О критических точках гладких функций

Андрей Гундоров

19 сентября 2023 г.

1 Введение

Одной из важных теорем теории Морса является полное описание всех элементарных кобордизмов (см. [2], §3). Напомним, что кобордизм называется элементарным, когда на нем существует регулярная функция Морса с единственной критической точкой. Неформально, теорема утверждает, что элементарные кобордизмы соответствуют перестройкам Морса края этого кобордизма. В первой части этой работы мы покажем, что кобордизмы на которых существует регулярная функция с единственной (необязательно морсовской) критической точкой тоже связаны с некоторым классом перестроек края кобордизма. Во второй части работы мы применим доказанные теоремы к нескольким задачам. В третьей части я расскажу о схожей по тематике задаче и приведу ее решение.

2 Сферическая перестройка

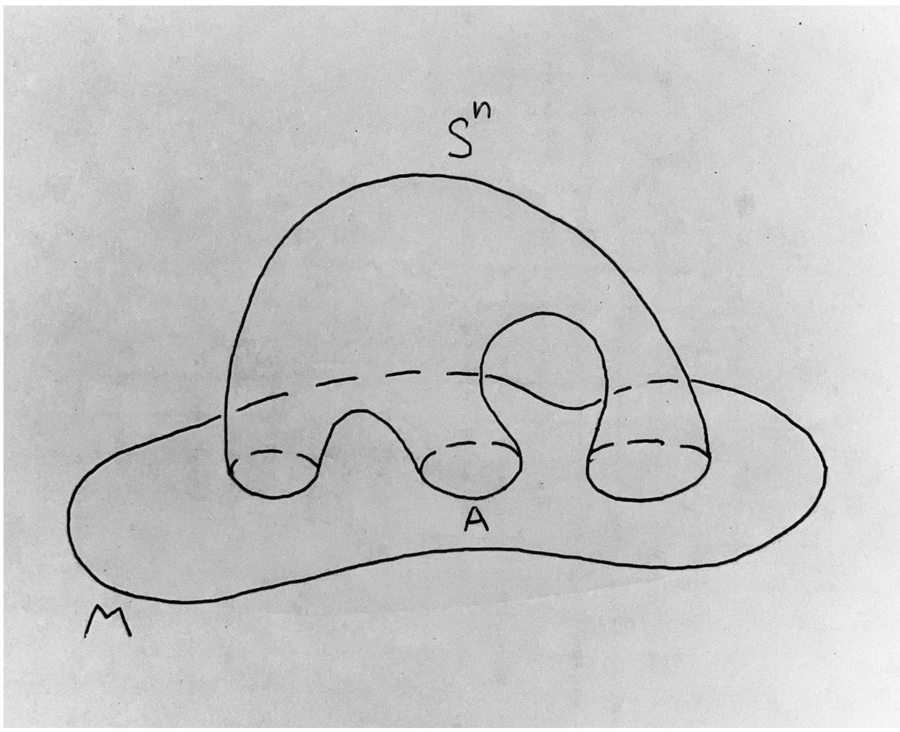
Определение 1. *Функция* $f : W \to [0,1]$ *на кобордизме* (W, M_0, M_1) *называется регулярной, если* $f^{-1}(0) = M_0$, $f^{-1}(1) = M_1$ *и значения* 0 *и* 1 *некритические.*

Пусть M замкнутое многообразие размерности n, а $A_M \subset M$ его компактное подмногообразие (с краем) коразмерности 0 с заданным вложением $i : A_M \to S^n$. Отметим, что под обозначением S^n подразумевается сфера со стандартной гладкой структурой. Обозначим образ вложения i как $A_S \subset S^n$. Определим диффеоморфизм $j : \partial A_M \to \partial A_S$, как ограничение вложения i на ∂A_M.

Определение 2. *Будем говорить, что гладкое многообразие*

$$(M \backslash int(A_M)) \cup_j (S^n \backslash int(A_S))$$

результат сферической перестройки M по множеству A_M (и вообще, строго говоря, вложению i).



Менее строго процесс сферической перестройки можно описать так: мы вырезаем из нашего многообразия подмногообразие сферы и вклеиваем вдоль границы дополнение к этому подмногообразию.

Замечание 1. *Отметим, что обычная перестройка Морса это частный случай сферической. Действительно, сфера S^n разбивается на два многообразия $S^{k-1} \times D^{n-k+1}$ и $D^k \times S^{n-k}$, склеенных вдоль границы, легко увидеть, что такая сферическая перестройка совпадает с перестройкой Морса индекса k.*

Замечание 2. *Можно показать, что если многообразие N это результат сферической перестройки M по множеству A_M, то M это результат сферической перестройки N по множеству $S^n \backslash int(A_S)$.*

3 Конструкция кобордизма с одной критической точкой

Пусть n-мерное многообразие N это результат сферической перестройки многообразия M по множеству A_M и вложению i. Сейчас мы построим канонический кобордизм (W_A, M, N) и регулярную функцию f на нем с единственной критической точкой. Идея построения этого кобордизма заключается в следующем. Отождествим границу $(n+1)$-мерного шара B^{n+1} с нашей n-мерной сферой S^n. Заметим, что подмногообразие ∂A_S коориентированно в S^n, следовательно, у него существует бикольцевая окрестность U, которая диффеоморфна $\partial A_S \times [0,1]$. Определим диффеоморфизм $\varphi : \partial A_M \times [0,1] \to U$, как $j \times id$. Мы хотим определить кобордизм W_A, как склейку $(M \backslash Int(A_M)) \times [0,1]$ и B^{n+1} по диффеоморфизму φ. Проблема заключается в том, что результат такой подклейки будет лишь топологическим, но не гладким многообразием с краем. Для построения кобордизма W_A нам потребуется от многообразий с краем перейти к многообразиям с углами, все определения согласованы с [9]. Нам необходимы следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть A компактное подмногообразие коразмерности 1 в $S^n \subset B^{n+1}$. Тогда существует гладкое многообразие с углами B' и отображение $\varphi : B' \to B$ обладающие следующими свойствами:*
(1) отображение φ является гомеоморфизмом, а ограничение $\varphi|_{int(B')}$ задает диффеоморфизм между $int(B')$ и $int(B)$;
(2) множество углов B' глубины 1 совпадает с $\varphi^{-1}(A)$, а углы большей глубины отсутствуют.

Лемма 4. *Пусть B это гладкое многообразие с углами гомеоморфное шару, а $f' : \partial B \to \mathbb{R}$ это гладкая функция на его границе. Тогда существует гладкая функция $f : B \to \mathbb{R}$, такая, что:*
(1) для функций f и f' выполняется равенство $f|_{\partial B} = f'$;
(2) функция f имеет единственную критическую точку и эта точка пренадлежит $int(B)$;
(3) для всякой точки $x \in \partial B$ вектор градиента функции f направ-

лен внутрь многообразия B.
Замечание. *Ясно, что свойство (3) не зависит от выбора метрики на B.*

Вернемся к построению кобордизма W_A. Пользуясь леммой 3 построим многообразие с углами B', углы глубины 1 которого совпадают с краем бикольцевой окрестности U. Теперь кобордизм W_A корректно определен, так как в приведенной выше конструкции углы глубины 1 многообразий $(M \backslash Int(A_M)) \times [0, 1]$ и B' склеиваются и мы получаем гладкое многообразие с краем. Из построения W_A следует, что его граница это дизъюнктное объединение многообразий M и N.

Построим на W_A регулярную функцию f с одной критической точкой.

Многообразие $S^n \backslash U$ разбивается на компоненты связности. Рассмотрим на $U \cong \partial A_S \times [0, 1]$ функцию проекции на вторую координату продолжим ее константой (0 или 1) на каждую компоненту связности по непрерывности. Назовем полученную функцию f_1'. Функция f_1' гладкая, как функция на границе многообразия с углами B'. Пользуясь леммой 4 построим функцию f_1 на многообразии с углами B', продолжающую f_1'. На многообразии $(M \backslash int(A_M)) \times [0, 1]$ рассмотрим функцию f_2, сопоставляющую паре (x, t) число t. Тогда из предположений леммы 4 следует, что склейка функций f_1 и f_2 задает гладкую регулярную функцию с единственной критической точкой на кобордизме (W_A, M, N).

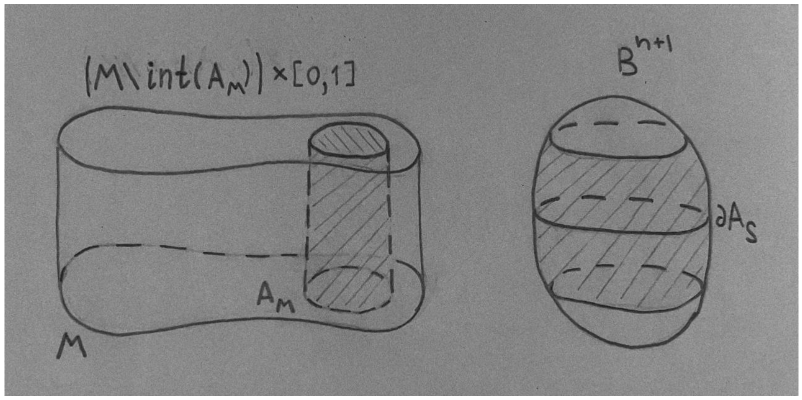
Сейчас мы опишем несколько свойств кобордизма W_A, которые пригодятся нам в будущем.

Лемма 5. *Кобордизм W_A гомеоморфен кобордизму*

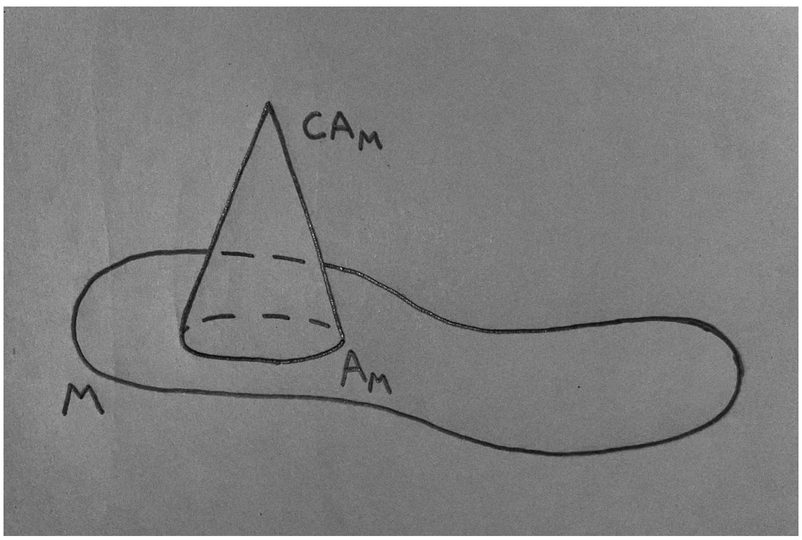
$$(M \backslash int(A_M)) \times [0, 1] \cup_\varphi B^{n+1},$$

где φ это диффеоморфизм между $\partial A \times [0, 1] \subset (M \backslash int(A_M)) \times [0, 1]$ и $U \cong \partial A_S \times [0, 1] \subset B^{n+1}$.

Доказательство. Лемма является следствием построения кобордизма W_A. $\square$



Лемма 6. *Пара* (W_A, M) *гомотопически эквивалентна паре* $(M \cup CA_M, M)$.



Доказательство. Эта лемма следует из леммы 5 и того факта, что если $A \subset S^n \subset B^{n+1}$, то пара (B^{n+1}, A) гомотопически эквивалентна паре (CA, A). $\square$

4 Обратная теорема

Теорема 7. *Пусть заданны кобордизм* (W, M, N) *и регулярная функция* f *на нем с единственной критической точкой. Тогда* N *это результат сферической перестройки* M *для некоторого многооб-*

разия $A_M \subset M$ *и вложения* i*. Более того кобордизм* (W, M, N) *диффеоморфен каноническому кобордизму* (W_A, M, N)*.*

Определение 8. *Будем говорить, что параметризованная кривая* $\gamma(t)$*, выходит из точки* p *и входит в точку* q*, если* $\lim\limits_{t\to-\infty}\gamma(t) = p$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = q$*. Параметризованные кривые, которые входят или выходят из точки* p *будем называть примыкающими к* p*.*

Доказательство. Доказательство основано на лемме 10 из [6]. Эта лемма утверждает следующее. Зафиксируем метрику общего положения на W и рассмотрим градиентное векторное поле ∇f функции f в этой метрике. Обозначим критическую точку функции f как p. Множество примыкающих к p фазовых кривых векторного поля ∇f обозначим как $D(p)$. Пересечение $D(p) \cap M$ назовем $D_M(p)$, а пересечение $D(p) \cap N$ назовем $D_N(p)$. Пусть $X \subset M$ содержит $D_M(p)$. Тогда через $K(X)$ обозначим множество проходящих через X фазовых кривых поля ∇f в объединении с $D(p)$, очевидно, что $K(X)$ совпадает с замыканием множества проходящих через X фазовых кривых поля ∇f. Тогда существует подмногообразие с краем $V_M \subset M_0$, такое, что:
(1) Множество $D_M(p)$ содержится в $int(V_M)$;
(2) $K(V_M)$ является гомеоморфным шару многообразием с углами.
Обозначим $K(V_M) \cap N$ как V_N. Углы многообразия $K(V_M)$ имеют глубину 2 и совпадают с $\partial V_M \cup \partial V_N$. Так как $D_M(p) \subset V_M$, то многообразие с углами $W \backslash (int(K(V_M) \cup int(V_M) \cup int(V_N))$ диффеоморфно $(M \backslash int(V_M)) \times [0, 1]$. Так же многообразие $\partial K(V_M) \backslash (int(V_M) \cup int(V_N))$ диффеоморфно $\partial K(V_M) \times [0, 1]$.
Тогда кобордизмы (W, M, N) и (W_{V_M}, M, N) диффеоморфны.

□

5 h-кобордизмы

В качестве следствия приведенных выше теорем мы докажем следующую теорему (см. [4]).

Теорема 9 (P.E. Pushkar, Yu.B.Rudyak)**.** *Всякая регулярная функция на нетривиальном h-кобордизме размерности > 5 имеет по меньшей мере 2 критические точки.*

Предположим, что регулярная функция f на h-кобордизме (W, M_0, M_1) имеет ровно одну критическую точку. Согласно теореме 4, M_1 это результат сферической перестройки M_0 по подмногообразию A. Из леммы 6 мы знаем, что пара (W, M_0) гомотопически эквивалентна паре $(M_0 \cup CA, M_0)$. Так как W является h-кобордизмом, то для всех i выполняется равенство $\pi_i(W, M_0) = 0$.

Лемма 10. *Многообразие (с краем) A стягиваемо.*

Доказательство. Из точной гомотопической последовательности пары (CA, A) следует, что стягиваемость множества A равносильна тому, что для любого k выполняется равенство $\pi_k(CA, A) = 0$. Не умаляя общности мы можем считать, что пара (M_0, A) $(k+1)$-связна. Действительно, приклеивание клетки e^m к основанию M_0 не нарушает равенства

$$\pi_i(M_0 \cup CA \cup_\varphi e^m, M_0 \cup_\varphi e^m) = 0$$

и не меняет множество A. Это значит, что мы можем заклеить все ненулевые относительные гомотопические классы пары (M_0, A), вплоть до $(k+1)$-го. Мы хотим воспользоваться изоморфизмом вырезания гомотопических групп для разбиения $CA \cup M_0$ на CA и M_0. Для этого необходимо проверить, что пересечение $CA \cap M_0 = A$ связно. Это следует из последовательности Майера — Вьеториса для того же разбиения. Покажем, что $\pi_k(CA, A) = 0$, если $\pi_i(M_0, A) = 0$ для всех $i \le k+1$. Так как $CA \cap M_0 = A$ и пара (M_0, A) $(k+1)$-связна, то из изоморфизма вырезания для гомотопических групп следует, что для всех $i \le k$ $\pi_i(CA, A) = \pi_i(M_0 \cup CA, M_0) = 0$, в частности $\pi_k(CA, A) = 0$. $\square$

Применяя те же рассуждения для пары (W, M_1) мы получим, что многообразие $S^n \backslash int(A)$ тоже стягиваемо. Воспользуемся следующей теоремой Дымова (см.[8]).

Теорема 11. *Пусть V и V' — гладкие стягиваемые компактные многообразия размерности $n \geq 6$. Если края ∂V и $\partial V'$ диффеоморфны, то многообразия V и V' также диффеоморфны.*

Края стягиваемых многообразий A и $S^n \backslash int(A)$ диффеоморфны, следовательно, многообразие A диффеоморфно многообразию $S^n \backslash int(A)$. Напомним, что, согласно, теореме 5 кобордизм (W, M_0, M_1) диффеоморфен кобордизму (W_A, M_0, M_1), который топологически является склейкой $(M_0 \backslash Int(A)) \times [0,1]$ и B^{n+1} по бикольцевой окрестности $U \cong \partial A \times [0,1]$ многообразия $\partial A_S \subset B^{n+1}$.

Лемма 12. *Пара* (B^{n+1}, U) *гомеоморфна паре* $(A \times [0,1], \partial A \times [0,1])$.

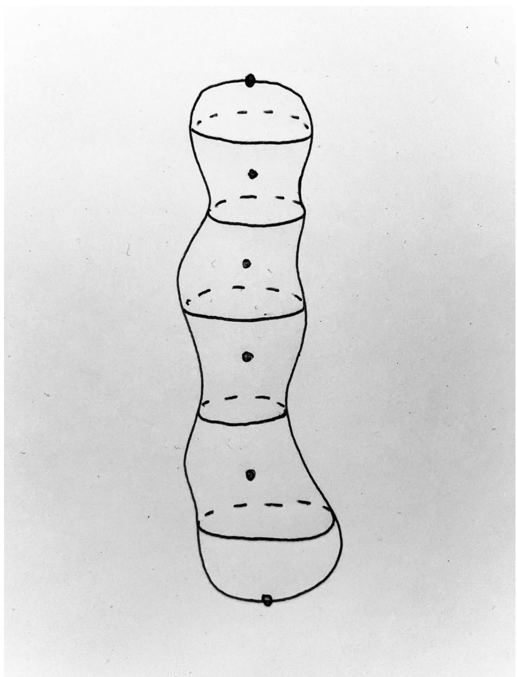
Доказательство. Так как многообразие A стягиваемо, то и (топологическое) многообразие $A \times [0,1]$ стягиваемо. Граница $\partial(A \times [0,1]) \cong S^n$ – односвязна. Следовательно, пользуясь ([2], с.104, предложение А) мы получаем, что (топологическое) многообразие с краем $A \times [0,1]$ гомеоморфно шару. Из этого факта и того, что всякий гомеоморфизм сфер продолжается до гомеоморфизма шаров мы получаем утверждение леммы. □

Таким образом мы доказали, что кобордизм W_A гомеоморфен склейке $(M_0 \backslash Int(A)) \times [0,1]$ и $A \times [0,1]$ по множеству $\partial A \times [0,1]$. Следовательно, W_A гомеоморфен цилиндру $M_0 \times [0,1]$ и кобордизм тривиален.

6 Оценка числа критических точек на замкнутом многообразии

Теория Морса дает различные оценки на количество критических точек морсовской функции на многообразии. Категория Люстерника-Шнирельмана задает нижнюю границу числа критических точек функции на замкнутом многообразии. К сожалению, эта категория не дает точной оценки и трудно вычислима, поэтому возникает потребность в других топологических инвариантах.

Пусть на замкнутом многообразии M задана функция f изолированными (но не обязательно морсовскими) критическими точками. Малым шевелением мы можем добиться того, что у пошевеленной функции f будет то же число критических точек, но все их критические значения будут различны. По такой функции мы можем построить последовательность вложенных многообразий с краем $M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_n = M$. Тут n это число критических точек f, а многообразие M_i это $f^{-1}((-\infty, c_i])$, где c_i это регулярное значение функции f, находящееся между i-м и $(i+1)$-м критическим значением.



Заметим, что ограничение f на каждый из кобордизмов $M_{i+1} \backslash int(M_i)$ задает регулярную функцию с одной критической точкой. Из леммы 6 следует, что

$$\tilde{H}^*(M_{i+1}, M_i) = \tilde{H}^*(M_i \cup CA, M_i)) = \tilde{H}^*(\Sigma A),$$

следовательно, $\tilde{H}^*(M_{i+1}, M_i)$ это кольцо с нулевым умножением. В точной последовательности пары (M_{i+1}, M_i) два отображения являются кольцевыми гомоморфизмами:

$$\tilde{H}^*(M_{i+1}, M_i) \to \tilde{H}^*(M_{i+1}) \to \tilde{H}^*(M_i).$$

Отсюда следует, что ядро гомоморфизма $\tilde{H}^*(M_{i+1}) \to \tilde{H}^*(M_i)$ тоже является кольцом с нулевым умножением. Так же отметим, что из теоремы Риба следует, что M_1 диффеоморфно шару, то есть в частности, $\tilde{H}^*(M_1) = 0$. Таким образом по функции f мы построили последовательность гомоморфизмов градуированных колец

$$\tilde{H}^*(M) = \tilde{H}^*(M_n) \to \tilde{H}^*(M_{n-1}) \to ... \to \tilde{H}^*(M_2) \to \tilde{H}^*(M_1) = 0,$$

которая начинается с $\tilde{H}^*(M)$, заканчивается нулевым кольцом и такую, что ядро каждого гомоморфизма это идеал с нулевым умножением. Это наталкивает нас на следующее определение.

Определение 13. *Пусть R это градуированное ассоциативное кольцо. Изотропной длиной этого кольца $isot(R)$ назовем минимальное n такое, что существует цепочка градуированных гомоморфизмов колец $R = R_n \to ... \to R_1 = 0$, такая, что ядро каждого отображения в ней это идеал с нулевым умножением. Изотропной длиной замкнутого многообразия M $isot(M)$ назовем изотропную длину кольца когомологий $\tilde{H}^*(M)$.*

Из доказанного выше следует, что инвариант $isot(M)$ дает нижнюю оценку на количество критических точек гладкой функции на M. Оказывается, что в такой формулировке этот инвариант бесполезен для оценки числа критических точек по следующей причине.

Определение 14. *Пусть R это ассоциативное градуированное кольцо. Длиной этого кольца $len(R)$ назовем наибольшее натуральное число n, что для данного n существуют элементы $a_1, ..., a_n$ такие, что $dim(a_i) > 0$ и их произведение отлично от нуля. Когомологической длиной многообразия M $len(M)$ называется длина кольца когомологий $\tilde{H}^*(M)$.*

Известно, что число $len(M)$ оценивает снизу число критических точек гладкой функции на M (см. [10]).

Лемма 15. *Для всякого связного замкнутого многообразия M выполняется неравенство $len(M) \geq isot(M)$.*

Доказательство. В действительности мы покажем, что $len(R) \geq isot(R)$ для всякого ассоциативного градуированного кольца R с нулевой градуировкой равной нулевому кольцу. Пусть нам задана минимальная цепочка для кольца R, тогда не умаляя общности мы можем считать, что все гомоморфизмы в ней сюръективны, а каждое ядро это максимальный по включению идеал с нулевым умножением. Теперь докажем наше утверждение при помощи индукции по $isot(R)$. База для $isot(R) = 0$ очевидна. Пусть теперь нам дано кольцо R с $isot(R) = n$. Рассмотрим цепочку $R = R_n \to R_{n-1} \to ... \to R_1 = 0$, которая соответствует этому n. Обозначим первое отображение в ней как φ. Ясно, что $isot(R_{n-1}) = (n-1)$ и так как φ сюръективно, то $R_{n-1} = R_n/ker(\varphi)$. По предположению индукции мы знаем, что $len(R_{n-1}) \geq isot(R_{n-1}) = (n-1)$, следовательно, существуют элементы $a_1, ..., a_{n-1} \in R_{n-1}$ такие, что их произведение отлично от нуля. У каждого из них выберем по одному прообразу гомоморфизма φ и обозначим его как $\tilde{a}_i \in R$. Заметим, что $\tilde{a}_1\tilde{a}_2...\tilde{a}_{n-1} \notin ker(\varphi)$, так как иначе $a_1a_2...a_{n-1} = 0$. Это значит, что найдется такой $a_n \in ker(\varphi)$, что $\tilde{a}_1\tilde{a}_2...\tilde{a}_{n-1}a_n \neq 0$. Следовательно, $len(R) \geq n$. □

Хорошей новостью является то, что при построении этого инварианта мы никак не использовали тот факт, что многообразие A, по которому происходит сферическая перестройка, является подмногообразием сферы. Вообще это условие накладывает ограничения на его топологию.

7 Гладкие функции с малым числом критических точек

Минимальное число критических точек (возможно вырожденных) важный инвариант многообразия. Классическая теорема [1] утверждает, что на связном замкнутом многообразии размерности n существует функция с не более чем $(n+1)$-й критической точкой. Доказательство этой теоремы не позволяет ничего сказать о характере этих критических точек – они могут быть бесконечнократными. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 16. *На связном замкнутом многообразии размерности n существует бесконечногладкая функция с не более чем $(n+1)$-й критической точкой, такая, что каждая из критических точек имеет конечную кратность.*

Согласно теории Люстерника-Шнирельмана любая гладкая функция на $\mathbb{R}P^n$ имеет по меньшей мере $(n+1)$ критическую точку (см. [10]). Следовательно, на связном замкнутом n-мерном многообразии может не существовать функции с менее чем $(n+1)$-й критической точкой.

8 Идея доказательства теоремы для $n > 2$.

Известно, что на каждом связном компактном многообразии существует индексируемая функция Морса, то есть такая морсовская функция, что для нее верны следующие условия:
(1) у нее ровно один локальный максимум и один локальный минимум;
(2) ее значение в критической точке индекса λ равно λ.
Идея построения функции из формулировки теоремы 16 заключается в следующем: мы изменим индексируемую функцию Морса в малых окрестностях ее критических точек, так, чтобы критические значения отвечали некоторому условию. После этого мы построим шар, который содержит все точки данного индекса, такой, что с точностью до диффеоморфизма функция в нем совпадает с одной из типовых. А после покажем как деформировать типовую функцию так, чтобы у нее осталась лишь одна критическая точка конечной кратности.

9 Доказательство теоремы для $n > 2$

Лемма 17. Пусть M_1 и M_2 многообразия одной размерности, f_1 и f_2 функции Морса на них, а ξ_1 и ξ_2 их градиентно-подобные векторные поля (см.[5]), причем выполняются условия:
(1) точки $p_1, ..., p_k$ критические для f_1, а $q_1, ..., q_k$ критические для f_2;
(2) для всех $i \in \{1, ..., k\}$ $f_1(p_i) = f_2(q_i)$ и индекс критической точки p_i совпадает с индексом точки q_i;
(3) найдется такое некритическое значение c, что линии уровня $f_i^{-1}(c)$ связны;
(4) для каждой из точек p_i (q_i соотв.) найдется фазовая кривая P_i (Q_i соотв.) поля ξ_1 (ξ_2 соотв.), примыкающая к этой точке и пересекающая линию уровня $f_i^{-1}(c)$.
Тогда существуют диффеоморфные шару множества $\mathcal{U}_1 \subset M_1$ и $\mathcal{U}_2 \subset M_2$, содержащие точки p_i и q_i, и диффеоморфизм $g\colon \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ такой, что $g^* f_2 = f_1$.
Замечание: У функций f_1 и f_2 могут быть и другие критические точки, не совпадающие с p_i и q_i, а от многообразий M_1 и M_2 в этой лемме не требуется компактности.

Доказательство. Пересечение $P_i \cap f_1^{-1}(c)$ обозначим как p'_i, а $Q_i \cap f_2^{-1}(c)$ как q'_i. Линии уровня $f_i^{-1}(c)$ это связные многообразия. Соединим все точки p'_i самонепересекающейся кривой P, а точки q'_i кривой Q (эти кривые существуют, так как $n > 2$). Так как функции f_i морсовские, а ξ_i градиентно-подобные векторные поля, то существует диффеоморфизм достаточно малых окрестностей критических точек, переводящий f_1 в f_2, ξ_1 в ξ_2, а P_i в Q_i. Так как значение c не критическое для функций f_i, то найдется диффеоморфизм достаточно малых окрестностей путей P и Q, переводящий f_1 в f_2, ξ_1 в ξ_2, а P_i в Q_i. Далее мы продлим наш диффеоморфизм на окрестности кривых P_i и Q_i и пользуясь ([2] Лемма 4.6) изменим его так, чтобы он совпадал с ранее построенными диффеоморфизмами на пересечении их областей определения.

$\square$

В идее доказательства упоминались типовые функции. Сейчас мы их опишем. Зафиксируем натуральные $k > 1$, $\lambda < n$ и $t \in \mathbb{R}$. Функцию $f_t(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим равенством

$$f_t(x) = Re((x_1 + ix_2)^k - t(x_1 + ix_2)) - \sum_{i=3}^{\lambda+1} x_i^2 + \sum_{j=\lambda+2}^{n} x_j^2 \ .$$

Предложение 1. Функция f_t при $t \neq 0$ имеет $k-1$ невырожденную критическую точку индекса λ и единственную критическую точку кратности $k-1$ при $t = 0$. При этом максимум из модулей критических значений стремится к 0 при $t \to 0$.

Вернемся к доказательству теоремы. Выберем на многообразии M с индексируемой функцией Морса g градиентно-подобное поле ξ. Так как на многообразии размерности хотя бы 2 все линии уровня индексируемой функции Морса связны, то линии уровня $g^{-1}(\lambda \pm \frac{1}{4})$ связны. В силу того, что множество $g^{-1}([\lambda - \frac{1}{4}, \lambda + \frac{1}{4}])$ компактно и все критические точки функции g в нем лежат на одной линии уровня, то каждая фазовая кривая поля ξ, примыкающая к критической точке индекса λ пересекается или с линией уровня $g^{-1}(\lambda - \frac{1}{4})$ или $g^{-1}(\lambda + \frac{1}{4})$.

Предложение 2. Пусть точки p_i критические для функции g, а $\mathcal{U}_i \subset M$ это их окрестности. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого набора y_i, таких, что $|g(p_i) - y_i| < \delta$ существует функция Морса f на M, такая что: $f(p_i) = y_i$, $g(x) = f(x)$ вне объединения окрестностей $\mathcal{U}_i$ и поле ξ градиентно-подобное поле функции f.

Доказательство предложения аналогично доказательству ([2], лемма 2.8).

Обозначим критические точки g индекса λ как $p_1, ..., p_{k-1}$. Для каждой из них в качестве $\mathcal{U}_i$ выберем окрестность не пересекающую $g^{-1}(\lambda \pm \frac{1}{4})$, а число из предложения 2 обозначим как δ. Из предложения 1 нам известно, что для достаточно малых τ все критические значения $\lambda + f_\tau$ отличаются от λ не более чем на δ. Критические точки f_τ обозначим как $q_1, ..., q_{k-1}$. Таким образом из предложения

2 мы получаем функцию f и ее градиентно-подобное поле ξ, такие, что: линии уровня $f^{-1}(\lambda \pm \frac{1}{4})$ связны, так как $f^{-1}(\lambda \pm \frac{1}{4}) = g^{-1}(\lambda \pm \frac{1}{4})$; фазовые кривые поля ξ, примыкающие к p_i, пересекают $f^{-1}(\lambda + \frac{1}{4})$ или $f^{-1}(\lambda - \frac{1}{4})$; и, наконец, $f(p_i) = \lambda + f_\tau(q_i)$.

Предложение 3. Для всех достаточно малых τ, если $\lambda > 1$, то связна линия уровня $f_\tau^{-1}(-\frac{1}{4})$ и существует фазовая кривая поля ∇f_τ (в Евклидовой координатной метрике на $\mathbb{R}^n$), примыкающая к заданной критической точке, и пересекающая линию уровня $f_\tau^{-1}(-\frac{1}{4})$, а если $\lambda < (n-1)$, то линия уровня $f_\tau^{-1}(\frac{1}{4})$ связна и существует фазовая кривая поля ∇f_τ пересекающая линию уровня $f_\tau^{-1}(\frac{1}{4})$.

Хотя бы одно из условий $\lambda > 1$, $\lambda < (n-1)$ выполняется, так как размерность многообразия больше двух. А значит из предложения 3 следует, что выполнены все условия леммы 17. Следовательно, мы можем построить шар на многообразии M, который содержит все критические точки f индекса λ, такой, что функция на нем, с точностью до диффеоморфизма совпадает с $\lambda + f_\tau$ на некотором отрытом шаре $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^n$, содержащим все критические точки f_τ. Нам осталось показать, как продеформировать f_τ в функцию с одной критической точкой, причем так, чтобы значения функции не менялись вне множества $\mathcal{U}$.

Лемма 18. Найдется гладкое семейство диффеоморфизмов $h_t(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, ..., x_n))$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что $h_\tau(x) = id$ и $f_t(h_t(x))$ не зависит от t вне множества $\mathcal{U}$.

Доказательство. Эту лемму мы докажем с помощью гомотопического метода, описанного в [3]. Условие леммы равносильно тому, что

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(h_t(x)) = 0$$

для всех $x \notin \mathcal{U}$. Семейство диффеоморфизмов h_t однозначно задает семейство векторных полей v_t, определяемое равенством:

$$v_{t_0}(h_{t_0}(x)) = \frac{\partial}{\partial t}(h_t(x))|_{t=t_0}.$$

И, наоборот – каждое такое семейство полей и диффеоморфизм h_τ задает семейство диффеоморфизмов. Так как $(\frac{\partial}{\partial t}f_t)(x) = x_1$ исходное равенство превращается в:

$$x_1 + L_{v_t}(f_t) = 0$$

для всех $x \notin h_t(\mathcal{U})$. На множестве $\mathbb{R}^n$ без критических точек f_t зададим векторное поле w_t равенством

$$w_t(x) = -\frac{x_1}{\langle \nabla f_t, \nabla f_t \rangle} \nabla f_t.$$

Пусть $\mathcal{U}'$ открытое, связное подмножество $\mathcal{U}$, такое, что $\overline{\mathcal{U}'} \subset \mathcal{U}$. Пусть u_t семейство векторных полей, а s_t соответствующее им семейство диффеоморфизмов такое, что $s_t(\mathcal{U}')$ содержит все критические точки f_t (эти семейства существуют, так как $\mathcal{U}'$ связно). Рассмотрим семейство функций $k_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такое, что на множестве $s_t(\mathcal{U}')$ функция k_t равна 1, а вне множества $s_t(\mathcal{U})$ равна 0. Тогда поле $v_t = k_t u_t + (1 - k_t) w_t$ – искомое. $\square$

Согласно лемме 18 мы можем продеформировать функцию f, меняя ее только внутри открытого множества $f^{-1}((\lambda - \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}))$, так, чтобы все критические точки индекса $\lambda \neq 0, n$ слились в одну критическую точку конечной кратности. Точки индекса 0 и n уже представлены в одном экземпляре. При $n > 2$ теорема доказана.

10 Доказательство теоремы для $n < 3$

Единственное компактное, одномерное многообразие – это окружность и функция $\sin(t)$ имеет на ней ровно две критические точки. Построение искомой функции на двумерной поверхности описано в статье [7].

Список литературы

[1] F. Takens, The Minimal Number of Critical Points of a Function on a Compact manifold and the Lusternik-Schnirelman Category // Inventiones Math. 6, 197-244 (1968). P.203-206.

[2] Lectures on the h-cobordism theorem // Princeton, New Jersey. Princeton University press, 1965. Lemma 4.7 p.43

[3] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде Особенности дифференцируемых отображений // Издательство МЦНМО 2009. §6, 6.2.

[4] Pushkar P. E., Rudyak Y. B. On the minimal number of critical points of functions on h-cobordisms //arXiv preprint math/0108115. — 2001.

[5] П. Е. Пушкарь, “О функциях, все критические точки которых содержатся в шаре”, Функц. анализ и его прил., 36:4 (2002), 80–83; Funct. Anal. Appl., 36:4 (2002), 321–323

[6] Sadykov R., Trunov S. The minimal number of critical points of a smooth function on a closed manifold and the ball category //arXiv preprint arXiv:2208.09939. — 2022.

[7] Е. А. Кудрявцева, "Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты Матем. сб., 190:3 (1999), 29-88, Sb. Math., 190:3 (1999) 349-405

[8] А. З. Дымов, “Гомологические сферы и стягиваемые компактные многообразия”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 35:1 (1971), 72–77; Math. USSR-Izv., 5:1 (1971), 73–79

[9] Joyce D. On manifolds with corners //arXiv preprint arXiv:0910.3518. – 2009.

[10] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс Курс гомотопической топологии // Москва "Наука"1989. с.407-414.