Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости

И.А.Алексеев [*][†]

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению аналогов α-устойчивых случайных величин, отвечающих комплексным значениям α, удовлетворяющих условию $|\alpha - 1| < 1$.

Построенные комплекснозначные α-устойчивые случайные величины будут обладать обычным свойством алгебраической устойчивости по отношению к комплексному параметру α. Комплекснозначные случайные величины мы также будем отождествлять с двумерными векторами. При таком отождествлении свойство алгебраической устойчивости перейдет в устойчивость относительно некоторой группы матриц.

Напомним, что в вещественном случае случайная величина ξ называется устойчивой, если для всех b_1, $b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что $b_1\xi_1 + b_2\xi_2 \overset{d}{=} b\xi + a$ (знаком $\overset{d}{=}$ мы всегда будем обозначать равенство по распределению), где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ. Классические одномерные устойчивые распределения хорошо изучены (см. [6], [7], [8], [21])

Хорошо известно, что характеристическая функция одномерного устойчивого распределения может иметь только следующий вид

$$\mathbf{E}e^{ip\xi} = \exp\Big\{ipa - C|p|^\alpha\big(1 - i\beta \operatorname{sgn}(p)\omega(p,\alpha)\big)\Big\}, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $C \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\operatorname{sgn}(p) = \begin{cases} \frac{p}{|p|}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0 \end{cases}$, $\omega(p,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi}\log|p|, & \alpha = 1 \end{cases}$.

Классические α-устойчивые распределения определены только для значений $\alpha \in (0, 2]$. Обобщение на другие значения α требует привлечения новых идей. В частности, А.М. Вершиком с соавторами и М.А. Лифшицем (см. [3], [11]) были построены α-устойчивые распределения для $\alpha = 0$. В работах [15], [23] были построены невероятностные аналоги α-устойчивых распределений для случаев $\alpha \in (2, 4) \cup (4, 6)$. Затем в работе [12] М.В. Платоновой этот метод был обобщен на случай $\alpha > 2$. При помощи построенных α-устойчивых распределений были получены вероятностные представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля.

В многомерном пространстве, в отличие от одномерного, класс устойчивых законов гораздо шире чем класс α-устойчивых законов. Так, например, в [13] вводится понятие устойчивости

[*]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия; email: vanyalexeev@list.ru

[†]Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

относительно некоторой группы матриц $\mathcal{M}$. Более точно, случайный вектор ξ называется устойчивым, если для любых M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ существует $M \in \mathcal{M}$ и $m \in \mathbb{R}^d$ такие, что

$$M_1\xi_1 + M_2\xi_2 \stackrel{d}{=} M\xi + m,$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии случайного вектора ξ.

В [22] вводится равносильное понятие операторно-устойчивых законов, которые являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных векторов с матричной нормировкой и векторным центрированием. В [19] было доказано, что для таких законов существует экспонента, то есть существует вещественная матрица $E \in \mathbb{R}^{d\times d}$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m_n \in \mathbb{R}^d$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} \stackrel{d}{=} n^E\xi + m_n, \tag{2}$$

где $\xi^{(k)}$ — независимые копии вектора ξ. Матрица $n^E \in \mathbb{R}^{d\times d}$ определяется как

$$n^E = e^{\ln n\cdot E} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{k!} E^k. \tag{3}$$

Далее, в работе автора [1] были введены α-устойчивые случайные величины, отвечающие комплексным α, удовлетворяющим условию $|\alpha - 1/2| < 1/2$. Эти случайные величины обладают обычным условием устойчивости, но с заменой положительной полуоси на логарифмическую спираль Γ_0, задаваемую в полярных координатах (r, φ) уравнением $\operatorname{Im}\alpha \cdot \ln r = -\operatorname{Re}\alpha \cdot \varphi$. Именно, если ξ_1, ξ_2 — независимые копии α-устойчивой случайной величины ξ с комплексным α, то для всех A, $B \in \Gamma_0$ существует $C \in \Gamma_0$ такое, что

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi. \tag{4}$$

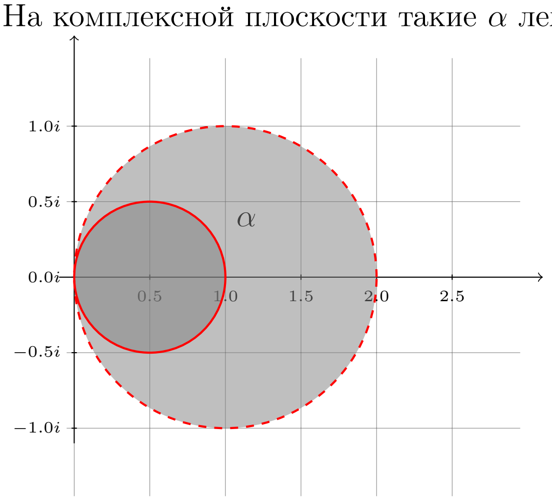
Комплексные числа A, B, C при этом связаны соотношением $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.

В работе [1] также было показано, что построенные α-устойчивые случайные величины, рассматриваемые как двумерные, являются операторно-устойчивыми, но не являются двумерными устойчивыми.

В настоящей работе рассматривается случай α, удовлетворяющих условию

$$|\alpha - 1| < 1. \tag{5}$$

На комплексной плоскости такие α лежат в большом круге, изображенном на рисунке



Кроме параметра α мы также будем использовать параметры (ϱ, γ), определяемые по α следующим образом

$$a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im}\alpha^{-1}; \quad \varrho = 1/a; \quad \gamma = b/a. \tag{6}$$

Параметр ϱ будем называть *параметром устойчивости*, параметр γ — *параметром комплексности.* Для вещественных α параметр $\varrho = \alpha$, а $\gamma = 0$.

Аналогично вещественному случаю выделим 3 различных случая: $\varrho \in (0,1)$, $\varrho = 1$ и $\varrho \in (1,2)$. На комплексной плоскости данные условия переписываются в следующем виде

$$\begin{cases} \varrho \in (0,1) & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1/2| < 1/2; \\ \varrho = 1 & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1/2| = 1/2,\ \alpha \neq 0; \\ \varrho \in (1,2) & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1| < 1,\ |\alpha - 1/2| > 1/2. \end{cases}$$

Отметим, что все условия на α формулируются в терминах параметра ϱ, а параметр γ является любым вещественным.

Основной целью настоящей работы является построение случайных величин, удовлетворяющих условию (4), но, возможно, с комплексным сдвигом. Распределения построенных случайных величин будем называть α-устойчивыми с комплексным параметром α. Отметим, что при $|\alpha - 1/2| < 1/2$ введенный в настоящей работе класс распределений будет шире, чем класс, рассматриваемый в [1], а при $\gamma = 0$ (то есть при $\alpha \in \mathbb{R}$) введенный класс распределений будет совпадать с классом всех двумерных α-устойчивых законов.

Для вещественных α в качестве определения устойчивости берется соотношение (4). Хорошо известно (см. напр., [21]), что всякую негауссовскую устойчивую ($\alpha < 2$) случайную величину можно задать как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для комплексных α (аналогично тому как это было сделано в [1]) нам будет удобнее сразу определять устойчивую случайную величину как интеграл по пуассоновской случайной мере, а уже потом доказывать, что для построенных случайных величин справедливо (4).

В параграфе 2 определяются комплекснозначные α-устойчивые случайные величины для α, удовлетворяющих (5), находятся представления для их характеристических функций, и показывается, что построенные распределения являются безгранично делимыми. В параграфе 3 исследуется свойство устойчивости и показывается, что полученные распределения удовлетворяют (4), но, возможно, с комплексным сдвигом q. Также условие устойчивости переписывается в матричных терминах и доказывается, что распределения, рассматриваемые как двумерные, являются операторно-устойчивыми и находится их экспонента (в смысле работы [19]). Далее, в параграфе 4 показывается, что свойство устойчивости (4) является характеризационным для построенного класса случайных величин. В §5 формулируются и доказываются достаточные условия для принадлежности к области притяжения комплекснозначных α-устойчивых случайных величин. Далее, в §6 вводятся α-устойчивые процессы Леви, строятся соответствующие полугруппы операторов, и находятся их генераторы. Параграф 7 посвящен описанию множества предельных распределений в схеме суммирования комплексных н.о.р. случайных величин с комплексными нормировкой и центрированием. Для вещественных случайных величин соответствующий результат был получен Полем Леви в начале 1930-х годов [18]. Леви была доказана теорема, о том, что если частичные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин после соответствующей нормировки имеют слабый предел, то этот предел обязательно является устойчивым с некоторым индексом устойчивости $\alpha \in (0,2]$, причем это условие является необходимым и достаточным.

Для случая суммирования комплексных случайных величин было известно только достаточное условие принадлежности к классу предельных законов. Действительно, всякую комплексную случайную величину можно рассматривать как двумерную, и, значит, при использовании только вещественной нормировки мы заведомо получим в качестве пределов класс всех двумерных устойчивых случайных векторов (см. напр., [17]). Индекс устойчивости α двумерных случайных векторов, как и в одномерном случае, может принимать значения только из интервала $(0,2]$. В §7 мы покажем, что необходимым и достаточным условием принадлежности к классу предельных распределений в комплексном случае является α-устойчивость с некоторым комплексным α. При этом, число α или равно 2 (двумерный гауссовский вектор), или удовлетворяет (5), что означает, что результат П. Леви почти дословно переносится на комплексный случай. В частности это означает, что класс предельных комплексных случайных величин значительно шире, чем класс двумерных α-устойчивых векторов с вещественным α.

Автор выражает благодарность Н.В. Смородиной за внимание и поддержку в работе; А.В. Булинскому, И.А. Ибрагимову и М.А. Лифшицу за ценные советы.

2. Определение α-устойчивого вектора

Зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ и введем семейство Γ_ψ логарифмических спиралей на комплексной плоскости, зависящее от параметра $\psi \in [0, 2\pi)$, полагая

$$\Gamma_\psi = \{x^{1+i\gamma} e^{i\psi} : \ x > 0\}. \tag{7}$$

Приведем несколько простых свойств кривых Γ_ψ. Для начала отметим, что кривые Γ_ψ получаются поворотом Γ_0 на угол ψ. Именно,

$$\Gamma_\psi = e^{i\psi} \cdot \Gamma_0.$$

Кривая Γ_0 в полярных координатах задается уравнением

$$\gamma \ln r = \varphi,$$

где r — полярный радиус, φ — полярный угол.

Рассмотрим биективное отображение $\mathcal{J} : (0, \infty) \to \Gamma_0$ вида

$$\mathcal{J} : \ x \mapsto x^{1+i\gamma}, \quad x > 0.$$

Заметим, что для всех x_1, $x_2 > 0$ выполнено

$$\mathcal{J}(x_1 \cdot x_2) = \mathcal{J}(x_1) \cdot \mathcal{J}(x_2). \tag{8}$$

В дальнейшем мы часто будем отождествлять комплексные числа с двумерными векторами. При таком отождествлении умножение на комплексное число будет соответствовать умножению вектора на матрицу. В частности, для любого $x > 0$ умножение комплексного числа $y_1 + iy_2$ на комплексное число $x^{1+i\gamma}$ соответствует умножению вектора $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ на матрицу

$$x \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln x) & -\sin(\gamma \ln x) \\ \sin(\gamma \ln x) & \cos(\gamma \ln x) \end{pmatrix}.$$

Из (8) следует несколько важных свойств логарифмических спиралей — свойства замкнутости и самоподобия. Именно, для любых $\psi \in [0, 2\pi)$ и $d > 0$ выполнено

$$\mathcal{J}(d) \cdot \Gamma_\psi = \Gamma_\psi \tag{9}$$

и

$$\{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}:\ x>d\}=\mathcal{J}(d)\cdot\{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}:\ x>1\}. \tag{10}$$

Для любого $\psi\in[0,2\pi)$ и для любых $0\leqslant c<d\leqslant\infty$ естественным образом определяется понятие открытого интервала $(c,d)_{\gamma,\psi}$ на кривой Γ_ψ как

$$(c,d)_{\gamma,\psi}=\{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}:\ c<x<d\}. \tag{11}$$

Из (10) следует, что для любых $0<c<d\leqslant\infty$ выполнено

$$(c,d)_{\gamma,\psi}=\mathcal{J}(c)\cdot(1,d/c)_{\gamma,\psi}.$$

Важную роль играет следующее соотношение

$$dS_x=\sqrt{1+\gamma^2}\,dx, \tag{12}$$

где dS_x — дифференциал дуги кривой Γ_0. Это означает, что с точностью до мультипликативной константы, x является натуральным параметром кривой Γ_0. Отметим также, что dS_x является образом меры Лебега при отображении $\mathcal{J}$.

Далее, несложно видеть, что для любого $\gamma\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{C}=\Gamma_0\times[0,2\pi).$$

Такое разложение комплексного числа назовем *квази-полярным разложением.* Так как при $\gamma=0$ спираль Γ_0 вырождается в положительную полуось, то такое разложение действительно обобщает классическое полярное разложение.

Перейдем к определению α-устойчивой случайной величины. Рассмотрим сначала случай

$$|\alpha-1/2|<1/2. \tag{13}$$

Напомним, что условие (13) равносильно тому, что $\varrho\in(0,1)$.

Пусть $\lambda(d\psi)$ — некоторая конечная мера на $[0,2\pi)$. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(d\psi,dx)$ на $[0,2\pi)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$\Pi(d\psi,dx)=\frac{dx}{x^{1+\varrho}}\lambda(d\psi). \tag{14}$$

Введем следующее определение (напомним, что параметры ϱ, γ определяются по α формулой (6)).

Определение 1. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим* (13)*, конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0,2\pi)$, и сдвигом $z\in\mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi=\xi_1+i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi,dx)$ с интенсивностью* (14)

$$\xi=z+\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\nu(d\psi,dx). \tag{15}$$

Стохастический интеграл в правой части (15) при таких α сходится с вероятностью единица, доказательство практически дословно совпадает с соответствующим доказательством для вещественных $\alpha\in(0,1)$, в силу очевидного равенства

$$|x^{1+i\gamma}e^{i\psi}|=x, \tag{16}$$

справедливого для всех $x > 0$.

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} x\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln x+\psi)\\ \sin(\gamma\ln x+\psi)\end{pmatrix}\nu(d\psi,dx), \tag{17}$$

где $z = z_1 + iz_2$.

Найдем характеристическую функцию $H(p_1,p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть случай, когда в определении 1 параметр сдвига $z = 0$.

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \operatorname{Ln}\mathbf{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} = r^{\varrho}\Phi(\varphi+\gamma\ln r), \tag{18}$$

где $(p_1,p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, Ln *— логарифм, определенный по непрерывности с условием* $\operatorname{Ln} H(0,0) = 0$, *а функция* $\Phi(\theta)$ *для всех* $\theta\in[0,2\pi)$ *определяется формулой*

$$\Phi(\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\cos\left(\theta+\psi-\gamma\ln y\right)y}-1\right)\Pi(d\psi,dy). \tag{19}$$

Доказательство. Используя теорему Кэмпбелла (см. напр., [9], стр. 44), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \operatorname{Ln}\mathbf{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\left(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\right)y}-1\right)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y}-1\right)\tfrac{dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем линейную замену $w = ry$ и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = r^{\varrho}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r+\psi-\gamma\ln w)w}-1\right)\tfrac{dw}{w^{1+\varrho}}\lambda(d\psi) = r^{\varrho}\Phi(\varphi+\gamma\ln r). \quad\square$$

Перейдем к определнию случайных величин с параметром α, удовлетворяющим условиям

$$|\alpha-1|<1,\quad |\alpha-1/2|>1/2. \tag{20}$$

Напомним, что условие (20) равносильно тому, что $\varrho\in(1,2)$.

Определение 2. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости* α, *удовлетворяющим условию* (20), *конечной мерой* $\lambda(d\psi)$ *на* $[0,2\pi)$, *и сдвигом* $z\in\mathbb{C}$ *будем называть комплексную случайную величину* $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, *задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере* $\nu(d\psi,dx)$ *с интенсивностью* (14)

$$\xi = z + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde\nu(d\psi,dx). \tag{21}$$

Здесь и далее, $\tilde\nu(d\psi,dx) = \nu(d\psi,dx) - \Pi(d\psi,dx)$ *— центрированная пуассоновская случайная мера.*

Стохастический интеграл в правой части (21) понимается как

$$(L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi, dx), \tag{22}$$

где

$$\xi_\varepsilon = \xi_{\varepsilon,1} + i\xi_{\varepsilon,2} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{1} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi, dx). \tag{23}$$

Как и выше, в силу (16), доказательство существования L_2-предела в (22) полностью аналогично случаю вещественных α (см. напр., [14], стр. 85).

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} x\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln x+\psi)\\ \sin(\gamma\ln x+\psi)\end{pmatrix}\tilde{\nu}(d\psi, dx).$$

Найдем характеристическую функцию $H(p_1,p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. Как и выше, рассмотрим только случай, когда в определении 2 параметр сдвига $z=0$.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\mathrm{Ln}\,H(p_1,p_2) = \mathrm{Ln}\,\mathbf{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} = r^\varrho\Phi(\varphi+\gamma\ln r), \tag{24}$$

где $(p_1,p_2)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, *а функция* $\Phi(\theta)$ *для всех* $\theta\in[0,2\pi)$ *определяется формулой*

$$\Phi(\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\cos(\theta-\gamma\ln y+\psi)y} - 1 - i\cos(\theta-\gamma\ln y+\psi)y\right)\Pi(d\psi, dy). \tag{25}$$

Доказательство. Обозначим через $H_\varepsilon(p_1,p_2)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi, dx).$$

Тогда

$$H(p_1,p_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon(p_1,p_2).$$

По теореме Кэмпбелла получаем, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,H_\varepsilon(p_1,p_2) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\Big(e^{i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y} - 1\\ &- i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y\Big)\Pi(d\psi, dy)\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\left(e^{iry\cos(\varphi+\psi-\gamma\ln y)} - 1 - iry\cos(\varphi+\psi-\gamma\ln y)\right)\Pi(d\psi, dy). \end{aligned}\tag{26}$$

Во внутреннем интеграле сделаем линейную замену $w = ry$. Получим

$$\operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) \;=\; r^\varrho \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\big(e^{iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)} - 1 - iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\Pi(d\psi,dw).$$

Для доказательства осталось заметить, что

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon}\big(e^{iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)} - 1 - iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\mu(d\psi,dw)\Big| \leqslant \int\limits_0^{r\varepsilon} w^{1-\varrho}dw \to 0. \quad \square$$

Рассмотрим теперь случай

$$|\alpha - 1/2| = 1/2, \quad \alpha \neq 0. \tag{27}$$

Напомним, что условие (27) равносильно тому, что $\varrho = 1$.

Определение 3. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (27), конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0,2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi,dx)$ с интенсивностью* (14)

$$\xi = z + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\nu(d\psi,dx), \tag{28}$$

где ξ_ε определено в (23).

Как уже отмечалось ранее, в силу (16), доказательство существования L_2-предела почти дословно совпадает с соответствующим доказательством для случая $\alpha = 1$.

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{pmatrix}\xi_{\varepsilon,1}\\ \xi_{\varepsilon,2}\end{pmatrix} + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln x+\psi)\\ \sin(\gamma\ln x+\psi)\end{pmatrix}\nu(d\psi,dx).$$

Найдем характеристическую функцию $H(p_1,p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. Аналогично двум предыдущим случаям, рассмотрим только случай, когда в определении 3 параметр сдвига $z = 0$.

Теорема 3. *Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \operatorname{Ln}\mathbf{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} = r\Phi(\varphi+\gamma\ln r) + ir\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\gamma}\lambda(d\psi), \tag{29}$$

где $(p_1,p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, а функция $\Phi(\theta)$ для всех $\theta\in[0,2\pi)$ определяется формулой

$$\Phi(\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\big(e^{i\cos(\theta-\gamma\ln y+\psi)y} - 1 - i\cos(\theta-\gamma\ln y+\psi)y\mathbb{I}_{|y|<1}\big)\Pi(d\psi,dy) - i\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta+\psi)}{\gamma}\lambda(d\psi). \tag{30}$$

Доказательство. Обозначим через $H_\varepsilon(p_1,p_2)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi}\nu(d\psi,dx).$$

Тогда

$$H(p_1,p_2) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(p_1,p_2).$$

По теореме Кэмпбелла получаем, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\Big(e^{i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y} - 1 \\
&- i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y\mathbb{I}_{|y|<1}\Big)\Pi(d\psi,dy) \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1 - ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y\mathbb{I}_{|y|<1}\big)\frac{dy}{y^2}\lambda(d\psi). \qquad (31)
\end{aligned}$$

Сначала вычислим внутренний интеграл. Обозначим его через $I = I(\psi)$.

$$I = \int\limits_\varepsilon^{\infty}\big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1\big)\frac{dy}{y^2} - ir\int\limits_\varepsilon^{1}\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\big)\frac{dy}{y}. \qquad (32)$$

Сделаем линейную замену $w = ry$ в первом интеграле в (32) и получим

$$\int\limits_\varepsilon^{\infty}\big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1\big)\frac{dy}{y^2} = r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1\big)\frac{dw}{w^2}.$$

При $\varepsilon < 1/r$ имеем

$$\begin{aligned}
I &= r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1 - i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\big)\frac{dw}{w^2} \\
&- ir\Big[\int\limits_\varepsilon^{1}\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\big)\frac{dy}{y} - \int\limits_{r\varepsilon}^{1}\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y+\psi)\big)\frac{dy}{y}\Big] = rJ_1 - irJ_2. \qquad (33)
\end{aligned}$$

Вычислим J_2. Для этого в каждом интеграле сделаем замену $z = \ln y$.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int\limits_\varepsilon^{1}\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\frac{dy}{y} - \int\limits_{r\varepsilon}^{1}\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y+\psi)\frac{dy}{y} \\
&= \Big[\int\limits_{\ln\varepsilon}^{0}\cos(\varphi-\gamma z+\psi)dz - \int\limits_{\ln r+\ln\varepsilon}^{0}\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma z+\psi)dz\Big] \\
&= \frac{\sin(\varphi+\psi-\gamma\ln\varepsilon)-\sin(\varphi+\psi)-\big(\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln\varepsilon-\gamma\ln r)-\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r)\big)}{\gamma} \\
&= \frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r)-\sin(\varphi+\psi)}{\gamma}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Подставляя (34) в (33), получаем

$$\begin{aligned} I &= r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w}-1-i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\right)\frac{dw}{w^2} \\ &- ir\frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r)-\sin(\varphi+\psi)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) &= r\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w}-1-i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\right)\frac{dw}{w^2}\lambda(d\psi) \\ &- ir\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r)-\sin(\varphi+\psi)}{\gamma}\lambda(d\psi). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством $|e^{iy}-1-iy|\leqslant\frac{1}{2}y^2$ и получим

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon}\left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w}-1-i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\right)\frac{dw}{w^2}\lambda(d\psi)\Big|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{w<r\varepsilon}w^2\frac{dw}{w^2}\to 0.\ \square$$

Из полученных представлений для характеристических функций вытекает утверждение.

Теорема 4. *Для любого α, удовлетворяющего (5), α-устойчивое распределение является двумерным абсолютно непрерывным. Более того, существует $c_1>0$ такое, что*

$$\big|H(p_1,p_2)\big|\leqslant e^{-c_1|p|^\varrho}.$$

Доказательство. Из теорем 1, 2, 3 следует, что

$$|H(p_1,p_2)|=\exp\{r^\varrho\operatorname{Re}\Phi(\varphi+\gamma\ln r)\},$$

где $p_1=r\cos\varphi$, $p_2=r\sin\varphi$, а функция $\Phi(\theta)$ задается формулами (19), (25), и (30).

Для всех $\varrho\in(0,2)$ справедливо

$$\operatorname{Re}\Phi(\theta)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\Big(\cos\big(\cos\big(\theta+\psi-\gamma\ln y\big)y\big)-1\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)\leqslant 0.$$

Несложно видеть, что функция $\operatorname{Re}\Phi(\theta)<0$ для всех $\theta\in[0,2\pi]$ и является непрерывной на $[0,2\pi]$. Соответственно, существует $c_1>0$ такое, что для любого $\theta\in[0,2\pi]$ справедливо $\operatorname{Re}\Phi(\theta)\leqslant -c_1$. $\square$

Покажем, что полученные случайные вектора являются безгранично делимыми и найдем соответствующую меру Леви.

Теорема 5. *Для любого α, удовлетворяющего (5), α-устойчивое распределение является двумерным безгранично делимым с мерой Леви Λ равной*

$$\Lambda(B)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\mathbb{I}_B(\Psi y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\mathbb{I}_B(u)\frac{dS_u}{|u|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi),\qquad(35)$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, S_y — длина дуги на логарифмической спирали Γ_ψ,

$$\Psi=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\ \text{— матрица поворота на угол } \psi.\qquad(36)$$

Доказательство. Для простоты ограничимся только случаями $\varrho \in (0,1)$ и $z=0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из теоремы 1 следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Big(e^{y(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi))}-1\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

Сделаем замену переменной $w_1 = y\cos(\gamma\ln y)$, $w_2 = y\sin(\gamma\ln y)$ во внутреннем интеграле. Тогда от интегрирования по полупрямой мы перейдем к интегрированию по логарифмической спирали. Из (12) следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = (1+\gamma^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma_0}\Big(e^{(p,\Psi w)}-1\Big)\frac{dS_w}{|w|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

где $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2\end{pmatrix}$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Сделаем линейную замену $u = \Psi w$ и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = (1+\gamma^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma_\psi}\Big(e^{(p,u)}-1\Big)\frac{dS_u}{|u|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

Для доказательства осталось заметить, что

$$1+\gamma^2 = \tfrac{1}{a^2}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{a^2|\alpha|^2}. \quad \square$$

3. Свойство алгебраической устойчивости

Докажем, что при α, удовлетворяющих (5), для построенных α-устойчивых случайных величин выполнено условие алгебраической устойчивости.

Далее во всем параграфе будем считать, что $\gamma \neq 0$ (то есть $\alpha \notin \mathbb{R}$). Случай $\gamma = 0$ соответствует хорошо изученным двумерным α-устойчивым распределениям (см. напр., [21]).

Теорема 6. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина, ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ. Тогда для всех d_1, d_2, $d > 0$, $q \in \mathbb{C}$ следующие два условия равносильны*

1. $d_1^{1+i\gamma}\xi_1 + d_2^{1+i\gamma}\xi_2 \overset{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi + q$
2. $d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho} = d^{\varrho}, \quad q = \tilde{z}\Big[d^{1+i\gamma} - d_1^{1+i\gamma} - d_2^{1+i\gamma}\Big],$

где

$$\tilde{z} = \begin{cases} z, & \varrho \neq 1; \\ z - i\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\psi}\lambda(d\psi), & \varrho = 1. \end{cases} \tag{37}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\xi - \tilde{z}$. Тогда из теорем 1, 2, 3 следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = r^{\varrho}\Phi(\varphi + \gamma\ln r),$$

где $\Phi(\theta)$ из (19), (25), и (30).

Рассмотрим квази-полярное разложение комплексного числа $p_1+ip_2 = v^{1-i\gamma}e^{i\theta}$. Тогда $r=v$, $\varphi = -\gamma\ln v+\theta$ и, соответственно,

$$\mathrm{Ln}\, H(p_1,p_2) = v^\varrho\Phi(-\gamma\ln v+\theta+\gamma\ln v) = v^\varrho\Phi(\theta).$$

Отсюда следует, что условие 1 равносильно тому, что для всех $v>0$ и $\theta\in[0,2\pi)$ выполнено

$$d_1^\varrho v^\varrho\Phi(\theta)+d_2^\varrho v^\varrho\Phi(\theta) = d^\varrho v^\varrho\Phi(\theta)+iv(\cos(-\gamma\ln v+\theta)q_1+\sin(-\gamma\ln v+\theta)q_2), \tag{38}$$

где $q=q_1+iq_2$.

Условие (38) равносильно тому, что равны вещественная и мнимая части левой и правой частей равенства. Рассмотрим сначала вещественную часть.

$$v^\varrho \mathrm{Re}\,\Phi(\theta)\Big(d_1^\varrho+d_2^\varrho-d^\varrho\Big)=0.$$

Отсюда следует, что $d_1^\varrho+d_2^\varrho=d^\varrho$. Тогда условие (38) переписывается в виде

$$iv(\cos(-\gamma\ln v+\theta)q_1+\sin(-\gamma\ln v+\theta)q_2)=0.$$

Подставляя различные значения v и θ получаем, что $q_1=q_2=0$. $\square$

Следующее утверждение показывает, что условия устойчивости 1-2 из теоремы 6 могут быть переписаны в естественном для вещеественного случая виде (4).

Теорема 7. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина с параметром α, удовлетворяющим (5), ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_0, определенной (7). Тогда существуют $C\in\Gamma_0$, $q\in\mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1+B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi+q, \tag{39}$$

причем

$$A^\alpha+B^\alpha=C^\alpha,\quad q=\tilde z\big(C-A-B\big).$$

(число $\tilde z$ определено в (37))

Доказательство. Так как A, $B\in\Gamma_0$, то существуют d_1, d_2 такие, что

$$A=d_1^{1+i\gamma};\quad B=d_2^{1+i\gamma}.$$

Из теоремы 6 следует, что

$$A\xi_1+B\xi_2\stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi+q,$$

где

$$d_1^\varrho+d_2^\varrho=d^\varrho,\quad q=\tilde z\Big[d^{1+i\gamma}-d_1^{1+i\gamma}-d_2^{1+i\gamma}\Big].$$

Пусть $C=d^{1+i\gamma}$. Тогда осталось показать, что $A^\alpha+B^\alpha=C^\alpha$. Для этого заметим, что

$$d_1=A^{1/(1+i\gamma)};\quad d_2=B^{1/(1+i\gamma)};\quad d=C^{1/(1+i\gamma)}.$$

Тогда имеем

$$A^{\varrho/(1+i\gamma)}+B^{\varrho/(1+i\gamma)}=C^{\varrho/(1+i\gamma)}.$$

Воспользуемся (6) и получим

$$\frac{\varrho}{(1+i\gamma)} = \frac{1-i\gamma}{a(1+\gamma^2)} = \frac{a^2}{a(a^2+b^2)} - i\frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \alpha. \quad \square$$

Как и выше, случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ мы отождествляем с двумерным случайным вектором $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. При таком отождествлении умножению на комплексное число соответствует умножение вектора на матрицу размера 2×2. Посмотрим во что перейдет условие устойчивости (39) с точки зрения матричной алгебры.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \in \mathbb{R}$. Для $d > 0$ через $M_\gamma(d)$ обозначим матрицу

$$M_\gamma(d) = d\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln d) & -\sin(\gamma\ln d)\\ \sin(\gamma\ln d) & \cos(\gamma\ln d)\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = M_\gamma(d)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \text{ тогда и только тогда, когда } y_1 + iy_2 = d^{1+i\gamma}(x_1 + ix_2). \tag{41}$$

Введем множество матриц 2×2

$$\mathcal{M}_\gamma = \{M_\gamma(d):\ d > 0\}.$$

Отображение $d \mapsto M_\gamma(d)$ есть гомоморфизм групп. Значит $\mathcal{M}_\gamma$ — группа по умножению, изоморфная группе положительных чисел по умножению.

Для матрицы $M_\gamma(d)$ определено возведение в степень α (см. напр., [4], теор. 2, стр. 117). При этом,

$$M_\gamma^\alpha(d) = \begin{pmatrix}d^\varrho & 0\\ 0 & d^\varrho\end{pmatrix}. \tag{42}$$

Перепишем теперь утверждение теоремы 7 в матричных терминах.

Следствие 1. *Пусть ξ — α-устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — независимые копии ξ и пусть матрицы M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_\gamma$. Тогда существуют $M \in \mathcal{M}_\gamma$, $m \in \mathbb{R}^2$ такие, что*

$$M_1\xi^{(1)} + M_2\xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M\xi + m,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha, \quad m = (M - M_1 - M_2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\tilde z\\ \operatorname{Im}\tilde z\end{pmatrix}.$$

Это утверждение легко следует из теоремы 7 и (42).

Следующая теорема дает еще одну форму условия устойчивости. Для простоты ограничимся случаем когда параметр $\tilde z$ случайной величины ξ в формуле (37) равен нулю.

Теорема 8. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого α, удовлетворяющего (5), выполнено*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \stackrel{d}{=} \xi, \tag{43}$$

где ξ_k — независимые копии комплексной случайной величины ξ.

Доказательство. Докажем (43) по индукции. При $n = 2$ утверждение следует из теоремы 6. Покажем теперь индукционный переход.

Определим числа d_1, d_2, полагая

$$d_1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\varrho}, \quad d_2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\varrho}.$$

Пусть ξ_0 — независимая копия ξ, не зависящая от ξ_n. Тогда из теоремы 6 следует, что

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_0 + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi.$$

Возьмем в качестве ξ_0 величину

$$\xi_0 = \frac{1}{(n-1)^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k.$$

Несложно видеть, что ξ_0 не зависит от ξ_n, и по индукционному предположению $\xi_0 \stackrel{d}{=} \xi$. Тогда

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k + \frac{1}{n^{1/\alpha}}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi. \quad \square$$

Из теоремы 1 в [22] следует, что данные распределения являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с некоторой матричной нормировкой и векторным центрированием. Таким образом, они являются операторно-устойчивыми. В частности, отсюда следует (см. напр., теорему 7.2.7 в [19]), что распределения имеют плотность.

В данном случае можно найти экспоненту распределения (см. напр., [19]). Обозначим ее через E. Из теоремы 8 и формулы (2) следует, что умножение вектора на матрицу n^E должно соответствовать умножению комплексного числа на комплексное число $n^{1/\alpha}$. Тогда умножение вектора на матрицу E должно соответствовать умножению на комплексное число $\alpha^{-1} = a + bi$. Таким образом,

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{44}$$

В §5 будут найдены некоторые достаточные условия для сходимости к устойчивым распределениям с комплексным параметром α, удовлетворяющим условию (5).

4. Характеризационное свойство

В этом параграфе мы покажем, что для α, удовлетворяющих (5), утверждение теоремы 7 является характеризационным для введенного класса устойчивых случайных величин.

Теорема 9. *Для любого фиксированного α, удовлетворяющего (5), следующие два условия равносильны*

1. *Для всех комплексных чисел A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$ такие, что справедливо*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{45}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ, а число $C \in \Gamma_0$ в (45) однозначно определяется из уравнения $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.

2. *Распределение случайной величины ξ (рассматриваемой как двумерный вектор) является безгранично делимым с нулевой гуассовской компонентой и мерой Леви Λ, равной*

$$\Lambda(B) = a|\alpha| \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma_0} \mathbb{I}_B(\Psi y) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi), \tag{46}$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, $\lambda(d\psi)$ — некоторая конечная мера на $[0, 2\pi)$, dS_y — дифференциал длины дуги на логарифмической кривой Γ_0, Ψ — матрица поворота на угол ψ, определенная в (36).

Доказательство Покажем, что из условия 1 следует 2. Из доказательства теоремы 8 и условия 1 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi + q_n, \tag{47}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии ξ, $q_n = q_{n,1} + iq_{n,2} \in \mathbb{C}$.

Из (47) следует, что распределение случайной величины ξ является безгранично делимым, соответственно, оно однозначно определяется своим характеристическим триплетом $(\Delta, Q, \tilde{\Lambda})$ (см. теор. 3.1.14 в [19]):

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbf{E} e^{i(p_1 \operatorname{Re} \xi + p_2 \operatorname{Im} \xi)} = i(p, \Delta) - p^T Q p + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x) \mathbb{I}_{|x|<1} \right) \tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2).$$

Из (47) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H(p_1, p_2) &= n \operatorname{Ln} H(N^T p) = ni(p, N\Delta_n) - np^T \big(NQN^T \big) p \\ &+ n \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p, Nx) \mathbb{I}_{|x|<1} \right) \tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2), \end{aligned}$$

где

$$N = n^{-a} \begin{pmatrix} \cos(b \ln n) & \sin(b \ln n) \\ -\sin(b \ln n) & \cos(b \ln n) \end{pmatrix},$$

и

$$\Delta_n = \Delta + \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{pmatrix}.$$

Из единственности характеристического триплета следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ матрица $Q = nNQN^T$. Так как $\varrho \in (0, 2)$, то

$$\|Q\| = n \big\| NQN^T \big\| \leqslant C \tfrac{1}{n^{2/\varrho - 1}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что Q — нулевая матрица.

Далее, пользуясь (47), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H(p_1, p_2) &= i(p, \Delta) + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x) \mathbb{I}_{|x|<1} \right) \tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2) \\ &= ni(p, N\Delta_n) + n \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p, Nx) \mathbb{I}_{|x|<1} \right) \tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2). \end{aligned} \tag{48}$$

Рассмотрим вещественную часть в (48).

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,x))-1\big)\tilde{\Lambda}(dx_1,dx_2) = n \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,Nx))-1\big)\tilde{\Lambda}(dx_1,dx_2).$$

Сделаем в последнем интеграле замену $Nx = y$. Получим

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = n \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,y))-1\big)\tilde{\Lambda}(d(N^{-1}y)).$$

Отметим, что левая и правая части являются логарифмами характеристических функций. Тогда по теореме единственности для представления Леви получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde{\Lambda}(dy) = n\tilde{\Lambda}(d(N^{-1}y)) \tag{49}$$

Пусть I — борелевское подмножество $[0,2\pi)$. Для любого $d>0$ рассмотрим множество

$$S_d = \{(d^{1/\varrho},\infty)_{\gamma,\psi} :\ \psi \in I\}, \tag{50}$$

где интервалы вида $(c_1,c_2)_{\gamma,\psi} \ \subset \Gamma_\psi$ определены формулой (11).

Из (10) следует, что при $n \in \mathbb{N}$ множество $(n^{1/\varrho},\infty)_{\gamma,\psi} = N^{-1}(1,\infty)_{\gamma,\psi}$. Тогда

$$\tilde{\Lambda}(S_n) = \int\limits_{S_n} \tilde{\Lambda}(dx) = \int\limits_{N^{-1}S_1} \tilde{\Lambda}(dx) = \int\limits_{S_1} \tilde{\Lambda}(d(N^{-1}x)) = \frac{1}{n}\tilde{\Lambda}(S_1).$$

Аналогично получаем, что для всех k, $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde{\Lambda}(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde{\Lambda}(S_{1/n}).$$

Подставим $n=k$ и получим

$$\tilde{\Lambda}(S_1) = \frac{1}{n}\tilde{\Lambda}(S_{1/n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеем

$$\tilde{\Lambda}(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde{\Lambda}(S_{1/n}) = \frac{n}{k}\tilde{\Lambda}(S_1),$$

что означает, что для любого рационального $q>0$:

$$\tilde{\Lambda}(S_q) = q^{-1}\tilde{\Lambda}(S_1).$$

Введем меру

$$\lambda(I) = \varrho\tilde{\Lambda}(S_1). \tag{51}$$

Отметим, что так как $\tilde{\Lambda}$ — мера Леви, то $\lambda(d\psi)$ — конечная мера на $[0,2\pi)$.

Из (51) следует, что

$$\tilde{\Lambda}(S_{c,d}) = \tilde{\Lambda}(S_d) - \tilde{\Lambda}(S_c) = \frac{1}{\varrho}\big(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\big)\lambda(I),$$

где $0 < c < d$ — положительные рациональные числа,

$$S_{c,d} = \{(c^{1/\varrho}, d^{1/\varrho})_{\gamma,\psi} : \psi \in I\}.$$

Посчитаем $\Lambda(S_{c,d})$.

$$\Lambda(S_{c,d}) = a|\alpha| \int\limits_I \int\limits_{(c^{1/\varrho}, d^{1/\varrho})_{\gamma,\psi}} \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi) = \lambda(I) \int\limits_{c^{1/\varrho}}^{d^{1/\varrho}} \frac{dy}{y^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho}\Big(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\Big)\lambda(I).$$

По единственности продолжения меры (см. напр., [16], стр. 59, теор. 1) получаем, что для всех борелевских множеств $B \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ выполнено равенство

$$\Lambda(B) = \tilde{\Lambda}(B).$$

Импликация из 2 в 1 следует из теорем 5 и 6. □

5. Предельные теоремы.

Будем говорить, что комплекснозначная случайная величина X принадлежит области притяжения комплекснозначной случайной величины ξ, если существуют две последовательности комплексных чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - q_n \tag{52}$$

сходится по распределению к ξ.

При вещественных $\alpha \in (0, 2)$ (в наших обозначениях $\gamma = 0$, $\varrho = \alpha$) известно (см. напр., [20]), что X принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого закона, если для некоторой вероятностной меры $\sigma(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$ выполнено следующее условие

$$\frac{\mathbb{P}(|X| > d \cdot x, \arg X \in S)}{\mathbb{P}(|X| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(S), \tag{53}$$

где S — произвольное борелевское множество на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющее условию $\sigma(\partial E) = 0$.

При этом последовательность положительных нормирующих множителей $\{B_n\}$ выбирается из условия

$$n\mathbb{P}(|X| > B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{54}$$

Пусть для случайной величины X выполнено (53), а последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет (54). Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n^{1+i\gamma}} \sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\gamma \ln |X_k|}, \tag{55}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — произвольный фиксированный параметр комплексности.

Положим

$$\alpha = \frac{\varrho}{1 + i\gamma} \tag{56}$$

и

$$\lambda(d\psi) = \varrho\sigma(d\psi). \tag{57}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *Существует последовательность комплексных чисел $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что последовательность случайных величин $\zeta_n - q_n$ сходится по распределению к α-устойчивой случайной величине с параметрами α, $\lambda(d\psi)$ (они определяются* (56) *и* (57)*) и некоторым сдвигом $z\in\mathbb{C}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется проверить выполнение следующих двух условий (см. напр., [19, Теорема 3.3.8], [20])

I $n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|}\in B_n^{1+i\gamma}U)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\Lambda(U)$, где Λ — мера Леви, определяемая (35), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U)=0$.

II Для всех t_1, $t_2\in\mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty} n\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\mathcal{P}(M_ndx)-\Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\mathcal{P}(M_ndx)\Big)^2\right]=0,$$

где $\mathcal{P}$ — распределение случайной величины $Xe^{i\gamma\ln|X|}$, рассматриваемой как двумерной, а матрица M_n определяется как

$$M_n=M_\gamma(B_n)=B_n\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln B_n) & -\sin(\gamma\ln B_n)\\ \sin(\gamma\ln B_n) & \cos(\gamma\ln B_n)\end{pmatrix}.$$

Покажем сначала I. Для любого $d>0$ и S — борелевского на $[0,2\pi)$ такого, что $\sigma(\partial S)=0$ введем множество U, полагая

$$U=U_d(S)=\{(d,\infty)_{\gamma,\psi},\,\psi\in S\},$$

где $(c,d)_{\gamma,\psi}$ определяется (11).

Имеем

$$n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|}\in B_n^{1+i\gamma}U)=n\mathbb{P}(|X|>d\cdot B_n,\,\arg X\in S)=\frac{\mathbb{P}(|X|>d\cdot B_n,\,\arg X\in S)}{\mathbb{P}(|X|>B_n)}\cdot\big(n\mathbb{P}(|X|>B_n)\big).$$

Тогда из (53) и (54) следует, что для $U=U_d(S)$ выполнено

$$n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|}\in B_n^{1+i\gamma}U)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}d^{-\varrho}\sigma(S).$$

Вычислим $\Lambda(U)$ в случае, когда $\lambda(d\psi)=\varrho\sigma(d\psi)$. Из (12) следует, что

$$\Lambda(U)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\mathbb{I}_U(y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)=\int\limits_S\int\limits_d^\infty\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\varrho\sigma(d\psi)=\sigma(S)d^{-\varrho}.$$

Отсюда следует, что условие I выполнено для всех множеств из семейства

$$\mathcal{U}=\{U_{c,d}(S)\colon\ 0<c<d\leqslant\infty,\,E-\text{борелевское на }\,[0,2\pi)\,\text{такое, что}\,\sigma(\partial S)=0\},$$

где $U_{c,d}(S)=U_d(S)\setminus U_c(S)$.

Из [2, Следствие 1, стр. 26] следует, что семейство множеств $\mathcal{U}$ определяет сходимость и, соотвественно, I справедливо для всех борелевских множеств U, удовлетворяющих $\Lambda(\partial U)=0$.

Покажем теперь справедливость II. Из условия (53) следует, что случайная величина $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. В теореме 2.6.1 книги [8] было показано, что в этом случае выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n\int\limits_0^{\varepsilon}|x|^2 dF(B_n x)=0, \tag{58}$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины $|X|$.

Воспользуемся простой оценкой

$$\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\mathcal{P}(M_n dx)-\Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\mathcal{P}(M_n dx)\Big)^2\right|\leqslant 2|t|^2\int\limits_0^{\varepsilon}x^2 dF(B_n x).$$

Тогда из (58) следует справедливость условия II и, соответственно, утверждение теоремы. □

Из теоремы 10 непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Следствие 2. *Если при некотором $\varrho\in(0,2)$ известно, что X принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого закона с вещественной нормировкой, то $Xe^{i\gamma\ln|X|}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой* (56).

Следствие 3. *Пусть для некоторых $\gamma\in\mathbb{R}$, $\varrho\in(0,2)$ распределение комплексной случайной величины X удовлетворяет условию*

$$\frac{\mathbb{P}(|X|>d\cdot x,(\arg X-\gamma\ln|X|)\ (mod\ 2\pi)\in S)}{\mathbb{P}(|X|>x)}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(S), \tag{59}$$

где $\sigma(d\psi)$ — некоторая вероятностная мера на $[0,2\pi)$, а S — произвольное борелевское множество на $[0,2\pi)$ такое, что $\sigma(\partial S)=0$. Тогда X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой (56).

Приведем еще и необходимое условие принадлежности к области притяжения α-устойчивого закона.

Теорема 11. *Если X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона.*

Доказательство. Так как X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то для некоторых последовательностей $\{r_n\}$, $r_n>0$ и $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n\in[0,2\pi)$ выполнено (см. напр., [19], [20])

$$n\mathbb{P}(X\in r_n e^{i\varphi_n}U)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\Lambda(U), \tag{60}$$

где Λ — мера Леви, определенная (35), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U)=0$.

Положим в (60) $U=U_d=\{x\in\mathbb{C}:\,|x|>d\}$ и получим

$$n\mathbb{P}(X\in r_n e^{i\varphi_n}U_d)=n\mathbb{P}(|X|>r_n\cdot d)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\Lambda(U_d).$$

Вычислим $\Lambda(U_d)$. В силу (12) имеем

$$\Lambda(U_d)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\mathbb{I}_{U_d}(\Psi y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{\infty}\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)=\lambda\big([0,2\pi)\big)\frac{1}{\varrho d^{\varrho}}.$$

Из теоремы 2.6.1 в книге [8] следует, что случайная величина $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. □

6. α-устойчивые процессы Леви и отвечающие им полугруппы операторов.

Введем комплекснозначный процесс Леви, соответствующий α-устойчивым распределениям с комплексным α, удовлетворяющим (5). Рассмотрим комплексную случайную величину ξ как двумерный вектор $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. Как было показано в §2 этот вектор является безгранично делимым, соответственно, по нему можно построить процесс Леви $\begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix}$, $t \geqslant 0$ (см. напр., [5, Теорема 3, стр. 367]) с условиями

$$\begin{pmatrix}\xi_1(1)\\ \xi_2(1)\end{pmatrix} \overset{d}{=} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\xi_1(0)\\ \xi_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{61}$$

Процесс $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ назовем *комплекснозначным α-устойчивым процессом Леви.*

Для комплекснозначных α-устойчивых процессов справедлива следующая характеризационная теорема.

Теорема 12. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный случайный процесс Леви. Для любого фиксированного α следующие два условия равносильны*

1. *Для любого $t > 0$ и $d > 0$ существует $z = z(t, d) \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$\xi(d \cdot t) \overset{d}{=} d^{1/\alpha}\xi(t) + z. \tag{62}$$

2. *Случайная величина $\xi(1)$ является α-устойчивой с некоторым сдвигом $z \in \mathbb{C}$ и конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$.*

Доказательство Покажем, что из условия 1 следует 2. Так как $\xi(t)$ — процесс Леви, то

$$\xi(n) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \tag{63}$$

где ξ_k — независимые копии $\xi(1)$. Тогда из (62) и (63) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $q_n = z(1, n) \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overset{d}{=} n^{1/\alpha}\xi(1) + q_n.$$

Из теоремы 9 следует, что $\xi(1)$ — α-устойчивая случайная величина. Таким образом, $\xi(t)$ — α-устойчивый процесс Леви.

Импликация из 2 в 1 вытекает из общей теории операторно-устойчивых случайных векторов. Известно (см. напр., [19], [22]), что

$$\begin{pmatrix}\xi_1(d \cdot t)\\ \xi_2(d \cdot t)\end{pmatrix} \overset{d}{=} d^E \cdot \begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix}.$$

Из (44) следует, что

$$\begin{pmatrix}\xi_1(d \cdot t)\\ \xi_2(d \cdot t)\end{pmatrix} \overset{d}{=} M_\gamma(d^{1/\varrho}) \cdot \begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \xi_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{pmatrix}. \tag{64}$$

Используя (41) и (64) получаем (63) и, соответственно, утверждение теоремы. □

По процессу $\xi(t)$, $\xi(0)=0$ построим полугруппу операторов P^t, $t\geqslant 0$. Для каждого $t>0$ оператор P^t действует на функцию $\varphi\in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(P^t\varphi\big)(x_1,x_2)=\mathbf{E}\varphi\big(x_1-\xi_1(t),x_2-\xi_2(t)\big). \tag{65}$$

Для $\varrho\in(0,1)$ и конечной меры $\lambda(d\psi)$ на $[0,2\pi)$ определим оператор $\mathcal{L}\colon W_2^1(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\Big(\varphi(x-y)-\varphi(x)\Big)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi),$$

где $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, dS_y — дифференциал длины дуги на кривой Γ_ψ.

Для $\varrho\in(1,2)$ и конечной меры $\lambda(d\psi)$ на $[0,2\pi)$ определим оператор $\mathcal{L}\colon W_2^2(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x)=a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\Big(\varphi(x-y)-\varphi(x)-\big(\nabla\varphi(x),y\big)\Big)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi),$$

где $\nabla\varphi$ — градиент функции φ, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Для случая $\varrho=1$ (комплексный аналог процесса Коши) введем оператор $\mathcal{L}$ только при выполнении дополнительного условия. Именно, пусть для меры $\lambda(d\psi)$ выполнено

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{i\psi}\lambda(d\psi)=0. \tag{66}$$

В этом случае определим оператор $\mathcal{L}:\,W_2^2(\mathbb{R}^2)\to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x_1,x_2)\ \ =\ \ \mathrm{v.p.}\,a|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\Big(\varphi(x-y)-\varphi(x)\Big)\frac{dS_y}{|y|^2}\lambda(d\psi),$$

Несложно видеть, что $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным оператором с символом $h(p_1,p_2)=\operatorname{Ln}H(p_1,p_2)$, где $H(p_1,p_2)$ — характеристическая функция α-устойчивой случайной величины с параметрами ϱ, γ, и $\lambda(d\psi)$.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувилля порядка* α.

Из общей теории процессов Леви следует, что $\mathcal{L}$ является генератором полугруппы P^t. (см. напр., [21], теорема 31.5) Это эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 13. *Функция*

$$u(t,x_1,x_2)=\big(P^t\varphi\big)(x_1,x_2)$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathcal{L}u \tag{67}$$

с начальным условием

$$u(0,x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2). \tag{68}$$

7. Комплексно-устойчивые случайные величины.

Введем следующее определение. Будем говорить, что случайная величина ξ называется *комплексно-устойчивой*, если ξ является слабым пределом для последовательности случайных величин

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n,$$

где $\{B_n\}$, $\{z_n\}$ — некоторые последовательности комплексных чисел, $\{X_k\}$ — последовательность комплекнозначных н.о.р. случайных величин. Иными словами, случайная величина ξ комплексно-устойчива, если ее область притяжения не пуста.

В настоящем параграфе покажем, что любая комплексно-устойчивая случайная величина является или вырожденной, или гауссовской, или α-устойчивой случайной величиной с α, удовлетворяющим (5).

Отметим также, что комплексно-устойчивые случайные величины являются подклассом двумерных операторно-устойчивых векторов (в смысле работы [19]).

Сформулируем и докажем критерий принадлежности к классу комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 14. *Комплекснозначная случайная величина ξ является комплексно-устойчивой тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют w_m, $a_m \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k \stackrel{d}{=} w_m \xi + a_m, \tag{69}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ — независимые копии ξ.

Доказательство. Пусть ξ — комплексно-устойчивая случайная величина. Тогда для некоторой последовательности комплексных случайных величин $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ существуют две последовательности комплексных чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим сумму

$$\zeta_{m,n} = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - m\cdot z_n = \Big(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n\Big) + \dots \Big(\frac{1}{B_n}\sum_{k=(m-1)n+1}^{mn} X_k - z_n\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_1 + \dots + \xi_m.$$

С другой стороны,

$$\zeta_{m,n} = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - m\cdot z_n = \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n}\Big) + \Big(\frac{B_{m\cdot n}}{B_n} q_{m\cdot n} - m\cdot z_n\Big). \tag{70}$$

Известно, что левая часть (70) имеет слабый предел. Также известно, что

$$\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi.$$

Возьмем $\{X'_k\}$ — независимую копию последовательности $\{X_k\}$. Используя (70), по последовательности $\{X'_k\}$ построим случайную величину $\zeta'_{m,n}$ — независимую копию $\zeta_{m,n}$. Тогда

$$\zeta_{m,n} - \zeta'_{m,n} = \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n}\Big) - \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X'_k - z_{m\cdot n}\Big). \tag{71}$$

Пусть $\frac{B_{m\cdot n}}{B_n}$ не имеет предела. Тогда в (71) левая часть имеет предел, а правая не имеет. Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_{m\cdot n}}{B_n} = w_m \in \mathbb{C}$.

Отсюда и из (70) следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{B_{m\cdot n}}{B_n} z_{m\cdot n} - m\cdot z_n\Big) = a_m \in \mathbb{C}.$$

Теперь переходя к пределу в (70) при $n\to\infty$, получаем справедливость (69). Таким образом, мы показали, что условие (69) является необходимым для комплексной устойчивости.

Достаточность условия (69) следует из тривиального соотношения

$$\frac{1}{w_m}\sum_{k=1}^{m}\xi_k - \frac{a_m}{w_m} \stackrel{d}{=} \xi \xrightarrow[m\to\infty]{d} \xi. \quad \square$$

Следующая теорема дает полное описание класса комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 15. *Пусть ξ — комплексно-устойчивая случайная величина. Тогда ξ или вырожденная или гауссовская, или α-устойчивая случайная величина.*

Доказательство. Так как комплексно-устойчивые случайные величины это подкласс двумерных операторно-устойчивых векторов, то из теоремы 7.2.1 в [19] следует, что распределение случайной величины ξ, рассмотренной как двумерный вектор, имеет экспоненту. То есть, существует матрица $E\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{m}\vec{\xi}^{(k)} \stackrel{d}{=} m^E\vec{\xi} + \vec{a}_m, \tag{72}$$

где $\vec{\xi}$ — двумерный вектор соответствующий ξ, $\vec{\xi}^{(k)}$ — его независимые копии, матрица m^E определяется (3).

Из теоремы 14 следует, что умножение случаного вектора $\vec{\xi}$ на матрицу m^E соответствует умножению случайной величины $\xi_1 + i\xi_2$ на некоторое комплексное число. Таким образом, умножение на матрицу E также соответствует умножению на некоторое комплексное число $\alpha^{-1} = a + bi$. Отсюда следует, что (72) переписывается в следующем виде

$$\frac{1}{m^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{m}\xi_k \stackrel{d}{=} \xi + \tilde{q}_m.$$

В случае когда $a > 1/2$ из теоремы 9 (см. введение) следует, что случайная величина ξ является α-устойчивой с параметром $|\alpha - 1| < 1$, где $\alpha^{-1} = a + bi$.

Случай $a \leqslant 1/2$ реализуется только при $a = 1/2$, $b = 0$ (см. напр., [19, Теорема 7.2.1]), что соответствует гауссовскому случаю. $\square$

Сформулируем и докажем еще один критерий α-устойчивости случайных величин.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$ (Случай $\gamma = 0$ является хорошо изученным (см. напр, [21]), ему соответствуют двумерные α-устойчивые векторы). Пусть Γ_0 — соответствующая γ, логарифмическая спираль, определенная (7).

Теорема 16. *Пусть для любых A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{73}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ.

Тогда или существует $\varrho \in (0,2)$ такое, что ξ — α-устойчивая случайная величина, где $\alpha = \varrho(1+i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что ξ — комплекснозначная гауссовская случайная величина с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица.

Доказательство. По индукции можно показать, что из (73) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $z_n \in \Gamma_0$, $q_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$z_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + q_n \stackrel{d}{=} \xi, \tag{74}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии ξ.

Из теоремы 15 следует, что ξ или вырожденная, или гауссовская, или α-устойчивая случайная величина. Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина. Покажем, что α соответствует γ. Подставим в (73) $A = B = 1$. Тогда существует $d > 0$ такое, что

$$\xi_1 + \xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi + q. \tag{75}$$

Если α соответствует другому значению γ', то также выполнено

$$\xi_1 + \xi_2 \stackrel{d}{=} c^{1+i\gamma'}\xi + q', \tag{76}$$

где $c = 2^{1/\varrho} > 0$ при некотором $\varrho \in (0,2)$.

Из (75) и (76) следует, что

$$\left(d^{1+i\gamma} - c^{1+i\gamma'}\right)\xi \stackrel{d}{=} q - q'.$$

Так как ξ — невырожденная случайная величина, то получаем, что $d^{1+i\gamma} = c^{1+i\gamma'}$. Отсюда тривиально следует, что $c^{i(\gamma'-\gamma)} = 1$. Так как $c = 2^{1/\varrho} \neq 1$, то

$$\gamma' = \gamma + \frac{2\varrho\pi k}{\ln 2} \tag{77}$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что $k = 0$. Пусть не так. Подставим в (73) $A = 1$, $B = 2^{(1+i\gamma)/\varrho}$. Тогда существует $d_1 > 0$ такое, что

$$\xi_1 + 2^{(1+i\gamma)/\varrho}\xi_2 \stackrel{d}{=} d_1^{1+i\gamma}\xi + q.$$

Из (77) следует, что $B = 2^{1+i\gamma'}$. Тогда

$$\xi_1 + 2^{(1+i\gamma)/\varrho}\xi_2 \stackrel{d}{=} c_1^{1+i\gamma'}\xi + q',$$

где $c_1 = 3^{1/\varrho} > 0$.

Как и выше получаем, что $d_1^{1+i\gamma} = c_1^{1+i\gamma'}$. Отсюда тривиально следует, что $c_1^{i(\gamma'-\gamma)} = 1$. Так как $c_1 = 3^{1/\varrho} \neq 1$, то

$$\gamma' = \gamma + \frac{2\varrho\pi l}{\ln 3} \tag{78}$$

для некоторого $l \in \mathbb{Z}$.

Так как $k \neq 0$, то из (77) и (78) следует, что $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$. Полученное противоречие показывает, что $k = 0$, то есть γ соответствует α.

Пусть теперь ξ — комплекснозначная гауссовская случайная величина. Покажем, что матрица ковариации $Q = \sigma^2 I$ для некоторого $\sigma \geqslant 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\mathbf{E}\xi = 0$. Тогда $q = 0$ для всех A, $B \in \Gamma_0$.

Из (74) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $d_n > 0$ такое, что

$$d_n^{1+i\gamma} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi.$$

Посчитаем матрицы ковариации левой и правой частей. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$M_\gamma^T(d_n) n Q M_\gamma(d_n) = Q.$$

С точностью до положительной константы матрицы $M_\gamma(d_n)$ являются унитарными. Поэтому

$$n d_n^2 \|Q\|_2 = \|Q\|_2.$$

Если $\|Q\|_2 \neq 0$ (невырожденный случай), то $d_n = n^{-1/2}$. Отсюда следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$V_n Q = Q V_n, \tag{79}$$

где

$$V_n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln \sqrt{n}) & \sin(\gamma \ln \sqrt{n}) \\ -\sin(\gamma \ln \sqrt{n}) & \cos(\gamma \ln \sqrt{n}) \end{pmatrix}.$$

Из (79) следует, что Q коммутирует с унитарной матрицей, не равной тождественной. Таким образом, с точностью до мультипликативной константы Q является унитарной матрицей. Так как Q — матрица ковариации (симметричная и неотрицательно определенная), то существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $Q = \sigma^2 I$. $\square$

Сформулируем и докажем аналог теоремы 16 для процессов Леви. Как и ранее, зафиксируем $\gamma \neq 0$.

Следствие 4. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный процесс Леви такой, что для любых $t > 0$ и $d > 0$ существуют $z(d) \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\xi(d \cdot t) \stackrel{d}{=} z(d)\xi(t) + q.$$

Тогда или существует $\varrho \in (0, 2)$ такое, что $\xi(1)$ — α-устойчивая случайная величина, где α однозначно определяется по ϱ и γ; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $\xi(1)$ — комплекснозначная гауссовская случайная величина с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица.

Доказательство. Подставим $d = n$ и получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $z_n \in \Gamma_0$, $q_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$z_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + q_n \stackrel{d}{=} \xi(1),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии $\xi(1)$.

Тогда для $\xi(1)$ выполнено (74). Повторяя доказательство теоремы 16, получаем утверждение следствия. $\square$

Список литературы

[1] И.А. Алексеев *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости. Случай* $|\alpha - 1/2| < 1/2$., Записки научных семинаров ПОМИ.

[2] П. Биллингсли *Сходимость вероятностных мер*, Наука, Москва, 1977.

[3] А.М.Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев *Коммутативная модель представления группы токов* $SL(2,\mathbb{R})^X$*, связанная с унипотентной подгруппой* , Функциональный анализ и его приложения, **17**(1983), 70-72.

[4] Ф.Р. Гантмахер *Теория матриц*, Наука, Москва, 1966.

[5] И.И. Гихман, А.В. Скороход *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, Москва, 1977.

[6] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1949.

[7] В.М. Золотарев *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва, 1983.

[8] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965.

[9] Дж. Кингман *Пуассоновские процессы*, Издательство МЦНМО, Москва, 2007.

[10] Дж. Ламперти *Вероятность*, Наука, Москва, 1973.

[11] М.А. Лифшиц *Инвариантные меры, порождаемые случайными полями с независимыми значениями*, Функциональный анализ и его приложения, **19**(1985), 92-93.

[12] М.В. Платонова *Симметричные* α*-устойчивые распределения с нецелым* $\alpha > 2$ *и связанные с ними стохастические процессы*, Записки научных семинаров ПОМИ, **442**(2015), 101-117.

[13] Г.Н. Сакович *Многомерные устойчивые распределения. Диссертация*, 1965.

[14] А.В. Скороход *Случайные процессы с независимыми приращениями*, Наука, Москва, 1964.

[15] Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2009 Т. 368 С.201-228.

[16] П. Халмош *Теория меры*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1953.

[17] E. Feldheim *Étude de la stabilité des lois de probabilité*, Thèses de l'entre-deux-guerres, **187**(1937).

[18] P. Lévy *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Scuola normale superiore, 2e série, **3**(1934) 337-366.

[19] Mark M. Meerschaert, Hans-Peter Scheffler *Limit distributions for sums of independent random vectors : heavy tails in theory and practice*, Wiley, New York, 2001.

[20] E. Rvaceva *On domains of attraction of multidimensional distributions*, Select. Transl. Math. Stat. Prob., American Math. Soc., Providence, Rhode Island, **2**(1962), 183-205.

[21] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[22] M. Sharpe *Operator-Stable probability distributions on vector groups*, Transactions of the American Mathematical Society, **136**(1969), 51-65.

[23] N.V. Smorodina, M.M. Faddeev *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications*, Acta applicandae mathematicae, **110**(2010), 1289-1308.