K-стабильность трёхмерных лог Фано пар типа Маэды с неприводимой границей

Ксения Квитко

Аннотация

В работе рассмотрены трёхмерные лог Фано пары типа Маэды с неприводимой границей. С помощью численного критерия Фуджиты-Ли показано, что такие пары $(X, a\Delta)$, $a \in (0, 1)$, могут быть K-полистабильными только для конечного числа лог Фано пар (X, Δ) с целой границей Δ.

Содержание

1 Введение

В последнее время изучение K-стабильности представляет особый интерес в бирациональной геометрии, поскольку данная область сочетает в себе как дифференциально-геометрические, так и алгебро-геометрические методы [Tia97]. А именно, оказывается, что K-полистабильность гладкого многообразия Фано эквивалентна существованию на нём метрики Кэлера-Эйнштейна [CDS15a, CDS15b, CDS15c, Tia15]. С обзором этой теории можно ознакомиться в книге [Xu23]. Для трёхмерных многообразий Фано вопрос о характеризации K-стабильности решён в [ACC+23] для общего представителя в каждом семействе. Однако аналогичную задачу можно поставить и для логарифмических многообразий Фано (определение K-стабильности для пар см. в [Don12] и [OS15]).

Трёхмерные лог Фано многообразия были классифицированы Х. Маэдой в [Mae86]. Впоследствии К. Фуджита исправил ряд ошибок, но не опубликовал свою работу [Fuj]. Некоторые неточности были независимо исправлены К. Логиновым в [Log22] в связи с изучением K-полистабильности таких пар с приводимой границей. По аналогии с [Fuj20] и [Log22] задача существования метрики Кэлера-Эйнштейна ставится для трёхмерных лог Фано пар *типа Маэды*. Это такие пары (X, D), которые получаются из лог Фано пары (X, Δ) с целой границей $\Delta = \sum d_i \Delta_i$ посредством уменьшения коэффициентов d_i.

В данной работе рассматриваются трёхмерные лог Фано пары типа Маэды с неприводимой границей. С помощью численного критерия Фуджиты-Ли и дивизориальной стабильности, для них доказывается теорема об ограниченности семейств таких пар с условием K-полистабильности.

Теорема. *Существует лишь конечное число трёхмерных лог Фано пар (X, Δ) с целой неприводимой границей, для которых лог Фано пара $(X, a\Delta)$ K-полистабильна при некоторых значениях параметра a.*

Хотя полученный результат является частным случаем более общего утверждения об ограниченности [LZ23], он позволяет получить явную оценку на количество пар (X, Δ), для которых соответствующая пара типа Маэды может допускать метрику Кэлера-Эйнштейна. Доказанная в этой работе теорема является важным шагом на пути к завершению характеризации K-полистабильности конкретных пар типа Маэды в размерности 3.

Структура изложения устроена следующим образом. В разделе 2 даются основные определения и факты о лог парах. Далее в разделе 3 вводится понятие β-инварианта и формулируется его связь с K-стабильностью (критерий Фуджиты-Ли). Затем в разделе 4 предоставляется список бесконечных серий семейств и по частям доказывается основная теорема, то есть отдельно для каждого указанного в списке семейства в зависимости от структуры многообразия.

2 Предварительные сведения

Во всех главах в качестве основного поля рассматривается поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Будем использовать стандартные обозначения, принятые в бирациональной геометрии [Laz17, KM98]. Введём понятие *лог пары*.

Определение 2.1. *Пара (X, Δ), состоящая из нормального многообразия X и $\mathbb{Q}$-дивизора $\mathbb{Q}$-Вейля $\Delta = \sum d_i D_i$, $0 \leqslant d_i \leqslant 1$, называется лог парой, если $K_X + \Delta$ – $\mathbb{Q}$-Картье.*

Определение 2.2. *Пара (X, Δ) называется лог Фано парой, если дивизор $-K_X - \Delta$ обилен и Δ имеет простые нормальные пересечения.*

Пусть $K_X + \Delta$ является $\mathbb{Q}$-дивизором $\mathbb{Q}$-Картье. Тогда для заданного бирационального морфизма $f : V \to X$ на X из неособого многообразия V имеет место формула

$$K_V + \tilde{\Delta} = f^*(K_X + \Delta) + \sum_i a_{(X,\Delta)}(E_i) \cdot E_i\,, \tag{1}$$

где $\tilde{\Delta}$ – собственный прообраз Δ и $E_i \subset V$ соответствуют исключительным дивизорам морфизма f. *Дискрепантность пары* (X, Δ) в E определяется как коэффициент $a_{(X,\Delta)}(E_i)$. Тогда число $A_{(X,\Delta)}(E_i) = a_{(X,\Delta)}(E_i) + 1$ называют *лог дискрепантностью*.

В терминах дискрепантности удобно описывать особенности пар. Положим

$$\operatorname{discr}(X,\Delta) := \inf\{a_{(X,\Delta)}(E_i) : E \text{ – исключительный дивизор над } X\}.$$

Тогда лог терминальные по Кавамате особенности (klt) определяются следующим образом.

Определение 2.3. *Пара* $(X,\Delta = \sum d_i D_i)$ *имеет klt особенности, если* $\operatorname{discr}(X,\Delta) > -1$ *и* $0 \leqslant d_i < 1$.

Определение 2.4. *Лог Фано пара* (X,D) *с klt особенностями называется лог Фано парой типа Маэды, если* X *– гладкое многообразие,* $D \neq 0$ *– эффективный* $\mathbb{Q}$*-дивизор на* X*, для которого существует лог Фано пара с целой границей* Δ *и простыми нормальными пересечениями* $\operatorname{Supp}(\Delta) \supseteq \operatorname{Supp}(D)$.

Таким образом, в размерности 3 лог Фано пары типа Маэды с неприводимой границей имеют вид $(X, a\Delta)$, $a \in (0,1)$, где (X,Δ) – пара из классификационного списка [Mae86] или [Fuj].

Обозначим через $\mathcal{N}^1_{\mathbb{R}}(X) := (\operatorname{Pic}(X)/\equiv) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, где $\equiv$ есть отношение численной эквивалентности циклов (относительно формы пересечения), пространство Нерона-Севери.

Псевдоэффективным конусом $\overline{\operatorname{Eff}}(X)$ называют замыкание выпуклого конуса всех эффективных $\mathbb{R}$-дивизоров. Конус, содержащийся в $\overline{\operatorname{Eff}}(X)$ и образованный классами таких элементов $D \in \mathcal{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$, у которых $(D \cdot C) \geqslant 0$ для любых неприводимых кривых $C \subset X$, называют nef конусом и обозначают $\operatorname{Nef}(X)$. Конусом Мори $\overline{\operatorname{NE}}(X)$ называют двойственный к $\operatorname{Nef}(X)$ конус. Согласно критерию Клеймана, $\mathbb{R}$-дивизор D на проективном многообразии является обильным тогда и только тогда, когда он задаёт положительную функцию $D\cdot$ на $\overline{\operatorname{NE}}(X) \setminus \{0\}$.

3 Понятие K-стабильности

3.1 β-инвариант

Для n-мерного лог Фано многообразия (X,Δ) и дивизора E над X, то есть дивизора на многообразии V для некоторого бирационального морфизма f, число

$$\beta_{(X,\Delta)}(E) = A_{(X,\Delta)}(E) - \frac{1}{(-K_X-\Delta)^n} \int\limits_0^\infty \operatorname{vol}\big(f^*(-K_X-\Delta) - tE\big)dt \tag{2}$$

называют *бета-инвариантом* (см. [Fuj19], [Li17]).

Здесь $\operatorname{vol}(\cdot)$ обозначает функцию объёма [Laz17]. Для линейного расслоения $\mathcal{L}$ (или дивизора Картье, соответсвующего ему) объём $\operatorname{vol}(\mathcal{L})$ определяется как число

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})}{m^n/n!}.$$

Хорошо известно. что $\operatorname{vol}(D) > 0$ только для объёмных дивизоров D. Более того, $\operatorname{vol}(D) = D^n$, если D – nef дивизор, и $\operatorname{vol}(D) = P^n$, если D – целый дивизор и P – его «положительная» часть в разложении Зарисского.

3.2 Численный критерий Фуджиты-Ли

Согласно [Fuj16, Li17, Fuj19] K-стабильность логарифмических многообразий Фано с особенностями лог терминальными по Кавамате может рассматриваться в терминах бета-инварианта. Следующий критерий будет использоваться в качестве определения K-полустабильности и K-стабильности.

Теорема 3.1. *Пусть лог Фано пара (X, Δ) имеет klt особенности. Тогда она называется*

(1) *K-полустабильной тогда и только тогда, когда $\beta_{(X,\Delta)}(E) \geqslant 0$ для всех дивизоров E над X;*

(2) *K-стабильной тогда и только тогда, когда $\beta_{(X,\Delta)}(E) > 0$ для всех дивизоров E над X.*

Следствие 3.2. *K-стабильное многообразие является K-полустабильным.*

Далее будем использовать более слабую вариацию K-стабильности – *дивизориальную стабильность*, то есть будем рассматривать в качестве дивизоров E из определения 3.1 только дивизоры на многообразии X.

4 Основные результаты

Целью данного раздела является доказательство теоремы из раздела 1, которое разбито на несколько лемм, посвящённых K-стабильности бесконечных семейств. Список таких лог Фано пар представлен далее в таблице 1 на стр. 5 (см. [Fuj]).

4.1 Расслоения на квадрики

Для расслоения на квадрики (X, Δ) из таблицы 1 обозначим через $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(l) \oplus \mathcal{O}(m))$, $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$, объемлющее пространство, в котором содержится многообразие X. Оно является $\mathbb{P}^3$-расслоением над $\mathbb{P}^1$. Пусть $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^1$ – структурный морфизм, $F = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ – класс слоя, $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Тогда группа Пикара многообразия $\mathbb{P}$ порождена H и F, причём

$$H^4 = k + l + m, \qquad H^3 \cdot F = 1, \qquad F^2 = 0.$$

Канонические классы многообразий X и $\mathbb{P}$ могут быть вычислены из формулы присоединения

$$K_{\mathbb{P}} = -4H - (2 - k - l - m)F,$$
$$K_X = (K_{\mathbb{P}} + X)|_X.$$

Если X – обильный дивизор на $\mathbb{P}$, то по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении

$$\rho(X) = \rho(\mathbb{P}), \qquad \mathrm{Pic}(X) = \langle H|_X, F|_X \rangle,$$

$$\mathrm{Nef}(X) = \langle H|_X, F|_X \rangle, \qquad \overline{\mathrm{Eff}}(X) = \langle H|_X - mF|_X, F|_X \rangle.$$

Однако ранги соответствующих групп Пикара совпадают и в противном случае по соображениям классификации – если бы они не совпадали, то пару (X, Δ) можно было бы найти в другом месте таблицы. Когда дивизор X не nef в $\mathbb{P}$, конусы $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ и $\mathrm{Nef}(X)$ имеют общую грань – $F|_X$.

№	X		$[\Delta]$	Δ
		$\rho(X) = 2$		
2.1	$X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(m))$, $X \sim 2H$	$m \geqslant 0$	$H - mF$	S_6
2.2	$X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(m))$, $X \sim 2H - F$	$m \geqslant 1$	$H - mF$	S_7
2.3	$X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(m))$ $X \sim 2H - 2F$	$m \geqslant 2$	$H - mF$	$\mathbb{F}_1$
2.4	$X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(m))$, $X \sim 2H$	$m \geqslant 1$	$H - mF$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
2.5	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}((\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(m))$	$m \geqslant 2$	$H - mF$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
2.6	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(m))$	$m \geqslant 1$	$H - mF$	$\mathbb{F}_1$
2.7	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m))$	$m \geqslant 3$	$H - mF$	$\mathbb{P}^2$
		$\rho(X) = 3$		
3.1	$\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(m))$, $p \in H - mF$	$m \geqslant 0$	$\sigma^*(H - mF) - E$	S_7
3.2	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(0,1) \oplus \mathcal{O}(m,0))$	$m \geqslant 2$	$H - mF_1$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
3.3	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m,m))$	$m \geqslant 2$	$H - mF_1 - mF_2$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
3.4	$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m,n))$	$m \geqslant 2$, $m > n \geqslant 0$	$H - mF_1 - nF_2$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
3.5	$\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-(e+f) + nf)$	$n \geqslant 2$	$H + E - (n-1)F$	$\mathbb{F}_1$
3.6	$\mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m(e+f) + nf))$	$m, n \geqslant 0$, $(m,n) \neq (0,0)$ $(m,n) \neq (0,1)$ $(m,n) \neq (1,0)$	$H - mE - (m+n)F$	$\mathbb{F}_1$
		$\rho(X) \geqslant 4$		
$2 + k.1$	$\mathrm{Bl}_{p_1,\ldots,p_k} \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(m))$, $2 \leqslant k \leqslant 7$	$m \geqslant 0$	$\sigma^*(H - mF) - \sum E_i$	S_{8-k}
$11 - d.2$	$\mathbb{P}_{S_d}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}) \xrightarrow{\pi} S_d$, $1 \leqslant d \leqslant 7$	$\mathcal{L} \in \mathrm{Nef}(S_d)$	$H - \pi^*\mathcal{L}$	S_d

Таблица 1: Список бесконечных семейств лог Фано пар (X, Δ) с неприводимой целой границей. Здесь F обозначает класс слоя на многообразии X, H соответствует линейному расслоению $\mathcal{O}_X(1)$, E или E_i – исключительным дивизорам.

Пусть теперь $X \sim 2H + \epsilon F$ в $\mathbb{P}$, где $\epsilon \in \{-2, -1, 0, 1\}$, и дивизор-граница Δ является ограничением на X границы $H - mF$ псевдоэффективного конуса $\overline{\mathrm{Eff}}(\mathbb{P})$. Будем рассматривать лог Фано пары вида $(X, a\Delta)$, где $a \in (0, 1)$. Тогда

$$L(a) = -K_X - a\Delta = -(-4H - (2 - k - l - m)F + 2H + \epsilon F) - a(H - mF)$$

является обильным, если и только если параметр a удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{cases} 2 - a > 0, \\ 2 - k - l - m - \epsilon + am > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Положим

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(D) = \big(L(a)\big)^3 \cdot \beta_{(X,a\Delta)}(D) = A_{(X,a\Delta)} \cdot \big(L(a)\big)^3 - \int_0^\infty \mathrm{vol}(f^*(L(a)) - tD)dt, \tag{4}$$

где D – простой дивизор над X для некоторого бирационального морфизма f и $\beta_{(X,a\Delta)}$ – число, определённое в формуле (2) раздела 2. Далее будем полагать, что $f = \mathrm{id}$ – тождественный морфизм и $D = \Delta$ – дивизор на многообразии X. Тогда для вычисления объёма $L(a) - t\Delta$ заметим, условие того, что

$$L(a) - t\Delta = (2 - a - t)H + (2 - k - l - m - \epsilon + am + tm)F$$

является nef, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2 - a - t > 0, \\ 2 - k - l - m - \epsilon + am + tm > 0. \end{cases}$$

Оба неравенства выполнены при $t < 2 - a$ ввиду (3) и $m \geqslant 0$. Если же $L(a) - t\Delta$ псевдоэффективен, то он может быть представлен как $(\dots)(H - xF) + (\dots)F$ для некоторого положительного x. Значит, можно получить аналогичные условия на t:

$$\begin{cases} 2 - a - t > 0, \\ 2 - k - l - m - \epsilon + am + tm + x > 0. \end{cases}$$

Следовательно, псевдоэффективный порог совпадает с nef порогом и равен $2 - a$. Таким образом, для отсутствия дивизориальной стабильности остаётся проверить, что число

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = A_{(X,a\Delta)}(\Delta) \cdot (L(a))^3 - \int\limits_0^{2-a} \mathrm{vol}(L(a) - t\Delta)dt =$$

$$= (1 - a) \cdot (L(a))^3 - \int\limits_0^{2-a} (L(a) - t\Delta)^3 dt$$

отрицательно для любых значений параметра $a \in (0, 1)$ (более формально, для всех тех значений, для которых пара $(X, a\Delta)$ является лог Фано).

Ниже представлены необходимые вычисления.

№2.1: Семейство $(X, a\Delta)$ определяется параметрами $k = 0$, $l = 1$, $m \geqslant 0$, $\epsilon = 0$. Значение β'-инварианта в Δ равно

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1 - a) \cdot \Big((2 - a)H + (1 - m + am)F\Big)^3 -$$

$$- \int\limits_0^{2-a} \Big((2 - a - t)H + (1 - m + am + tm)F\Big)^3 dt =$$

$$= (1 - a) \cdot \Big((2 - a)^3(2m + 2) - 6(2 - a)^2(m - 1 - am)\Big) -$$

$$- \int\limits_0^{2-a} \Big((2 - a - t)^3(2m + 2) - 6(2 - a - t)^2(m - 1 - am - tm)\Big) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}(a - 2)^2 \cdot \Big((6m - 3)a^2 - (8m - 16)a + 4m - 8\Big),$$

то есть отрицательно при любом значении $a \in (0, 1)$ и при всех $m \geqslant 0$.

№2.2: Рассмотрим $(X, a\Delta)$ с $k = l = 1$, $m \geqslant 1$, $\epsilon = -1$. Тогда

$$\beta_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot\Big((2-a)H + (1-m+am)F\Big)^3 -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big((2-a-t)H + (1-m+am+tm)F\Big)^3 dt =$$

$$= (1-a)\cdot\Big((2-a)^3(2m+3) - 6(2-a)^2(m-1-am)\Big) -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big((2-a-t)^3(2m+3) - 6(2-a-t)^2(m-1-am-tm)\Big)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}(a-2)^2\cdot\Big((12m-9)a^2 - (16m-40)a + 8m - 20\Big) < 0.$$

Откуда получаем отсутствие дивизориальной стабильности при всех $a \in (0,1)$ и $m \geqslant 1$.

№2.3: Аналогично для $(X, a\Delta)$ с $k = 1$, $l = 2$, $m \geqslant 2$, $\epsilon = -2$ получаем

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot\Big((2-a)H + (1-m+am)F\Big)^3 -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big((2-a-t)H + (1-m+am+tm)F\Big)^3 dt =$$

$$= (1-a)\cdot\Big((2-a)^3(2m+7) - 6(2-a)^2(m-1-am)\Big) -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big((2-a-t)^3(2m+7) - 6(2-a-t)^2(m-1-am-tm)\Big)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}(a-2)^2\cdot\Big((12m-21)a^2 - (16m-72)a + 8m - 36\Big) < 0.$$

№2.4: В случае, когда $k = l = 0$, $m \geqslant 1$, $\epsilon = 0$, вычисления так же показывают, что модифицированный бета-инвариант отрицателен:

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot\Big((2-a)H + (2-m+am)F\Big)^3 -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big((2-a-t)H + (2-m+am+tm)F\Big)^3 dt =$$

$$= (1-a)\cdot\Big(2m(2-a)^3 - 6(2-a)^2(m-2+am)\Big) -$$

$$-\int_0^{2-a}\Big(2m(2-a-t)^3 - 6(2-a-t)^2(m-2-am-tm)\Big)dt =$$

$$= (a-2)^2\cdot\Big(9ma^2 - (8m+8)a - 2m + 4\Big) < 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть (X, Δ) – бесконечное семейство трёхмерных логарифмических многообразий Фано со структурой расслоения на квадрики и целой неприводимой границей. Тогда в семействе $(X, a\Delta)$ нет K-полустабильных представителей при любом значении параметра $a \in (0, 1)$.*

4.2 $\mathbb{P}^2$-расслоения над $\mathbb{P}^1$

В этом разделе рассматриваются пары (X, Δ), которые имеют структуру $\mathbb{P}^2$-расслоения над $\mathbb{P}^1$ и соответствуют случаям **№2.5 – 2.6** из таблицы 1. Покажем, что имеет место следующий факт.

Лемма 4.2. *Пусть (X, Δ) – бесконечное семейство лог Фано пар со структурой $\mathbb{P}^2$-расслоения над $\mathbb{P}^1$. Тогда $(X, a\Delta)$ не K-полустабильно при любом $a \in (0, 1)$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(l) \oplus \mathcal{O}(m))$, $0 \leqslant l \leqslant m$. Выберем H в $|\mathcal{O}_X(1)|$ так, что $H^3 = l + m$. Пусть F – класс слоя расслоения $X \to \mathbb{P}^1$. Тогда $H^2 \cdot F = 1$, $F^2 \cdot H = 0$, $F^3 = 0$ и $\mathrm{Nef}(X) = \langle H, F \rangle$, $\overline{\mathrm{Eff}}(X) = \langle H - mF, F \rangle$. Используя формулу присоединения для поверхностей, соответствующих дивизорам F и H, может быть вычислен канонический класс многообразия X:

$$K_X = -3H - (2 - l - m)F.$$

Покажем, что β'-инвариант, определённый по формуле (4), отрицателен для дивизора-границы.

Рассмотрим случай **№2.5**. Тогда $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(m))$, $m \geqslant 2$, и

$$L(a) - t\Delta = (3 - a - t)H + (2 - m + am + tm)F = (3 - a - t)(H - mF) + (2 + 2m)F.$$

То есть $(X, a\Delta)$ является лог Фано парой, только когда $L(a)$ – обилен, что эквивалентно условию $a > \frac{m-2}{m}$. Из разложения $L(a) - t\Delta$ по образующим nef и псевдоэффективного конусов также следует, что псевдоэффективный порог совпадает с nef порогом, равным $3 - a$. Теперь вычислим $\beta'_{(X,a\Delta)}(H - mF)$:

$$\begin{aligned}
\beta'_{(X,a\Delta)}(H - mF) &= (1 - a) \cdot \Big((3 - a)H + (2 - m + am)F\Big)^3 - \\
&\int\limits_0^{3-a} \Big((3 - a - t)H + (2 - m + am + tm)F\Big)^3 dt = \\
&= (1 - a) \cdot \Big((3 - a)^3 m + 3(3 - a)^2(2 - m + am)\Big) - \\
&- \int\limits_0^{3-a} \Big((3 - a - t)^3 m + 3(3 - a - t)^2(2 - m + am + tm)\Big) dt = \\
&= -\frac{1}{2}(a - 3)^2\Big(3ma^2 - (2m - 8)a + 3m\Big) < 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, пара $(X, a\Delta)$ не является дивизориально стабильной.

Применяя те же рассуждения для семейства **№2.6**, когда многообразие X имеет вид

$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(m))$ для $m \geqslant 1$ и $\Delta \sim H - mF$, получаем

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(H - mF) = (1-a) \cdot \Big((3-a)H + (1-m+am)F\Big)^3 -$$
$$- \int_0^{3-a} \Big((3-a-t)H + (1-m+am+tm)F\Big)^3 dt =$$
$$= (1-a) \cdot \Big((3-a)^3(m+1) + 3(3-a)^2(m+1)\Big) -$$
$$- \int_0^{3-a} \Big((3-a-t)^3(m+1) + 3(3-a-t)^2(1-m+am+tm)\Big) dt =$$
$$= -\frac{1}{4}(a-3)^3\Big((6m-3)a^2 - (4m-18)a + (6m-3)\Big) < 0.$$

□

4.3 $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathbb{P}^2$

Данный раздел посвящён K-стабильности семейства **№2.7**, для представителей которого доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть (X, Δ) – лог Фано пара со структурой $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathbb{P}^2$ и целой неприводимой границей, принадлежащая бесконечному семейству. Тогда $(X, a\Delta)$ дивизориально нестабильна при любых значениях $a \in (0, 1)$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m))$, $m \geqslant 3$. Пусть дивизор H соответствует тавтологическому расслоению $\mathcal{O}_X(1)$, дивизор F – классу слоя расслоения $\pi : X \to \mathbb{P}^2$. Тогда $F^3 = \pi_*(F)^3 = 0$, $H \cdot F^2 = 1$, $H^2 \cdot F = m$ и $H^3 = m^2$. Псевдоэффективный конус порождается F и $H - mF$, а nef конус – F и H. Канонический класс X вычисляется из формулы присоединения и равен $K_X = -2H - (3-m)F$. Теперь покажем, что β' отрицателен на $H - mF$.

Заметим, что пара $(X, a\Delta)$ является лог Фано только для $a > \frac{m-3}{m}$. Тогда

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a) \cdot \Big((2-a)H + (3-m+am)F\Big)^3 -$$
$$- \int_0^{\infty} \mathrm{vol}\Big((2-a-t)H + (3-m+am+tm)F\Big) dt =$$
$$= (1-a) \cdot \Big((2-a)^3 m^2 + 3m(2-a)^2(3-m+am) + 3(2-a)(3-m+am)^2\Big) -$$
$$- \int_0^{2-a} \Big((2-a-t)^3 m^2 + 3m(2-a-t)^2(3-m+am+tm) +$$
$$+ 3(2-a-t)(3-m+am+tm)^2\Big) dt =$$
$$= \frac{3}{4}(a-2)(a^3m^2 + (8m-2m^2)a^2 + (2m^2-8m+18)a + 8m) < 0.$$

□

4.4 Раздутия $\mathbb{P}^2$-расслоений над $\mathbb{P}^1$

Покажем, что раздутие дивизориально нестабильного логарифмического многообразия Фано из семейства **№2.5** является дивизориально нестабильным.

Лемма 4.4. *Пусть* (X, Δ) *– семейство* ***№3.1****. Тогда лог Фано пара* $(X, a\Delta)$ *дивизориально нестабильна при всех* $a \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $\sigma : X \to \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(m))$ – раздутие в точке p. Тогда граница $\Delta \sim \sigma^*(H - mF) - E$. Согласно [Log22], X имеет стягивания как на $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(m))$, так и на $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(m-1))$. В терминах, принятых в разделе 4.2, конусы имеют следующий вид:

$$\mathrm{Nef}(X) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}[\sigma^* H] + \mathbb{R}_{\geqslant 0}[\sigma^* F] + \mathbb{R}_{\geqslant 0}[\sigma^*(H + F) - E],$$
$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}[\sigma^*(H - mF) - E] + \mathbb{R}_{\geqslant 0}[\sigma^* F - E] + \mathbb{R}_{\geqslant 0}[E].$$

Рассмотрим

$$L(a) - t\Delta \sim (3 - a - t)\big(\sigma^*(H - mF) - E\big) + (2 + 2m)\big(\sigma^* F - E\big) + (3 + 2m)E.$$

Заметим, что $L(a)$ обилен только для $a > \frac{m}{m+1}$. Пусть $P(t) + N(t)$ – разложение Зарисского для дивизора $L(a) - t\Delta$. Тогда

$$N(t) \sim (t - 2 + a)E,$$
$$P(t) \sim (3 - a - t)\sigma^* H + (2 - m + am + tm)\sigma^* F.$$

$$\begin{aligned}
\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot \Big(\sigma^*((3-a)H + (2-m+am)F) - (2-a)E\Big)^3 - \\
- \int_0^{2-a} \Big(\sigma^*((3-a-t)H + (2-m+am+tm)F) - (2-a-t)E\Big)^3 dt - \\
- \int_{2-a}^{3-a} \Big((3-a-t)\sigma^* H + (2-m+am+tm)\sigma^* F\Big) dt = \\
= (1-a)\cdot\Big((3-a)^3 m + 3(3-a)^2(2-m+am) - (2-a)^3\Big) - \\
- \int_0^{2-a} \Big((3-a-t)^3 m + 3(3-a-t)^2(2-m+am+tm) - (2-a-t)^3\Big) dt - \\
- (2 + \frac{3}{2}m) < 0.
\end{aligned}$$

□

Теорема 4.5. *Лог Фано пара* $(X, a\Delta)$*, соответствующая семейству* ***№4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1, 9.1****, является дивизориально нестабильной при всех возможных* $a \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть X является раздутием многообразия $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}(m))$ в k общих точках, лежащих на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Как и в доказательстве предыдущей леммы, выразим $L(a) - t\Delta$:

$$L(a) - t\Delta \sim (3 - a - t)\sigma^* H + (2 - m + am + tm)\sigma^* F + (t - 2 + a)\sum_{i=1}^{k} E_i. \tag{5}$$

Покажем, что численно-эффективный (nef) порог τ_1 равен $2-a$. По критерию Клеймана, $D = L(a) - t\Delta$ численно-эффективен тогда и только тогда, когда $D \cdot C > 0$ для каждой неприводимой кривой C, являющейся образующей конуса Мори. С одной стороны, пересекая D с кривыми $e_i \subset E_i$, получаем оценку: $\tau_1 \leqslant 2-a$. С другой стороны, для всех остальных образующих можно применить формулу проекции

$$D \cdot C = \sigma_* D \cdot \sigma_* C.$$

Тогда неравенство $D \cdot C \geqslant 0$ выполнено для всех $t < \tau_1 = 2-a$.

Покажем, что при последующих раздутиях, когда $k > 1$, псевдоэффективный порог τ_2 не изменяется. Из формулы (5) следует, что $\tau_2 \leqslant 3-a$. Действительно, в противном случае прямой образ этого дивизора при стягивании E_i тоже был бы эффективным дивизором при некотором $t > 3-a$, что противоречит вычислениям раздела 4.2. Из формулы (5) также следует, что при любом $t \geqslant 3-a$ дивизор $L(a) - t\Delta$ является эффективным, поэтому $\tau_2 = 3-a$.

Тогда в соответствии с [Pro02, Prop. 6.6] положительная и отрицательная части в разложении Зарисского (в смысле Фуджиты) имеют вид:

$$P(t) \sim (3-a-t)\sigma^* H + (2-m+am+tm)\sigma^* F,$$

$$N(t) \sim (t-2+a)\sum_{i=1}^{k} E_i.$$

Действительно, $P(t)$ – nef дивизор как обратный образ nef дивизора, $N(t)$ – эффективный. Рассмотрим модификацию $f : \tilde{X} \to X$. Пусть L – такой nef дивизор на $\tilde{X}$, что $L \leqslant f^* D$, где $D \sim P(t) + N(t)$. Тогда по формуле проекции $f_* L$ – тоже nef, но в разложение nef дивизора на X исключительные дивизоры E_i входят с неположительными коэффициентами. Значит, $L \leqslant f^* P$.

Пусть $(X_k, a\Delta_k)$ – пара из семейства **№2+k.1**. Тогда в случае последовательных раздутий β'-инварианты напрямую связаны друг с другом формулой:

$$\beta'_{(X_{k+1}, a\Delta_{k+1})}(\Delta_{k+1}) = -(1-a)\cdot(2-a)^3 + \frac{(2-a)^4}{4} + \beta'_{(X_k, a\Delta_k)}(\Delta_k).$$

Значит, для всех $a \in (\frac{2}{3}, 1)$, то есть для всех возможных a,

$$\beta'_{(X_{k+1}, a\Delta_{k+1})}(\Delta_{k+1}) > \beta'_{(X_k, a\Delta_k)}(\Delta_k).$$

Для доказательства теоремы достаточно установить дивизориальную нестабильность в случае $k = 7$:

$$\beta'_{(X_7, a\Delta_7)}(\Delta_7) = (1-a)\cdot\Big((3-a)^3 m + 3(3-a)^2(2-m+am) - 7(2-a)^3\Big) -$$
$$- \int_0^{2-a}\Big((3-a-t)^3 m + 3(3-a-t)^2(2-m+am+tm) - 7(2-a-t)^3\Big)dt -$$
$$- (2+\frac{3}{2}m) < 0 \quad \forall a \in (0,1).$$

□

4.5 $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Покажем, что лог Фано пары $(X, a\Delta)$, получаемые из семейств **№3.2–.3.4**, тоже не дивизориально стабильны.

Лемма 4.6. *Пусть (X, Δ) – трёхмерное логарифмическое многообразие Фано с неприводимой целой границей, имеющее структуру $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда лог Фано пара $(X, a\Delta)$ не является дивизориально стабильной при любом $a \in (0,1)$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m,n))$, где $m \geqslant n \geqslant 0$ и $m \geqslant 2$. Обозначим через H, F_1 и F_2 классы дивизоров, соответствующие расслоениям $\mathcal{O}_X(1)$, $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,0)$, $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,1)$, где $\pi : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – структурный морфизм. Тогда теория пересечений устроена следующим образом:

$$F_1^2 = F_2^2 = 0, \quad H^2 \cdot F_1 = n, \quad H^2 \cdot F_2 = m, \quad H \cdot F_1 \cdot F_2 = 1, \quad H^3 = 2mn.$$

Для $\Delta \sim H - mF_1 - nF_2$ по формуле присоединения может быть вычислен

$$L(a) = -K_X - a\Delta = (2-a)H + (2-m+am)F_1 + (2-n+an)F_2.$$

Заметим, что $L(a)$ обилен, только если $a > \frac{m-2}{m}$. Тогда с учётом структуры псевдоэффективного и nef конусов ($\overline{\mathrm{Eff}}(X) = \langle H - mF_1 - nF_2, F_1, F_2\rangle$ и $\mathrm{Nef}(X) = \langle H, F_1, F_2\rangle$), можно показать, что nef порог совпадает с псевдоэффективным и равняется $2-a$. Таким образом, значение β'-инварианта в дивизоре Δ

$$\begin{aligned}\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot\Big((2-a)H + (2-m+am)F_1 + (2-n+an)F_2\Big)^3 -\\ - \int_0^{2-a}\Big((2-a-t)H + (2-m+am+tm)F_1 + (2-n+an+tn)F_2\Big)^3 dt =\\ = 3mna^4 - 12mna^3 + 8ma^3 + 8na^3 + 18mna^2 - 24ma^2 - 24na^2 - 12mna +\\ + 24a^2 + 24am + 24an - 48a - 16m - 16n < 0\end{aligned}$$

для всех возможных a, m, n. $\square$

4.6 $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathbb{F}_1$

Здесь рассматриваются случаи **№3.5–3.6**.

Лемма 4.7. *Пусть $(X, a\Delta)$ – трёхмерное логарифмическое многообразие Фано с неприводимой целой границей. Тогда лог Фано пара $(X, a\Delta)$ дивизориально нестабильна при любом $a \in (0,1)$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m(e+f)+nf)$ с весами как в случаях **№3.6 –3.7** и $\pi : X \to \mathbb{F}_1$ – структурный морфизм. Обозначим через H, F и E классы дивизоров на X, соответствующие линейному расслоению $\mathcal{O}_X(1)$, классу π^*f, где f – класс слоя на $\mathbb{F}_1$, и классу π^*e, где e – (-1)-кривая на базе. Тогда $\Delta \sim H - m(E+F) - nF \sim H - mE - (m+n)F$ и теория пересечений устроена следующим образом:

$$HEF = 1, \quad F^2 = 0, \quad E^2H = 1, \quad E^2F = 0, \quad E^3 = 0,$$

$$H^2F = m, \quad H^2E = n, \quad H^2(H - mE - (m+n)F) = 0 \Rightarrow H^3 = m^2 + 2mn.$$

Канонический класс находится из формулы присоединения:

$$K_X = -2H - (2-m)E - (3-m-n)F \sim$$
$$\sim -2(H - mE - (m+n)F) - (2+m)E + (3+m+n)F.$$

Конусы $\mathrm{Nef}(X)$ и $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ порождены тремя образующими:

$$\mathrm{Nef}(X) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}F + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(E+F) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}H,$$

$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}F + \mathbb{R}_{\geqslant 0}E + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(H - mE - (m+n)F).$$

Рассмотрим $L(a) - t\Delta$. При $t = 0$ данный дивизор обилен, если a удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{cases} a > \frac{m-2}{m}, \\ a > \frac{n-1}{m}. \end{cases}$$

При $t \leqslant 2-a$ дивизор $L(a) - t\Delta$ принадлежит $\mathrm{Nef}(X)$ и $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ и при $t > 2-a$ не является псевдоэффективным. Вычислим β'-инвариант в Δ:

$$\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) = (1-a)\cdot\Big((2-a)^3(m^2+2mn) + 3(2-a)^2(2+m)n + 3(2-a)^2(3+m+n)m +$$
$$+ 3(2-a)(2+m)^2 + 6(2-a)(2+m)(3+n+m)\Big) -$$
$$- \int_0^{2-a}\Big((2-a-t)^3(m^2+2mn) + 3(2-a-t)^2(2+m)n + 3(2-a-t)^2(3+m+n)m +$$
$$+ 3(2-a-t)(2+m)^2 + 6(2-a-t)(2+m)(3+n+m)\Big)dt =$$
$$= \frac{3}{2}a^4mn - 14a^3mn + 45a^2mn - 54amn - 78am - 36an + \frac{3}{4}a^4m^2 - 7a^3m^2 -$$
$$- 6a^3m - 4a^3n + \frac{51}{2}a^2m^2 + 48a^2m + 24a^2n - 33am^2 + 24a^2 + 8m^2 +$$
$$+ 16mn + 12m - 48a + 8n.$$

Получаем, что $\beta'_{(X,a\Delta)}(\Delta) < 0$ при $m = -1$, $n \geqslant 2$ и $(m,n) \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant 0} \setminus (0,0) \cup (1,0) \cup (0,1)$ для всех значений a, при которых $(X, a\Delta)$ – логарифмическое многообразие Фано. $\square$

4.7 $\mathbb{P}^1$-расслоения над поверхностью дель Пеццо S_d, $1 \leqslant d \leqslant 7$

Пусть $X = \mathbb{P}_{S_d}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ – линейное nef расслоение на S_d, и $\pi : X \to S_d$ – структурный морфизм. Положим $E_i = \pi^* e_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 8-d$. Пусть H соответствует линейному расслоению $\mathcal{O}_X(1)$ на X. Будем обозначать через $\mathcal{L}$ дивизор, соответствующий этому расслоению (подразумеваем, что из контекста всегда понятно, какой именно объект имеется в виду).

Утверждение 4.8. *Пусть S_d – поверхность дель Пеццо степени d, $\pi : X \mapsto S_d$ – $\mathbb{P}^1$-расслоение над S_d. Тогда конус Мори на X порождается следующими кривыми:*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(S_d) \oplus \langle f \rangle_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}, \tag{6}$$

где f – класс слоя π.

Доказательство. Пусть C – гладкая кривая на X, не численно эквивалентная mf для некоторого m. Рассмотрим линейчатую поверхность S, составленную из слоев π, пересекающих кривую C. Тогда

$$C \equiv aC_S + bf, \tag{7}$$

где a и b – некоторые целые коэффициенты. Выберем в качестве $C_S \subset S$ образ C при проекции на $\Delta \simeq S_d = \mathbb{P}_{S_d}(\mathcal{O})$. Покажем, что данную кривую можно стянуть, то есть $\deg \mathcal{N}_{\Delta/X} \leqslant 0$. Действительно,

$$\mathcal{N}_{\Delta/X} = (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee = (\mathcal{O}_X(-\Delta)|_\Delta)^\vee = \mathcal{O}_\Delta(\Delta) = \mathcal{L}^\vee,$$
$$c_1(\mathcal{N}_{\Delta/X}) = \Delta|_\Delta = -\pi^*\mathcal{L} \cdot \Delta.$$

Тогда $\deg \mathcal{N}_{C_S/X} \leqslant 0$. Значит, C_S и f – образующие в конусе кривых на S и, следовательно, a и b в разложении 7 неотрицательны. Заметим, что эта же численная эквивалентность будет выполнена и на многообразии X. Действительно,

$$D \cdot C = (D \cdot C)|_S = D|_S \cdot C = D_S \cdot (aC_S + bf).$$

Пусть C – неприводимая особая кривая на X. Тогда, следуя [LM22, Prop. 6.4], рассмотрим схему Гильберта $\mathcal{H}$ подсхем в X с таким же полиномом Гильберта, как у кривой f. Пусть $\mathcal{U}$ – универсальная подсхема в $X \times \mathcal{H}$ и заданы морфизмы $u : \mathcal{U} \to X$ и $v : \mathcal{U} \to \mathcal{H}$ (плоский морфизм). Выберем в $\mathcal{U}$ кривую $C_{\mathcal{U}}$, сюръективно отображающуюся на C под действием u и не являющуюся слоем v. Пусть $\nu : C_0 \to C_{\mathcal{U}}$ – нормализация кривой. Тогда слои $S \to C_0$, где $S = C_0 \times_{\mathcal{H}} \mathcal{U}$, по построению, изоморфны $f \simeq \mathbb{P}^1$. Значит, S – линейчатая поверхность и задан морфизм $\psi : S \to X$, как на диаграмме ниже.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dd] \arrow[ddd, bend right] & & C_0 \arrow[dl, "\nu"] \arrow[dd] \\
& C_{\mathcal{U}} \arrow[dl, hook] & \\
\mathcal{U} \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "u"] & & \mathcal{H} \\
X & &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что образ слоя π на X численно эквивалентен f и пересекают как C, так и $\Delta \simeq S_d$. Пусть C_Δ – пересечение $\psi(S)$ и Δ. Выберем подходящие 1-циклы C_S и $C_{S,\Delta}$ на S так, что выполнено

$$\psi_* C_S = C, \qquad \psi_* C_{S,\Delta} = C_\Delta.$$

Тогда для слоя f' морфизма π и некоторого числа $b \in \mathbb{R}$ выполнена численная эквивалентность

$$C_{S,\Delta} \equiv C_S + bf'.$$

Но, по формуле проекции, как и в гладком случае, эта же эквивалентность выполнена и на X:

$$C \equiv C_\Delta + bf,$$

причём $b \geqslant 0$, так как f – экстремальная кривая. Действительно, если это не так, то найдутся эффективные 1-циклы, для которых $f \equiv C_1 + C_2$. Записав для C_1 и C_2 разложения

$$C_1 \equiv C_{\Delta 1} + b_1 f, \qquad C_2 \equiv C_{\Delta 2} + b_2 f$$

сложив их и сравнив левую и правые части, заключаем, что $C_{\Delta 1} + C_{\Delta 2} \equiv 0$. Это эффективные 1-циклы, поэтому $C_{\Delta 1} \equiv C_{\Delta 2} \equiv 0$. Значит, C_1 и C_2 пропорциональны f и f – экстремальная кривая. $\square$

Вычислим канонический класс многообразия X. Для этого рассмотрим короткую точную последовательность касательных расслоений

$$o \to \mathcal{T}_{X/S_d} \to \mathcal{T}_X \to \pi^*\mathcal{T}_{S_d} \to 0 \tag{8}$$

и короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \pi^*(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}) \to \mathcal{Q} \to 0, \tag{9}$$

где $\mathcal{Q}$ обозначает универсальное фактор-расслоение (ранга 1). Тогда из (8) получаем

$$\mathcal{K}_X = \det \mathcal{T}_X^\vee = \det \mathcal{T}_{X/S_d}^\vee \otimes \det \pi^*\mathcal{T}_{S_d}^\vee = \det \mathcal{T}_{X/S_d}^\vee \otimes \pi^*\mathcal{K}_{S_d},$$

где $\mathcal{T}_{X/S_d}$ может быть найдено как

$$\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X(-1), \mathcal{Q}) = \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{Q}.$$

Универсальное фактор-расллоение можно выразить из (9)

$$\det \mathcal{Q} = \mathcal{O}_X(1) \otimes \pi^*(\det(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L})).$$

Таким образом,

$$\mathcal{K}_X = \mathcal{O}_X(-2) \otimes \pi^*\mathcal{K}_{S_d} \otimes \pi^*\mathcal{L}^\vee.$$

Обозначим через (X_d, Δ_d) лог Фано пару $(\mathbb{P}_{S_d}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{L}_d), \Delta)$, где S_d – поверхность дель Пеццо степени d, $\mathcal{L}_d$ – nef расслоение на S_d, Δ соответствует $\mathbb{P}_{S_d}(\mathcal{O})$.

Утверждение 4.9. *Пусть $(X_d, a\Delta_d)$ – логарифмическое многообразие Фано, $a \in (0,1)$. Тогда $(X_{d+1}, a\Delta_{d+1})$ – тоже логарифмическое многообразие Фано, причём $\mathcal{L}_{d+1}$ однозначно определено.*

Доказательство. Рассмотрим дивизор

$$L_d(a) = -K_{X_d} - a\Delta_d = (2-a)H_d + \pi^*\big(-(1-a)\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big),$$

который обилен, по условию. Тогда, согласно критерию Клеймана, он положительно пересекается со всякой кривой (из конуса Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X_d)$). Покажем, что $L_{d+1}(a)$ также положительно пересекается со всеми кривыми из $\overline{\mathrm{NE}}(X_{d+1})$. Проверим это условие на образующих конуса Мори. Так как $H_d \cdot f = H_{d+1} \cdot f = 1$ и f не пересекается с прообразами дивизоров с поверхности дель Пеццо, то

$$L_d(a) \cdot f = L_{d+1}(a) \cdot f = 2 - a > 0.$$

Пусть $\sigma : S_d \to S_{d+1}$ – раздутие с исключительной кривой $e \subset S_d$. Тогда под действием σ конус $\mathrm{Nef}(S_d)$ сюръективно отображается на $\mathrm{Nef}(S_{d+1})$, причём образующие $\mathrm{Nef}(S_d)$ необязательно переходят в образующие $\mathrm{Nef}(S_{d+1})$. Значит, nef дивизор $\mathcal{L}_d$ переходит в nef дивизор $\sigma_*\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_{d+1}$. Если C – кривая на S_{d+1}, то

$$\begin{aligned} L_{d+1}(a) \cdot C = (2-a)H_{d+1} \cdot C + \pi^*\big(-(1-a)\mathcal{L}_{d+1} - K_{S_{d+1}}\big) \cdot C = \\ = (2-a)H_{d+1}^2 \cdot \pi^*C + \big(-(1-a)\mathcal{L}_{d+1} - K_{S_{d+1}}\big) \cdot C = \\ = (2-a)\mathcal{L}_{d+1} \cdot C - (1-a)\mathcal{L}_{d+1} \cdot C - K_{S_{d+1}} \cdot C = \big(\sigma_*\mathcal{L}_d - K_{S_{d+1}}\big) \cdot C > 0 \end{aligned}$$

и $\mathcal{L}_{d+1} - K_{S_{d+1}}$ – nef дивизор (как сумма обильного и nef). Откуда следует обильность $L_{d+1}(a)$. □

Лемма 4.10. $L_d(a) - t\Delta_d \in \mathrm{Nef}(X_d) \;\Leftrightarrow\; L_d(a) - t\Delta_d \in \overline{\mathrm{Eff}}(X_d) \;\Leftrightarrow\; t \leqslant 2 - a.$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\mathrm{Nef}(X_d)$ является двойственным к конусу Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X_d)$. Тогда условие $L_d(a) - t\Delta_d \in \mathrm{Nef}(X_d)$ равносильно

$$\begin{cases} (L_d - t\Delta_d) \cdot f \geqslant 0, \\ (L_d - t\Delta_d) \cdot C \geqslant 0 \quad \forall C \in \overline{\mathrm{NE}}(S_d). \end{cases}$$

Как и доказательстве утверждения выше, $(L_d - t\Delta_d) \cdot C = \big(\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big) \cdot C > 0$ при всех t. При этом

$$(L_d - t\Delta_d) \cdot f = (2 - a - t)H_d \cdot f + \pi^*\big(- (1 - a - t)\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big) \cdot f = 2 - a - t.$$

Поскольку равенство $(L_d - t\Delta_d) \cdot C' = 0$ достигается на экстремальной кривой f, которая соответсвует стягиванию расслоенного типа, то $L_d - (2 - a)\Delta_d$ является общей гранью конусов $\mathrm{Nef}(X)$ и $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$. Значит, псевдоэффективный порог совпадает с nef порогом. Таким образом, получаем требуемое. □

Теорема 4.11. *Пусть $(X_d, a\Delta_d)$ и $(X_{d+1}, a\Delta_{d+1})$ – 3-мерные лог Фано пары, где nef расслоение $\mathcal{L}_{d+1} = \sigma_*\mathcal{L}_d$ получается из исходного стягиванием (-1)-кривой. Тогда выполнено следующее:*

$$\beta'_{(X_d, a\Delta_d)}(\Delta_d) < \beta'_{(X_{d+1}, a\Delta_{d+1})}(\Delta_{d+1}) < 0, \tag{10}$$

если (-1)-кривая стягивается. В противном случае, когда нельзя стянуть ни одну (-1)-кривую, то выполнено

$$\beta'_{(X_{d+1}, a\Delta_{d+1})}(\Delta_{d+1}) < \beta'_{(X_d, a\Delta_d)}(\Delta_d) < 0. \tag{11}$$

Доказательство. Формула для β'-инварианта с учётом предыдущих лемм примет вид

$$\beta'_{(X_d, a\Delta_d)}(\Delta_d) = (1 - a) \cdot L_d^3 - \int\limits_0^{2-a} \Big(L_d - t\Delta_d\Big)^3 dt. \tag{12}$$

Получим выражение для степени многообразия $(-K_{X_d} - a\Delta_d)^3$:

$$\begin{aligned} L_d^3 = \Big((2 - a)H_d + \pi^*\big(- (1 - a)\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big)\Big)^3 &= \\ = (2 - a)^3 H_d^3 + 3(2 - a)^2 H_d^2 \cdot \pi^*\big(- (1 - a)\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big) &+ \\ + 3(2 - a)H_d \cdot \pi^*\big((1 - a)^2\mathcal{L}_d^2 + 2(1 - a)\mathcal{L}_d \cdot K_{S_d} + K_{S_d}^2\big) &= \\ = (2 - a)^3 H_d \cdot \mathcal{L}_d + 3(2 - a)^2 \mathcal{L}_d \cdot \pi^*\big(- (1 - a)\mathcal{L}_d - K_{S_d}\big) &+ \\ + 3(2 - a)\big((1 - a)^2\mathcal{L}_d^2 + 2(1 - a)\mathcal{L}_d \cdot K_{S_d} + d\big) &= \\ = (2 - a)^3\mathcal{L}_d^2 - 3(2 - a)(1 - a)\mathcal{L}_d^2 - 3(2 - a)a\mathcal{L}_d \cdot K_{S_d} + 3(2 - a)d &= \\ = (2 - a)\Big(\mathcal{L}_d^2(a^2 - a + 1) - 3aK_{S_d}\mathcal{L}_d + 3d\Big)&. \end{aligned}$$

Вычислим теперь интеграл от функции объёма:

$$\int_0^{2-a}\left(L_d - t\Delta_d\right)^3 dt =$$

$$= \int_0^{2-a}\Bigg(\mathcal{L}_d^2\Big((2-a-t)^3 - 3(2-a-t)^2(1-a-t) + (3(2-a-t)(1-a-t)^2\Big)+$$

$$+ \mathcal{L}_d\cdot K_{S_d}\Big(6(2-a-t)(1-a-t) - 3(2-a-t)^2\Big) + 3(2-a-t)d\Bigg)dt =$$

$$= \frac{1}{4}(2-a)^2\Big(6d - 4(1+a)K_{S_d}\cdot\mathcal{L}_d + (2+a^2)\mathcal{L}_d^2\Big).$$

Подставим полученные выражения в формулу (12) и получим

$$\beta'_{(X_d,a\Delta_d)}(\Delta_d) = -\frac{1}{4}(2-a)\Big(6ad - 8(a^2-a+1)K_{S_d}\cdot\mathcal{L}_d + 3a(a^2-2a+2)\mathcal{L}_d^2\Big).$$

Воспользуемся связью между дивизорами на S_d и S_{d+1}:

$$\begin{cases} K_{S_d} = \sigma^* K_{S_{d+1}} + e; \\ \mathcal{L}_d = \sigma^*\mathcal{L}_{d+1} - ke, \end{cases} \tag{13}$$

где $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, σ – стягивание (-1)-кривой e.

Случай 1. Пусть существует такая (-1)-кривая e, с которой пересекается $\mathcal{L}_d$, то есть в формуле (13) $k>0$. Тогда $K_{S_d}\cdot\mathcal{L}_d \geqslant \sigma^*(K_{S_{d+1}}\cdot\mathcal{L}_{d+1})+1$ и $\mathcal{L}_d^2\leqslant\sigma^*(\mathcal{L}_{d+1}^2)-1$. Откуда получаем

$$\beta'_{(X_d,a\Delta_d)}(\Delta_d)\leqslant\beta'_{(X_{d+1},a\Delta_{d+1})}(\Delta_{d+1}) + \frac{1}{4}(a-2)(6a+8(1-a+a^2)+3a(2-2a+a^2)) <$$

$$< \beta'_{(X_{d+1},a\Delta_{d+1})}(\Delta_{d+1}).$$

Случай 2. Если такой (-1)-кривой не существует, то $\mathcal{L}_d=0$, так как конус Мори поверхности S_d порождён (-1)-кривыми. В этом случае β'-инвариант может быть явно вычислен:

$$\beta'_{(X_d,a\Delta_d)}(\Delta_d) = -\frac{3}{2}(2-a)ad < 0.$$

Значит, любое раздутие $\mathbb{P}^1$-расслоения над S_d (из таблицы 1) не K-полустабильно.

□

4.8 Доказательство основной теоремы

В заключение вернёмся к основной теореме, сформулированной в разделе 1, и покажем, что она непосредственно следует из утверждений, доказанных ранее в этой работе.

Теорема. *Существует лишь конечное число трёхмерных лог Фано пар (X,Δ) с целой неприводимой границей, для которых лог Фано пара $(X,a\Delta)$ K-полистабильна при некоторых значениях параметра a.*

Доказательство. Достаточно проверить, что ни одна пара $(X,a\Delta)$, где (X,Δ) принадлежит бесконечной серии семейств лог Фано пар (из списка 1), не является дивизориально стабильной. Действительно, если X имеет структуру расслоения на квадрики, то дивизориальная нестабильность следует из Леммы 4.1. Если же X имеет структуру расслоения на проективные пространства, $\mathbb{P}^2$ или $\mathbb{P}^1$, то пара $(X, a\Delta)$ дивизориально нестабильна для почти всех m, где m – параметр, индексирующий бесконечное семейство, по Лемме 4.2 и Лемме 4.3 соотвественно. Если X получено из семейства **№2.5** раздутием в нескольких точках, то индукцией, см. Лемму 4.4 и Теорему 4.5, можно показать отсутствие K-полустабильности на $(X, a\Delta)$. Пусть X имеет структуру расслоения над поверхностью дель Пеццо S_d, $d \leqslant 8$. Тогда нестабильность следует из Леммы 4.6 и Леммы 4.7 (если $d = 8$), Теоремы 4.11 и Леммы 4.6 (если $d < 8$). ☐

Список литературы

[ACC+23] Carolina Araujo, Ana-Maria Castravet, Ivan Cheltsov, Kento Fujita, Anne-Sophie Kaloghiros, Jesus Martinez-Garcia, Constantin Shramov, Hendrik Süß, and Nivedita Viswanathan. The Calabi problem for Fano threefolds, 2023.

[CDS15a] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1):183–197, 2015.

[CDS15b] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1):199–234, 2015.

[CDS15c] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *Journal of the American Mathematical Society*, 28(1):235–278, 2015.

[Don12] Simon K Donaldson. Kähler metrics with cone singularities along a divisor. In *Essays in Mathematics and its Applications: In Honor of Stephen Smale´ s 80th Birthday*, pages 49–79. Springer, 2012.

[Fuj] Kento Fujita. Classification list of log smooth log Fano threefolds. *Unpublished note*.

[Fuj16] Kento Fujita. On K-stability and the volume functions of $\mathbb{Q}$-Fano varieties. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 113(5):541–582, 2016.

[Fuj19] Kento Fujita. Uniform K-stability and plt blowups of log Fano pairs. *Kyoto Journal of Mathematics*, 59(2):399–418, 2019.

[Fuj20] Kento Fujita. On K-polystability for log del Pezzo pairs of Maeda type. *Acta Mathematica Vietnamica*, 45(4):943–965, 2020.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties (Cambridge Tracts in Mathematics 134)*. Cambridge University Press, 1998.

[Laz17] Robert K Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: line bundles and linear series*, volume 48. Springer, 2017.

[Li17] Chi Li. K-semistability is equivariant volume minimization. *Duke Mathematical Journal*, 166(16):3147–3218, 2017.

[LM22] Konstantin Loginov and Joaquín Moraga. Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers. *Journal of Algebra*, 612:110–146, 2022.

[Log22] Konstantin Loginov. K-polystability of 3-dimensional log fano pairs of maeda type. *International Journal of Mathematics*, 2022.

[LZ23] Konstantin Loginov and Chuyu Zhou. Boundedness of log fano pairs with certain k-stability. *arXiv preprint arXiv:2302.06558*, 2023.

[Mae86] Hironobu Maeda. Classification of logarithmic Fano threefolds. *Compositio Mathematica*, 57(1):81–125, 1986.

[OS15] Yuji Odaka and Song Sun. Testing log k-stability by blowing up formalism. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, volume 24, pages 505–522, 2015.

[Pro02] Yuri G Prokhorov. On zariski decomposition problem. *arXiv preprint math/0211335*, 2002.

[Tia97] Gang Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Inventiones mathematicae*, 130(1):1–37, 1997.

[Tia15] Gang Tian. K-stability and kähler-einstein metrics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 68(7):1085–1156, 2015.

[Xu23] Chenyang Xu. *K-stability of Fano varieties*. 2023. Available here.