О проблеме делителей Карацубы

В. В. Юделевич*

14 сентября 2022 г.

Аннотация

В работе получена верхняя оценка для суммы $\Phi_a(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)}$ при $x \to +\infty$, где $\tau(n)$ – функция делителей, $a \geqslant 1$ – фиксированное целое число, а p пробегает подряд идущие простые числа.

Ключевые слова: функция делителей, сдвинутые простые числа.

Введение

В ноябре 2004 года А. А. Карацубой на семинаре «Аналитическая теория чисел и приложения» была поставлена задача изучения суммы

$$\Phi_a(x) = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)},\ x \to +\infty.$$

Здесь $\tau(n)$ – функция делителей, a – фиксированное целое, а p пробегает подряд идущие простые числа.

Данная задача возникла под влиянием ряда дискуссий А. А. Карацубы и В. И. Арнольда в свете двух классических теоретико-числовых проблем. Первая – так называемая проблема делителей Титчмарша – заключается в вычислении асимптотики при $x \to +\infty$ суммы вида

$$F_a(x) = \sum_{p\leqslant x} \tau(p+a).$$

*Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

В 1930 г. Э. Ч. Титчмарш [1] доказал оценку

$$\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1)=O\left(x\right),$$

а также при условии справедливости гипотезы Римана

$$\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1)\sim cx,\;\; c=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Асимптотика для этой суммы была впервые получена без предположения каких-либо гипотез Ю. В. Линником [10] и имела вид

$$\sum_{p\leqslant x}\tau(p-1)=x+R(x),\;\; c=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)},$$

$$R(x)\ll\frac{x}{(\ln x)^{\alpha}},\;\; 0<\alpha<1.$$

В дальнейшем этот результат неоднократно уточнялся целым рядом авторов (см. [6], [7], [8], [9], [11]).

Вторая проблема состоит в нахождении асимптотики суммы $T(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n)}$. Она восходит к Рамануджану [2], который доказал, что

$$T(x)=\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\left(a_0+\frac{a_1}{\ln x}+\ldots+\frac{a_n}{(\ln x)^n}+O_n\left(\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}\right)\right),$$

где a_n, $n\geqslant 0$ – некоторые постоянные, в частности,

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_{p}\sqrt{p^2-p}\ln\frac{p}{p-1}.$$

Цель настоящей работы состоит в нахождении верхней оценки для суммы $\Phi_a(x)$.

Поскольку

$$\frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}1\asymp\frac{1}{\ln x}$$

и

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\tau(n+a)}\asymp\frac{1}{\sqrt{\ln x}},$$

то естественно предположить, что

$$\frac{1}{x}\Phi_a(x) \asymp \frac{1}{(\ln x)\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}.$$

В нашей работе мы получаем верхнюю оценку вида $\Phi_a(x) \ll_a \frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$. Более точно, мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Пусть $a \geqslant 1$ – целое фиксированное число. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)} \leqslant 4K(a)\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{x \ln\ln x}{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}\right),$$

где

$$K(a) = K\beta(a),$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_{p} \sqrt{\frac{p}{p-1}} \left(p \ln\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right),$$

$$\beta(a) = \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)\ln\frac{p}{p-1} - 1}\right).$$

Тем самым верхняя оценка совпадает с предполагемым порядком роста функции $\Phi_a(x)$.

Кратко опишем идейную сторону работы, которая использует метод решета Сельберга. Его суть заключаеся в следующем. Требуется оценить сумму

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{(n, P(z))=1} a_n,$$

где $\mathcal{A} = (a_n)$ – последовательность неотрицательных вещественных чисел и $P(z) = \prod\limits_{p\leqslant z} p$ – произведение всех простых до z. По основному свойству функции Мёбиуса имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{n} a_n \sum_{d|(n,P(z))} \mu(d).$$

Зададимся произвольными вещественными числами ρ_d (здесь $d \leqslant z$, $d|P(z)$) такими, чтобы $\rho_1 = 1$. Тогда $\sum\limits_{d|n} \mu(d) \leqslant \left(\sum_{d|n} \rho_d\right)^2$ для любого $n \geqslant 1$, так что

$$S(\mathcal{A},z) \leqslant \sum_n a_n \left(\sum_{d|(n,P(z))} \rho_d\right)^2 = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \rho_{d_1}\rho_{d_2}A_{[d_1,d_2]},$$

где

$$A_d = \sum_{n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)} a_n.$$

Далее, пусть $A_d = Xg(d)+r_d$ для рассматриваемых d, где функция $g(d)$ мультипликативна, величина X не зависит от d, а величина r_d «в среднем» мала. Коэффициенты ρ_d выбираются в дальнейшем так, чтобы минимизировать квадратичную форму

$$B = \sum_{d_1,\,d_2|P_a(z)} \rho_{d_1}\rho_{d_2}g([d_1,d_2]). \tag{1}$$

В нашем случае величина A_d представляется в виде

$$A_d = X_0g_0(d) + X_1g_1(d) + \ldots + X_mg_m(d),$$

где $g_k(d)$ – некоторые функции (причём $g_k(d)$ при $k \geqslant 1$ вообще говоря не мультипликативны), а величины X_k не зависят от d. Коэффициенты ρ_d при этом строятся только по первой форме (1), соответствующей функции $g = g_0$. При этом наблюдается следующий эффект: эти коэффициенты попутно решают задачи минимизации всех остальных форм, по крайней мере, в смысле порядка роста.

Отметим, что возможность получения асимптотической формулы в проблеме делителей Титчмарша опирается на теорему Бомбьери-Виноградова. В нашей работе мы существенно опираемся на аналог теоремы Бомбьери-Виноградова, полученный М. А. Королёвым (см. [3], Лемма 13).

Заметим также, что методы, использованные при оценке суммы $\Phi_a(x)$, могут успешно применяться и к оценке других сумм, родственных $\Phi_a(x)$. Так, для суммы

$$T_a(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p,\,p+2\ -\text{простые}}} \frac{1}{\tau(p+a)},$$

где суммирование ведётся по простым-близнецам, можно получить оценку вида

$$T_a(x) \leqslant \frac{c(a)x}{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}(1+o(1)).$$

Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Определяя величины* c_k *из разложения*

$$\frac{x}{-(\ln(1-x))} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, |x| < 1, \tag{2}$$

будем иметь $c_0 = 1$ *и* $|c_k| \leqslant 1$ *при* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Утверждение следует из известного тождества (см. [12]):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| = 1. \tag{3}$$

□

Замечание. *Числа вида*

$$G_n = (-1)^n c_n, \ \ n \geqslant 1$$

называются числами Грегори. Более точные оценки чисел Грегори см. в [12].

Лемма 2. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1$. *Тогда для любого* $d \geqslant 1$ *имеем*

$$\sum_{p|d} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} \leqslant \frac{2\omega(d)^\varepsilon}{\varepsilon}, \tag{4}$$

где $\omega(d)$ *– число различных простых делителей* d.

Доказательство. Если $d = 1$ или d – простое, то утверждение очевидно. Пусть $\omega(d) \geqslant 2$, тогда при любом $X \geqslant 2$ имеем

$$\sum_{p|d} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} = \left(\sum_{p|d,\, p\leqslant X} + \sum_{p|d,\, p>X} \right) \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} \leqslant \sum_{p|d,\, p\leqslant X} \frac{1}{p^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{X^{1-\varepsilon}} \sum_{p|d} 1 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}} \leqslant \int_1^X \frac{du}{u^{1-\varepsilon}} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}} \leqslant \frac{X^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\omega(d)}{X^{1-\varepsilon}},$$

откуда при $X = \omega(d) \geqslant 2$ получаем требуемое. □

Определим функцию $G_d(s)$ равенством

$$G_d(s) = H(s)J_d(s), \tag{5}$$

где

$$H(s) = \frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)(s-1)}\prod_p \sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1},$$

$$J_d(s) = \prod_{p|d}\left(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)^{-1}; \tag{6}$$

при этом выбраны главные ветви корня и логарифма. Как известно (см. [14], гл. IV, §3, Теорема 1), дзета-функция Римана не имеет нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_0}{(\ln|t|)^{2/3}(\ln\ln|t|)^{1/3}}, \;\; t \geqslant t_0 \tag{7}$$

для некоторого $c_0 > 0$, так что функция $G_d(s)$ аналитична в области, заданной условием (7).

Лемма 3. *Пусть*

$$\varepsilon_d = \left(3\ln(\omega(d)+2)\right)^{-1}, \tag{8}$$

тогда при $\operatorname{Re} s \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_d$ *и* $l \geqslant 0$ *для производной функции* $J_d(s)$*, определённой в* (6)*, справедлива оценка*

$$J_d^{(l)}(s) \ll_l (\omega(d)+2)^{10}.$$

Доказательство. Имеем,

$$J_d(s) = \prod_{p|d}\frac{p^{-s}}{-\ln(1-p^{-s})} = \prod_{p|d}\left(1 + c_1p^{-s} + c_2p^{-2s} + \ldots\right),$$

где коэффициенты c_k определены в (2). Отсюда после раскрытия скобок находим

$$J_d(s) = \sum_{\delta|d^\infty}\frac{j(\delta)}{\delta^s},$$

где значок $\delta|d^\infty$ означает суммирование по всем натуральным числам, в каноническом разложении которых присутствуют лишь простые, делящие d, а

$j(\delta)$ – мультипликативная функция, принимающая на степенях простых чисел значения $j(p^k) = c_k$. Тогда получаем

$$J_d^{(l)}(s) = \sum_{\delta|d^\infty} \frac{j(\delta)(-\ln\delta)^l}{\delta^s} \ll \sum_{\delta|d^\infty} \frac{(\ln\delta)^l}{\delta^\sigma},$$

где $s = \sigma + it$. Заметим, что

$$\frac{(\ln\delta)^l}{\delta^\varepsilon} \leqslant \left(\frac{l}{e}\right)^l \frac{1}{\varepsilon^l},$$

при $\varepsilon > 0$, $l \geqslant 1$ и $\delta \geqslant 1$. Отсюда выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_d$ и используя неравенство $\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_d$, находим

$$J_d^{(l)}(s) \ll_l \frac{1}{\varepsilon_d^l} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}} + \frac{1}{p^{2(1-\varepsilon_d)}} + \ldots\right).$$

Отметим, что полученная оценка верна и при $l = 0$. Так как

$$2(1-\varepsilon_d) \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{3\ln 2}\right) > 1,$$

то в силу леммы 2 получаем

$$J_d^{(l)}(s) \ll \frac{1}{\varepsilon_d^l} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_d^l} \exp\left(\sum_{p|d} \frac{1}{p^{1-\varepsilon_d}}\right) \ll \frac{1}{\varepsilon_d^l} \exp\left(\frac{2\omega(d)^{\varepsilon_d}}{\varepsilon_d}\right) \ll_l$$
$$\ll_l (\omega(d)+2)^{6\exp(\frac{1}{3})}(\ln(\omega(d)+2))^l \ll_l (\omega(d)+2)^{10}.$$

$\square$

Лемма 4. *Пусть $d \leqslant x$ – целое, $m \geqslant 0$ – целое фиксированное, тогда*

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\(k,d)=1}} \frac{1}{\tau(k)} = \frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k} \frac{G_d^{(k)}(1)}{(\ln x)^k} + R_m(x;d), \qquad (9)$$

где функция $G_d(s)$ определена в (5) и

$$R_m(x;d) \ll_m \kappa(d) \frac{x}{(\ln x)^{m+\frac{3}{2}}}, \quad \kappa(d) = (\omega(d)+2)^{10}.$$

Доказательство. Пусть

$$F_d(s) = \sum_{\substack{n=1\\(n,d)=1}}^{+\infty} \frac{1}{\tau(n)} n^{-s}.$$

Тогда будем иметь

$$F_d(s) = \prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{1}{2}p^{-s}+\frac{1}{3}p^{-2s}+\ldots\right) = \prod_{p\nmid d} p^s \ln\frac{p^s}{p^s-1} =$$
$$= \frac{\prod\limits_{p}\left(p^s\ln\dfrac{p^s}{p^s-1}\left(1-p^{-s}\right)^{1/2}\left(1-p^{-s}\right)^{-1/2}\right)}{\prod\limits_{p|d}\left(p^s\ln\dfrac{p^s}{p^s-1}\right)} = \frac{\sqrt{\zeta(s)}\prod\limits_{p}\left(\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\dfrac{p^s}{p^s-1}\right)}{\prod\limits_{p|d}\left(p^s\ln\dfrac{p^s}{p^s-1}\right)},$$

где взята та ветвь корня $\sqrt{z}$, которая положительна при $z>0$. Воспользовавшись формулой суммирования Перрона (см. [13], гл. IV, §1, Теорема 1) при $T, x \geqslant 2$ и $b = 1+\frac{1}{\ln x}$, будем иметь

$$\sum_{\substack{k\leqslant x\\(k,d)=1}} \frac{1}{\tau(k)} = j + O\left(\frac{x\ln x}{T}\right),$$

где

$$j = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F_d(s)\frac{x^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}ds,$$

$$G_d(s) = \frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)(s-1)}\prod_{p}\left(\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)\times$$
$$\times\prod_{p|d}\left(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)^{-1} = H(s)J_d(s).$$

Возьмём

$$a = 1 - c_0(\ln T)^{-2/3}(\ln\ln T)^{-1/3},$$

где c_0 выбрано так, как в (7). Рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $a \pm iT$, $b \pm iT$ и горизонтальным разрезом, проведённым от точки a к точке 1. Тогда по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}ds = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{b+iT} + \int_{b+iT}^{a+iT} + \int_{a+iT}^{a+i0} + \right.$$
$$\left. + \int_{a+i0}^{1+i0} + \int_{1-i0}^{a-i0} + \int_{a-i0}^{a-iT} + \int_{a-iT}^{b-iT}\right)\frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}ds =$$
$$= j + j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 = 0$$

(где смысл обозначений $j_1, \ldots, j_6$ очевиден), откуда

$$j = -(j_3 + j_4) - j_1 - j_2 - j_5 - j_6.$$

Вычислим $J = -(j_3 + j_4)$. Имеем

$$j_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{a+i0}^{1+i0} \frac{G_d(s)x^s}{\sqrt{s-1}}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_a^1 \frac{G_d(\sigma)x^\sigma}{\sqrt{\sigma-1+i0}}d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{1-a} \frac{G_d(1-u)x^{1-u}}{\sqrt{u}\sqrt{-1+i0}}du = -\frac{x}{2\pi}\int_0^{1-a} \frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}du.$$

Аналогично находим

$$j_4 = -\frac{x}{2\pi}\int_0^{1-a} \frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}du,$$

отсюда

$$J = \frac{x}{\pi}\int_0^{1-a} \frac{G_d(1-u)x^{-u}}{\sqrt{u}}du.$$

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$G_d(1-u) = \sum_{k=0}^m (-1)^k G_d^{(k)}(1)\frac{u^k}{k!} + O_m\left(G_d^{(m+1)}(\theta)u^{m+1}\right),\ a \leqslant 1-u \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Отсюда

$$J = \frac{x}{\pi}\int_0^{1-a} \sum_{k=0}^m \frac{G_d^{(k)}(1)(-1)^k}{k!}\frac{u^k x^{-u}}{\sqrt{u}}du + O_m\left(xG_{m+1}\int_0^{1-a} u^{m+\frac{1}{2}}x^{-u}du\right) =$$
$$= \frac{x}{\pi}\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k G_d^{(k)}(1) j_k(a)}{k!} + O_m\left(xG_{m+1}j_{m+1}(a)\right),$$

где

$$G_r = \max_{a\leqslant\theta\leqslant 1} |G_d^{(r)}(\theta)|, \ \ r \leqslant m+1,$$

$$j_k(a) = \int_0^{1-a} u^{k-\frac{1}{2}} x^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^{k-\frac{1}{2}} x^{-u} du - \int_{1-a}^{+\infty} u^{k-\frac{1}{2}} x^{-u} du = J_k - r_k.$$

В дальнейшем выберем параметр T в виде $T = e^{(\ln x)^\alpha}$, $\alpha > 0$. Отсюда так как $\omega(d) \ll \ln x$, то для $x \geqslant x_0$ выполняется неравенство $a \geqslant 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_d$, где величина ε_d определена в (8). Следовательно, при $a \leqslant \theta \leqslant 1$ будем иметь

$$G_d^{(r)}(\theta) = \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} H^{(r-l)}(\theta) J_d^{(l)}(\theta) \ll_m \sum_{l=0}^{r} |J_d^{(l)}(\theta)| \ll_m (\omega(d)+2)^{10},$$

так что при $r \leqslant m+1$ получаем

$$G_r \ll_m (\omega(d)+2)^{10}. \tag{10}$$

Для величины J_k имеем

$$J_k = \int_0^{+\infty} u^{k-\frac{1}{2}} x^{-u} du = \frac{1}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} w^{k-\frac{1}{2}} e^{-w} dw = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \sqrt{\pi} \binom{2k}{k} \frac{k!}{4^k} \frac{1}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Далее,

$$r_k = \int_{1-a}^{+\infty} u^{k-\frac{1}{2}} x^{-u} du = \frac{1}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}} \int_{(1-a)\ln x}^{+\infty} w^{k-\frac{1}{2}} e^{-w} dw.$$

Пользуясь при $\lambda > 1$ оценкой

$$I_k(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} w^{k-\frac{1}{2}} e^{-w} dw \ll k! e^{-\lambda} \lambda^{k-\frac{1}{2}},$$

которая получается последовательным интегрированием по частям, находим

$$r_k \ll \frac{k!}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}} e^{(a-1)\ln x} (1-a)^{k-\frac{1}{2}} (\ln x)^{k-\frac{1}{2}} = \frac{k! x^{a-1} c_0^{k-\frac{1}{2}}}{(\ln T)^{\frac{2}{3}(k-\frac{1}{2})} (\ln\ln T)^{\frac{1}{3}(k-\frac{1}{2})} \ln x},$$

где все постоянные в знаках $\ll$ – абсолютные. Таким образом,

$$j_k(a) = \sqrt{\pi} \binom{2k}{k} \frac{k!}{4^k} \frac{1}{(\ln x)^{k+\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{k! x^{a-1} c_0^{k-\frac{1}{2}}}{(\ln T)^{\frac{2}{3}(k-\frac{1}{2})} (\ln\ln T)^{\frac{1}{3}(k-\frac{1}{2})} \ln x} \right),$$

и

$$J=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{G^{(k)}(1)}{(\ln x)^k}+O_m\left(\frac{x^a}{\ln x}\sum_{k=0}^{m}\frac{|G^{(k)}(1)|}{(\ln T)^{\frac{2}{3}(k-\frac{1}{2})}(\ln\ln T)^{\frac{1}{3}(k-\frac{1}{2})}}\right)+$$
$$+O_m\left(G_{m+1}\frac{x}{(\ln x)^{m+\frac{3}{2}}}\right).$$

Наконец, из оценки (10) находим

$$J=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{G^{(k)}(1)}{(\ln x)^k}+O_m\left(\kappa_d\frac{x^a(\ln T)^{\frac{1}{3}}(\ln\ln T)^{\frac{1}{6}}}{\ln x}+\kappa_d\frac{x}{(\ln x)^{m+\frac{3}{2}}}\right).$$

Перейдём к оценке оставшихся интегралов j_1, j_2, j_5, j_6. Для некоторой постоянной $c>0$ в области $\sigma\geqslant 1-\dfrac{c}{(\ln t)^{2/3}}$, $|t|\geqslant 10$ имеет место оценка

$$\zeta(\sigma+it)\ll(\ln|t|)^{2/3},$$

(см. [14], гл. IV, §2, п.3, Теорема 2). Пользуясь данной оценкой, леммой 3 и неравенством

$$\prod_p\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1}=\prod_p\left(1-\frac{1}{24p^{2s}}-\frac{1}{24p^{3s}}-\dots\right)\ll 1,$$

выполненном при $\frac{3}{4}\leqslant\operatorname{Re}s\leqslant 2$, оценим интеграл j_1 тривиально:

$$j_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b+iT}^{a+iT}\frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)}\prod_p\left(\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)\prod_{p|d}\left(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)^{-1}x^s ds\ll$$
$$\ll(\omega(d)+2)^{10}\cdot\frac{x(\ln T)^{\frac{1}{3}}}{T}.$$

Аналогично находим

$$j_6\ll(\omega(d)+2)^{10}\cdot\frac{x(\ln T)^{\frac{1}{3}}}{T}.$$

Далее,

$$j_2+j_5=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a+iT}^{a-iT}\frac{1}{s}\sqrt{\zeta(s)}\prod_p\left(\sqrt{p^{2s}-p^s}\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)\prod_{p|d}\left(p^s\ln\frac{p^s}{p^s-1}\right)^{-1}x^s ds\ll$$
$$\ll(\omega(d)+2)^{10}\cdot(\ln T)^{\frac{1}{3}}\,x^a\int\limits_{-T}^{T}\frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}}\ll(\omega(d)+2)^{10}\cdot(\ln T)^{\frac{4}{3}}\,x^a.$$

Доказательство леммы завершается выбором $T = e^{(\ln x)^{\frac{3}{5}}}$. $\square$

Замечание. *Пользуясь леммой 6 и некоторыми дополнительными оценками, следующими из неравенства* (4)*, можно значительно улучшить зависимость от* d *в остаточном члене в* (9).

Обозначая через $I(s)$ логарифмическую производную функции $J_d(s)$, определенной в (6), будем иметь:

$$\frac{J_d'(s)}{J_d(s)} = I(s), \tag{11}$$

где

$$I(s) = \sum_{p|d} f(s;p) = \sum_{p|d} \left\{ \frac{\ln p}{(p^s-1)\ln\frac{p^s}{p^s-1}} - \ln p \right\}. \tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть функция* $f(s;p)$ *определена в* (12)*, тогда при* $m \geqslant 0$ *имеет место оценка*

$$\frac{d^m}{ds^m} f(1;p) \ll_m \frac{(\ln p)^{m+1}}{p}.$$

Доказательство. Определим последовательность d_k из разложения

$$\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k, \quad |x| < 1,$$

тогда $d_0 = 1$ и при $k \geqslant 1$ имеем $d_k = c_0 + c_1 + \ldots + c_k$, где последовательность c_k определена в (2). Из равенства (3) находим оценку $|d_k| \leqslant 2$, справедливую при $k \geqslant 1$. Далее, имеем

$$\frac{1}{(p^s-1)\ln\frac{p^s}{p^s-1}} = \frac{p^{-s}}{(1-p^{-s})\left(-\ln\left(1-p^{-s}\right)\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{p^{ks}}.$$

Отсюда с учётом равенства $d_1 = \frac{1}{2}$ получаем

$$f(s;p) = \frac{\ln p}{2p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k \ln p}{p^{ks}}.$$

Продифференцировав это равенство $m \geqslant 0$ раз, получим

$$f^{(m)}(s;p) = (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p^s} + (-1)^m (\ln p)^{m+1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k k^m}{p^{ks}},$$

и при $s = 1$ с учётом оценки $|d_k| \leqslant 2$ будем иметь

$$f^{(m)}(1;p) = (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p} + (-1)^m (\ln p)^{m+1} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k k^m}{p^k} =$$
$$= (-1)^m \frac{(\ln p)^{m+1}}{2p} + O_{m,\varepsilon}\left(\frac{1}{p^{2-\varepsilon}}\right) \ll_m \frac{(\ln p)^{m+1}}{p}.$$

□

Лемма 6. *Пусть функция* $J_d(s)$ *определена в* (6), *а функция* $I(s)$ *определена в* (12), *тогда при* $l \geqslant 1$ *имеет место следующее представление*

$$J_d^{(l)}(s) = J_d(s) Q_l,$$

где $Q_l = Q_l(I, I', \ldots, I^{(l-1)})$ *– многочлен от* l *переменных степени* l *с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Докажем, что Q_l имеет вид

$$Q_l = I^l + R_l,$$

где

$$R_l = R_l(I, I', \ldots, I^{(l-1)}) \in \mathbb{Z}[I, I', \ldots, I^{(l-1)}]$$

и $\deg R_l \leqslant l - 1$.

При $l = 1$ согласно (11) имеем $J_d'(s) = J_d(s) I$. Отсюда получаем, что $R_1 = 0$, и утверждение леммы в этом случае выполнено.

Пусть утверждение леммы доказано для $l = r \geqslant 1$, докажем его для $l = r + 1$. Имеем

$$J_d^{(r+1)}(s) = J_d(s)\left(I^{r+1} + I R_r + r I^{r-1} I' + R_r'\right) = J_d(s)\left(I^{r+1} + R_{r+1}\right).$$

Поскольку $\deg R_r' \leqslant r - 1$, $\deg I R_r \leqslant r$ и $\deg I^{r-1} I' = r$, получим

$$\deg R_{r+1} \leqslant r.$$

Таким образом, индукцией по l утверждение доказано. □

Пусть $g(n)$ – мультипликативная функция такая, что для любого простого p выполнено
$$0 \leqslant g(p) < 1. \tag{13}$$
Далее, пусть $h(n)$ – такая мультипликативная функция, что для простых p верно
$$h(p) = \frac{g(p)}{1 - g(p)}. \tag{14}$$
Определим теперь сумму $H_a = H_a(z)$ для некоторых $z \geqslant 2$ и $a \geqslant 1$ следующим образом
$$H_a = \sum_{\substack{k \leqslant z \\ (k,a)=1}} \mu^2(k)h(k). \tag{15}$$
Наряду с этой суммой нам понадобится произведение $P_a(z)$, определяемое следующим образом:
$$P_a(z) = \prod_{\substack{p \leqslant z \\ (p,a)=1}} p. \tag{16}$$
Рассмотрим, наконец, следующую последовательность чисел
$$\rho_d = \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{k \leqslant \frac{z}{d} \\ kd | P_a(z)}} \mu^2(k)h(k), \ \ d \geqslant 1 \tag{17}$$
называемых *коэффициентами Сельберга*. В соответствии с процедурой решета Сельберга (см. [4] гл.3, также см. [5] гл. 7) выбранные таким способом коэффициенты минимизируют квадратичную форму
$$B = \sum_{d_1,\, d_2 | P_a(z)} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g([d_1,d_2])$$
от вещественных переменных ρ_{d_1}, ρ_{d_2}, которые подчинены условию $\rho_1 = 1$. Для ρ_d вида (17) справедливы свойства: $B = \frac{1}{H_a(z)}$, $|\rho_d| \leqslant 1$, $\rho_d = 0$ при $d > z$ или $d \nmid P_a(z)$ Ниже мы докажем несколько утверждений об этих коэффициентах.

Лемма 7. *Пусть мультипликативные функции* $g(n)$ *и* $h(n)$ *таковы, что выполнены условия* (13), (14), *а величина* H_a *определена в* (15). *Далее, пусть* *число p — простое, $a \geqslant 1$ – целое. Тогда при $(d,p)=1$ и $(dp,a)=1$ справедливо равенство*

$$\rho_{dp} = -\rho_d + \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{\frac{z}{dp}<k\leqslant\frac{z}{d}\\(k,dpa)=1}} \mu^2(k)h(k).$$

Доказательство. Из формулы (17) получаем

$$\rho_{dp} = -\frac{h(p)}{g(p)}\frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)} \sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{dp}\\(l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) = -\frac{h(p)}{g(p)}\frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)}S. \tag{18}$$

Для суммы S имеем:

$$S = \sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) - \sum_{\substack{\frac{z}{dp}<l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l) = \sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,da)=1}} \mu^2(l)h(l) - \sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,da)=1\\p|l}} \mu^2(l)h(l) - R,$$

где

$$R = \sum_{\substack{\frac{z}{dp}<l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,dpa)=1}} \mu^2(l)h(l).$$

Теперь

$$\sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,da)=1\\p|l}} \mu^2(l)h(l) = h(p) \sum_{\substack{k\leqslant\frac{z}{dp}\\(kp,da)=1\\(k,p)=1}} \mu^2(k)h(k) = h(p) \sum_{\substack{k\leqslant\frac{z}{dp}\\(k,dpa)=1}} \mu^2(k)h(k) = h(p)S,$$

отсюда

$$S = \frac{1}{1+h(p)}\left(\sum_{\substack{l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,da)=1}} \mu^2(l)h(l) - R\right).$$

Подставляя полученное выражение в (18) и пользуясь тем, что при простом p

$$\frac{h(p)}{g(p)} = 1 + h(p),$$

мы завершаем доказательство. $\square$

Лемма 8. *Пусть мультипликативные функции $g(n)$ и $h(n)$ таковы, что выполнены условия* (13), (14), *а величина H_a определена в* (15). *Далее, пусть $p_1,\ldots,p_k$ — различные простые числа, и при этом*

$$(d, p_1\ldots p_k) = (dp_1\ldots p_k, a) = 1.$$

Тогда

$$\rho_{dp_1\ldots p_k} = (-1)^k\left(\rho_d - \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)}R\right),$$

где

$$R = \sum_{m=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\right)\sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_m}<l\leqslant\frac{z}{d\alpha_{m-1}}\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l),\quad \alpha_m = \prod_{i=1}^{m}p_i.$$

Доказательство. Индукция по переменной k. При $k=1$ доказываемое утверждение совпадает с утверждением предыдущей леммы.

Пусть утверждение имеет место для некоторого $k=r\geqslant 1$, докажем его для $k=r+1$. Имеем

$$\rho_{dp_1\ldots p_{r+1}} = (-1)^r\left(\rho_{dp_1} + \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)}\frac{h(p_1)}{g(p_1)}R\right),$$

где

$$\frac{h(p_1)}{g(p_1)}R = \frac{h(p_1)}{g(p_1)}\sum_{m=1}^{r}\left(\prod_{i=2}^{m}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\right)\sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_{m+1}}<l\leqslant\frac{z}{d\alpha_m}\\(l,\,d\alpha_{m+1}a)=1}}\mu^2(l)h(l) =$$

$$= \sum_{m=2}^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\right)\sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_m}<l\leqslant\frac{z}{d\alpha_{m-1}}\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l).$$

Отсюда

$$\rho_{dp_1\ldots p_{r+1}} = (-1)^r\left(-\rho_d + \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)}\sum_{\substack{\frac{z}{dp_1}<l\leqslant\frac{z}{d}\\(l,dp_1a)=1}}\mu^2(l)h(l) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(d)h(d)}{H_a g(d)}\sum_{m=2}^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{m-1}\frac{h(p_i)}{g(p_i)}\right)\sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_m}<l\leqslant\frac{z}{d\alpha_{m-1}}\\(l,\,d\alpha_m a)=1}}\mu^2(l)h(l)\right),$$

что и доказывает лемму. $\square$

Лемма 9. *Пусть P, M, q, a, δ – целые бесквадратные числа, для которых выполнены условия $(q,M) = 1$; $qM|P$; $(P,a) = (P, \delta) = 1$. Пусть при этом $h(n)$ – мультипликативная функция и $q = r_1 r_2 \dots r_s$ – разложение q на простые. Положим*

$$R_k(M,\delta) = R_k(M,\delta,z,q,a) =$$
$$= \sum_{\substack{d\leqslant z\\ (d,a)=1\\ (d,P)=M\\ d\equiv 0 (\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d)h(d) \sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_k}<l\leqslant\frac{z}{d\alpha_{k-1}}\\ (l,\, d\alpha_k a)=1}} \mu^2(l)h(l), \quad \alpha_k = \prod_{i=1}^{k} r_i, \quad (19)$$

тогда

$$R_k(M,\delta) \ll \mu^2(M\delta)h(M\delta)\prod_{p|P}(1+h(p)).$$

В частности, если $P = p_1 p_2 \dots p_m$ – произведение m различных простых чисел и $h(p) \ll 1$, то

$$R_k(M,\delta) \ll_m \mu^2(M\delta)h(M\delta).$$

Доказательство. Поскольку $(l,d) = 1$ в сумме (19), то вводя обозначение $n = dl$, будем иметь

$$R_k(M,\delta) = \sum_{\frac{z}{\alpha_k}<n\leqslant\frac{z}{\alpha_{k-1}}} \mu^2(n)h(n) \sum_{\substack{d|n\\ d\leqslant z\\ (d,a)=1\\ (d,P)=M\\ d\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, \delta)\\ \left(\frac{n}{d},\, d\alpha_k a\right)=1}} \mu(d), \quad \alpha_k = \prod_{i=1}^{k} r_i.$$

Поскольку $d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)$, то $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)$. Так как $(d,a) = 1$ и $(\frac{n}{d}, a) = 1$, то $(n,a) = 1$. Далее, так как $(d,P) = M$, то $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M)$. Заметим, наконец, что $(d, \alpha_k) = \left(d, \prod_{i=1}^{k} r_i\right) = 1$. От противного, если $r_i|(d,\alpha_k)$, то с одной стороны $r_i|q$ и $r_i|P$, с другой стороны $r_i|(d,P) = M$. Так как $(M,q) = 1$, то наше предположение неверное. Так как $\left(\frac{n}{d}, \alpha_k\right) = 1$, то $(n, \alpha_k) = 1$. Таким образом, получаем

$$R_k(M,\delta) = \sum_{\substack{\frac{z}{\alpha_k} < n \leqslant \frac{z}{\alpha_{k-1}} \\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n,a\alpha_k)=1}} \mu^2(n)h(n) \sum_{\substack{d|n \\ d\leqslant z \\ (d,a)=1 \\ (d,P)=M \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta) \\ \left(\frac{n}{d},\, d\alpha_k a\right)=1}} \mu(d) =$$

$$= \sum_{\substack{\frac{z}{\alpha_k} < n \leqslant \frac{z}{\alpha_{k-1}} \\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n,a\alpha_k)=1}} \mu^2(n)h(n) \sum_{\substack{d|n \\ (d,P)=M \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \mu(d) = \sum_{\substack{\frac{z}{\alpha_k} < n \leqslant \frac{z}{\alpha_{k-1}} \\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, M\delta) \\ (n,a\alpha_k)=1}} \mu^2(n)h(n)W_n(M,\delta). \quad (20)$$

Поскольку $M|P$ и $(\delta, P) = 1$, то имеем

$$W_n(M,\delta) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,P)=M \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \mu(d) = \mu(M) \sum_{\substack{d|\frac{n}{M} \\ (d,\frac{P}{M})=1 \\ (d,M)=1 \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \mu(d) = \mu(M) \sum_{\substack{d|n \\ (d,P)=1 \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \mu(d),$$

где при вычислении последней суммы мы воспользовались тем, что условие $d|\dfrac{n}{M}$ равносильно условию $d|n$ и $(d,M) = 1$. Отсюда получаем

$$W_n(M,\delta) = \mu(M) \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} \mu(d) \sum_{\Delta|(d,P)} \mu(\Delta) = \mu(M) \sum_{\Delta|(n,P)} \mu(\Delta) \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta) \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\Delta)}} \mu(d).$$

Далее, так как $\Delta|P$ и $(\delta,P) = 1$, получаем $(\delta,\Delta) = 1$, отсюда

$$W_n(M,\delta) = \mu(M) \sum_{\Delta|(n,P)} \mu(\Delta) \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta\Delta)}} \mu(d) =$$

$$= \mu(M) \sum_{\Delta|(n,P)} \mu(\Delta) \sum_{d|\frac{n}{\delta\Delta}} \mu(\delta\Delta d) = \mu(M\delta) \sum_{\Delta|(n,P)} \mu^2(\Delta) \sum_{d|\frac{n}{\delta\Delta}} \mu(d) =$$

$$= \mu(M\delta) \sum_{\Delta|(n,P)} \mu^2(\Delta) \mathbf{1}\left(\Delta = \frac{n}{\delta}\right) = \mu(M\delta) \mathbf{1}\left(\frac{n}{\delta}|P\right),$$

где введено обозначение

$$\mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, \text{если условие } A \text{ выполнено;} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подставляя полученное выражение для $W_n(M,\delta)$ в (20), получаем

$$R_k(M,\delta) = \mu(M\delta) \sum_{\substack{\frac{z}{\alpha_k} < n \leqslant \frac{z}{\alpha_{k-1}} \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta M) \\ (n, a\alpha_k)=1 \\ \frac{n}{\delta} | P}} \mu^2(n) h(n) =$$

$$= \mu(M\delta) h(M\delta) \sum_{\substack{\frac{z}{\delta M \alpha_k} < n \leqslant \frac{z}{\delta M \alpha_{k-1}} \\ (n, a\alpha_k \delta M)=1 \\ n | \frac{P}{M}}} \mu^2(n) h(n) \ll$$

$$\ll \mu^2(M\delta) h(M\delta) \sum_{n|P} \mu^2(n) h(n) = \mu^2(M\delta) h(M\delta) \prod_{p|P} (1 + h(p)).$$

□

Докажем теперь основную лемму.

Лемма 10 (Основная)**.** *Пусть* $m \geqslant 1$ *– произвольное целое фиксированное число. Далее, пусть* $\{f\}_{i=1}^m$ *– набор функций такой, что для любого простого* p *имеет место* $f_i(p) \ll_m \frac{(\ln p)^{m+1}}{p}$*. Положим*

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \ldots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, [p_1, \ldots, p_m])}} \frac{\rho_{d_1} \rho_{d_2}}{\varphi([d_1,d_2])} J_{[d_1,d_2]}(1),$$

где функция $J_d(s)$ *определена в* (6)*, коэффициенты* ρ_d *определены в* (17)*, а произведение* $P_a(z)$ *определено в* (16)*. Тогда для суммы* $T_m(z;a)$ *выполняется оценка*

$$T_m(z;a) \ll_m \frac{1}{H_a(z)},$$

где $H_a(z)$ *определена в* (15)*.*

Доказательство. Обозначим $g(d) = \frac{J_d(1)}{\phi(d)}$, тогда

$$g(p) = \frac{1}{p(p-1) \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p}}}$$

и при $p \geqslant 3$ верна оценка

$$\frac{1}{p} \leqslant g(p) \leqslant \frac{1}{p-1}, \tag{21}$$

отсюда получаем $g(p) \leqslant \frac{1}{2}$ при $p \geqslant 3$. С учётом равенства $g(2) = \frac{1}{2\ln 2}$, для любого простого p находим

$$0 < g(p) \leqslant \frac{1}{2\ln 2} < 1. \tag{22}$$

Далее, из определения $g(d)$ имеем

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \ldots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, [p_1, \ldots, p_m])}} \rho_{d_1} \rho_{d_2} g([d_1, d_2]).$$

Для функции $h(d)$, определённой в (14), с учётом оценки (21) при $p \geqslant 3$ находим

$$\frac{1}{p-1} \leqslant h(p) \leqslant \frac{1}{p-2}.$$

Согласно (14) получаем

$$g(p) = \frac{h(p)}{h(p)+1},$$

откуда для бесквадратного d следуют равенства

$$\frac{1}{g(d)} = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{h(p)}\right) = \sum_{\delta | d} \frac{1}{h(\delta)}.$$

В силу мультипликативности $g(n)$ и бесквадратности d_1 и d_2, имеем

$$g([d_1, d_2]) = \frac{g(d_1)g(d_2)}{g((d_1, d_2))} = g(d_1)g(d_2) \sum_{\delta | (d_1, d_2)} \frac{1}{h(\delta)},$$

отсюда

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \ldots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} \sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, [p_1, \ldots, p_m]) \\ d_1, d_2 \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{d_1} g(d_1) \rho_{d_2} g(d_2).$$

Не ограничивая общности можно считать, что все $p_1, p_2, \ldots, p_m$ попарно различные. Так, если $p_1 = p_2$, то

$$f_1(p_1) f_2(p_1) \ll \frac{(\ln p_1)^{2m+2}}{p_1^2} \ll_m \frac{\ln p_1}{p_1}, \;\; [p_1, p_2, \ldots, p_m] = [p_1, p_3, \ldots, p_m],$$

и оценка суммы $T_m(z;a)$ сводится к оценке суммы того же вида, но с меньшим значением параметра m. Таким образом,

$$T_m(z;a) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \sum_{\substack{p_2 \leqslant z \\ p_2 \nmid a \\ p_2 \neq p_1}} f_2(p_2) \ldots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a \\ p_m \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}\}}} f_m(p_m) \times S, \tag{23}$$

где

$$S = \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} \sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \pmod{p_1 \ldots p_m} \\ d_1, d_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \rho_{d_1} g(d_1) \rho_{d_2} g(d_2).$$

Положим $P_m = p_1 \ldots p_m$. Заметим, что условие

$$[d_1, d_2] \equiv 0 \pmod{P_m}$$

равносильно тому, что

$$([d_1, d_2], P_m) = [(d_1, P_m), (d_2, P_m)] = P_m.$$

Положим $A = (d_1, P_m)$, $\quad B = (d_2, P_m)$. Тогда

$$\sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \pmod{P_m} \\ d_1, d_2 \equiv 0 \pmod{\delta}}} \rho_{d_1} g(d_1) \rho_{d_2} g(d_2) = \sum_{A | P_m} \sum_{\substack{B | P_m \\ [A, B] = P_m}} S_\delta(A) S_\delta(B),$$

где для целого N мы положили:

$$S_\delta(N) = \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d | P_a(z) \\ (d, P_m) = N \\ d \equiv 0 \pmod{\delta}}} \rho_d \, g(d).$$

Далее, пусть $D = (A, B)$, тогда

$$S = \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} \sum_{A | P_m} \sum_{\substack{B | P_m \\ [A, B] = P_m}} S_\delta(A) S_\delta(B) = \sum_{D | P_m} \sum_{\substack{A | P_m \\ A \equiv 0 \pmod{D}}} \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} S_\delta(A) S_\delta(B),$$

где величины A, B и D связаны соотношением $AB = DP_m$.

Заметим, что $\left(\delta,\frac{P_m}{D}\right)=1$. Действительно, если существует простое p такое, что $p|\left(\delta,\frac{P_m}{D}\right)$, то $p|\delta$, $p|P_m$ и $(p,D)=1$. Отсюда следует, что $(p,A)=1$ либо $(p,B)=1$. Не ограничивая общности пусть $(p,A)=1$. Тогда все d, отвечающие слагаемым суммы $S_\delta(A)$, делятся на p. Поскольку $p|P_m$, то из условия $(d,P_m)=A$ в сумме $S_\delta(A)$ следует, что $p|A$, противоречие. Таким образом,

$$S=\sum_{D|P_m}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant z\\ \left(\delta,\frac{P_m}{D}\right)=1}}\frac{1}{h(\delta)}S_\delta(A)S_\delta(B)=$$
$$=\sum_{D|P_m}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q|D}\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant z\\ \left(\delta,\frac{P_m}{D}\right)=1\\ (\delta,D)=q}}\frac{1}{h(\delta)}S_\delta(A)S_\delta(B)=$$
$$=\sum_{D|P_m}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q|D}\frac{1}{h(q)}\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant \frac{z}{q}\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}S_{\delta q}(A)S_{\delta q}(B). \quad (24)$$

Выразим величину $S_{\delta q}(A)$ в терминах величины $S_\delta(1)$. Имеем

$$S_{\delta q}(A)=\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|P_a(z)\\ (d,P_m)=A\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta q)}}\rho_d\,g(d)=\sum_{\substack{d\leqslant \frac{z}{q}\\ d|\frac{P_a(z)}{q}\\ \left(d,\frac{P_m}{q}\right)=\frac{A}{q}\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_{dq}\,g(dq).$$

Так как $\rho_d=0$ при $d>z$ и условие $d|\frac{P_a(z)}{q}$ равносильно условию

$$d|P_a(z),\ (d,q)=1,$$

получаем

$$S_{\delta q}(A)=g(q)\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|P_a(z)\\ \left(d,\frac{P_m}{q}\right)=\frac{A}{q}\\ (d,q)=1\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_{dq}\,g(d)=g(q)\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|P_a(z)\\ (d,P_m)=\frac{A}{q}\\ (d,q)=1\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_{dq}\,g(d).$$

Так как при $(d,q)>1$ коэффициент Сельберга $\rho_{dq}=0$, то условие $(d,q)=1$ в последней сумме может быть опущено. Тем самым, получим

$$S_{\delta q}(A) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d | P_a(z) \\ (d, P_m) = \frac{A}{q} \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dq}\, g(d).$$

Далее, поскольку $(\delta, P_m) = 1$ и в то же время $Aq^{-1}|P_m$, то $(\delta, Aq^{-1}) = 1$, так что

$$S_{\delta q}(A) = g(q) \sum_{\substack{d \leqslant \frac{z}{Aq^{-1}} \\ d | \frac{P_a(z)}{Aq^{-1}} \\ (d, \frac{P_m}{Aq^{-1}}) = 1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dA}\, g(Aq^{-1}d) = g(A) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d | P_a(z) \\ (d, P_m) = 1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_{dA}\, g(d). \tag{25}$$

Пусть $A > 1$ и $A = r_1 r_2 \ldots r_s$ — разложение A на простые. В этом случае, $(-1)^s = \mu(A)$. Так как $(d, A) = (dA, a) = 1$, то из леммы 8 получаем:

$$\rho_{dA} = \mu(A) \left(\rho_d - \frac{\mu(d) h(d)}{H_a(z) g(d)} R \right),$$

где

$$R = \sum_{k=1}^{\omega(A)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{h(r_i)}{g(r_i)} \right) \sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_k} < l \leqslant \frac{z}{d\alpha_{k-1}} \\ (l, d\alpha_k a) = 1}} \mu^2(l) h(l), \quad \alpha_k = \prod_{i=1}^{k} r_i.$$

Из (25) получаем

$$S_{\delta q}(A) = \mu(A) g(A) \left(S_\delta(1) - \frac{R'}{H_a(z)} \right),$$

где

$$R' = \sum_{k=1}^{\omega(A)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{h(r_i)}{g(r_i)} \right) \sum_{\substack{d \leqslant z \\ d | P_a(z) \\ (d, P_m) = 1 \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \mu(d) h(d) \sum_{\substack{\frac{z}{d\alpha_k} < l \leqslant \frac{z}{d\alpha_{k-1}} \\ (l, d\alpha_k a) = 1}} \mu^2(l) h(l).$$

Из леммы 9 и равенства $\frac{h(p)}{g(p)} = 1 + h(p)$ находим оценку величины R':

$$R' = \sum_{k=1}^{\omega(A)} \left(\prod_{i=1}^{k-1} (1 + h(r_i)) \right) R_k(1, \delta) \ll \omega(A) \prod_{p | P_m} (1 + h(p))^2 \mu^2(\delta) h(\delta) \ll_m \mu^2(\delta) h\,(\delta)\,.$$

Таким образом, при $A>1$ мы получаем

$$S_{\delta q}\left(A\right)=\mu(A)g(A)\left(S_{\delta}\left(1\right)+O_m\left(\frac{\mu^2\left(\delta\right)h\left(\delta\right)}{H_a}\right)\right). \qquad (26)$$

Из (25) при $A=1$ получаем $S_{\delta q}(1)=S_{\delta}(1)$, тем самым равенство (26) выполняется и при $A=1$.

С учётом доказанного из (24) будем иметь

$$S=\sum_{D|P_m}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q|D}\frac{1}{h(q)}\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant\frac{z}{q}\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\mu(A)g(A)\mu(B)g(B)\times$$

$$\times\left(S_{\delta}(1)+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right)\right)^2=$$

$$=\mu(P_m)g(P_m)\sum_{D|P_m}\mu(D)g(D)\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q|D}\frac{1}{h(q)}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant\frac{z}{q}\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\left(S_{\delta}(1)+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right)\right)^2.$$

Так как для любого бесквадратного d справедливо неравенство

$$\frac{g(d)}{h(d)}\leqslant 1,$$

то для суммы S получаем:

$$S\ll_m g(P_m)\sum_{D|P_m}\frac{g(D)}{h(D)}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0(\mathrm{mod}\,D)}}\sum_{q|D}h\left(\frac{D}{q}\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant\frac{z}{q}\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\left(S_{\delta}(1)+\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right)^2\ll_m$$

$$\ll_m g(P_m)W\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant z\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{1}{h(\delta)}\left(S_{\delta}^2(1)+\frac{\mu^2(\delta)h^2(\delta)}{H_a^2(z)}\right), \qquad (27)$$

где сумма W определяется равенством

$$W=\sum_{D|P_m}\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0(\mathrm{mod}\, D)}}\sum_{d|D}h\left(d\right).$$

Заметим, что $W\ll 4^m$, действительно:

$$\begin{aligned}W&=\sum_{D|P_m}\prod_{p|D}(1+h(p))\sum_{\substack{A|P_m\\ A\equiv 0(\mathrm{mod}\, D)}}1=\sum_{D|P_m}\prod_{p|D}(1+h(p))\frac{\tau(P_m)}{\tau(D)}=\\ &=\tau(P_m)\sum_{D|P_m}\prod_{p|D}\frac{1+h(p)}{2}=\tau(P_m)\prod_{p|P_m}\frac{3+h(p)}{2}=\prod_{p|P_m}(3+h(p))\ll 4^m.\end{aligned}$$

Отсюда из (27) с помощью равенства (15) находим

$$S\ll_m g(P_m)\left(\sum_{\substack{\delta|P_a(z)\\ \delta\leqslant z\\ (\delta,P_m)=1}}\frac{S_\delta^2(1)}{h(\delta)}+\frac{1}{H_a(z)}\right).\tag{28}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}S_\delta(1)=&\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|P_a(z)\\ (d,P_m)=1\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_d\, g(d)=\sum_{\substack{d\leqslant z\\ d|P_a(z)\\ d\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\delta)}}\rho_d\, g(d)-\sum_{\substack{\Delta|P_m\\ \Delta>1}}S_\delta(\Delta)=\\ &=x_\delta-\sum_{\substack{\Delta|P_m\\ \Delta>1}}\mu(\Delta)g(\Delta)\left(S_\delta(1)+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right)\right)=\\ &=x_\delta-S_\delta(1)\sum_{\substack{\Delta|P_m\\ \Delta>1}}\mu(\Delta)g(\Delta)+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\sum_{\substack{\Delta|P_m\\ \Delta>1}}\mu^2(\Delta)g(\Delta)\right).\end{aligned}$$

Откуда получаем

$$S_\delta(1)\sum_{\Delta|P_m}\mu(\Delta)g(\Delta)=x_\delta+O_m\left(\frac{\mu^2(\delta)h(\delta)}{H_a(z)}\right).$$

Поскольку $0 < g(p) \leqslant \dfrac{1}{2\ln 2}$ для любого простого p, то

$$\sum_{\delta | P_m} \mu(\Delta) g(\Delta) = \prod_{p | P_m} (1 - g(p)) \gg_m 1,$$

отсюда

$$S_\delta^2(1) \ll_m x_\delta^2 + \frac{\mu^2(\delta) h^2(\delta)}{H_a^2(z)}.$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} x_\delta^2 = \frac{1}{H_a(z)}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{H_a(z)} = \sum_{d_1,\, d_2 | P_a(z)} \rho_{d_1} \rho_{d_2} g(d_1) g(d_1) \frac{1}{g((d_1, d_2))} =$$

$$= \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} \left(\sum_{\substack{d \leqslant z \\ d | P_a(z) \\ d \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \rho_d \, g(d) \right)^2 = \sum_{\substack{\delta | P_a(z) \\ \delta \leqslant z}} \frac{1}{h(\delta)} x_\delta^2.$$

Таким образом, из (28) получаем

$$S \ll_m \frac{g(P_m)}{H_a(z)} = \frac{g(p_1) g(p_2) \ldots g(p_m)}{H_a(z)} \ll_m \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_m H_a(z)}.$$

Подставляя эту оценку в формулу (23), получим

$$T_m(z; a) \ll \sum_{p_1 \leqslant z} \frac{f_1(p_1)}{p_1} \sum_{p_2 \leqslant z} \frac{f_1(p_2)}{p_2} \ldots \sum_{p_m \leqslant z} \frac{f_m(p_m)}{p_m} |S| \ll_m \frac{1}{H_a(z)}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 11. *Пусть для мультипликативной функции $g(n)$ выполнены следующие два условия:*

- *Для некоторой постоянной $A_1 \geqslant 1$ и любого простого p справедливо*

$$0 \leqslant g(p) \leqslant 1 - \frac{1}{A_1}; \tag{29}$$

- *Для некоторых величин $\kappa, L, A_2 > 0$ имеют место неравенства*

$$-L \leqslant \sum_{u \leqslant p < v} g(p) \ln p - \kappa \ln \left(\frac{v}{u} \right) \leqslant A_2; \tag{30}$$

Тогда для величины $W(z) = \prod\limits_{p<z} (1 - g(p))$ справедливо равенство:

$$W(z) = \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\kappa} \frac{e^{-\gamma\kappa}}{(\ln z)^{\kappa}} \left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где γ – постоянная Эйлера-Маскерони.

Доказательство. см. в [4] §5, п.2, Лемма 5.3. □

Лемма 12. *Пусть $g(n), h(n)$ – мультипликативные функции, причём*

$$0 \leqslant g(p) < 1, \;\; h(p) = \frac{g(p)}{1 - g(p)}$$

для всякого простого p. Пусть далее выполнены условия (29) *и* (30), *и пусть*

$$H(z) = \sum_{k \leqslant z} \mu^2(k) h(k), \quad W(z) = \prod_{p<z} (1 - g(p)). \tag{31}$$

Тогда

$$\frac{1}{H(z)} = W(z) e^{\gamma\kappa} \Gamma(\kappa + 1) \left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right),$$

где γ – постоянная Эйлера-Маскерони.

Доказательство. см. в [4] §5, п.3, Лемма 5.4. □

Из лемм 11 и 12 для величины $H(z)$, определённой в (31), получаем

$$\frac{1}{H(z)} = \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\kappa} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{(\ln z)^{\kappa}} \left(1 + O\left(\frac{L}{\ln z}\right)\right). \tag{32}$$

Нам понадобится основная лемма работы [3].

Лемма 13. *Пусть $d \geqslant 1$ – фиксированное целое число, $f(q)$ – положительная функция такая, что*

$$\sum_{q \leqslant x} f(q) \ll x (\ln x)^{\kappa}$$

для некоторой постоянной $\kappa > 0$. Тогда для любого фиксированного $B > 0$ найдётся $A(B) > 0$ такое, что неравенство

$$R = \sum_{q \leqslant Q} \frac{f(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}} \left| \sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,d)=1}} \frac{\chi(n)}{\tau(n)} \right| \ll x(\ln x)^{-B}$$

выполняется для всяких Q, N таких, что $Q \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-A}$, $N \leqslant x$, причём константа в знаке $\ll$ – неэффективная и зависит от B, d и f.

Доказательство. см. [3], п.2, Лемма 13. □

Доказательство теоремы

Имеем

$$\Phi_a(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p+a)} \leqslant \sum_{\substack{n+a \leqslant x \\ (n, P_a(z))=1}} \frac{1}{\tau(n+a)} + r_1,$$

где $r_1 = r_1(z; a)$ – количество тех $n \leqslant z$, для которых $n + a$ – простое, так что

$$r_1 \ll \frac{z}{\ln z} + a.$$

Далее, пусть ρ_d выбраны так, как в (17), тогда $\rho_1 = 1$, $\rho_d = 0$ при $d > z$ или $d \nmid P_a(z)$; и $|\rho_d| \leqslant 1$. Отсюда получим

$$\Phi_a(x) \leqslant \sum_{\substack{n+a \leqslant x \\ (n, P_a(z))=1}} \frac{1}{\tau(n+a)} + r_1 \leqslant \sum_{n+a \leqslant x} \frac{1}{\tau(n+a)} \left(\sum_{d|(n, P_a(z))} \rho_d \right)^2 + r_1 =$$

$$= \sum_{\substack{d|P_a(z) \\ d \leqslant z^2}} \lambda_d \sum_{\substack{n+a \leqslant x \\ n \equiv 0 (\bmod d)}} \frac{1}{\tau(n+a)} + r_1,$$

где $\lambda_d = \sum\limits_{[d_1, d_2]=d} \rho_{d_1} \rho_{d_2}$. Отметим при этом, что

$$|\lambda_d| \leqslant \sum_{[d_1, d_2]=d} 1 = 3^{\omega(d)}.$$

Так как $(d,a)=1$, то

$$\sum_{\substack{n+a\leqslant x\\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\, d)}}\frac{1}{\tau(n+a)}=\sum_{\substack{k\leqslant x\\ k\equiv a(\mathrm{mod}\, d)}}\frac{1}{\tau(k)}=\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi\,\mathrm{mod}\, d}\bar{\chi}(a)\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)},$$

где суммирование ведётся по всем характерам Дирихле по модулю d. Выделяя вклад главного характера и обозначая через r_2 вклад от оставшихся, получим

$$\Phi_a(x)\leqslant\sum_{\substack{d|P_a(z)\\ d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d}{\varphi(d)}\sum_{\substack{k\leqslant x\\ (k,d)=1}}\frac{1}{\tau(k)}+r_2+r_1,$$

где

$$r_2=r_2(x,z;a)\ll\sum_{d\leqslant z^2}\frac{|\lambda_d|}{\varphi(d)}\sum_{\substack{\chi\,\mathrm{mod}\, d\\ \chi\neq\chi_0}}\left|\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)}\right|\ll\sum_{d\leqslant z^2}\frac{3^{\omega(d)}}{\varphi(d)}\sum_{\substack{\chi\,\mathrm{mod}\, d\\ \chi\neq\chi_0}}\left|\sum_{k\leqslant x}\frac{\chi(k)}{\tau(k)}\right|.$$

Зададимся целым числом $m_0\geqslant 1$. Тогда из леммы 4 будем иметь

$$\Phi_a(x)\leqslant\sum_{\substack{d|P_a(z)\\ d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d}{\varphi(d)}\left(\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k}\frac{G_d^{(k)}(1)}{(\ln x)^k}+R_{m_0}(x;d)\right)+r_2+r_1=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k(\ln x)^k}\sum_{\substack{d|P_a(z)\\ d\leqslant z^2}}\frac{\lambda_d G_d^{(k)}(1)}{\varphi(d)}+r_3+r_2+r_1,\quad (33)$$

где

$$r_3\ll_{m_0}\frac{x}{(\ln x)^{m_0+\frac{3}{2}}}\sum_{d\leqslant z^2}\frac{|\lambda_d|}{\varphi(d)}(\omega(d)+2)^{10}\ll$$

$$\ll\frac{x}{(\ln x)^{m_0+\frac{3}{2}}}\sum_{d\leqslant z^2}\frac{(3+\frac{1}{2})^{\omega(d)}}{\varphi(d)}\ll\frac{x(\ln z)^{3+\frac{1}{2}}}{(\ln x)^{m_0+\frac{3}{2}}}.$$

Подставив равенство

$$G_d^{(k)}(s)=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}H^{(k-l)}(s)J_d^{(l)}(s)$$

в (33) и поменяв порядок суммирования по переменным d и l, мы получим

$$\Phi_a(x)\leqslant\frac{x}{\sqrt{\pi\ln x}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{a_k}{(\ln x)^k}\sum_{l=0}^{k}b_l(k)S_l(z;a)+r_3+r_2+r_1,\quad (34)$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k}, \;\; b_l(k) = \binom{k}{l} H^{(k-l)}(1),$$

$$S_l(z;a) = \sum_{\substack{d|P_a(z)\\ d\leqslant z^2}} \frac{\lambda_d J_d^{(l)}(1)}{\varphi(d)}.$$

Перейдём к оценке величин $S_l(z;a)$. Положим $g(d) = \frac{J_d(1)}{\varphi(d)}$, тогда при $l = 0$ получим

$$S_0(z;a) = \sum_{\substack{d_1,d_2|P_a(z)\\ d_1,d_2\leqslant z}} \rho_{d_1}\rho_{d_2} g([d_1,d_2]) = \frac{1}{H_a(z)}. \tag{35}$$

Пусть теперь $l \geqslant 1$, тогда из леммы 6 получим

$$S_l(z;a) = \sum_{\substack{d|P_a(z)\\ d\leqslant z^2}} \frac{\lambda_d}{\varphi(d)} J_d(1) Q_l, \tag{36}$$

где Q_l – многочлен степени l от переменных $I(1), I'(1), \ldots, I^{(l-1)}(1)$ с целыми коэффициентами:

$$Q_l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \prod_{r=1}^{l} \left(I^{(r-1)}(1)\right)^{i_r},$$

здесь $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_l)$ – набор целых неотрицательных чисел, $|\mathbf{i}| = i_1 + \ldots + i_l$, а $I(s)$ – функция, определённая в (12). Для $1 \leqslant r \leqslant l$ имеем

$$I^{(r-1)}(1) = \sum_{p|d} \mathfrak{f}_r(p),$$

где $\mathfrak{f}_r(p) = f^{(r-1)}(1;p)$. В силу леммы 5 для простых p выполнены неравенства

$$\mathfrak{f}_r(p) \ll_r \frac{(\ln p)^{r+1}}{p} \ll_{m_0} \frac{(\ln p)^{m_0+1}}{p}.$$

Для удобства обозначений при каждом $r \geqslant 1$ рассмотрим i_r тождественно равных между собой функций, снабжённых разными индексами:

$$f_{r1} = f_{r_2} = \ldots = f_{ri_r} = \mathfrak{f}_r.$$

Отсюда в силу введённых обозначений, получим

$$(I^{(r-1)}(1))^{i_r} = \sum_{p_{r1}|d} f_{r1}(p_{r1}) \ldots \sum_{p_{ri_r}|d} f_{ri_r}(p_{ri_r}) = \sum_{p_{r1},\ldots,p_{ri_r}|d} f_{r1}(p_{r1}) \ldots f_{ri_r}(p_{ri_r}).$$

Пусть $j_1, j_2, \dots j_R$ – последовательность индексов ненулевых координат вектора $\mathbf{i}$. Тогда $j_1 < j_2 < \ldots < j_R$, $R \leqslant l$ и $i_r \neq 0$ тогда и только тогда, когда $r \in \{j_1, j_2, \dots, j_R\}$. Тогда имеем

$$\prod_{r=1}^{l} \left(I^{(r-1)}(1)\right)^{i_r} = \prod_{\substack{r=1 \\ i_r \neq 0}}^{l} \sum_{p_{r1}, \dots, p_{ri_r} | d} f_{r1}(p_{r1}) \dots f_{ri_r}(p_{ri_r}) =$$

$$= \sum_{p_{j_1 1}, \dots, p_{j_R i_{j_R}} | d} f_{j_1 1}(p_{j_1 1}) \dots f_{j_R i_{j_R}}(p_{j_R i_{j_R}}).$$

Поставим в соответствие каждой паре (j_ν, t), где $1 \leqslant t \leqslant i_{j_\nu}$, число

$$i = i_{j_1} + \ldots + i_{j_{\nu-1}} + t.$$

При такой нумерации выражение $f_{j_\nu t}(p_{j_\nu t})$ перейдёт в $f_i(p_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда получаем

$$\prod_{r=1}^{l} \left(I^{(r-1)}(1)\right)^{i_r} = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_m | d} f_1(p_1) f_2(p_2) \dots f_m(p_m).$$

Тем самым для величины Q_l имеем

$$Q_l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_m | d} f_1(p_1) f_2(p_2) \dots f_m(p_m). \tag{37}$$

Подставляя выражение (37) в (36) и меняя порядок суммирования, получим

$$S_l(z; a) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{|\mathbf{i}|=m} a_{\mathbf{i}} \sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ p_1 \nmid a}} f_1(p_1) \dots \sum_{\substack{p_m \leqslant z \\ p_m \nmid a}} f_m(p_m) \sum_{\substack{d_1, d_2 | P_a(z) \\ d_1, d_2 \leqslant z \\ [d_1, d_2] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, P)}} \frac{\rho_{d_1} \rho_{d_2}}{\varphi([d_1, d_2])} J_{[d_1, d_2]}(1).$$

где P – наименьшее общее кратное простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_m$. Применяя к полученной сумме при $m = 0$ равенство (35), а при $m \geqslant 1$ лемму 10, получим оценку

$$S_l(z; a) \ll_{m_0} \frac{1}{H_a(z)}. \tag{38}$$

Выделим в сумме (34) слагаемое, соответствующее $k = 0$, а к остальной части суммы применим неравенство (38). В этом случае оценка $\Phi_a(x)$ преобразуется к виду

$$\Phi_a(x) \leqslant \frac{H(1)}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{\sqrt{\ln x} H_a(z)} + r_4 + r_3 + r_2 + r_1,$$

где
$$r_4 \ll_{m_0} \frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}} H_a(z)}.$$
Вычислим величину $\frac{1}{H_a(z)}$ асимптотически. Для этой цели применим равенство (32). Для простых p положим
$$g_0(p) = \begin{cases} g(p), \text{ если } p \nmid a; \\ 0, \text{ иначе}; \end{cases}$$
$$h_0(p) = \frac{g_0(p)}{1 - g_0(p)},$$
и определим $g_0(d)$, $h_0(d)$ для бесквадратных d по мультипликативности. Из определения функции h_0 находим
$$H_a(z) = \sum_{k \leqslant z} \mu^2(k) h_0(k).$$
Найдём соответствующие функции g_0 параметры A_1, A_2, L, κ. Из оценки (22) следует, что можно взять $A_1 = 4$. Из оценки (21) при $p \geqslant 2$ следует равенство
$$g(p) = \frac{1}{p} + \frac{\theta}{p(p-1)}, \ \ |\theta| \leqslant 1.$$
Отсюда находим $\kappa = 1$ и $A_2, L = O_a(1)$. Из (32) получаем
$$\frac{1}{H_a(z)} = \prod_p (1 - g_0(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{1}{\ln z} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right) =$$
$$= \frac{C\beta(a)}{\ln z} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right),$$
где
$$C = \prod_p (1 - g(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$
$$\beta(a) = \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)\ln \frac{p}{p-1} - 1}\right).$$
Отсюда получаем следующую оценку суммы $\Phi_a(x)$:
$$\Phi_a(x) \leqslant K\beta(a) \frac{x}{\sqrt{\ln x} \ln z} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right)\right) + r_4 + r_3 + r_2 + r_1, \qquad (39)$$

где

$$K=\frac{H(1)C}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{p^2-p}\ln\frac{p}{p-1}\left(1-\frac{1}{p(p-1)\ln\frac{p}{p-1}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p\sqrt{\frac{p}{p-1}}\left(p\ln\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p-1}\right).$$

Перейдём к финальной оценке остаточных членов. В лемме 13 возьмём

$$f(q)=3^{\omega(q)},\ B=\frac{5}{2},\ d=1,\ Q=\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^A},\ N=x.$$

Выберем $m_0=5$ и z в виде

$$z=\sqrt{Q}=\frac{\sqrt[4]{x}}{(\ln x)^{\frac{A}{2}}},$$

тогда из леммы 13 получим $r_2\ll\frac{x}{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}$. Для величин r_4,r_3,r_1 при таком выборе параметров получаем

$$r_4\ll\frac{x}{(\ln x)^{\frac{5}{2}}},\ r_3\ll\frac{x}{(\ln x)^3},\ r_1\ll\sqrt[4]{x}.$$

В итоге, из (39) находим

$$\Phi_a(x)\leqslant 4K\beta(a)\frac{x}{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)\right),$$

что завершает доказательство теоремы.

Список литературы

[1] E. C. Titchmarsh, *A divisor problem.// Rend. Palermo.*(1930) **54**, pp. 414-429.

[2] S. Ramanujan, *Some formulae in the analytic theory of numbers. // Mess. Math.* **45** (1916), pp. 81-84.

[3] M. A. Korolev, *On Karatsuba's problem concerning the divisor function. //* Monatsh. Math 168 (2012), pp. 403–441.

[4] H. Halberstam, H.- E. Richert, *Sieve methods.* // Dover Publ., Inc. Mineola, New York. (2010), 490 p.

[5] J. Friedlander, H. Iwaniec, *Opera de Cribro.* // Amer. Math. Soc. Colloquium Publictions. (2010), 530 p.

[6] G. Rodriguez, *Sul problema dei divisori di Titchmarsh.*// Boll. Un. Mat. Ital. **3** 20 (1965), pp. 358-366.

[7] H. Halberstam, *Footnote to the Titchmarsh-Linnik divisor problem.* // Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), pp. 187-188.

[8] E. Bombieri, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli.* Acta Math. 357 (1985), pp. 51-76.

[9] É. Fouvry, *Sur le probléme des diviseurs de Titchmarsh.* //J.Reine Angew. Math. 357 (1985), pp. 51-76.

[10] Ю. В. Линник, *Новые варианты и применения дисперсионного метода в бинарных аддитивных задачах*// Докл. АН СССР, **137**:6 (1961), с. 1299–1302.

[11] S. Drappeau, B. Topacogullari, *Combinatorial identities and Titchmarsh's divisor problem for multiplicative functions.* // Algebra & Number Theory, Math. Sc. Publ. (2019), 13-10, pp. 2383-2425.

[12] V. Kowalenko, *Properties and Applications of the Reciprocal Logarithm Numbers.*// Acta Appl. Math., Vol. 109 (2010), pp. 413-437.

[13] А. А. Карацуба *Основы аналитической теории чисел* — М., Наука, 1975.

[14] С. М. Воронин, А. А. Карацуба *Дзета-функция Римана* — М., Физматлит, 1994.