=[\mathbb{I},D]a+D(\mathbb{I}a)=0\implies Da\in J_1^0.$$
Тем самым доказана инвариантность J_1^0 под действием $\mathfrak{g}_0$. Обозначим
$$\mathfrak{g}_0^1=\big\langle\delta(a,b):\ a\in J_1^0,b\in J_1\big\rangle.$$

Рассмотрим $\mathfrak{i}=\mathfrak{g}_0^1\oplus\big(\mathbb{C}^2\otimes J_1^0\big)$. Докажем, что $\mathfrak{i}\lhd\mathfrak{g}$, откуда, в силу простоты $\mathfrak{g}$, и будет следовать, что $J_1^0=0$. Заметим, что
$$\big(A,\varphi(a,b)\big)=\langle Aa,b\rangle=0,\qquad\forall A\in J_2,a\in J_1^0,b\in J_1.$$
Следовательно,
$$\varphi(a,b)=0,\quad\forall a\in J_1^0,b\in J_1. \tag{2.28}$$
Из инвариантности подпространства J_1^0 относительно действия алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, используя равенство (2.27), нетрудно получить, что подпространство $\mathfrak{i}$ инвариантно относительно коммутирования с элементами из $\mathfrak{g}_0$. Также, пользуясь полученными равенствами (2.28) и (2.26) и тривиальностью действия J_2 на J_1^0, можно получить, что подпространство $\mathfrak{i}$ коммутирует с $\mathfrak{g}_2$. Остается доказать, что подпространство $\mathfrak{i}$ инвариантно относительно коммутирования с элементами из $\mathfrak{g}_1$. Так как выполнено равенство (2.28), то для этого достаточно показать, что операторы из $\mathfrak{g}_0^1$ отображают произвольный элемент из J_1 в J_1^0.

Применяя равенство (2.23) к $a\in J_1^0$ и $A=\mathbb{I}$ и учитывая (2.28), можно получить, что
$$\delta(a,\mathbb{I}b)=\delta(\mathbb{I}a,b)=0,\quad\forall a\in J_1^0,b\in J_1.$$
Таким образом получим, что
$$\delta(a,b)=0,\quad\forall a\in J_1^0,b\in J_1^1. \tag{2.29}$$
Поэтому достаточно рассматривать операторы $\delta(a,b)$ для $a,b\in J_1^0$.

Покажем, что $\delta(a,b)c=0$, $\forall a,b\in J_1^0$, $c\in J_1^1$. Тогда из инвариантности J_1^0 относительно действия $\mathfrak{g}_0$ будет следовать, что операторы из $\mathfrak{g}_0^1$ отображают произвольный элемент из J_1 в J_1^0.

Рассмотрим тождество Якоби для произвольных $u,v,w\in\mathbb{C}^2,a,b\in J_1^0$,

$c \in J_1^1$:

$$\big[[u\otimes a, v\otimes b], w\otimes c\big] + \big[[v\otimes b, w\otimes c], u\otimes a\big] + \big[[w\otimes c, u\otimes a], v\otimes b\big] = 0.$$

Воспользовавшись равенствами (2.4)–(2.8) а также равенствами (2.28) и (2.29), получим:

$$\big[[u\otimes a, v\otimes b], w\otimes c\big] = \langle u, v\rangle w\otimes \delta(a,b)c,$$

$$\big[[v\otimes b, w\otimes c], u\otimes a\big] = \big[[w\otimes c, u\otimes a], v\otimes b\big] = 0.$$

Таким образом из тождества Якоби выше и следует, что $\delta(a,b)c = 0$, $\forall a, b\in J_1^0, c\in J_1^1$.

Следовательно, $\mathfrak{i} \lhd \mathfrak{g}$, и, тем самым, утверждение теоремы доказано. ∎

Отметим, что из доказательства теоремы выше следует, что для произвольной короткой SL_2-структуры отображение $\delta : J_1\times J_1 \to \mathfrak{g}_0$, как и отображение $\varphi : J_1\times J_1 \to J_2$, эквивариантно относительно действия $\mathfrak{g}_0$ (тождество (2.27)), а также выполнены тождества (2.23) и (2.26). Так как имеет место разложение (2.21), то

$$\delta = \delta_0 + \delta_c, \quad \delta_0 = \pi_{0,0}\delta, \quad \delta_c = \pi_{0,c}\delta,$$

где $\pi_{0,0} : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{i}_0$ и $\pi_{0,c} : \mathfrak{g}_0 \to [J_2, J_2]$ — ортогональные проекции на $\mathfrak{i}_0$ и $[J_2, J_2]$ соответственно.

Так как отображение δ $\mathfrak{g}_0$-эквивариантно, то тоже верно и для δ_0. Так как выполнено тождество (2.23), левая часть которого принадлежит $[J_2, J_2]$, то

$$\delta_0(Aa, b) = \delta_0(a, Ab), \quad \forall A\in J_2, a, b\in J_1.$$

3 Максимальная короткая SL_2-структура

Целью данного раздела является построение примера короткой SL_2-структуры, которая будет максимальной в том смысле, что для этой короткой SL_2-структуры компоненты J_2 и $\mathfrak{g}_0$ наибольшие по включению при заданной компоненте J_1.

3.1 Построение максимальной короткой SL_2-структуры

В этом пункте будем рассматривать алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4n+1}$ в базисе, в котором ее элементы представляют собой матрицы размера $(4n+1)\times(4n+1)$, кососимметричные относительно побочной диагонали. В качестве инвариантного скалярного умножения на $\mathfrak{so}_{4n+1}$ зафиксируем следующее:

$$(A, B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB), \quad \forall A, B\in \mathfrak{so}_{4n+1}.$$

Рассмотрим на $\mathfrak{so}_{4n+1}$ короткую SL_2-структуру, заданную с помощью вложения алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в $\mathfrak{so}_{4n+1}$, при котором базисные элементы e, f и h алгебры $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{so}_{4n+1}$, удовлетворяющие соотношениям (2.17), представляют из себя матрицы следующего вида:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \operatorname{diag}\{\underbrace{1, .., 1}_{2n}, 0, \underbrace{-1, .., -1}_{2n}\}.$$

Здесь через I_{2n} обозначена $(2n\times 2n)$-матрица следующего вида:

$$I_{2n} = \operatorname{diag}\{\underbrace{1, .., 1}_{n}, \underbrace{-1, .., -1}_{n}\}.$$

Заметим, что

$$\mathfrak{so}_{4n+1} = \mathfrak{so}_{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}.$$

Это разложение легко получить, рассмотрев произвольный элемент алгебры $\mathfrak{so}_{4n+1}$ в указанном выше базисе, который имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} & & \overline{a}_1 & & \\ & C & \overline{a}_2 & A & \\ \overline{b}_2^{\mathsf{s}} & -\overline{b}_1^{\mathsf{s}} & 0 & -\overline{a}_2^{\mathsf{s}} & -\overline{a}_1^{\mathsf{s}} \\ & B & \overline{b}_1 & -C^{\mathsf{s}} & \\ & & -\overline{b}_2 & & \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \quad \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix}.$$

Здесь A, B — матрицы размера $2n \times 2n$ кососимметричные относительно побочной диагонали, а C — матрица размера $2n \times 2n$, а C^{s} — матрица, транспонированная к C относительно побочной диагонали. Прямое слагаемое вида $\mathfrak{so}_{4n}$ образуют матрицы, у которых $a_i = b_i = 0$, $\forall i = \overline{1, 2n}$. Прямое слагаемое вида $\mathbb{C}^{4n}$ образуют матрицы, у которых блоки A, B, C и C^{s} — нулевые, причем матрицы из первого прямого слагаемого естественным образом действуют на втором прямом слагаемом.

Также имеют место следующие равенства:

$$\mathfrak{so}_{4n} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathbb{C}^{4n} = \mathfrak{g}_1.$$

Далее, квадратичное пространство $\mathbb{C}^{4n}$ разлагается в тензорное произведение симплектических пространств $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^{2n} = J_1$. А именно, вектору из $\mathbb{C}^{4n}$, представляющему из себя матрицу типа «крест» (то есть матрицу $(4n+1) \times (4n+1)$, ненулевые элементы которой принадлежат только центральному столбцу и центральной строке):

$$\begin{pmatrix} & & \overline{a}_1 & & \\ & & \overline{a}_2 & & \\ \overline{b}_2^{\mathsf{s}} & -\overline{b}_1^{\mathsf{s}} & 0 & -\overline{a}_2^{\mathsf{s}} & -\overline{a}_1^{\mathsf{s}} \\ & & \overline{b}_1 & & \\ & & -\overline{b}_2 & & \end{pmatrix},$$

сопоставляется элемент пространства $\mathbb{C}^2 \otimes J_1$, имеющий вид:

$$e_1 \otimes (a_1, ..., a_{2n}) + e_{-1} \otimes (b_1, ..., b_{2n}).$$

Рассматривая два произвольных элемента пространства $\mathfrak{g}_1$ и скалярно их перемножая, нетрудно вывести, что матрица кососкалярного умножения на пространстве J_1 имеет вид:

$$\Omega = \begin{pmatrix} & \Omega_n \\ -\Omega_n & \end{pmatrix}.$$

Здесь через Ω_n обозначена матрица размера $n \times n$ следующего вида:

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

Пространство кососимметрических операторов в $\mathbb{C}^{4n}$ разлагается в прямую сумму двух тензорных произведений: пространства кососимметрических операторов в $\mathbb{C}^2$ и пространства симметрических операторов в J_1, и, наоборот, пространства симметрических операторов в $\mathbb{C}^2$ и пространства кососимметрических операторов в J_1. Первое из этих произведений есть $\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2 = \mathfrak{g}_2$, а так как пространство симметрических операторов в $\mathbb{C}^2$, очевидно, одномерно, то можно считать, что второе слагаемое представляет из себя алгебру $\mathfrak{sp}(J_1) = \mathfrak{g}_0$. Обозначим йорданову алгебру симметрических операторов симплектического пространства J_1 через $\mathfrak{sym}(J_1)$. Таким образом, $J_2 = \mathfrak{sym}(J_1)$.

Исходя из вида матрицы кососкалярного умножения на J_1 нетрудно получить матричное описание алгебры $\mathfrak{sym}(J_1)$ в базисе пространства J_1, в котором кососкалярное умножение имеет указанную выше матрицу Ω. А именно:

$$\mathfrak{sym}(J_1) = J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n} : X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n,\ Y^{\mathsf{s}} = -Y,\ Z^{\mathsf{s}} = -Z \right\}.$$

Аналогично, матричное описание алгебры $\mathfrak{sp}(J_1)$ в том же базисе имеет следующий вид:

$$\mathfrak{sp}(J_1) = \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n} : X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n,\ Y^{\mathsf{s}} = Y,\ Z^{\mathsf{s}} = Z \right\}.$$

Покажем явно, как тензорные произведения элементов йордановой алгебры $J_2 = \mathfrak{sym}(J_1)$ на элементы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ соответствуют элементам алгебры Ли $\mathfrak{so}_{4n+1}$. Переобозначим через e, f и h стандартный базис абстрактной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, удовлетворяющий соотношениям (2.17).

Матрице $M \in \mathfrak{sym}(J_1)$, имеющей вид:

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix},\ \text{где } X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n,\ Y^{\mathsf{s}} = -Y,\ Z^{\mathsf{s}} = -Z,$$

и базисному элементу $h \in \mathfrak{sl}_2$ соответствует матрица $\hat{M}_h \in h \otimes J_2 \subset \mathfrak{so}_{4n+1}$, которая имеет вид:

$$\hat{M}_h = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & M & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & -M^{\mathsf{s}} & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее на пустых местах в матрицах стоят нули.

Аналогично, матрице M и базисному элементу $e \in \mathfrak{sl}_2$ соответствует матрица $\hat{M}_e \in e \otimes J_2 \subset \mathfrak{so}_{4n+1}$, имеющая вид:

$$\hat{M}_e = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & M_c & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix},$$

где

$$M_c = M \cdot I_{2n} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Z & -X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix}.$$

Наконец, матрице M и базисному элементу $f \in \mathfrak{sl}_2$ соответствует матрица $\hat{M}_f \in f \otimes J_2 \subset \mathfrak{so}_{4n+1}$, имеющая вид:

$$\hat{M}_f = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \text{\Huge M_r} & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix},$$

где

$$M_r = I_{2n} \cdot M = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Z & -X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix}.$$

Явное вложение $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1) \subset \mathfrak{so}_{4n+1}$ устроено следующим образом. Матрице $N \in \mathfrak{sp}(J_1)$, имеющей вид:

$$N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -Z^{\mathsf{s}} \end{pmatrix}, \text{ где } X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n,\ Y^{\mathsf{s}} = Y,\ Z^{\mathsf{s}} = Z,$$

ставится в соответствие матрица $\hat{N}_0 \in \mathfrak{so}_{4n+1}$, которая имеет вид:

$$\hat{N}_0 = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & \text{\Huge N} & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \text{\Huge $-N^{\mathsf{s}}$} & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Обозначим скалярное умножение на J_2 с помощью $(,)_2$. Рассматривая два произвольных элемента пространства $\mathfrak{g}_2$ и скалярно их перемножая, нетрудно получить, что скалярное умножение на алгебре $J_2 \simeq \mathfrak{sym}(J_1)$ имеет вид:

$$(A, B)_2 = \operatorname{tr}(AB), \qquad \forall A, B \in \mathfrak{sym}(J_1).$$

Обозначим скалярное умножение на $\mathfrak{g}_0$ с помощью $(,)_0$. Действуя аналогично с элементами алгебры $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sp}(J_1)$, получим, что скалярное умножение на ней имеет вид:

$$(D_1, D_2)_0 = \operatorname{tr}(D_1 D_2), \qquad \forall D_1, D_2 \in \mathfrak{sp}(J_1).$$

Таким образом, подытоживая вышесказанное, имеем, что для рассматриваемой короткой SL_2-структуры выполнено, что:

$$J_1 = \mathbb{C}^{2n}, \quad J_2 = \mathfrak{sym}(J_1), \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1),$$

причём скалярное умножение на $\mathfrak{g}_0$ и на J_2 есть стандартное скалярное умножение линейных операторов.

Построенную короткую SL_2-структуру будем называть *максимальной короткой SL_2-структурой.* Так как для любой короткой SL_2-структуры с симплектическим пространством J_1 выполнены включения $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$ и $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$, то для максимальной короткой SL_2-структуры с симплектическим пространством J_1 алгебры J_2 и $\mathfrak{g}_0$ наибольшие по включению, что и оправдывает такое название.

3.2 Анализ максимальной короткой SL_2-структуры

Рассмотрим на симлектическом пространстве J_1 линейные операторы $R(a,b)$ ранга 1 ($a, b \in J_1$), определяемые по формуле:

$$R(a,b)c = \langle c, a\rangle b, \qquad \forall a, b, c \in J_1.$$

Очевидно, что введенный оператор R обладает следующим свойством:

$$R^*(a,b) = -R(b,a), \qquad \forall a, b \in J_1,$$

где $R^*(a,b) : J_1 \to J_1$ — оператор, сопряженный оператору $R(a,b)$.

Теперь введем на J_1 следующие отображения:

1. Отображение $\varphi_m : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{gl}(J_1)$ по формуле:

$$\varphi_m(a,b) = \frac{1}{2}\big(R(b,a) - R(a,b)\big).$$

2. Отображение $\delta_m : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{gl}(J_1)$ по формуле:

$$\delta_m(a,b) = \frac{1}{2}\big(R(b,a) + R(a,b)\big).$$

Ясно, что для произвольных $a, b \in J_1$ оператор $\delta_m(a,b)$ кососимметричен, а оператор $\varphi_m(a,b)$ симметричен относительно кососимметрического скалярного умножения пространства J_1, то есть:

$$\varphi_m(a,b) \in \mathfrak{sym}(J_1), \quad \delta_m(a,b) \in \mathfrak{sp}(J_1), \qquad \forall a, b \in J_1.$$

Из доказанного в предыдущем пункте для максимальной короткой SL_2-структуры $J_2 = \mathfrak{sym}(J_1)$ и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1)$. Из определения отображений δ_m и φ_m нетрудно заключить, что для произвольных $a, b \in J_1, A \in J_2, D \in \mathfrak{g}_0$:

$$\big(\varphi_m(a,b), A\big)_2 = \langle Aa, b\rangle;$$

$$\big(\delta_m(a,b), D\big)_0 = \langle Da, b\rangle.$$

Поэтому, в силу предложения 2, невырожденности скалярного умножения на J_2 и $\mathfrak{g}_0$ и указанных выше равенств, получаем, что отображения δ_m и φ_m совпадают с отображениями δ и φ, возникающими в коммутационных формулах для максимальной короткой SL_2-структуры.

Рассмотрим произвольную короткую SL_2-структуру на алгебре $\mathfrak{g}$, для которой $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1$. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — изотипная компонента тривиального представления $\mathfrak{sl}_2$, а J_2 — йорданова алгебра этой SL_2-структуры. В силу простоты йордановой алгебры J_2 ограничение инвариантного скалярного умножения $(\cdot,\cdot)_2$ йордановой алгебры $\mathfrak{sym}(J_1)$ на простую подалгебру J_2 невырожденно, а значит пропорционально инвариантному скалярному умножению на J_2, полученному из скалярного умножения на $\mathfrak{g}$. Таким образом скалярное умножение на J_2 пропорционально следу произведения операторов на J_1. Выбирая подходящий коэффициент для скалярного умножения на $\mathfrak{g}$, можем считать, что скалярное умножение на J_2 имеет вид

$$(A,B) = (A,B)_2 = \mathrm{tr}(AB), \quad \forall A, B \in J_2. \tag{3.1}$$

Воспользуемся равенством 3) предложения 2. Для произвольных $D \in \mathfrak{g}_0$ и $A, B \in J_2$ имеем:

$$(D,[A,B]) = ([D,A],B) = \mathrm{tr}([D,A]B) = \mathrm{tr}(D[A,B]).$$

Таким образом на подпространстве $[J_2, J_2] \subset \mathfrak{g}_0$ скалярное умножение определено по формуле

$$(D_1, D_2) = (D_1, D_2)_0 = \mathrm{tr}(D_1 D_2), \quad \forall D_1, D_2 \in [J_2, J_2]. \tag{3.2}$$

Заметим, что в силу разложения (2.21) и невырожденности скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$, вычисленное выше скалярное умножение невырожденно на $[J_2, J_2]$. Для удобства далее везде будем считать, что на простой йордановой алгебре J_2, а также на алгебре ее дифференцирований $\mathfrak{der}(J_2) = \mathfrak{inn}(J_2) = [J_2, J_2]$ скалярное умножение по умолчанию задано по формулам (3.1) и (3.2) соответственно.

Теорема 6. *Для любой короткой SL_2-структуры с симплектическим пространством J_1 отображения $\varphi : J_1 \times J_1 \to J_2$ и $\delta : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0$, возникающие в коммутационных формулах, сюръективны (как линейные отображения из $J_1 \otimes J_1$), причем $\varphi = \pi_2 \varphi_m$, $\quad \delta_c = \pi_c \delta_m$, где $\pi_2 : \mathfrak{sym}(J_1) \to J_2$ и $\pi_c : \mathfrak{sp}(J_1) \to [J_2, J_2]$ — ортогональные проекции на алгебры J_2 и $[J_2, J_2]$ соответственно. Для максимальной короткой SL_2-структуры $\varphi = \varphi_m$ и $\delta = \delta_m$.*

Доказательство.

Для максимальной короткой SL_2-структуры равенства $\varphi = \varphi_m$ и $\delta = \delta_m$ уже доказаны.

Рассмотрим произвольную короткую SL_2-структуру и подпространство $\mathfrak{g}_1 \oplus [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$. Из соотношений (2.2) следует, что $\mathfrak{g}_1 \oplus [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \lhd \mathfrak{g}$, откуда $\mathfrak{g}_1 \oplus [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}$. Таким образом, в связи с коммутационной формулой (2.6) имеют место следующие соотношения:

$$\mathfrak{g}_0 = \langle \delta(a, b) : \, a, b \in J_1 \rangle, \qquad J_2 = \langle \varphi(a, b) : \, a, b \in J_1 \rangle.$$

Следовательно, отображения δ и φ сюръективны. Действуя аналогично случаю максимальной короткой SL_2-структуры, для произвольной короткой SL_2-структуры согласно предложению 2 получаем, что $\forall a, b \in J_1, A, B \in J_2$:

$$(A, \varphi(a, b))_2 = \langle Aa, b \rangle = (A, \varphi_m(a, b))_2,$$

$$([A, B], \delta_c(a, b))_0 = ([A, B], \delta(a, b))_0 = \langle [A, B]a, b \rangle = ([A, B], \delta_m(a, b))_0.$$

В связи с невырожденностью скалярных умножений на J_2 и $[J_2, J_2]$, отображение φ совпадает с отображением $\pi_2 \varphi_m$, а отображение δ_c совпадает с отображением $\pi_c \delta_m$. ∎

4 Короткие SL_2-структуры и симплектические структуры Ли-Йордана

4.1 Короткие SL_2-структуры и кривизна симметрического пространства

Отступим ненадолго от рассмотрения коротких SL_2-структур.

Пусть $\mathfrak{h}$ — редуктивная алгебра Ли и $R : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{v})$ — точное ортогональное линейное представление на линейном пространстве $\mathfrak{v}$. Определим коммутаторы элементов из $\mathfrak{h}$ с элементами из $\mathfrak{v}$ при помощи представления R по формуле

$$[\xi, x] = R(\xi)x = -[x, \xi], \qquad \forall \xi \in \mathfrak{h}, \quad \forall x \in \mathfrak{v},$$

и коммутаторы двух элементов из $\mathfrak{v}$ как элементы из $\mathfrak{h}$, удовлетворяющие условию

$$\big(\xi, [x, y]\big) = \big([\xi, x], y\big), \qquad \forall \xi \in \mathfrak{h}, \quad \forall x, y \in \mathfrak{v}, \tag{4.1}$$

где круглые скобки обозначают $\mathfrak{h}$-инвариантные скалярные умножения в $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{v}$.

На пространстве $\mathfrak{v}$ определим 4-линейную форму

$$K(x, y, z, u) = \big([x, y], [z, u]\big), \qquad \forall x, y, z, u \in \mathfrak{v}.$$

Следующий результат восходит к Э. Картану и Б. Костанту (см., например, [6, раздел 1] и [7, раздел 1]).

Теорема 7. *Определенная выше операция в пространстве $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ задает на нем структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли тогда и только тогда, когда форма $K(x, y, z, u)$ обладает симметрией тензора кривизны, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению тождества Бианки:*

$$K(x, y, z, u) + K(y, z, x, u) + K(z, x, y, u) = 0. \tag{4.2}$$

Для доказательства достаточно проверить истинность тождества Якоби в следующих четырех случаях:

1. для элементов $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{h}$;
2. для элементов $\xi, \eta \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{v}$;
3. для элементов $\xi \in \mathfrak{h}, x, y \in \mathfrak{v}$;
4. для элементов $x, y, z \in \mathfrak{v}$.

В случае 1, тождество Якоби выполнено, поскольку $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли. В случае 2, тождество Якоби следует из того факта, что R — представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Случай 3 можно свести к случаю 2, скалярно умножая левую часть доказываемого тождества Якоби на произвольный элемент $\kappa \in \mathfrak{h}$ и используя инвариантность скалярного умножения. В последнем случае, тождество Якоби равносильно тождеству (4.2).

Тождество Бьянки в теореме выше фигурирует не случайным образом. Дело в том, что если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра Ли, то пространство G/H, где G — такая комплексная группа Ли, что $\operatorname{Lie} G = \mathfrak{g}$, а H — такая подгруппа Ли, что $\operatorname{Lie} H = \mathfrak{h}$, является комплексным симметрическим пространством, на котором есть G-инвариантный метрический тензор, индуцированный скалярным умножением на $\mathfrak{v}$, и симметрическая связность Леви-Чивита, его сохраняющая. Тензор Римана симметрического пространства G/H в базисной точке eH имеет вид:

$$\rho(x, y) = -\operatorname{ad}([x, y])|_{\mathfrak{v}}, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{v},$$

где $\mathfrak{v}$ отождествляется с касательным пространством $T_{eH}(G/H)$. Поэтому 4-линейная форма K — это, с точностью до знака, ковариантный тензор кривизны на пространстве G/H в точке eH. Более подробный анализ этой конструкции можно найти в [6, раздел 1].

Вернемся к рассмотрению коротких SL_2-структур. Положим $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{v} = \mathfrak{g}_1$, а в качестве представления R рассмотрим присоединенное представление. Как ранее отмечалось, присоединенное представление $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{v}$ точно, а в силу инвариантности скалярного умножения на $\mathfrak{g}$ еще и ортогонально.

Также в силу свойств инвариантного скалярного умножения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ операция коммутирования удовлетворяет условию (4.1).

Для указанных $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{v}$ рассмотрим 4-х линейную форму K. По теореме 7 форма K будет удовлетворять тождеству (4.2). В связи с равенствами (1.2) 4-линейную форму K можно переписать в терминах пространства J_1. А именно, положим $x = u_1 \otimes a, y = u_2 \otimes b, z =$

$u_3 \otimes c, u = u_4 \otimes d$, где $u_i \in \mathbb{C}^2$, $\forall i = \overline{1,4}$, $\forall a, b, c, d \in J_1$. Тогда, пользуясь равенствами (2.4)–(2.8), получим:

$$K(x,y,z,u) = \big(S(u_1,u_2) \otimes \varphi(a,b) + \langle u_1,u_2\rangle\delta(a,b), S(u_3,u_4) \otimes \varphi(c,d) + \langle u_3,u_4\rangle\delta(c,d)\big).$$

Откуда, пользуясь определением скалярного умножения и леммой 3, получим:

$$K(x,y,z,u) = \big(\langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle + \langle u_3,u_2\rangle\langle u_1,u_4\rangle\big)\big(\varphi(a,b),\varphi(c,d)\big)+ \\ + \langle u_1,u_2\rangle\langle u_3,u_4\rangle\big(\delta(a,b),\delta(c,d)\big). \quad (4.3)$$

Теперь равенство (4.2) можно переписать в виде:

$$\langle u_1,u_2\rangle\langle u_3,u_4\rangle\Big(\big(\varphi(b,c),\varphi(a,d)\big) + \big(\varphi(a,c),\varphi(b,d)\big) + \big(\delta(a,b),\delta(c,d)\big)\Big)+ \\ + \langle u_2,u_3\rangle\langle u_1,u_4\rangle\Big(\big(\varphi(b,a),\varphi(c,d)\big) + \big(\varphi(c,a),\varphi(b,d)\big) + \big(\delta(b,c),\delta(a,d)\big)\Big)+ \\ + \langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle\Big(\big(\varphi(a,b),\varphi(c,d)\big) + \big(\varphi(c,b),\varphi(a,d)\big) + \big(\delta(c,a),\delta(b,d)\big)\Big) = 0. \quad (4.4)$$

Обозначим

$$\overline{F}(a,b,c,d) = \big(\delta(a,b),\delta(c,d)\big) + \big(\varphi(b,c),\varphi(a,d)\big) + \big(\varphi(a,c),\varphi(b,d)\big).$$

Тогда равенство (4.4) можно записать в виде:

$$\langle u_1,u_2\rangle\langle u_3,u_4\rangle\overline{F}(a,b,c,d) + \langle u_2,u_3\rangle\langle u_1,u_4\rangle\overline{F}(b,c,a,d)+ \\ + \langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle\overline{F}(c,a,b,d) = 0. \quad (4.5)$$

Докажем, что тождество (4.5) равносильно симметричности формы $\overline{F}$. Для этого воспользуемся хорошо известным тождеством Плюккера для $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{C}^2$:

$$\langle u_1,u_2\rangle\langle u_3,u_4\rangle + \langle u_2,u_3\rangle\langle u_1,u_4\rangle + \langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle = 0.$$

Во-первых, (4.5) следует из симметричности $\overline{F}$ в силу тождества Плюккера. Во-вторых, из определения $\overline{F}$ сразу следует симметричность $\overline{F}$ относительно перестановки первых двух аргументов, а также относительно перестановки последних двух аргументов. Поэтому для доказательства обратной импликации достаточно убедиться в симметричности $\overline{F}$ относительно циклической перестановки первых трех аргументов. Для этого подставим в (4.5) $u_1 = u_3 = e_1, u_2 = u_4 = e_{-1}$. Тогда $\langle u_1,u_2\rangle\langle u_3,u_4\rangle = -\langle u_2,u_3\rangle\langle u_1,u_4\rangle = 1$, а $\langle u_3,u_1\rangle\langle u_2,u_4\rangle = 0$, откуда и будет следовать симметричность $\overline{F}$ относительно циклических перестановок первых трех аргументов.

В качестве примера вычислим форму $\overline{F}_m$ для максимальной короткой SL_2структуры. Имеем:

$$\overline{F}_m(a,b,c,d) = \big(\delta_m(a,b),\delta_m(c,d)\big) + \big(\varphi_m(b,c),\varphi_m(a,d)\big) + \big(\varphi_m(a,c),\varphi_m(b,d)\big) = \\ = \big\langle \delta_m(a,b)c + \varphi_m(b,c)a + \varphi_m(a,c)b, d\big\rangle = \\ = \frac{1}{2}\Big\langle -\big(\langle a,c\rangle b + \langle b,c\rangle a\big) + \big(\langle b,a\rangle c - \langle c,a\rangle b\big) + \big(\langle a,b\rangle c - \langle c,b\rangle a\big), d\Big\rangle = 0.$$

В общем случае воспользуемся предложением 2:

$$\overline{F}(a,b,c,d) = \big(\delta(a,b),\delta(c,d)\big) + \big(\varphi(b,c),\varphi(a,d)\big) + \big(\varphi(a,c),\varphi(b,d)\big) = \\ = \big(\delta(a,b)c + \varphi(b,c)a + \varphi(a,c)b, d\big).$$

Положим
$$F(a,b,c) = \delta(a,b)c + \varphi(b,c)a + \varphi(a,c)b.$$
Таким образом с помощью формулы выше определено трилинейное отображение
$$F : J_1 \times J_1 \times J_1 \to J_1.$$
Так как для произвольной короткой SL_2-структуры как было показано выше форма $\overline{F}$ симметрична, то и отображение F также симметрично.

4.2 Основная теорема

Теперь пришло время сформулировать и доказать основную теорему данной работы. Для удобства формулировки введем следующие определения.

Пусть J_1 — симплектическое пространство, $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$ — полупростая йорданова подалгебра, единицей которой является тождественный оператор пространства J_1 и $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$ — редуктивная подалгебра Ли, причем $[J_2, J_2] \subset \mathfrak{g}_0$ и $[\mathfrak{g}_0, J_2] \subset J_2$. Тогда имеет место следующее разложение
$$\mathfrak{g}_0 = [J_2, J_2] \oplus \mathfrak{i}_0,$$
где $\mathfrak{i}_0$ — ядро присоединенного действия $\mathfrak{g}_0$ на J_2. Так как йорданова алгебра J_2 полупроста, то по теореме 1 алгебра Ли $[J_2, J_2]$ также полупроста. Будем считать, что на алгебрах $\mathfrak{sp}(J_1)$ и $\mathfrak{sym}(J_1)$, а также их подалгебрах $[J_2, J_2]$ и J_2 соответственно задано невырожденное инвариантное скалярное умножение равное следу произведения операторов.

Пусть задано билинейное симметрическое $\mathfrak{g}_0$-эквивариантное сюръективное отображение $\delta_0 : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{i}_0$, удовлетворяющее следующему тождеству
$$\delta_0(Aa, b) = \delta_0(a, Ab), \quad \forall A \in J_2, a, b \in J_1. \tag{4.6}$$
Зададим отображения $\delta : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0$ и $\varphi : J_1 \times J_1 \to J_2$ с помощью формул
$$\delta = \delta_0 + \delta_c, \quad \delta_c = \pi_c \delta_m, \quad \varphi = \pi_2 \varphi_m, \tag{4.7}$$
где $\pi_c : \mathfrak{sp}(J_1) \to [J_2, J_2]$ — ортогональная проекция на $[J_2, J_2]$, а $\pi_2 : \mathfrak{sym}(J_1) \to J_2$ — ортогональная проекция на J_2.

Определение 6. *Четверка $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$ называется симплектической структурой Ли-Йордана, если трилинейное отображение $F : J_1 \times J_1 \times J_1 \to J_1$, заданное формулой*
$$F(a,b,c) = \delta(a,b)c + \varphi(b,c)a + \varphi(a,c)b$$
симметрично.

Замечание 1. *Нетрудно заметить, что отображения δ_c (а значит и δ) и φ $\mathfrak{g}_0$-эквивариантны. Действительно, $\delta_c = \pi_c \delta_m$, $\varphi = \pi_2 \varphi_m$, причем отображения δ_m и φ_m $\mathfrak{sp}(J_1)$-эквивариантны, а проекции π_c и π_2 $\mathfrak{g}_0$-эквивариантны как ортогональные проекции на $\mathfrak{g}_0$-инвариантные подпространства относительно инвариантного скалярного умножения. Отображение δ_c является сюръективным как композиция сюръективных отображений π_c и δ_m. При присоединенном представлении $\mathfrak{g}_0$ на самой себе неприводимые слагаемые, входящие в $\mathfrak{i}_0$ и $[J_2, J_2]$, попарно неизоморфны друг другу. Поэтому, так как отображения δ_0 и δ_c $\mathfrak{g}_0$-эквивариантны, то отображение $\delta = \delta_0 + \delta_c$ будет также сюръективно как сумма двух сюръективных гомоморфизмов $\mathfrak{g}_0$-модулей.*

Определение 7. *Симплектическая структура Ли-Йордана* $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$ *называется простой, если йорданова алгебра* J_2 *проста.*

Теорема 8. *Существует взаимно-однозначное соответствие между простыми симплектическими структурами Ли-Йордана и простыми алгебрами Ли с короткой* SL_2*-структурой, при котором простой симплектической структуре Ли-Йордана* $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$ *ставится в соответствие простая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *с короткой* SL_2*-структурой, имеющая вид*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\right) \oplus \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\right), \tag{4.8}$$

где операция коммутирования на $\mathfrak{g}$ *определяется по следующим формулам* ($D \in \mathfrak{g}_0, u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1, X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2$):

$$[D, u \otimes a] = u \otimes Da, \tag{4.9}$$

$$[D, X \otimes A] = X \otimes [D, A], \tag{4.10}$$

$$[u \otimes a, v \otimes b] = S(u, v) \otimes \varphi(a, b) + \langle u, v\rangle \delta(a, b), \tag{4.11}$$

$$[X \otimes B, u \otimes a] = Xu \otimes Ba, \tag{4.12}$$

$$[X \otimes A, Y \otimes B] = [X, Y] \otimes (A \circ B) + \frac{1}{2}(X, Y)[A, B], \tag{4.13}$$

Здесь отображения $\delta : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0$ *и* $\varphi : J_1 \times J_1 \to J_2$ *заданы с помощью формул (4.7), и через* $\circ$ *обозначена операция умножения в йордановой алгебре* J_2 *(в формулах (4.9), (4.10) и (4.12) при коммутировании элементов в другом порядке подразумевается знак минус перед выражением справа).*

Доказательство.

Для начала отметим, что по каждой простой алгебре Ли с короткой SL_2-структурой, как было показано выше, можно построить простую симплектическую структуру Ли-Йордана. Остается доказать, что по простой симплектической структуре Ли-Йордана $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$ можно построить простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с короткой SL_2-структурой. Обозначим $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes J_2$. В силу того, что формулы (4.10) и (4.13) идентичны соответствующим формулам для очень короткой SL_2-структуры, подпространство $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$ наделяется структурой алгебры Ли.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1$. Определим на нем операцию коммутирования с помощью формул (4.9)–(4.13). Докажем, что с помощью этих формул пространство $\mathfrak{g}$ наделяется структурой алгебры Ли. Для этого достаточно доказать, что тождество Якоби истинно в следующих случаях:

1. для элементов $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{h}$;

2. для элементов $\xi, \eta \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_1$;

3. для элементов $\xi \in \mathfrak{h}, x, y \in \mathfrak{g}_1$;

4. для элементов $x, y, z \in \mathfrak{g}_1$.

В случае 1 тождество Якоби выполнено в связи с тем, что $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли. С помощью формул (4.9) и (4.12) можно определить линейное отображение $R : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространство линейных операторов на $\mathfrak{g}_1$. Данное отображение будет линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Действительно, докажем определяющее соотношение линейного представления алгебры Ли для R, то есть, что

$$R([\xi, \eta])x = [R(\xi), R(\eta)]x = R(\xi)R(\eta)x - R(\eta)R(\xi)x, \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{h},\, x \in \mathfrak{g}_1. \tag{4.14}$$

Положим $x = u \otimes a \in \mathfrak{g}_1$. В силу линейности, достаточно доказать равенство (4.14) для следующих трех случаев:

1. $\xi, \eta \in \mathfrak{g}_0$
2. $\xi \in \mathfrak{g}_0, \eta \in \mathfrak{g}_2$
3. $\xi, \eta \in \mathfrak{g}_2$

В случае 1 положим $\xi = D_1, \eta = D_2 \in \mathfrak{g}_0$. Имеем:

$$R([\xi, \eta])x = u \otimes [D_1, D_2]a = u \otimes D_1 D_2 a - u \otimes D_2 D_1 a = [R(\xi), R(\eta)]x.$$

В случае 2 положим $\xi = D \in \mathfrak{g}_0, \eta = X \otimes A \in \mathfrak{g}_2$. Имеем:

$$R([\xi, \eta])x = Xu \otimes [D, A]a = [D, Xu \otimes Aa] - [X \otimes A, u \otimes Da] = [R(\xi), R(\eta)]x.$$

В случае 3 положим $\xi = X \otimes A, \eta = Y \otimes B \in \mathfrak{g}_2$. Имеем:

$$\begin{aligned}R([\xi, \eta])x &= [X, Y]u \otimes (A \circ B)a + \frac{1}{2}(X, Y)u \otimes [A, B]a = \\ &= [X, Y]u \otimes (A \circ B)a + \frac{1}{2}(XY + YX)u \otimes [A, B]a = XYu \otimes (A \circ B + \frac{1}{2}[A, B])a - \\ &- YXu \otimes (A \circ B - \frac{1}{2}[A, B])a = XYu \otimes ABa - YXu \otimes BAa = \\ &= [X \otimes A, Yu \otimes Ba] - [Y \otimes B, Xu \otimes Aa] = [R(\xi), R(\eta)]x.\end{aligned}$$

Таким образом отображение R — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Истинность тождества Якоби в случае 2 следует из определяющего соотношения представления R. Остается доказать истинность тождества Якоби для случаев 3 и 4.

Рассмотрим случай 3. В этом случае тождество Якоби достаточно доказать для следующих двух подслучаев:

1. для элементов $\xi \in \mathfrak{g}_0, x, y \in \mathfrak{g}_1$;
2. для элементов $\xi \in \mathfrak{g}_2, x, y \in \mathfrak{g}_1$.

В первом из представленных подслучаев случая 3 для $\xi = D \in \mathfrak{g}_0, x = u \otimes a, y = v \otimes b \in \mathfrak{g}_1$ тождество Якоби выглядит следующим образом:

$$\big[[D, u \otimes a], v \otimes b\big] + \big[[u \otimes a, v \otimes b], D\big] + \big[[v \otimes b, D], u \otimes a\big] = 0.$$

Применяя коммутационные формулы (4.9)–(4.13), равенство выше можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}&S(u, v) \otimes \varphi(Da, b) + \langle u, v\rangle \delta(Da, b) - \\ &\quad - S(u, v) \otimes [D, \varphi(a, b)] - \langle u, v\rangle [D, \delta(a, b)] + \\ &\quad\quad + S(u, v) \otimes \varphi(a, Db) + \langle u, v\rangle \delta(a, Db) = 0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Применяя $\mathfrak{g}_0$-эквивариантность δ для равенства (4.15), получим:

$$S(u, v) \otimes \varphi(Da, b) - S(u, v) \otimes [D, \varphi(a, b)] + S(u, v) \otimes \varphi(a, Db) = 0.$$

Очевидно, что полученное равенство равносильно $\mathfrak{g}_0$-эквивариантности отображения φ.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится вывести два вспомогательных тождества. Для произвольных $A, B \in J_2, a, b \in J_1$ имеем:

$$\begin{aligned}\big([A,\delta(a,b)],B\big) = \big([A,\delta_c(a,b)],B\big) = \\ = \big(\delta_c(a,b),[B,A]\big) = \big\langle [B,A]a,b\big\rangle = \\ = \big\langle BAa,b\big\rangle - \big\langle ABa,b\big\rangle = \big\langle BAa,b\big\rangle - \big\langle Ba,Ab\big\rangle = \\ = \big(\varphi(Aa,b)-\varphi(a,Ab),B\big).\end{aligned}$$

Так как равенство выше выполнено для произвольного $B \in J_2$, то из невырожденности скалярного умножения на J_2 следует, что

$$[A,\delta(a,b)] = \varphi(Aa,b)-\varphi(a,Ab), \qquad \forall A \in J_2, a, b \in J_1. \tag{4.16}$$

Это и есть одно из необходимых нам тождеств. Теперь выведем второе тождество. Для произвольных $A, B, C \in J_2, a, b \in J_1$ имеем

$$\begin{aligned}\big([A,\varphi(a,b)],[B,C]\big) = \big(\varphi(a,b),[[B,C],A]\big) = \big\langle [[B,C],A]a,b\big\rangle = \\ = \big\langle [B,C]Aa,b\big\rangle - \big\langle A[B,C]a,b\big\rangle = \langle [B,C]Aa,b\rangle - \langle [B,C]a,Ab\rangle = \\ = \big(\delta_c(Aa,b)-\delta_c(a,Ab),[B,C]\big).\end{aligned}$$

Так как равенство выше выполнено для всех элементов, порождающих алгебру Ли $[J_2, J_2]$, то

$$[A,\varphi(a,b)] = \delta_c(Aa,b)-\delta_c(a,Ab), \qquad \forall A \in J_2, a, b \in J_1.$$

Откуда, воспользовавшись тождеством (4.6) и определением отображения δ, получим

$$[A,\varphi(a,b)] = \delta(Aa,b)-\delta(a,Ab), \qquad \forall A \in J_2, a, b \in J_1. \tag{4.17}$$

Это и есть второе из необходимых нам тождеств.

Рассмотрим тождество Якоби во втором из представленных выше подслучаев случая 3 для $\xi = X \otimes A \in \mathfrak{g}_2, x = u \otimes a, y = v \otimes b \in \mathfrak{g}_1$:

$$\big[[X\otimes A, u\otimes a], v\otimes b\big] + \big[[u\otimes a, v\otimes b], X\otimes A\big] + \big[[v\otimes b, X\otimes A], u\otimes a\big] = 0.$$

Применяя коммутационные формулы (4.9)–(4.13), равенство выше можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}S(Xu,v)\otimes\varphi(Aa,b) + \langle Xu,v\rangle\delta(Aa,b) + \\ + [S(u,v),X]\otimes(\varphi(a,b)\circ A) + \frac{1}{2}(S(u,v),X)[\varphi(a,b),A] + \\ + \langle u,v\rangle X\otimes[\delta(a,b),A] - S(Xv,u)\otimes\varphi(Ab,a) - \langle Xv,u\rangle\delta(Ab,a) = 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Воспользовавшись доказанными выше тождествами (4.16) и (4.17) и леммой 3 равенство 4.18 можно переписать в виде:

$$\big[X,S(u,v)\big] \quad \otimes \quad \left(\frac{1}{2}\varphi(Aa,b)+\frac{1}{2}\varphi(a,Ab)-\varphi(a,b)\circ A\right) \quad = \quad 0. \tag{4.19}$$

Чтобы доказать равенство (4.19), нам необходимо вывести еще одно вспомогательное тождество. Воспользовавшись свойствами скалярного умножения на йордановой алгебре J_2 и равенством $\varphi = \pi_2\varphi_m$, имеем для произвольных $A, B \in J_2, a, b \in J_1$:

$$\begin{aligned}(A \circ \varphi(a,b), B) &= (\varphi(a,b), A\circ B) = \\ &= \frac{1}{2}(AB, \varphi(a,b)) + \frac{1}{2}(BA, \varphi(a,b)) = \frac{1}{2}\langle ABa, b\rangle + \frac{1}{2}\langle BAa, b\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\langle Ba, Ab\rangle + \frac{1}{2}\langle BAa, b\rangle = \frac{1}{2}(B, \varphi(a, Ab)) + \frac{1}{2}(B, \varphi(Aa, b)).\end{aligned}$$

Откуда:

$$A \circ \varphi(a,b) = \frac{1}{2}\big(\varphi(Aa,b) + \varphi(a,Ab)\big), \quad \forall A \in J_2, a, b \in J_1. \tag{4.20}$$

Воспользовавшись равенством (4.20), получим тождество (4.19), а вместе с ним и тождество Якоби в случае 3.

Рассмотрим случай 4. Для $x = u\otimes a, y = v\otimes b, z = w\otimes c \in \mathfrak{g}_1$ тождество Якоби выглядит следующим образом:

$$\big[[u\otimes a, v\otimes b], w\otimes c\big] + \big[[v\otimes b, w\otimes c], u\otimes a\big] + \big[[w\otimes c, u\otimes a], v\otimes b\big] = 0.$$

Применяя коммутационные формулы (4.9)–(4.13), можно переписать его в виде:

$$\langle u,v\rangle w\otimes F(a,b,c) + \langle v,w\rangle u\otimes F(b,c,a) + \langle w,u\rangle v\otimes F(c,a,b) = 0, \tag{4.21}$$

где

$$F(a,b,c) = \delta(a,b)c + \varphi(a,c)b + \varphi(b,c)a.$$

Так как по определению симплектической структуры Ли-Йордана $(J_1; J_2; \mathfrak{g}_0; \delta_0)$ отображение $F : J_1\times J_1\times J_1 \to J_1$ симметрично, то равенство (4.21) можно переписать в виде:

$$\big(\langle u,v\rangle w + \langle v,w\rangle u + \langle w,u\rangle v\big)\otimes F(a,b,c) = 0.$$

По лемме 3 $\langle u,v\rangle w + \langle v,w\rangle u + \langle w,u\rangle v = 0$, а значит отсюда следует тождество Якоби в случае 4.

Таким образом векторное пространство $\mathfrak{g}$ наделяется структурой алгебры Ли с короткой SL_2-структурой. Докажем, что построенная алгебра Ли проста. Пусть $\mathfrak{j}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0 \oplus \mathfrak{j}_1 \oplus \mathfrak{j}_2, \text{ где } \mathfrak{j}_i = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{j}, \quad i = 0,1,2.$$

Рассмотрим $\mathfrak{j}_2$. Ясно, что $\mathfrak{j}_2 = \mathfrak{sl}_2\otimes I_2$, причем $I_2 \triangleleft J_2$. Так как йорданова алгебра J_2 проста, то возможны два случая:

1. $I_2 = 0$. Тогда $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0 \oplus \mathfrak{j}_1$. Заметим, что $\mathfrak{j}_1 = \mathbb{C}^2\otimes I_1$, где $I_1 \subset J_1$.

Так как $\mathfrak{j}$ инвариантен относительно коммутирования с $\mathfrak{g}_1$, то из тождества (4.11) следует, что

$$\varphi(a,b) = 0, \qquad \forall a \in I_1, b \in J_1.$$

Следовательно,

$$\langle Aa, b\rangle = (A, \varphi(a,b)) = 0, \qquad \forall A \in J_2, a \in I_1, b \in J_1.$$

Пользуясь невырожденностью скалярного умножения на J_1, из тождества выше можно вывести, что $Aa = 0$, $\forall A \in J_2, a \in I_1$. Но тогда $I_1 = 0$ в связи с тем, что алгебра J_2 содержит тождественный оператор. Значит $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0$.

Так как $\mathfrak{j}$ инвариантен относительно коммутирования с $\mathfrak{g}_1$, то $Da = 0$, $\forall D \in \mathfrak{j}_0, a \in J_1$, откуда немедленно следует, что $\mathfrak{j} = 0$.

2. $I_2 = J_2$. Тогда $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_0 \oplus \mathfrak{j}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Так как $\mathfrak{j}$ инвариантен относительно коммутирования с $\mathfrak{g}_1$, а алгебра J_2 содержит тождественный оператор, то $\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{g}_1$. Так как отображение δ сюръективно, то $\mathfrak{g}_0$ порождается операторами $\delta(a,b)$, где $a, b \in J_1$. Следовательно, так как идеал $\mathfrak{j}$ содержит все такие операторы, $\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{g}_0$, а значит $\mathfrak{j} = \mathfrak{g}$.

Таким образом сконструированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, что и доказывает теорему. ∎

5 Классификация коротких SL_2-структур

5.1 Предварительные замечания

Рассмотрим произвольную короткую SL_2-структуру на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и сохраним все обозначения предыдущих разделов, причем через e, f, h вновь обозначим базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{g}$, удовлетворяющие соотношениям (2.17).

Заметим, что в связи с тем, что $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1 \neq 0$, то единственно возможным ненулевым значением простого корня алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на элементе h является 1. На диаграмме Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$ закрасим черным вершины, соответствующие простым корням, имеющим значение 1 на элементе h, и будем называть такие вершины *единичными вершинами*. Вершины диаграммы, соответствующие корням, имеющим нулевое значение на элементе h, будем рисовать незакрашенными и называть *нулевыми вершинами*. Полученную диаграмму назовем *диаграммой короткой SL_2-структуры на алгебре Ли $\mathfrak{g}$*.

Простым примером такой диаграммы является диаграмма короткой SL_2-структуры на простой алгебре ли $\mathfrak{g} = G_2$. Старший корень данной алгебры имеет вид:

$$\alpha_{\max} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

где α_1, α_2 — простые корни. Тогда, так как $\alpha_{\max}(h) = 2$, то единственно возможным здесь случаем является тот, при котором $\alpha_2(h) = 1, \alpha_1(h) = 0$. Тогда диаграмма Дынкина этого случая будет иметь вид:

По диаграмме короткой SL_2-структуры легко вычислять размерность центра $\mathfrak{z}^0$ алгебры $\mathfrak{g}^0$. Так как подалгебра Картана $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}^0$, то размерность центра равна разности ранга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ранга полупростой части алгебры $\mathfrak{g}^0$, то есть количеству черных вершин.

Теорема 8 позволяет утверждать, что перечислив все существующие короткие SL_2-структуры на простых алгебрах Ли и указав простые симплектические структуры Ли-Йордана, соответствующие этим структурам, мы тем самым перечислим все возможные простые симплектические структуры Ли-Йордана, которые, вообще говоря, можно рассматривать сами по себе, не привязывая их к SL_2-структурам. Для того, чтобы это проделать, обозначим через $\widetilde{G}^0$ алгебраическую группу, касательной алгеброй которой является алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0$, и воспользуемся следующим утверждением:

Теорема 9. *Для заданной $\mathbb{Z}$-градуировки, определенной полупростым элементом $h \in \mathfrak{g}$ следующие условия эквивалентны:*

1. *Элемент h включается в $\mathfrak{sl}_2$-тройку;*
2. *Представление $\widetilde{G}^0 : \mathfrak{g}^2$ не имеет открытых орбит;*
3. *На подпространстве $\mathfrak{g}^2$ имеется нетривиальный полиномиальный инвариант действия $\widetilde{G}^0 : \mathfrak{g}^2$.*

Доказательство равносильности пунктов 1 и 2 из теоремы выше можно найти в [1, пункт 1, раздел 1.4]. Из пункта 3 очевидным образом следует пункт 2. Доказательство же того, что из пункта 1 следует пункт 3 можно найти в [8, пункт 1, предложения 1.1 и 1.2].

Важно отметить, что $\mathfrak{sl}_2$-тройка, содержащая полупростой элемент h, определена однозначно, с точностью до сопряжения с G^0, где G^0 — связная алгебраическая группа с касательной алгеброй $\mathfrak{g}^0$. А именно, в качестве элемента e можно взять любой элемент из открытой G^0-орбиты в $\mathfrak{g}^2$, а элемент f по элементам h и e определяется однозначно.

Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы классифицировать все короткие SL_2-структуры на простых алгебрах Ли.

5.2 Классификация коротких SL_2-структур на классических простых алгебрах Ли

В случае классической простой алгебры Ли элемент h представляет из себя диагональную матрицу, а элементы на диагонали могут быть вычислены по значениям этого элемента на простых корнях. Коммутируя этот элемент с произвольной матрицей из алгебры $\mathfrak{g}$ можно определить пространство представления $\mathfrak{g}^2$, а также группу $\widetilde{G}^0$. Этим способом полностью определяется действие $\widetilde{G}^0 : \mathfrak{g}^2$, и, пользуясь теоремой 9, а точнее ее третьим пунктом, можно определить существует ли короткая SL_2-структура в данном случае и, если существует, то при каких условиях. Далее везде будем обозначать старший корень алгебры $\mathfrak{g}$ через $\alpha_{\max}$, а простые корни через α_i.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Зависимость старшего корня от простых корней выражается формулой

$$\alpha_{\max} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}.$$

Так как $\alpha_{\max}(h) = 2$ и множество единичных вершин диаграммы непусто, то возможен единственный случай:

$$\alpha_i(h) = 1, \alpha_j(h) = 1, \alpha_k(h) = 0, \qquad \forall k = \overline{1, (n-1)}, k \neq i, j, i < j.$$

В этом случае элемент h — диагональная матрица размера $n \times n$ следующего вида (далее везде через $E^{(i)}$ будем обозначать единичную матрицу размера $i \times i$):

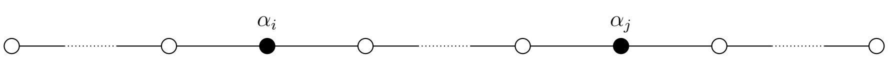
$$h = \begin{pmatrix} cE^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & (c-1)E^{(j-i)} & 0 \\ 0 & 0 & (c-2)E^{(n-j)} \end{pmatrix}.$$

Числовой множитель $c \in \mathbb{C}$ в формуле выше однозначно определяется из условия $\mathrm{tr}(h) = 0$.

Алгебру $\mathfrak{g}$ можно условно представить в виде:

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}^0_{(1)} & \mathfrak{g}^1_{(1)} & \mathfrak{g}^2 \\ \mathfrak{g}^{-1}_{(1)} & \mathfrak{g}^0_{(2)} & \mathfrak{g}^1_{(2)} \\ \mathfrak{g}^{-2} & \mathfrak{g}^{-1}_{(2)} & \mathfrak{g}^0_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Эта запись означает, что алгебра $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы подпространств $\mathfrak{g}^k$ для $k \neq 0$, представляющих собой пространства матриц из $\mathfrak{g}$, у которых ненулевые элементы могут стоять только на местах, соответствующих расположению блоков $\mathfrak{g}^k_{(m)}$ для $m = 1, 2$ в формуле выше, и подпространства $\mathfrak{g}^0$, представляющего собой пространство блочно-диагональных матриц из $\mathfrak{sl}_n$, состоящих из блоков $\mathfrak{g}^0_{(m)}$ для $m = 1, 2, 3$. Здесь блок $\mathfrak{g}^0_{(1)}$ размера $i \times i$, блок $\mathfrak{g}^0_{(2)}$ — размера $(j-i) \times (j-i)$, блок $\mathfrak{g}^0_{(3)}$ — размера $(n-j) \times (n-j)$. Верхний индекс каждого блока указывает на собственное пространство, к которому относится данный блок. Нижние индексы призваны различать разные блоки относящиеся к одному собственному пространству. Изобразим диаграмму этого случая:



Заметим, что полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ совпадает с $\mathfrak{sl}_i \oplus \mathfrak{sl}_{j-i} \oplus \mathfrak{sl}_{n-j}$, а также $\dim \mathfrak{z}^0 = 2$, откуда заключаем, что $\widetilde{G}^0 = SL_i \times SL_{j-i} \times SL_{n-j} \times Z$, где Z — одномерный центр. Также несложно заключить, что $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^{n-j})^*$ как $\widetilde{G}^0$-модуль. Так как действие одномерного центра Z на $\mathfrak{g}^2$ тривиально, то очевидно, что инвариант на $\mathfrak{g}^2$ для группы $\widetilde{G}^0$ существует тогда и только тогда, когда $i = n - j$, и равен определителю матрицы из $\mathfrak{g}^2$.

Определим простую симплектическую структуру Ли-Йордана, которая соответствует данной структуре. Несложно понять,что элементы e, f, h для данной короткой SL_2-структуры представляют из себя матрицы размера $n \times n$ следующего вида:

$$h = \begin{pmatrix} E^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E^{(i)} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E^{(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}^0}(\mathfrak{sl}_2), \mathfrak{g}^1 = e_1 \otimes J_1, \mathfrak{g}^2 = e \otimes J_2,$$

где

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}^0}(\mathfrak{sl}_2) = \{\xi \in \mathfrak{g}^0 : [\xi, \eta] = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{sl}_2 \subset \mathfrak{g}_2\}.$$

Обозначим

$$\mathfrak{c}_{i,n} = \{T \in \mathfrak{gl}_n : T = \operatorname{diag}\{\underbrace{c_1, .., c_1}_{i}, \underbrace{c_2, .., c_2}_{n-2i}, \underbrace{c_1, .., c_1}_{i}\}, \; 2c_1 i + c_2(n-2i) = 0, \; c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Из равенств выше нетрудно заключить, что:

$$J_1 = \mathfrak{g}^1_{(1)} \oplus \mathfrak{g}^1_{(2)} \cong \left(\mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{n-2i}\right)^*\right) \oplus \left(\mathbb{C}^{n-2i} \otimes \left(\mathbb{C}^i\right)^*\right),$$

$$\mathfrak{g}^0_{(1)} \oplus \mathfrak{g}^0_{(2)} \oplus \mathfrak{g}^0_{(3)} \supset \mathfrak{g}_0 = \{(A, B, A), \text{ где } A \in \mathfrak{gl}_i, B \in \mathfrak{gl}_{n-2i}, \, 2\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B = 0\},$$

$$\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{sl}_i \oplus \mathfrak{sl}_{n-2i} \oplus \mathfrak{c}_{i,n},$$

$$J_2 = \mathfrak{g}^2 \cong \mathfrak{gl}_i.$$

Зададим скалярное умножение на $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ по следующей формуле:

$$(A, B) = (n - 2i) \operatorname{tr}(AB), \quad \forall A, B \in \mathfrak{sl}_n.$$

Нормировочный множитель $n - 2i$ в формуле выше выбран таким образом, чтобы в результате вычислений скалярное умножение на йордановой алгебре $J_2 \cong \mathfrak{gl}_i$ равнялось бы следу произведения операторов на пространстве J_1. Проверим, что это действительно так. Действия алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ и йордановой алгебры $J_2 = \mathfrak{gl}_i$ на пространстве J_1 осуществляются по следующим формулам:

$$C(a, b) = (Ca, bC), \quad \forall C \in \mathfrak{gl}_i, (a, b) \in J_1;$$

$$(D_1, D_2)(a, b) = (D_1 a - a D_2, D_2 b - b D_1), \quad \forall (D_1, D_2) \in \mathfrak{g}_0, (a, b) \in J_1.$$

Следовательно, след произведения операторов из J_2 имеет вид

$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1) = 2(n - 2i) \operatorname{tr}(AB), \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}_i,$$

где через $\mathcal{C}_1$ обозначен линейный оператор на пространстве J_1, соответствующий матрице $C \in \mathfrak{gl}_i$.

Рассматривая произвольный элемент $\tilde{e} \otimes A \in \mathfrak{g}^2 = \tilde{e} \otimes J_2$ и скалярно умножая его на произвольный элемент $\tilde{f} \otimes B \in \mathfrak{g}^{-2} = \tilde{f} \otimes J_2$, мы получим, что

$$(A, B)_2 = 2(n - 2i) \operatorname{tr}(AB), \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}_i,$$

что подтверждает указанное выше соглашение.

При данном выборе нормировочного множителя скалярного умножения на $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ симплектическая структура на пространстве J_1 задается с помощью кососкалярного умножения, которое имеет вид $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^{n-2i})^*, b_1, b_2 \in \mathbb{C}^{n-2i} \otimes (\mathbb{C}^i)^*$:

$$\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = (n-2i)\,\mathrm{tr}(b_1 a_2 - a_1 b_2).$$

Операция умножения на йордановой алгебре J_2 выглядит стандартным образом, то есть:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA), \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}_i.$$

Действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на йорданову алгебру J_2 осуществляется по следующей формуле:

$$(D_1, D_2)(A) = [D_1, A], \quad \forall (D_1, D_2) \in \mathfrak{g}_0, A \in J_2.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\mathfrak{i}_0 = \mathfrak{sl}_{n-2i} \oplus \mathfrak{c}_{i,n}, [J_2, J_2] = \mathfrak{sl}_i.$$

Отображения φ и δ в данном случае имеют следующий вид $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^{n-2i})^*$, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}^{n-2i} \otimes (\mathbb{C}^i)^*$:

$$\varphi\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \frac{1}{2}(a_2 b_1 - a_1 b_2),$$

$$\delta\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \left(-\frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1), b_1 a_2 + b_2 a_1\right).$$

При этом

$$\delta_0\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \left(-\frac{1}{2i}\,\mathrm{tr}(a_1 b_2 + a_2 b_1) E^{(i)}, b_1 a_2 + b_2 a_1\right).$$

При разборе дальнейших случаев, мы не будем так подробно описывать все действия и отображения, возникающие в той или иной короткой SL_2-структуре. При желании все этой можно проделать прямыми вычислениями.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$. Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ в базисе, в котором ее элементы представляют собой матрицы размера $(2n+1) \times (2n+1)$, кососимметричные относительно побочной диагонали. В этом случае

$$\alpha_{\max} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_n.$$

Так как множество единичных вершин на диаграмме короткой SL_2-структуры непусто, то единственно возможным случаем для этой алгебры Ли является следуюший случай:

$$\alpha_i(h) = 1, \qquad i = \overline{2, n}.$$

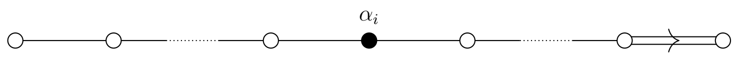
В этом случае элемент h есть матрица $(2n+1) \times (2n+1)$ следующего вида:

$$h = \begin{pmatrix} E^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E^{(i)} \end{pmatrix}$$

Аналогично случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ можно условно представить в виде:

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}^0_{(1)} & \mathfrak{g}^1 & \mathfrak{g}^2 \\ \mathfrak{g}^{-1} & \mathfrak{g}^0_{(2)} & -\big(\mathfrak{g}^1\big)^{\mathrm{s}} \\ \mathfrak{g}^{-2} & -\big(\mathfrak{g}^{-1}\big)^{\mathrm{s}} & -\big(\mathfrak{g}^0_{(1)}\big)^{\mathrm{s}} \end{pmatrix}.$$

Здесь блок $\mathfrak{g}^0_{(1)}$ размера $i \times i$, блок $\mathfrak{g}^0_{(2)}$ размера $(2(n-i)+1) \times (2(n-i)+1)$, а остальные блоки имеют соответствующие размеры. Единственным отличием от предыдущего случая является то, что слагаемыми в разложении алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму с помощью формулы выше в данном случае являются: пространство блочно-диагональных матриц, состоящих из блоков $\mathfrak{g}^0_{(m)}$, пространство матриц, у которых ненулевые элементы могут стоять только на местах внутри блока $\mathfrak{g}^1$ и симметричного ему относительно побочной диагонали блока, в котором стоит матрица антисимметричная матрице из блока $\mathfrak{g}^1$ относительно побочной диагонали, аналогичного ему слагаемого для блока $\mathfrak{g}^{-1}$, а также двух пространств матриц, у которых ненулевые элементы могут стоять только на местах внутри блоков $\mathfrak{g}^2$ и $\mathfrak{g}^{-2}$. Из этого сразу видно, что $\mathfrak{g}^2$ представляет собой пространство матриц размера $i \times i$, кососимметричных относительно побочной диагонали, то есть можно условно записать, что $\mathfrak{g}^2 = \bigwedge^2 \mathbb{C}^i$. Теперь получим $\widetilde{G}^0$. Рассмотрим диаграмму:



Она нам дает с одной стороны, что $\dim \mathfrak{z}^0 = 1$ и значит $\mathfrak{z}^0 = \langle h \rangle$, а с другой стороны, что полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ равна $\mathfrak{sl}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)+1}$, откуда заключаем, что $\widetilde{G}^0 = SL_i \times SO_{2(n-i)+1}$, причем на $\mathfrak{g}^2$ действует только первый сомножитель. Инвариантом этого действия является определитель матриц из $\mathfrak{g}^2$, который не равен 0 тогда и только тогда, когда i четно. Таким образом короткая SL_2-структура возможна только при четном i.

Определим простую симплектическую структуру Ли-Йордана, которая соответствует данной SL_2-структуре. Зададим скалярное умножение на $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ по следующей формуле:

$$(A, B) = \frac{1}{2}(2(n-i)+1)\,\mathrm{tr}(AB), \quad \forall A, B \in \mathfrak{so}_{2n+1}.$$

Так как $i = 2k$, то $\mathfrak{sl}_2$-тройка e, f, h для данной структуры представляют собой матрицы размера $(2n+1) \times (2n+1)$ следующего вида:

$$h = \begin{pmatrix} E^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E^{(i)} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_i — матрица размера $i \times i$ следующего вида:

$$I_i = \begin{pmatrix} E^{(k)} & 0 \\ 0 & -E^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Действуя аналогично случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, нетрудно получить, что в данном случае:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)+1}, \quad J_1 = \mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)+1}\right)^*, \quad J_2 = \mathfrak{sym}_i^-, \qquad i = 2k.$$

Здесь через $\mathfrak{sym}_i^-$ при $i = 2k$ обозначена йорданова алгебра матриц порядка i симметричных относительно кососимметрической невырожденной билинейной формы. Обозначим

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in J_1, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in J_1,$$

где a_i, b_i — произвольные матрицы размера $k \times (2(n-i)+1)$. Симплектическая структура на пространстве J_1 задается с помощью кососкалярного умножения, которое имеет вид:

$$\big(a, b\big) = (2(n-i)+1)\,\mathrm{tr}(a_1 b_2^{\mathfrak{s}} - a_2 b_1^{\mathfrak{s}}).$$

Операция умножения на йордановой алгебре J_2 выглядит стандартным образом, то есть:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA), \quad \forall A, B \in \mathfrak{sym}_i^-.$$

Действие йордановой алгебры $J_2 = \mathfrak{sym}_i^-$ на пространстве J_1 осуществляются с помощью умножения слева матрицы из J_1 на соответствующую матрицу из $\mathfrak{g}^2$. Действие же алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на пространстве J_1 осуществляется по формуле:

$$(D_1, D_2)a = D_1 a - a D_2, \quad \forall D_1 \in \mathfrak{sp}_i, D_2 \in \mathfrak{so}_{2(n-i)+1}, a \in J_1.$$

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$. Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ в базисе, в котором ее элементы представляют собой матрицы размера $(2n) \times (2n)$, кососимметричные относительно побочной диагонали. Скалярное умножение на $\mathfrak{so}_{2n}$ зададим аналогично предыдущему случаю. Для этой алгебры зависимость старшего корня от простых выглядит так:

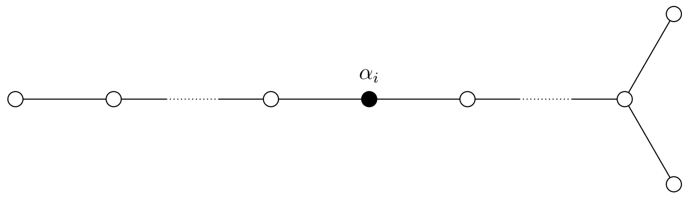
$$\alpha_{\max} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

Здесь, вообще говоря, возможны 4 случая:

1. $\alpha_i(h) = 1, \alpha_j(h) = 0, \qquad j = \overline{1, n}, i = \overline{2, (n-2)}, j \neq i;$
2. $\alpha_n(h) = \alpha_{n-1}(h) = 1, \alpha_i(h) = 0, \qquad i = \overline{1, n}, i \neq n, n-1;$
3. $\alpha_1(h) = \alpha_n(h) = 1, \alpha_i(h) = 0, \qquad i = \overline{1, n}, i \neq 1, n;$
4. $\alpha_1(h) = \alpha_{n-1}(h) = 1, \alpha_i(h) = 0, \qquad i = \overline{1, n}, i \neq 1, n-1.$

Случаи 3 и 4 переводятся друг в друга с помощью автоморфизма диаграммы Дынкина, поэтому достаточно рассмотреть только один из них. Таким образом, осталось рассмотреть случаи 1, 2 и 3.

В случае 1 матрица h будет иметь такой же вид, что и в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ с тем лишь отличием, что центральная нулевая матрица здесь имеет размеры $2(n-i) \times 2(n-i)$. Поэтому и ответ здесь будет такой же: инвариант (определитель) существует, тогда и только тогда, когда i четно (здесь $\mathfrak{g}^2 = \bigwedge^2 \mathbb{C}^i, \widetilde{G}^0 = SL_i \times SO_{2(n-i)}$). Диаграмма этого случая выглядит так:



Здесь $\mathfrak{sl}_2$-тройка e, f, h представляют собой матрицы размера $2n \times 2n$ аналогичного случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ вида. Поэтому действуя так же, как и для $\mathfrak{so}_{2n=1}$, имеем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)}, \quad J_1 = \mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)}\right)^*, \quad J_2 = \mathfrak{sym}_i^-, \qquad i = 2k \leqslant n-2.$$

Кососимметрическое скалярное умножение на пространстве J_1, а также действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ и йордановой алгебры J_2 на пространстве J_1 в данном случае осуществляются по формулам аналогичным случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$.

Рассмотрим случай 2. В этом случае

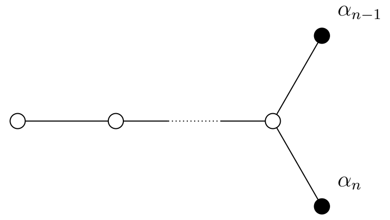
$$h = \mathrm{diag}\{1, ..., 1, 0, 0, -1, ..., -1\}.$$

Алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ аналогично предыдущему случаю можно условно представить в виде:

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}^0_{(1)} & \mathfrak{g}^1_{(1)} & \mathfrak{g}^2 \\ \mathfrak{g}^{-1}_{(1)} & \mathfrak{g}^0_{(2)} & -\left(\mathfrak{g}^1_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} \\ \mathfrak{g}^{-2} & -\left(\mathfrak{g}^{-1}_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} & -\left(\mathfrak{g}^0_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} \end{pmatrix}.$$

Здесь блок $\mathfrak{g}^0_{(1)}$ размера $(n-1)\times(n-1)$, блок $\mathfrak{g}^0_{(2)}$ размера 2×2, а остальные блоки соответствующих размеров.

Из формулы выше видно, что $\mathfrak{g}^2 = \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n-1}$. Рассмотрим диаграмму этого представления:



Из диаграммы выводим, что полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ равна $\mathfrak{sl}_{n-1}$ и что $\dim \mathfrak{z}^0 = 2$. Нетрудно убедится в том, что вектор, ортогональный вектору h в $\mathfrak{z}^0$, соответствует блоку $\mathfrak{g}^0_{(2)}$ и, в связи с расположениями блоков $\mathfrak{g}^0_{(2)}$ и $\mathfrak{g}^2$, действует на $\mathfrak{g}^2$ тривиально, откуда можно считать, что $\widetilde{G}^0 = SL_{n-1}$. Тем самым очевидно, что у этого представления есть инвариант (равный определителю матрицы из $\mathfrak{g}^2$) тогда и только тогда, когда n нечетно. То есть при нечетном n в этом случае существует короткая SL_2-структура.

Здесь матрицы e, f, h выглядят аналогично предыдущему случаю. Поэтому:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathfrak{so}_2, \quad J_1 = \mathbb{C}^{n-1} \otimes \left(\mathbb{C}^2\right)^*, \quad J_2 = \mathfrak{sym}^-_{n-1}, \qquad n = 2k+1.$$

Кососимметрическое скалярное умножение на пространстве J_1, а также действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ и йордановой алгебры J_2 на пространстве J_1 в данном случае осуществляются по формулам аналогичным случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$.

Перейдем к последнему случаю 3. Элемент h в этом случае имеет вид

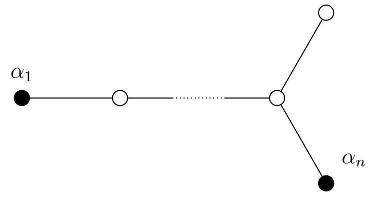
$$h = \operatorname{diag}\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}.$$

Аналогично предыдущим случаям алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ можно условно представить в виде:

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}^0_{(1)} & \mathfrak{g}^1_{(1)} & \mathfrak{g}^2 & 0 \\ \mathfrak{g}^{-1}_{(1)} & \mathfrak{g}^0_{(2)} & \mathfrak{g}^1_{(2)} & -\left(\mathfrak{g}^2\right)^{\mathsf{s}} \\ \mathfrak{g}^{-2} & \mathfrak{g}^{-1}_{(2)} & -\left(\mathfrak{g}^0_{(2)}\right)^{\mathsf{s}} & -\left(\mathfrak{g}^1_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} \\ 0 & -\left(\mathfrak{g}^{-2}\right)^{\mathsf{s}} & -\left(\mathfrak{g}^{-1}_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} & -\left(\mathfrak{g}^0_{(1)}\right)^{\mathsf{s}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathfrak{g}^0_{(2)}, \mathfrak{g}^1_{(2)}, \mathfrak{g}^{-1}_{(2)}$ — блоки размера $(n-1)\times(n-1)$, $\mathfrak{g}^1_{(1)}, \mathfrak{g}^2$ — строки длины $n-1$, а $\mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-1}_{(1)}$ — столбцы высоты $n-1$. Откуда получим, что $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^{n-1}$.

Рассмотрим диаграмму этого случая:



Из диаграммы видно, что $\dim \mathfrak{z}^0 = 2$, а полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ равна $\mathfrak{sl}_{n-1}$. Тогда $\widetilde{G}^0 = GL_{n-1}$ и мы получаем тавтологическое представление группы GL_{n-1} на $(n-1)$-мерном векторном пространстве, которое, очевидно, не имеет нетривиальных инвариантов, то есть в данном случае не существует короткой SL_2-структуры.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Будем рассматривать алгебру $\mathfrak{sp}_{2n}$ в базисе, в котором ее элементы задаются матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^{\mathsf{s}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n} : X, Y, Z \in \mathfrak{gl}_n,\ Y^{\mathsf{s}} = Y,\ Z^{\mathsf{s}} = Z.$$

Скалярное умножение на $\mathfrak{sp}_{2n}$ зададим аналогично предыдущему случаю.

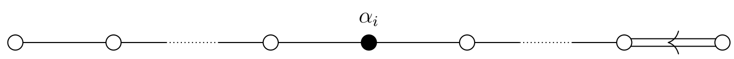
Для этой алгебры старший корень имеет вид

$$\alpha_{\max} = 2\alpha_1 + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n,$$

тем самым здесь возможен единственный случай:

$$\alpha_i(h) = 1, \alpha_j(h) = 0, \qquad i = \overline{1,(n-1)}, j = \overline{1,n}, j \neq i.$$

Элементы e, f, h представляют из себя матрицы размера $2n \times 2n$ аналогичного случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ вида, поэтому при коммутировании подпространству $\mathfrak{g}^2$ будет соответствовать верхний правый угловой блок размера $i \times i$, откуда ясно, что $\mathfrak{g}^2$ — пространство симметрических относительно побочной диагонали матриц размера $i \times i$. Рассмотрим диаграмму этого случая:



Исходя из нее, получим, что $\dim \mathfrak{z}^0 = 1$, а полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ совпадает с $\mathfrak{sl}_i \oplus \mathfrak{sp}_{2(n-i)}$, откуда $\widetilde{G}^0 = SL_i \times Sp_{2(n-i)}$. Тогда, так как $Sp_{2(n-i)}$ действует на $\mathfrak{g}^2$ тривиально, то можно считать, что $\widetilde{G}^0 = SL_i$, откуда ясно, что в этом случае инвариантом действия является определитель матрицы из $\mathfrak{g}^2$, то есть в данном случае короткая SL_2-структура существует при любом $i = \overline{1,(n-1)}$. В этом случае:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_i \oplus \mathfrak{sp}_{2(n-i)}, \quad J_1 = \mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)}\right)^*, \quad J_2 = \mathfrak{sym}_i^+, \qquad i < n.$$

Здесь через $\mathfrak{sym}_i^+$ обозначена йорданова алгебра матриц порядка i симметричных относительно симметрической невырожденной билинейной формы.

Кососимметрическое скалярное умножение на пространстве J_1, а также действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ и йордановой алгебры J_2 на пространстве J_1 в данном случае также осуществляются по формулам аналогичным случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$.

5.3 Классификация коротких SL_2-структур на особых простых алгебрах Ли

Хотя каждая из особых простых алгебр Ли имеет свою матричную модель, все эти модели довольно громоздки, поэтому исследование коротких SL_2-структур на них описанным выше способом будет чересчур сложным.

Рассмотрим неприводимое представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ на $\mathfrak{g}^2$. Оно однозначно определяется своим старшим весом, а именно его разложением по фундаментальным весам. Старший вес данного представления, очевидно, совпадает со старшим корнем алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Его разложение по фундаментальным весам получается с помощью вычисления произведений

Картана между старшим корнем алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и простыми корнями $\mathfrak{g}$, соответствующими нулевым вершинам диаграммы короткой SL_2-структуры. Поэтому, используя лишь расширенную диаграмму Дынкина, можно определить как саму группу $\widetilde{G}^0$, так и пространство представления $\mathfrak{g}^2$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее обозначение. Будем обозначать через S^k пространство спинорного представления алгебры $\mathfrak{so}_k$, а через $S^k_{1/2}$ и $S^k_{-1/2}$ — пространства полуспинорных представлений соответствующей алгебры при четном k. При ограничении алгебры $\mathfrak{so}_{2l}$ на подалгебру $\mathfrak{so}_{2l-1}$ представление $S^{2l}_{1/2}$ превращается в S^{2l-1}, а при ограничении алгебры $\mathfrak{so}_{2l+1}$ на подалгебру $\mathfrak{so}_{2l}$ пространство S^{2l+1} — в $S^{2l} = S^{2l}_{1/2} \oplus S^{2l}_{-1/2}$.

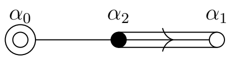
Как будет следовать из классификации ниже, для симплектической структуры пространства J_1, получающейся из короткой SL_2-структуры на особой алгебре Ли, возможны два различных случая:

1. Если представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на пространстве J_1 неприводимо, то согласно лемме Шура на J_1 существует единственная с точностью до скалярного множителя $\mathfrak{g}_0$-инвариантная невырожденная кососимметрическая форма. Значит, симплектическая структура пространства J_1 в этом случае полностью определяется представлением $\mathfrak{g}_0$ в J_1. Будем называть этот случай неприводимым случаем задания симплектической структуры на пространстве J_1.

2. Если же представление $\mathfrak{g}_0 : J_1$ приводимо, то пространство J_1 распадается в прямую сумму двойственных друг другу $\mathfrak{g}_0$-инвариантных лагранжевых подпространств, скалярное умножение между элементами которых определяется как спаривание. Этот случай будем называть лагранжевым случаем задания симплектической структуры на пространстве J_1.

Положим $\alpha_0 = -\alpha_{\max}$. Будем отмечать младший корень α_0 алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на диаграмме короткой SL_2-структуры с помощью двойного кружочка, чтобы не путать его с нулевыми вершинами.

Случай $\mathfrak{g} = \mathbf{G_2}$. Как было отмечено ранее, для этой алгебры существует единственно возможный случай, при котором $\alpha_2(h) = 1, \alpha_1(h) = 0$. Рассмотрим расширенную диаграмму Дынкина:



Ясно, что $\widetilde{G}^0 = SL_2$. Так как $\langle \alpha_{\max} | \alpha_1 \rangle = 0$, то $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$ и действие $\widetilde{G}^0 : \mathfrak{g}^2$ тривиально, поэтому все многочлены на $\mathfrak{g}^2$ будут инвариантны, то есть в этом случае короткая SL_2-структура существует.

Так как $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, то $\widetilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2$. Из диаграммы видно, что представление алгебры $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2$ на векторном пространстве $\mathfrak{g}^1$, неприводимо и младшим весом этого представления является α_2. Из этого легко видеть, что:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2, \quad J_1 = \operatorname{Sym}^3 \mathbb{C}^2, \quad J_2 = \mathbb{C}.$$

Здесь реализуется неприводимый случай задания симплектической структуры пространства J_1.

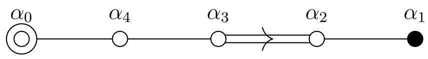
Случай $\mathfrak{g} = \mathbf{F_4}$. В этой алгебре

$$\alpha_{\max} = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4,$$

поэтому возможны всего два случая:

1. $\alpha_1(h) = 1, \alpha_2(h) = \alpha_3(h) = \alpha_4(h) = 0;$
2. $\alpha_4(h) = 1, \alpha_1(h) = \alpha_2(h) = \alpha_3(h) = 0.$

В случае 1 диаграмма Дынкина выглядит следующим образом:



Здесь $\dim \mathfrak{z}^0 = 1$ и $\widetilde{G}^0 = \mathrm{Spin}_7$. По диаграмме видно, что $\langle \alpha_{\max} | \alpha_4 \rangle = 1, \langle \alpha_{\max} | \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_{\max} | \alpha_3 \rangle = 0$, поэтому данное представление $\widetilde{G}^0$ — векторное представление спинорной группы, то есть $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^7$. Инвариантом действия данной группы очевидно является скалярный квадрат вектора, поэтому в данном случае короткая SL_2-структура существует. При этом алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ изоморфна $\mathfrak{so}_7$. Также по диаграмме видно, что представление алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ на пространстве $\mathfrak{g}_1$ неприводимо и младшим весом этого представления является α_1, откуда выводим, что данное представление является спинорным представлением алгебры $\mathfrak{so}_7$, то есть $J_1 = S^7$.

Из рассуждений, описанных в предыдущих пунктах, следует, что:

$$\mathfrak{g}^0 = \tilde{\mathfrak{g}}^0 \oplus \left\langle \tilde{h} \otimes \mathbb{I} \right\rangle = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\tilde{h} \otimes J_2 \right), \quad \mathfrak{g}^2 = \tilde{e} \otimes J_2,$$

где через $\mathbb{I}$ обозначена единица йордановой алгебры J_2, а через $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}$ — базисные элементы абстрактной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, удовлетворяющие соотношениям (2.17).

Рассмотрим действие $\tilde{\mathfrak{g}}^0 : \mathfrak{g}^2$. Ясно, что

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ D \in \tilde{\mathfrak{g}}^0 : [D, \tilde{e} \otimes \mathbb{I}] = 0 \right\}$$

— стабилизатор элемента $\tilde{e} \otimes \mathbb{I} \in \mathfrak{g}^2$ под действием алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^0$. Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ редуктивна, то вектор $\tilde{e} \otimes \mathbb{I}$ неизотропный, откуда несложно вывести, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_6$. При ограничении алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{so}_7$ на подалгебру Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_6$, пространство S^7 перейдет в S^6, значит $J_1 = S^6 = S^6_{1/2} \oplus S^6_{-1/2}$. Симплектическая структура пространства J_1 соответствует лагранжевому случаю.

Аналогично, при ограничении алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{so}_7$ на подалгебру Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_6$ пространство $J_2 = \mathbb{C}^7$ распадается в прямую сумму двух ортогональных друг другу подпространств: одномерного, натянутого на единицу $\mathbb{I}$ алгебры J_2, на котором $\mathfrak{g}_0$ действует тривиально, и шестимерного, на котором $\mathfrak{g}_0$ действует тавтологически. Таким образом $J_2 = \mathbb{C}^6 \oplus \mathbb{C}$.

Определим йорданову операцию на алгебре J_2. Заметим, что достаточно определить йорданово умножение между элементами из $\mathbb{C}^6$, так как дополнительное к нему одномерное подпространство в J_2 натянуто на единицу алгебры J_2. Ясно, что йорданову операцию на $\mathbb{C}^6$ можно проинтерпретировать как симметричное $\mathfrak{g}_0$-эквивариантное билинейное отображение, образ которого лежит в J_2. Тогда оно пропускается через

$$\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^6) = \mathrm{Sym}^2_0(\mathbb{C}^6) \oplus \mathbb{C},$$

где первое слагаемое — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{so}_6$, соответствующее удвоенному первому фундаментальному весу. Тогда очевидно, что результат применения йордановой операции для векторов из $\mathbb{C}^6$ принадлежит одномерному подпространству J_2, натянутому на единицу алгебры J_2. Таким образом:

$$A \circ B = \lambda_{A,B} \mathbb{I}, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^6 \subset J_2.$$

Здесь $\lambda_{A,B} \in \mathbb{C}$ — коэффициент пропорциональности, однозначно определяемый по паре A, B. Вычислив след у левой и правой части равенства выше, несложно вывести, что

$$\lambda_{A,B} = \frac{(A, B)}{\dim J_1}.$$

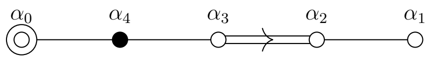
С помощью формулы выше и определяется операция йорданова умножения на J_2.

Во всех последующих случаях коротких SL_2-структур, в которых $J_2 \neq \mathbb{C}$ йорданова структура будет определяться аналогичным образом, поэтому более не будем так подробно на ней останавливаться.

Подытоживая сказанное выше, в этом случае имеем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_6, \quad J_1 = S^6_{1/2} \oplus S^6_{-1/2}, \quad J_2 = \mathbb{C}^6 \oplus \mathbb{C}.$$

В случае 2 диаграмма Дынкина имеет вид:



В этом случае очевидно $\widetilde{G}^0 = Sp_6$, а $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, так как все числа Картана между старшим корнем и простыми корнями, соответствующими нулевым вершинам, равны 0. Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что в этом случае существует короткая SL_2-структура, причем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}_6, \quad J_1 = \bigwedge\nolimits_0^3(\mathbb{C}^6), \quad J_2 = \mathbb{C}.$$

Здесь через $\bigwedge\nolimits_0^3(\mathbb{C}^6)$ обозначено пространство кососимметрических тензоров третьего порядка, полная свертка которых с симплектической формой равна 0. Симплектическая структура пространства J_1 здесь также соответствует неприводимому случаю.

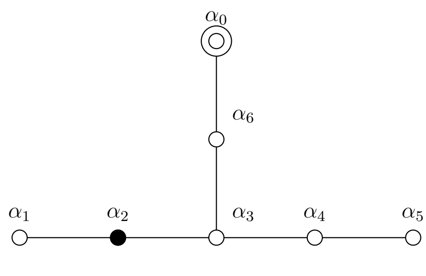
Случай $\mathfrak{g} = \mathbf{E_6}$. Старший корень этой алгебры имеет вид:

$$\alpha_{\max} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6.$$

Здесь возможно 4 случая:

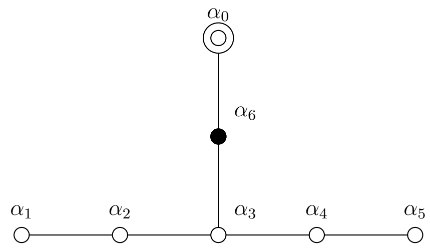
1. $\alpha_2(h) = 1, \alpha_1(h) = \alpha_3(h) = ... = \alpha_6(h) = 0;$
2. $\alpha_4(h) = 1, \alpha_1(h) = ... = \alpha_3(h) = \alpha_5(h) = ... = \alpha_6(h) = 0;$
3. $\alpha_6(h) = 1, \alpha_1(h) = ... = \alpha_5(h) = 0;$
4. $\alpha_1(h) = \alpha_5(h) = 1, \alpha_2(h) = ... = \alpha_4(h) = 0.$

Случаи 1 и 2 также эквивалентны, поэтому достаточно рассмотреть только случай 1. Рассмотрим его. Диаграмма Дынкина здесь имеет вид:



Из диаграммы получим, что $\dim \mathfrak{z}^0 = 1$, поэтому $\widetilde{G}^0 = SL_2 \times SL_5$. Так как старший корень $\alpha_{\max}$ имеет ненулевое число Картана только с крайним простым корнем алгебры $\mathfrak{sl}_5$ и это число равно 1, то $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^5$, что говорит о том, что SL_2 на $\mathfrak{g}^2$ действует тривиально и нетривиальных инвариантов в этом случае нет, а значит и отсутствует короткая SL_2-структура.

Перейдем к случаю 3 и его диаграмме Дынкина:

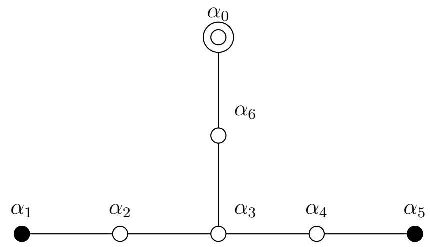


Действуя аналогично предыдущим случаям, получим, что $\widetilde{G}^0 = SL_6$ и $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, а значит здесь есть инварианты, то есть короткая SL_2-структура существует, причем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_6, \quad J_1 = \bigwedge^3(\mathbb{C}^6), \quad J_2 = \mathbb{C}.$$

Симплектическая структура пространства J_1 здесь соответствует неприводимому случаю.

В последнем случае имеем следующую диаграмму Дынкина:



Очевидно, что полупростая часть $\mathfrak{g}^0$ равна $\mathfrak{so}_8$, однако в этом случае $\dim \mathfrak{z}^0 = 2$, то есть $\widetilde{\mathfrak{g}}^0 = \mathfrak{so}_8 \oplus \langle h_1 \rangle$, где $h_1 \in \mathfrak{z}^0, h_1 \perp h$. Рассмотрим инволютивный нетождественный автоморфизм диаграммы Дынкина, являющийся симметрией относительно центрального вертикального сегмента. Этот автоморфизм является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, при этом он оставляет на месте корни α_3, α_6 и меняет местами корни α_1 и α_5, а также меняет местами α_2 и α_4. Элементы h и h_1 очевидно задают двумерное пространство, ортогональное четырехмерному пространству, натянутому на простые корни, соответствующие нулевым вершинам. Рассматриваемый автоморфизм сохраняет это четырехмерное пространство, а значит сохраняет и ортогональное дополнение. Так как отметки всех вершин под действием автоморфизма сохраняются, то данный автоморфизм сохраняет и элемент h. Значит, в силу инволютивности, автоморфизм действует на h_1 умножением на -1, поэтому можно считать, что $\alpha_1(h_1) = -\alpha_5(h_1) = 1$, а все остальные корни на h_1 равны 0. Это значит, что $\alpha_{\max}(h_1) = 0$, то есть h_1 действует тривиально на $\mathfrak{g}^2$, поэтому можно считать, что $\widetilde{G}^0 = \mathrm{Spin}_8$. Как видно из диаграммы $\langle \alpha_{\max} | \alpha_6 \rangle = 1, \langle \alpha_{\max} | \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_{\max} | \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_{\max} | \alpha_4 \rangle = 0$, то есть $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^8$, что говорит о том, что короткая SL_2-структура существует в этом случае.

В этом случае представление алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^0$ на пространстве J_1 приводимо, причем

$$J_1 = S^8_{1/2} \oplus S^8_{-1/2} = S^7 \oplus S^7.$$

Аналогично предыдущим случаям, имеем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_7, \quad J_1 = S^7 \oplus S^7, \quad J_2 = \mathbb{C}^7 \oplus \mathbb{C}.$$

Симплектическая структура пространства J_1 соответствует лагранжевому случаю.

Случай $\mathfrak{g} = \mathbf{E_7}$. Известно, что для этой алгебры

$$\alpha_{\max} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7,$$

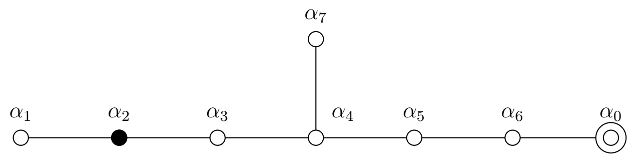
поэтому возможны 3 случая:

1. $\alpha_2(h) = 1, \alpha_1(h) = \alpha_3(h) = ... = \alpha_7(h) = 0;$

2. $\alpha_6(h) = 1, \alpha_1(h) = ... = \alpha_5(h) = \alpha_7(h) = 0;$

3. $\alpha_7(h) = 1, \alpha_1(h) = ... = \alpha_6(h) = 0.$

В случае 1 диаграмма Дынкина имеет вид:

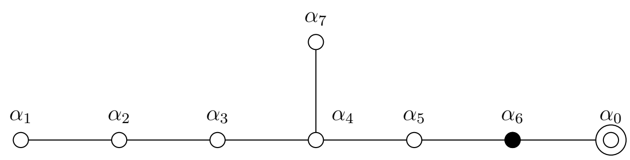


Исходя из нее, получим, что $\widetilde{G}^0 = SL_2 \times \mathrm{Spin}_{10}$. Так как старший корень имеет ненулевое число Картана только с первым простым корнем алгебры $\mathfrak{so}_{10}$, то $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^{10}$, что означает, что у данного представления есть инвариант, причем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_9, \quad J_1 = \mathbb{C}^2 \otimes S^9, \quad J_2 = \mathbb{C}^9 \oplus \mathbb{C}.$$

Симплектическая структура пространства J_1 соответствует неприводимому случаю.

В случае 2 диаграмма Дынкина имеет вид:

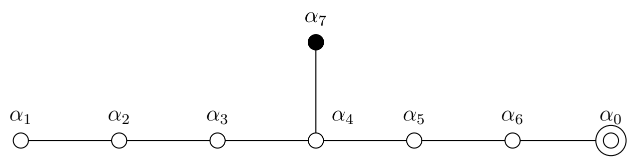


Здесь $\widetilde{G}^0 = \mathrm{Spin}_{12}$, а $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, поэтому здесь есть инвариант и

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_{12}, \quad J_1 = S^{12}_{1/2}, \quad J_2 = \mathbb{C}.$$

Симплектическая структура пространства J_1 здесь соответствует неприводимому случаю.

В случае 3 диаграмма Дынкина имеет вид:



Здесь $\widetilde{G}^0 = SL_7$, а $\mathfrak{g}^2 = \mathbb{C}^7$, поэтому нетривиальных инвариантов у этого действия нет.

Случай $\mathfrak{g} = \mathbf{E_8}$. У этой алгебры старший корень имеет вид:

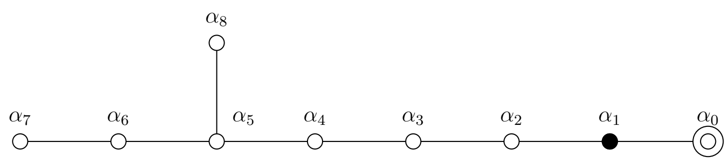
$$\alpha_{\max} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8,$$

поэтому здесь возможны всего 2 случая:

1. $\alpha_1(h) = 1, \alpha_2(h) = ... = \alpha_8(h) = 0;$

2. $\alpha_7(h) = 1, \alpha_1(h) = ... = \alpha_6(h) = \alpha_7(h) = 0;$

Первый случай имеет следующую диаграмму Дынкина:

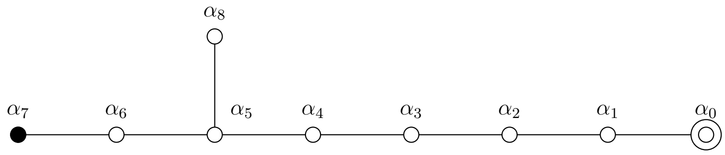


В этом случае $\widetilde{G}^0 = E_7$, а $\dim \mathfrak{g}^2 = 1$, то есть у данного представления есть инвариант и

$$\mathfrak{g}_0 = E_7, \quad J_1 = V(\pi_1), \quad J_2 = \mathbb{C}.$$

Здесь через $V(\pi_1)$ обозначено пространство представления первого фундаментального веса алгебры E_7. Симплектическая структура пространства J_1 соответствует неприводимому случаю.

Диаграмма Дынкина второго случая имеет вид:

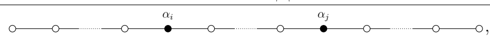
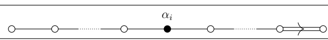
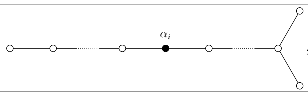
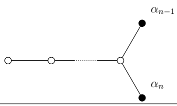
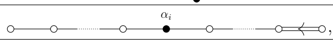
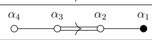
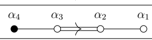
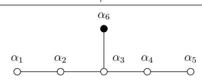
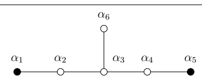
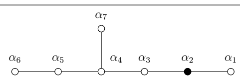
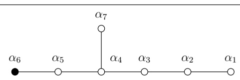
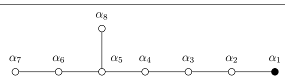
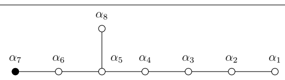


Аналогично предыдущим рассуждениям получим, что $\widetilde{G}^0 = \mathrm{Spin}_{14}$, а $\mathfrak{g}^2$ — её векторное представление, то есть и у этого представления есть инвариант, причем:

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_{13}, \quad J_1 = S^{13}, \quad J_2 = \mathbb{C}^{13} \oplus \mathbb{C}.$$

Симплектическая структура пространства J_1 соответствует неприводимому случаю.

Таким образом все существующие короткие SL_2-структуры можно перечислить в следующей таблице:

$\mathfrak{g}$	Схема Дынкина	J_1	$\mathfrak{g}_0$	J_2
$\mathfrak{sl}_n$	 , $i = n - j$	$\left(\mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{n-2i}\right)^*\right) \oplus$ $\oplus \left(\mathbb{C}^{n-2i} \otimes \left(\mathbb{C}^i\right)^*\right)$	$\mathfrak{sl}_i \oplus \mathfrak{sl}_{n-2i} \oplus \mathfrak{c}_{i,n}$	$\mathfrak{gl}_i$
$\mathfrak{so}_{2n+1}$	 , $i = 2k$	$\mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)+1}\right)^*$	$\mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)+1}$	$\mathfrak{sym}_i^-$
$\mathfrak{so}_{2n}$	 , $i = 2k \leqslant n - 2$	$\mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)}\right)^*$	$\mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)}$	$\mathfrak{sym}_i^-$
$\mathfrak{so}_{2n}$	 , $n = 2k + 1$	$\mathbb{C}^{n-1} \otimes \left(\mathbb{C}^2\right)^*$	$\mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathfrak{so}_2$	$\mathfrak{sym}_{n-1}^-$
$\mathfrak{sp}_{2n}$	 , $i < n$	$\mathbb{C}^i \otimes \left(\mathbb{C}^{2(n-i)}\right)^*$	$\mathfrak{so}_i \oplus \mathfrak{sp}_{2(n-i)}$	$\mathfrak{sym}_i^+$
G_2		$\mathrm{Sym}^3\, \mathbb{C}^2$	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathbb{C}$
F_4		$S^6_{1/2} \oplus S^6_{-1/2}$	$\mathfrak{so}_6$	$\mathbb{C}^6 \oplus \mathbb{C}$
F_4		$\bigwedge_0^3 (\mathbb{C}^6)$	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathbb{C}$
E_6		$\bigwedge^3 (\mathbb{C}^6)$	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathbb{C}$
E_6		$S^7 \oplus S^7$	$\mathfrak{so}_7$	$\mathbb{C}^7 \oplus \mathbb{C}$
E_7		$\mathbb{C}^2 \otimes S^9$	$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_9$	$\mathbb{C}^9 \oplus \mathbb{C}$
E_7		$S^{12}_{1/2}$	$\mathfrak{so}_{12}$	$\mathbb{C}$
E_8		$V(\pi_1)$	E_7	$\mathbb{C}$
E_8		S^{13}	$\mathfrak{so}_{13}$	$\mathbb{C}^{13} \oplus \mathbb{C}$

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ не определяется полностью по паре (J_1, J_2). Например, в случае простой алгебры Ли $\mathfrak{g} = E_8$ при $J_1 = V(\pi_1)$ йорданова алгебра J_2 одномерна, как и в случае алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ при $i = 1$. Если подобрать n так, чтобы $\dim V(\pi_1) = \dim J_1(\mathfrak{sl}_n)$, где $J_1(\mathfrak{sl}_n) = \left(\mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^{n-2i})^*\right) \oplus \left(\mathbb{C}^{n-2i} \otimes (\mathbb{C}^i)^*\right)$, то можно видеть, что алгебры $\mathfrak{g}_0$ в этих случаях различны, в то время как пары (J_1, J_2) совпадают. Таким образом по паре (J_1, J_2) невозможно однозначно построить простую симплектическую структуру Ли-Йордана.

Список литературы

[1] *Vinberg E.B.*, Non-abelian gradings of Lie algebras,// 50th Seminar "Sophus Lie", Banach Center Publ., 113, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 2017, 19–38

[2] *Vinberg E.B.*, Short SO_3-structures on simple Lie algebras and associated quasielliptic planes,// Lie Groups and Invariant Theory, Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2, 213, ed. E. Vinberg, AMS, 2005, 243–270

[3] *Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик*, Строение групп и алгебр Ли,// Группы Ли и алгебры Ли – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 41, ВИНИТИ, М., 1990, 5–253.

[4] *Albert A.A.*, A structure theory for Jordan algebras,// Ann. Math. (2) 48 (1947), 546–567.

[5] *Jacobson N.*, Structure and Representation of Jordan Algebras,// American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[6] *Conlon L.*, A class of variationally complete representations,// J. Differential Geometry 7 (1972), 149-160.

[7] *Panyushev D.I.*, The exterior algebra and «spin» of an orthogonal $\mathfrak{g}$-module,// Transform. Groups 6 (2001), no. 4, 371–396

[8] *Kac V. G.*, Some Remarks on Nilpotent Orbits,// Journal of Algebra 64 (1980), 190–213