МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

НОВЫЕ ОЦЕНКИ СУММ КЛООСТЕРМАНА С ВЕСАМИ

Семенова Наталья Кирилловна

Москва 2021

Содержание

Используемые обозначения **2**

Введение **3**

1 Однородные короткие суммы Клоостермана с весами **7**

1.1 Вспомогательные утверждения 7

1.2 Доказательство основного утверждения 12

2 Неоднородные короткие суммы Клоостермана с весами **21**

2.1 Вспомогательные утверждения 21

2.2 Доказательство основного утверждения 23

3 Сумма дробных долей с весами **30**

3.1 Вспомогательные утверждения 30

3.2 Доказательство основного утверждения 30

Список литературы **34**

Используемые обозначения

В работе используются следующие обозначения:

- $e_m(\nu) = e^{2\pi i \frac{\nu}{m}}$;
- p, $p_1, \ldots, q, q_1, \ldots$ – обозначают простые числа;
- $m_0, m_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots$ – абсолютные постоянные;
- $[x]$ – целая часть вещественного числа x;
- $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть вещественного числа x;
- $P^-(\nu)$, $P^+(\nu)$ – соответственно наименьший и наибольший простые делители числа ν;
- $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x;
- $\mu(\nu)$ – функция Мёбиуса,

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } \nu = p_1 p_2 \ldots p_k; \\ 0, & \text{если } p^2 | \nu \text{ для некоторого простого числа } p; \end{cases};$$

- $b(n)$ – характеристическая функция множества чисел, представимых суммою двух квадратов целых чисел; в частности, $b(\nu^2) = 1$, $b(\nu^{2k+1}) = b(\nu)$;
- $\tau_r(\nu)$ – многомерная функция делителей, т.е. количество решений уравнения $x_1 \ldots x_r = \nu$ в натуральных числах $x_1, \ldots, x_r$;
- $f(\nu)$ везде далее обозначает любую из функций $\tau_r(\nu)$, $\mu(\nu)$, $\mu^2(\nu)$, $b(n)$;
- α – параметр, зависящий от выбранной функции $f(\nu)$, $\alpha = r$ для $f(\nu) = \tau_r(\nu)$, $\alpha = \frac{1}{2}$ для $f(\nu) = b(\nu)$, $\alpha = 1$ в случае $f(\nu) = \mu^2(\nu)$ и $f(\nu) = \mu(\nu)$;
- β – параметр, зависящий от выбранной функции $f(\nu)$, $\beta = 1$ для $f(\nu) = b(\nu)$, $\beta = 0$ в остальных случаях;
- $F(x) = \sum_{\nu \leqslant x} |f(\nu)|$;
- Записи $f(x) = O(g(x))$ и $f(x) \ll g(x)$ (знак И.М. Виноградова) при $x \to \infty$ означают, что существует положительные числа C и x_0, такие, что $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ при $x \geqslant x_0$.

Введение

Настоящая работа относится к аналитической теории чисел. Одним из важнейших объектов в этой области являются тригонометрические суммы. В 1926 г. Х.Д. Клоостерман в работе [1] рассмотрел тригонометрические суммы вида

$$S(m;a,b) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu,m)=1}}^{m} e_m(a\overline{\nu} + b\nu),$$

где m, a, b – целые числа, $(a,m) = (\nu,m) = 1$. Через $\overline{\nu}$ обозначается вычет, обратный к ν по модулю m, $\nu\overline{\nu} \equiv 1 \pmod m$. Такие суммы впоследствии получили название сумм Клоостермана.

Особый интерес в исследовании представляет случай сумм по простому модулю, $m = p$ – простое. Первая нетривиальная оценка величины $S(m;a,b)$ при простом модуле была получена Х.Д. Клоостерманом [1]

$$|S(m;a,b)| \leqslant 3^{1/4}m^{3/4}.$$

В дальнейшем эта оценка была улучшена независимо Г.Салье [2] и Г.Дэвенпортом [3] до порядка $m^{2/3}$. В 1948 г. А. Вейлем [4] была получена неулучшаемая оценка

$$|S(m;a,b)| \leqslant 2\sqrt{m}.$$

Неполной суммой Клоостермана называется сумма вида

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x \\ (\nu,m)=1}} e_m(a\overline{\nu} + b\nu), \qquad 1 < x < m. \tag{1}$$

При $x \geqslant m^{1/2+\varepsilon}$ нетривиальная оценка таких сумм следует из классических результатов А.Вейля (см. [4], [5]). Для оценок “коротких” сумм, отвечающих условию $x \leqslant \sqrt{m}$, в начале 1990-х г.г. А. А. Карацубой был предложен принципиально новый метод (см. [7, 8, 9]), получивший дальнейшее развитие в работах Ж. Бургейна и М. З. Гараева [11], М.А. Королева (см. [12, 13, 14, 15]). Достаточно подробный обзор исследований по этой тематике содержится в статье [16].

Наряду с суммами (1) рассматриваются и так называемые неполные суммы Клоостермана с весами, т.е. суммы вида

$$S(x) = S(m,x;f,a,b) = \sum_{\substack{\nu\leqslant x \\ (\nu,m)=1}} f(\nu)e_m(a\overline{\nu} + b\nu), \tag{2}$$

где $f(\nu)$ – некоторая арифметическая функция. Как и для сумм (1), оценка сумм (2) при $x \geqslant m^{1/2+\varepsilon}$ может быть выведена из оценки А. Вейля (см. [4]). Случай короткой суммы ($x \leqslant \sqrt{m}$) был впервые рассмотрен в [13].

В данной работе, используя идеи и приемы работ [8, 9, 10, 11, 12, 13], уточняются оценки коротких сумм (2), полученные в [13]. В главе 1 рассматриваются "однородные" суммы (т.е. суммы, отвечающие условию $b \equiv 0 \pmod m$). Основным результатом является следующая

Теорема 1 *Пусть* $m \geqslant m_0$ *– достаточно большое простое число,* $(a, m) = 1$, *и пусть*

$$\exp\left(c_0 (\ln m)^{2/3} (\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\Bigg| \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu, m)=1}} f(\nu) e_m(a\overline{\nu}) \Bigg| \ll F(x)\Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\ln m}{(\ln x)^{3/2}} (\ln\ln m)^2 \right)^{\alpha} (\ln\ln m)^{\beta},$$

причем постоянная в знаке Виноградова – абсолютная.

В главе 2 рассматривается задача оценки неоднородных ($b \not\equiv 0 \pmod m$) коротких сумм с весами. Доказано, что имеет место

Теорема 2 *Пусть* $m \geqslant m_1$ *– достаточно большое простое число,* $(a, m) = 1$, *и пусть*

$$\exp\left(c_1 (\ln m)^{2/3} (\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда

$$\Bigg| \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ (\nu, m)=1}} f(\nu) e_m(a\overline{\nu} + b\nu) \Bigg| \ll F(x)\Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{3/4}} \ln\ln m \right)^{\alpha} (\ln\ln m)^{\beta},$$

причем постоянная в знаке Виноградова – абсолютная.

Замечание 1 *В статье [13] для суммы (2) получена оценка, понижающий множитель которой имеет вид*

$$\left(\frac{(\ln m)^{4/5}}{\ln x}(\ln\ln m)^{1/5}\right)^{5\alpha/22}\ln\ln m.$$

Несложно проверить, что неравенства теорем 1 и 2 являются более точными.

Замечание 2 *В частном случае $x = m^{\varepsilon}$, $f(\nu) = \tau_r(\nu)$, где $0 < \varepsilon \leqslant 0.5$, $r \geqslant 2$ – фиксированные числа, оценки теорем 1 и 2 принимают вид:*

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ (\nu,m)=1}} f(\nu)e_m(a\overline{\nu}) \ll_{\varepsilon} x(\ln x)^{r-1}\left(\frac{(\ln\ln m)^2}{\sqrt{\ln m}}\right)^r \ll_{\varepsilon} x(\ln x)^{\frac{r}{2}-1}(\ln\ln x)^{2r};$$

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ (\nu,m)=1}} f(\nu)e_m(a\overline{\nu}+b\nu) \ll_{\varepsilon} x(\ln x)^{r-1}\left(\frac{(\ln\ln m)^2}{\sqrt[4]{\ln m}}\right)^r \ll_{\varepsilon} x(\ln x)^{\frac{3}{4}r-1}(\ln\ln x)^{2r}.$$

Третья глава посвящена приложениям неполных сумм Клоостермана, а именно их применению при оценке суммы дробных долей. Используя теоремы 1 и 2 показано, что имеют место следующие утверждения.

Теорема 3 *Пусть $m \geqslant m_0$ – достаточно большое простое число, $(a, m) = 1$, и пусть*

$$\exp\left(c_0(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{\nu\leqslant x}\tau_r(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}\tau_r(\nu)\Big)(1+O(\Delta_1)),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}b(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}b(\nu)\Big)(1+O(\Delta_1)),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}\mu^2(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}\mu^2(\nu)\Big)(1+O(\Delta_1)),$$

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ \mu(\nu)=(-1)^k}}\left\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ \mu(\nu)=(-1)^k}}1\Big)(1+O(\Delta_1)),\quad k=0,1,$$

где

$$\Delta_1 = \left(\frac{\ln m}{(\ln x)^{3/2}}(\ln\ln m)^2\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{1+\beta}.$$

Теорема 4 *Пусть $m \geqslant m_0$ – достаточно большое простое число, $(a, m) = 1$, и пусть*

$$\exp\left(c_0(\ln m)^{2/3}(\ln\ln m)^{4/3}\right) \leqslant x \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{\nu\leqslant x}\tau_r(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}\tau_r(\nu)\Big)(1+O(\Delta_2)),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}b(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}b(\nu)\Big)(1+O(\Delta_2)),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}\mu^2(\nu)\left\{\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\nu\leqslant x}\mu^2(\nu)\Big)(1+O(\Delta_2)),$$

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ \mu(\nu)=(-1)^k}}\left\{\frac{a\overline{\nu}+b\nu}{m}\right\} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ \mu(\nu)=(-1)^k}}1\Big)(1+O(\Delta_2)), \quad k=0,1,$$

где

$$\Delta_2 = \left(\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{3/4}}\ln\ln m\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{1+\beta}.$$

Замечание 3 *Для сумм, указанных в правых частях равенств теорем 3 и 4, верны следующие асимптотические формулы:*

$$\sum_{\substack{\nu\leqslant x\\ \mu(\nu)=(-1)^k}}1 = \frac{6x}{\pi^2}+O(\sqrt{x}), \quad \sum_{\nu\leqslant x}\mu^2(\nu) = \frac{6x}{\pi^2}+O(\sqrt{x}),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}\tau_r(\nu) = \frac{x(\ln x)^{r-1}}{(r-1)!}+O(x(\ln x)^{k-2}),$$

$$\sum_{\nu\leqslant x}b(\nu) = Kx(\ln x)^{-1/2}+O(x(\ln x)^{-3/2}),$$

где

$$K = \left\{\frac{1}{2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\right\}^{1/2} = 0.764\ldots \quad -$$

константа Ландау-Рамануджана.

1 Однородные короткие суммы Клоостермана с весами

1.1 Вспомогательные утверждения

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1 *Пусть* $a_n, b_n \geqslant 0$, $n = 1, \ldots, N$, k *– целое,* $k \geqslant 2$. *Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Bigr)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \sum_{n=1}^{N} b_n^2, \qquad \Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\Bigr)^k \leqslant \Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n\Bigr)^{k-1} \Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n b_n^k\Bigr).$$

Лемма 1.2 *Пусть* $N < m$, *и пусть* $J_{2k}(N)$ *– число решений сравнения*

$$\overline{p}_1 + ... + \overline{p}_k \equiv \overline{p}_{k+1} + ... + \overline{p}_{2k} \pmod{m},$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_{2k}$ *с условием* $p_1, \ldots, p_{2k} \leqslant N$. *Тогда*

$$J_{2k}(N) < (2k)^k N^k \left(1 + \frac{N^{2k-1}}{m}\right).$$

Это есть теорема 6 из [11], из которой следует

Следствие 1.1 *Пусть* m *– простое число,* k *– целое,* $2 \leqslant k < X < X_1 \leqslant 2X$, *и пусть* $I_k(X)$ *– число решений сравнения*

$$\overline{p}_1 + ... + \overline{p}_k \equiv \overline{p}_{k+1} + ... + \overline{p}_{2k} \pmod{m},$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_{2k}$ *с условиями* $X < p_1, \ldots, p_{2k} \leqslant X_1$. *Тогда*

$$I_k(X) \leqslant (16k)^k X^k \left(1 + \frac{X^{2k-1}}{m}\right).$$

Лемма 1.3 *Пусть* m *– простое число,* $k, s \geqslant 2$ *– целые, и пусть* $k < P < P_1 \leqslant 2P$, $s < Q < Q_1 \leqslant 2Q$. *Пусть далее* $\xi(p)$ *и* $\eta(q)$ *– произвольные арифметические функции, определенные, соответственно, на множествах простых чисел из промежутков* $P < p \leqslant P_1$, $Q < q \leqslant Q_1$, *причем*

$$\max_{P<p\leqslant P_1} |\xi(p)| = \xi, \qquad \max_{Q<q\leqslant Q_1} |\eta(q)| = \eta,$$

$$\sum_{P<p\leqslant P_1} |\xi(p)| = \xi_0, \qquad \sum_{Q<q\leqslant Q_1} |\eta(q)| = \eta_0.$$

Тогда для суммы W_1,

$$W_1 = \sum_{P<p\leqslant P_1}\sum_{Q<q\leqslant Q_1}\xi(p)\eta(q)e_m(a\overline{pq}),$$

справедлива оценка $|W_1| \leqslant \xi_0\eta_0\Delta$, в которой

$$\Delta = (4\xi\sqrt{k})^{1/s}(4\eta\sqrt{s})^{1/k}\Big(\frac{P}{\xi_0}\Big)^{1/s}\Big(\frac{Q}{\eta_0}\Big)^{1/k}\left(\Big(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\Big)\Big(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\Big)\right)^{1/(2ks)}.$$

Доказательство

Будем следовать рассуждениям из [10]. Прежде всего, имеем

$$|W_1| = \Big|\sum_q \eta(q)\sum_p \xi(p)e_m(a\overline{pq})\Big| \leqslant \sum_q|\eta(q)|\Big|\sum_p\xi(p)e_m(a\overline{pq})\Big|,$$

где через $\sum_p$, $\sum_q$ обозначаются, соответственно, суммы по множествам простых из промежутков $P<p\leqslant P_1$, $Q<q\leqslant Q_1$. Возведя модуль суммы W_1 в степень k и применив второе неравенство леммы 1.1, получим:

$$|W_1|^k \leqslant \Big(\sum_q|\eta(q)|\Big)^{k-1}\sum_q|\eta(q)|\Big|\sum_p\xi(p)e_m(a\overline{pq})\Big|^k \leqslant \eta_0^{k-1}\eta\sum_q\Big|\sum_p\xi(p)e_m(a\overline{pq})\Big|^k =$$

$$= \eta_0^{k-1}\eta\sum_q\Big|\sum_{p_1,\ldots,p_k}\xi(p_1)\ldots\xi(p_k)e_m(a\overline{q}(\overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k))\Big| =$$

$$= \eta_0^{k-1}\eta\sum_q\Big|\sum_{\lambda=0}^{m-1}e_m(a\overline{q}\lambda)\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda \pmod m}}\xi(p_1)\ldots\xi(p_k)\Big|.$$

Полагая

$$A_k(\lambda) = \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda \pmod m}}\xi(p_1)\ldots\xi(p_k),$$

будем иметь:

$$|W_1|^k \leqslant \eta_0^{k-1}\eta\sum_q\Big|\sum_{\lambda=0}^{m-1}e_m(a\overline{q}\lambda)A_k(\lambda)\Big|.$$

Пусть $\theta(q)$ – аргумент внутренней суммы. Тогда

$$|W_1|^k \leqslant \eta_0^{k-1}\eta\sum_q e^{-i\theta(q)}\sum_{\lambda=0}^{m-1}A_k(\lambda)e_m(a\overline{q}\lambda) = \eta_0^{k-1}\eta\sum_{\lambda=0}^{m-1}A_k(\lambda)\sum_q e^{-i\theta(q)}e_m(a\overline{q}\lambda)$$

и, следовательно,

$$|W_1|^k \leqslant \eta_0^{k-1}\eta\sum_{\lambda=0}^{m-1}|A_k(\lambda)|\Big|\sum_q e^{-i\theta(q)}e_m(a\overline{q}\lambda)\Big|.$$

Возведем полученное неравенство в степень s и вновь применим лемму 1.1; получим:

$$|W_1|^{ks} \leqslant \eta_0^{s(k-1)}\eta^s\Big(\sum_{\lambda=0}^{m-1}|A_k(\lambda)|\Big)^{s-1}\sum_{\lambda=0}^{m-1}|A_k(\lambda)|\Big|\sum_q e^{-i\theta(q)}e_m(a\overline{q}\lambda)\Big|^s.$$

Оценим первую сумму:

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1}|A_k(\lambda)| \leqslant \sum_{\lambda=0}^{m-1}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda \pmod m}}|\xi(p_1)|\ldots|\xi(p_k)| =$$

$$= \sum_{p_1,\ldots,p_k}|\xi(p_1)|\ldots|\xi(p_k)| = \Big(\sum_p|\xi(p)|\Big)^k = \xi_0^k.$$

Таким образом,

$$|W_1|^{ks} \leqslant \eta_0^{s(k-1)}\eta^s\xi_0^{k(s-1)}\sum_{\lambda=0}^{m-1}|A_k(\lambda)|\Big|\sum_q e^{-i\theta(q)}e_m(a\overline{q}\lambda)\Big|^s.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и используя лемму 1.1, находим:

$$|W_1|^{2ks} \leqslant \eta_0^{2s(k-1)}\eta^{2s}\xi_0^{2k(s-1)}BC,$$

где

$$B = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\Big|A_k(\lambda)\Big|^2, \qquad C = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\Big|\sum_q e^{-i\theta(q)}e_m(a\overline{q}\lambda)\Big|^{2s}.$$

Оценивая сумму B, будем иметь:

$$B = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\Big|A_k(\lambda)\Big|^2 = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\Big|\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_k\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda \pmod m}}\xi(p_1)\ldots\xi(p_k)\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda=0}^{m-1}\sum_{\substack{p_1,\ldots p_{2k}\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda\equiv\overline{p}_{k+1}+\ldots+\overline{p}_{2k} \pmod m}}|\xi(p_1)|\ldots|\xi(p_{2k})| \leqslant$$

$$\leqslant \xi^{2k}\sum_{\lambda=0}^{m-1}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_{2k}\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\lambda\equiv\overline{p}_{k+1}+\ldots+\overline{p}_{2k} \pmod m}}1 = \xi^{2k}\sum_{\substack{p_1,\ldots,p_{2k}\\ \overline{p}_1+\ldots+\overline{p}_k\equiv\overline{p}_{k+1}+\ldots+\overline{p}_{2k} \pmod m}}1 = \xi^{2k}I_k(P).$$

Оценивая сумму C, будем иметь:

$$C = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\sum_{Q<q_1,\ldots,q_{2s}\leqslant Q_1}e^{-i(\theta(q_1)+\ldots-\theta(q_{2s}))}e_m(a\lambda(\overline{q}_1+\ldots-\overline{q}_{2s})) =$$

$$= \sum_{Q<q_1,\dots,q_{2s}\leqslant Q_1} e^{-i(\theta(q_1)+\dots-\theta(q_{2s}))} \sum_{\lambda=0}^{m-1} e_m(a\lambda(\overline{q}_1+\dots-\overline{q}_{2s})),$$

$$|C| \leqslant \sum_{\substack{Q<q_1,\dots,q_{2s}\leqslant Q_1\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\overline{q}_{s+1}+\dots+\overline{q}_{2s} \pmod m}} m = mI_s(Q)$$

Таким образом, имеет место неравенство:

$$|W_1|^{2ks} \leqslant \eta_0^{2s(k-1)}\eta^{2s}\xi_0^{2k(s-1)}\xi^{2k} m I_k(P) I_s(Q).$$

Воспользовавшись леммой 1.2, будем иметь:

$$|W_1|^{2ks} \leqslant (\eta_0\xi_0)^{2ks}(\eta_0^{-1}\eta)^{2s}(\xi_0^{-1}\xi)^{2k} m (16k)^k (16s)^s P^k Q^s \left(1+\frac{P^{2k-1}}{m}\right)\left(1+\frac{Q^{2s-1}}{m}\right) =$$

$$= (\eta_0\xi_0)^{2ks}(4\eta_0^{-1}\eta\sqrt{s})^{2s}(4\xi_0^{-1}\xi\sqrt{k})^{2k} P^{2k}Q^{2s}\left(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\right).$$

Следовательно,

$$|W_1| \leqslant \xi_0\eta_0\Delta,$$

где

$$\Delta = (4\xi\sqrt{k})^{1/s}(4\eta\sqrt{s})^{1/k}\left(\frac{P}{\xi_0}\right)^{1/s}\left(\frac{Q}{\eta_0}\right)^{1/k}\left(\left(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\right)\right)^{1/(2ks)}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1.2 *В случае $\xi(\nu)=\eta(\nu)=f(\nu)$ для суммы W_1 справедлива оценка $|W_1| \ll PQ\Delta_1$, где*

$$\Delta_1 = 4k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}\left(\left(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\right)\right)^{1/(2ks)}.$$

Доказательство

Перепишем оценку леммы 1.3 в виде

$$|W_1| \leqslant \xi_0^{1-1/s}(\xi P)^{1/s}\eta_0^{1-1/k}(\eta Q)^{1/k}(4\sqrt{s})^{1/k}(4\sqrt{k})^{1/s}\left(\left(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\right)\right)^{1/(2ks)}.$$

Рассмотрим случай $\xi(\nu)=\eta(\nu)=\tau_r(\nu)$. Пусть постоянная x_0 выбрана так, что при всех $x\geqslant x_0$ выполнено неравенство:

$$\pi_1(x) = \pi(2x)-\pi(x) \leqslant \frac{2x}{\ln x}.$$

Тогда, замечая, что $\xi = \eta = r$,

$$\xi_0 = r\Big(\pi(P_1) - \pi(P)\Big) \leqslant r\pi_1(P), \quad \eta_0 \leqslant r\pi_1(Q),$$

при $P, Q \geqslant \max(x_0, e^{2r^2})$ будем иметь:

$$\xi_0(\xi_0^{-1}\xi)^{1/s} = \xi_0^{1-1/s}\xi^{1/s} \leqslant \big(r\pi_1(P)\big)^{1-1/s} r^{1/s} = r\big(\pi_1(P)\big)^{1-1/s} \leqslant$$

$$\leqslant r\Big(\frac{2P}{\ln P}\Big)^{1-1/s} = r\Big(\frac{2}{\ln P}\Big)^{1-1/s} P^{1-1/s} \leqslant r\sqrt{\frac{2}{\ln P}}P^{1-1/s} \leqslant P^{1-1/s},$$

Аналогично $\eta_0(\eta_0^{-1}\eta)^{1/k} \leqslant Q^{1-1/k}$. Поэтому итоговая оценка для W_1 выглядит следующим образом:

$$|W_1| \leqslant PQ \cdot 4^{1/s+1/k} k^{1/(2s)} s^{1/(2k)} \left(\Big(\frac{\sqrt{m}}{P^k} + \frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\Big)\Big(\frac{\sqrt{m}}{Q^s} + \frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\Big)\right)^{1/(2ks)} \leqslant$$

$$\leqslant PQ \cdot 4k^{1/(2s)} s^{1/(2k)} \left(\Big(\frac{\sqrt{m}}{P^k} + \frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\Big)\Big(\frac{\sqrt{m}}{Q^s} + \frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\Big)\right)^{1/(2ks)}.$$

В оставшихся случаях справедливость искомого равенства устанавливается аналогично.

Также нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1.4 *Пусть $H_0 < H \leqslant \sqrt[3]{x}$; обозначим за $F(x; H)$ следующую сумму:*

$$F(x; H) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ \nu = c^2 u,\, c > H}} f(\nu).$$

Тогда $F(x; H) \ll F(x) H^{-1/2}$.

Это есть лемма 1 из [13].

Лемма 1.5 *Пусть $x > x_0$, обозначим за $N(x)$ сумму:*

$$N(x) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ P^+(\nu) \leqslant R}} f(\nu), \quad \text{где} \quad R = \exp\Big(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\Big).$$

Тогда для $N(x)$ верна следующая оценка:

$$N(x) \ll F(x) \exp\Big(-\frac{1}{5}(\ln\ln x)\ln\ln\ln x\Big).$$

Это есть лемма 2 из [13].

Лемма 1.6 *Пусть $y_0 < y < x$, $G(x,y)$ – сумма значений $f(\nu)$ по бесквадратным ν, $\nu \leqslant x$, все простые делители которых больше y, т.е.*

$$G(x,y) = \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ P^-(\nu) > y}} \mu^2(\nu) f(\nu).$$

Тогда справедливо неравенство:

$$G(x,y) \ll \frac{x}{\ln y} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^{\alpha - 1}.$$

Доказательство

В случае $f(n) = \mu^2(n)$ и $f(\nu) = \mu(n)$ искомое неравенство следует из классической оценки для числа целых $n \leqslant x$ с условием $P^-(n) > y$ (см., например, теорема 2 из §4.2, гл. I [6]); в случае $f(n) = \tau_r(n)$ утверждение следует из леммы 6.1 работы [17]. Наконец, в случае $f(n) = b(n)$ искомое неравенство было получено недавно В.В. Юделевичем и помещается здесь с его любезного согласия; статья с подробным доказательством в настоящее время готовится к публикации.

1.2 Доказательство основного утверждения

Оценка суммы $S(x)$ проводится следующим образом. Слагаемые, отвечающие числам ν, $1 \leqslant \nu \leqslant x$, которые не имеют простых делителей из специальных промежутков, оцениваются тривиально. Все оставшиеся слагаемые можно сгруппировать в суммы, к которым применима оценка из следствия леммы 1.3.

ШАГ 1. Положим $H = \exp(2\sqrt{\ln x})$. Пусть S_1 – часть суммы $S(x)$ по тем ν, которые имеют вид $\nu = c^2 d$, где $c > H$. Согласно лемме 1.4, $S_1 \ll F(x) e^{-\sqrt{\ln x}}$. Заметим, что все оставшиеся ν будут иметь вид $\nu = c^2 d$, где $c \leqslant H$, d – бесквадратное число, $\mu(d) \neq 0$.

Прежде чем перейти к шагу 2, введем следующие параметры. Пусть $R = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln \ln x}\right)$ и определим целое l из условия: $m^{1/(2l)} \leqslant R < m^{1/(2l-2)}$. Пусть n удовлетворяет условию $3l \leqslant n \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\ln m}$ (точное значение n выберем позднее), $\delta = 1/(4n)$.

Для целого k, $l \leqslant k \leqslant n$, положим

$$X_k = m^{(1-\delta)/(2k)}, \qquad Y_k = m^{(1+\delta)/(2k)}.$$

Заметим, что для всех рассматриваемых k будет выполняться $X_{k-1} > 2Y_k$. В самом деле

$$\frac{X_{k-1}}{Y_k} = m^{(1-\delta)/(2k-2)-(1+\delta)/(2k)} = m^{\frac{1-(2k-1)\delta}{2k(k-1)}} > m^{(1-2k\delta)/(2k^2)} \geqslant$$

$$\geqslant m^{(1-2n\delta)/(2n^2)} = m^{1/(4n^2)},$$

и достаточно проверить, что $2^{4n^2} < m$. Но так как $n \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\ln m}$, то $2^{4n^2} \leqslant 2^{\ln m/4} < m^{7/40} < m$.

ШАГ 2. Отнесем к сумме S_2 те оставшиеся слагаемые $S(x)$, отвечающие числам ν, все простые делители которых не превосходят $m^{1/(2l)}$. В силу выбора l и согласно лемме 1.5 для S_2 верна оценка $S_2 \ll F(x)\exp(-\frac{1}{5}(\ln\ln x)\cdot\ln\ln\ln x)$. Заметим, что все оставшиеся ν будут иметь хотя бы один простой делитель q, такой что $m^{1/(2s)} < q \leqslant m^{1/(2s-2)}$, где $s \leqslant l$. Обозначим за J множество всех простых чисел из объединения промежутков $m^{1/(2s)} < q \leqslant m^{1/(2s-2)}$, где $s \leqslant l$.

ШАГ 3. Обозначим за I множество простых чисел из объединения промежутков $(Y_k, X_{k-1}]$, $l < k \leqslant n$. Отнесем к сумме S_3 те оставшиеся слагаемые $S(x)$, что отвечают числам ν, не имеющим простых делителей из I. Пусть $M = m^{1/(2l)}$, $Y = Y_n$, $X = X_l$; обозначим за K множество простых чисел из объединения промежутков $(1;Y]$, $(X_k;Y_k]$, где $l < k < n$, $(X, M]$. Замечая, что $Y > H$, можно заключить, что ν будет иметь вид $\nu = c^2uv$, где $1 \leqslant c \leqslant H$, $\mu(uv) \neq 0$, причем все простые делители v принадлежат J, а $u = 1$ либо все простые делители u принадлежат K.

Оценим S_3 для каждой из функций $f(\nu)$ в отдельности.

1) Случай $f(\nu) = \mu(n)$ или $f(\nu) = \mu^2(\nu)$. Так как $f(\nu) \neq 0$ лишь при $c = 1$, то

$$|S_3| \leqslant \sum_{c^2uv\leqslant x} \mu^2(c^2uv) \leqslant \sum_{u\leqslant x/M} \mu^2(u) \sum_{v\leqslant x/u} \mu^2(v) = \sum_{u\leqslant x/M} \sum_{M\leqslant v\leqslant x/u} 1 = \sum_{u\leqslant x/M} G\left(\frac{x}{u}; M\right),$$

где u и v пробегают указанные выше множества.

Таким образом, пользуясь леммой 1.6, получаем

$$|S_3| \ll \sum_{u\leqslant x/M} \frac{x}{u}\frac{1}{\ln M} \ll \frac{x}{\ln M}\sum_{u\leqslant x}\frac{1}{u} \ll \frac{x}{\ln M}\prod_{p\in K}\left(1+\frac{1}{p}\right) \ll \frac{xe^{\sigma_1}}{\ln M},$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{p\in K}\frac{1}{p} = \sum_{p\leqslant Y}\frac{1}{p} + \sum_{l<k<n}\sum_{p\in(X_k,Y_k]}\frac{1}{p} + \sum_{X<p\leqslant M}\frac{1}{p}.$$

Поскольку

$$\sum_{X_k<p\leqslant Y_k}\frac{1}{p} = \ln\ln Y_k - \ln\ln X_k + O\left(\frac{1}{\ln X_k}\right) = \ln\ln m^{\frac{1+\delta}{2k}} - \ln\ln m^{\frac{1-\delta}{2k}} + O\left(\frac{k}{\ln m}\right) =$$

$$= \ln(1+\delta) - \ln(1-\delta) + O\left(\frac{k}{\ln m}\right) = 2\delta + O(\delta^3) + O\left(\frac{k}{\ln m}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{k}{\ln m}\right),$$

то
$$\sum_{k=l+1}^{n-1}\Big(\sum_{X_k<p\leqslant Y_k}\frac{1}{p}\Big)=\frac{n-l-1}{2n}+O\Big(\frac{1}{l^2}\Big)+O\Big(\frac{n^2}{\ln m}\Big)=O(1).$$
Следовательно,
$$\sigma_1=\Big(\ln\ln Y+\ln\ln M-\ln\ln X\Big)+O(1).$$
Окончательно находим:
$$|S_3|\ll\frac{x}{\ln M}\frac{\ln Y}{\ln X}\ln M\ll x\frac{\ln Y}{\ln X}\ll x\frac{(\ln m)/n}{(\ln m)/l}\ll x\frac{l}{n}\ll F(x)\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}.$$

2) Случай $f(\nu)=\tau_r(\nu)$. Замечая, что $\tau_r(gh)\leqslant\tau_r(g)\tau_r(h)$ для любых g и h, находим:
$$|S_3|\leqslant\sum_{c^2uv\leqslant x}\tau_r(c^2)\tau_r(u)\tau_r(v)\leqslant\sum_{c\leqslant H}\tau_r(c^2)\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}}\tau_r(u)\sum_{M\leqslant v\leqslant x(c^2u)^{-1}}\tau_r(v)=$$
$$=\sum_{c\leqslant H}\tau_r(c^2)\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}}\tau_r(u)G\Big(\frac{x}{c^2u};M\Big).$$
Пользуясь леммой 1.6, находим
$$|S_3|\ll\sum_{c\leqslant H}\tau_r(c^2)\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}}\tau_r(u)\frac{x}{c^2u}\frac{1}{(\ln M)^r}\Big(\ln\frac{x}{c^2u}\Big)^{r-1}\ll$$
$$\ll\frac{x(\ln x)^{r-1}}{(\ln M)^r}\sum_{c\leqslant H}\frac{\tau_r(c^2)}{c^2}\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}}\frac{\tau_r(u)}{u}\ll\frac{x(\ln x)^{r-1}}{(\ln M)^r}\sum_{c=1}^{+\infty}\frac{\tau_r(c^2)}{c^2}\sum_{u\leqslant x}\frac{\tau_r(u)}{u}\ll$$
$$\ll\frac{x(\ln x)^{r-1}}{(\ln M)^r}\prod_{p\in K}\Big(1+\frac{r}{p}\Big)\ll\frac{x(\ln x)^{r-1}}{(\ln M)^r}e^{\sigma_2},$$
где
$$\sigma_2=r\sum_{p\in K}\frac{1}{p}=r(\ln\ln Y+\ln\ln M-\ln\ln X)+O(1).$$
Таким образом,
$$|S_3|\ll\frac{x(\ln x)^{r-1}}{(\ln M)^r}\Big(\frac{\ln Y}{\ln X}\Big)^r(\ln M)^r\ll x(\ln x)^{r-1}\Big(\frac{l}{n}\Big)^r\ll F(x)\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}.$$
3) Случай $f(\nu)=b(\nu)$. Так как все простые делители v лежат в J, то $(v,c^2u)=1$ и $b(c^2uv)=b(c^2u)b(v)$. Покажем, что $b(c^2u)=b(c^2)b(u)=b(u)$. Если $(c,u)=1$, то это очевидно. Пусть теперь $(c,u)>1$. Так как u – бесквадратное число, то $(c,u)=q_1\dots q_k$, где q_i –различные простые числа. Тогда $c=q_1^{\alpha_1}\dots q_k^{\alpha_k}c_1$ и $u=q_1\dots q_ku_1$, где $(c_1,u_1)=1$. Имеем:
$$b(c^2u)=b(q_1^{2\alpha_1+1}\dots q_k^{2\alpha_k+1})b(c_1^2)b(u_1)=b(q_1\dots q_k)b(u_1)=b(u).$$

Таким образом,

$$|S_3| \leqslant \sum_{c\leqslant H}\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}} b(u) \sum_{M\leqslant v\leqslant (c^2u)^{-1}} b(v) \leqslant \sum_{c\leqslant H}\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}} b(u) G\Big(\frac{x}{c^2u};M\Big).$$

Пользуясь леммой 1.6, находим

$$|S_3| \ll \sum_{c\leqslant H}\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}} b(u)\frac{x}{c^2u}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{x}{c^2u}}}\frac{1}{\sqrt{\ln M}} \ll$$

$$\ll \frac{x}{\ln M}\sum_{c\leqslant H}\frac{1}{c^2}\sum_{u\leqslant x(c^2M)^{-1}}\frac{b(u)}{u} \ll \frac{x}{\ln M}\sum_{u\leqslant x}\frac{b(u)}{u}.$$

Так как u – бесквадратное, то $b(u) = 1$ тогда и только тогда, когда все простые делители u сравнимы с 1 по модулю 4. Следовательно,

$$\sum_{u\leqslant x}\frac{b(u)}{u} \leqslant \prod_{\substack{p\in K\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\Big(1+\frac{1}{p}\Big) \leqslant e^{\sigma_3},$$

где

$$\sigma_3 = \sum_{\substack{p\in K\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p} = \sum_{\substack{p\leqslant Y\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p} + \sum_{l<k<n}\sum_{\substack{p\in(X_k,Y_k]\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p} + \sum_{\substack{X<p\leqslant M\\ p\equiv 1 \pmod 4}}\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln\ln Y + \ln\ln M - \ln\ln X) + O(1).$$

Таким образом,

$$|S_3| \ll \frac{x}{\ln M}\sqrt{\frac{\ln Y}{\ln X}}\sqrt{\ln M} \ll \frac{x}{\sqrt{\ln M}}\sqrt{\frac{\ln Y}{\ln X}} \ll \frac{x}{\sqrt{\ln x}}\sqrt{\ln\ln x}\sqrt{\frac{l}{n}} \ll$$

$$\ll F(x)\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta}.$$

Следовательно, для всех рассматриваемых функции $f(\nu)$ верна оценка:

$$|S_3| \ll F(x)\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta}.$$

Оставшиеся слагаемые отнесем к сумме S_4. Все числа ν, им отвечающие, имеют хотя бы один простой делитель p из I и хотя бы один простой делитель q из J. Таким образом, все такие ν имеют вид $\nu = c^2uvw$, где $1 \leqslant c \leqslant H$, $\mu(uvw) \neq 0$, все простые делители u принадлежат множеству I, все простые делители v принадлежат множеству J, а w напротив, не имеет простых делителей из I и J.

Сгруппируем вместе те слагаемые S_4, для которых u и v состоят из μ и λ сомножителей соответственно:

$$S_4 = \sum_{\mu\geqslant 1}\sum_{\lambda\geqslant 1} S_4(\mu,\lambda).$$

Положим $\Phi(n) = e_m(a\overline{n})$. Тогда, замечая, что $f(c^2uvw) = f(c^2w)f(u)f(v)$, найдем:

$$|S_4(\mu,\lambda)| = \Big|\sum_{c^2uvw\leqslant x} f(c^2uvw)\Phi(c^2uvw)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{c\leqslant H} f(c^2)\sum_{w} f(w)\Big|\sum_{uv\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u)f(v)\Phi(c^2uvw)\Big|,$$

где w пробегает возрастающую последовательность чисел, не имеющих простых делителей из I и J, $w\leqslant x(c^2Y^{\mu}M^{\lambda})^{-1}$. Пусть c и w фиксированы. Сравним внутреннюю сумму $S_4(\mu,\lambda;w)$ по u и v со следующей суммой:

$$S'(\mu,\lambda;w) = \frac{1}{\mu\lambda}\sum_{u_1,v_1}\sum_{p,q} f(u_1)f(p)f(v_1)f(q)\Phi(c^2u_1pv_1qw),$$

где u_1, v_1 независимо пробегают возрастающие последовательности чисел, которые являются произведениями $(\mu-1)$ и $(\lambda-1)$ различных простых сомножителей из I и J соответственно, а p и q принимают значения простых из I и J, причем выполнено условие $u_1v_1pq\leqslant x(c^2w)^{-1}$. Числа u и v, отвечающие слагаемым из $S_4(\mu,\lambda;w)$, представляются в виде $u = u_1p$ и $v = v_1q$, где $(u_1,p) = 1$ и $(v_1,q) = 1$, соответственно μ и λ способами. Следовательно, любое слагаемое этой суммы встретится в $S'(\mu,\lambda;w)$ с коэффициентом 1. Кроме того, в $S'(\mu,\lambda;w)$ встретятся слагаемые, для которых нарушено хотя бы одно из условий $(u_1,p)=1$, $(v_1,q) = 1$. Обозначая их вклад через $S''(\mu,\lambda;w)$ и полагая $u_1 = u_2p$, $v_1 = v_2q$, получим:

$$|S''(\mu,\lambda;w)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu\lambda}\Big(\sum_{p^2qu_2v_1\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(pu_2)f(p)f(v_1)f(q) + \sum_{pq^2u_1v_2\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u_1)f(p)f(v_2q)f(q)+$$

$$+\sum_{p^2q^2u_2v_2\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u_2p)f(p)f(v_2q)f(q)\Big) = \frac{1}{\mu\lambda}\Big(S_1''+S_2''+S_3''\Big).$$

Оценим сумму S_1''. Так как pu_2 – бесквадратное, то

$$S_1'' = \sum_{p^2qu_2v_1\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(pu_2)f(p)f(v_1)f(q) = \sum_{p^2qu_2v_1\leqslant x(c^2w)^{-1}} f^2(p)f(v_1u_2q).$$

Обозначим за $d = v_1u_2q$. Число представлений заданного d в виде такого произведения не превосходит λ. Имеет место следующее неравенство:

$$S_1'' \leqslant \lambda \sum_{p\in I} f^2(p) \sum_{p^2d\leqslant x(c^2w)^{-1}} f(d) \ll \ln x \sum_{p\in I} f^2(p) F\Big(\frac{x}{p^2c^2w}\Big).$$

Так как $F(\frac{x}{t}) \ll \frac{F(x)}{t}\ln x$, при $1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}x$, то получаем следующую оценку:

$$S_1'' \ll \frac{F(x)}{c^2w}(\ln x)^2 \sum_{p\in I} \frac{f^2(p)}{p^2} \ll \frac{F(x)}{c^2w}(\ln x)^2 \sum_{p\geqslant Y} \frac{1}{p^2} \ll \frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{Y}.$$

Аналогичные оценки верны и для сумм S_2'', S_3''. Таким образом,

$$|S''(\mu,\lambda;w)| \ll \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{Y},$$

$$|S_4(\mu,\lambda;w)| \ll |S'(\mu,\lambda;w)| + |S''(\mu,\lambda;w)| \ll |S'(\mu,\lambda;w)| + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{Y},$$

где

$$S'(\mu,\lambda;w) = \frac{1}{\mu\lambda}\sum_{u_1}\sum_{v_1} f(u_1)f(v_1)\widetilde{S},$$

и для фиксированных $\mu, \lambda, w, u_1, v_1$

$$\widetilde{S} = \sum_{pq\leqslant Z} f(p)f(q)\Phi(c^2u_1v_1wpq), \quad Z = \Big[\frac{x}{c^2u_1v_1w}\Big].$$

Представим $\widetilde{S}$ в виде

$$\widetilde{S} = \sum_{pq\leqslant Z} f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}),$$

где $a_1 \equiv a(\overline{c^2u_1v_1}) \pmod m$. Далее разобьем области изменения p и q на промежутки вида $P < p \leqslant P_1 \leqslant 2P$, $Q < q \leqslant Q_1 \leqslant 2Q$, причем выберем величины P, P_1, Q, Q_1 так, чтобы всякий промежуток $(P,P_1]$ содержался целиком в некотором промежутке $(Y_k, X_{k-1}]$, $l < k \leqslant n$, а всякий промежуток $(Q,Q_1]$ содержался целиком в некотором промежутке $(m^{1/(2s)}, m^{1/(2s-2)}]$, $s \leqslant l$. Таким образом $\widetilde{S}$ разбивается на $\leqslant (\ln m)^2$ сумм вида:

$$S(P,Q) = \sum_{P<p\leqslant P_1}\sum_{\substack{Q<q\leqslant Q_1\\ pq\leqslant Z}} f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}).$$

Рассмотрим одну из таких сумм. Избавимся от ограничения $pq \leqslant Z$. Так как $p \leqslant Z/Q$, то $P < p \leqslant P_2$, где $P_2 = \min(P_1, Z/Q)$. Следовательно, $Q < q \leqslant Q_2$, где

$Q_2 = \min(Q_1, Z/p)$. Преобразуем сумму так, чтобы верхняя граница q не зависела от p:

$$S(P,Q) = \sum_{P<p\leqslant P_2}\sum_{Q<q\leqslant Q_1}\left(\frac{1}{m}\sum_{|d|<m/2}\sum_{Q<\xi\leqslant Q_2} e_m\Big(d(q-\xi)\Big)\right) f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}) =$$

$$= \sum_{|d|<m/2}\frac{1}{|d|+1}\sum_{P<p\leqslant P_2}\frac{|d|+1}{m}\Big(\sum_{Q<\xi\leqslant Q_2} e_m(-d\xi)\Big)\sum_{Q<q\leqslant Q_1} e_m(dq)f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}) =$$

$$= \sum_{|d|<m/2}\frac{T(d)}{|d|+1},$$

где

$$T(d) = \sum_{P<p\leqslant P_2}\sum_{Q<q\leqslant Q_1}\alpha(p)\beta(q)e_m(a_1\overline{pq}),$$

$$\alpha(p) = \frac{|d|+1}{m}\Big(\sum_{Q<\xi\leqslant Q_2} e_m(-d\xi)\Big)f(p), \qquad \beta(q) = e_m(dq)f(q).$$

Так как $|\alpha(p)| \leqslant |f(p)|$, $|\beta(q)| \leqslant |f(q)|$, то согласно следствию из леммы 1.3, $|T(d)| \ll PQ\Delta_1$, где

$$\Delta_1 = k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}\Big(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\Big)^{1/(2ks)}\Big(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\Big)^{1/(2ks)}.$$

Из условий на P, Q следует, что

$$\frac{\sqrt{m}}{P^k} \leqslant \frac{\sqrt{m}}{m^{\frac{1+\delta}{2}}} = m^{-\delta/2}, \quad \frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}} \leqslant \frac{m^{(1-\delta)/2}}{\sqrt{m}} \leqslant m^{-\delta/2}, \quad \frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}} \leqslant 2.$$

Таким образом,

$$\Delta_1 \ll k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}m^{-\delta/(4ks)} \ll l^{1/(2k)}n^{1/(2s)}m^{-1/(16ln^2)} \ll l^{1/(2l)}n^{1/2}m^{-1/(16ln^2)} \ll$$

$$\ll \sqrt{n}m^{-1/(16ln^2)} \ll (\ln m)^{1/4}m^{-1/(16ln^2)} = \Delta_2(\ln m)^{1/4}.$$

Таким образом, $T(d) \ll PQ\Delta_2(\ln m)^{1/4}$, откуда:

$$S(P,Q) \ll PQ\Delta_2(\ln m)^{5/4} \ll Z\Delta_2(\ln m)^{5/4}, \qquad \widetilde{S} \ll Z\Delta_2(\ln m)^{13/4}.$$

Перейдем к оценке суммы S_4. Последовательно получаем:

$$S_4(\mu,\lambda;w) \ll \frac{1}{\mu\lambda}\sum_{u_1}\sum_{v_1} f(u_1)f(v_1)\frac{x\Delta_2(\ln m)^{13/4}}{c^2u_1v_1w} + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{Y} \ll$$

$$\ll \frac{x\Delta_2}{\mu\lambda}\frac{(\ln m)^{13/4}}{c^2w}\sum_{u_1}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1}\frac{f(v_1)}{v_1} + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{Y}.$$

Далее,

$$S_4(\mu,\lambda) \ll \frac{x\Delta_2(\ln m)^{13/4}}{\mu\lambda}\sum_{c\leqslant H}\frac{f(c^2)}{c^2}\sum_{w}\frac{f(w)}{w}\sum_{u_1}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1}\frac{f(v_1)}{v_1}+$$

$$+\frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)(\ln x)^2}{Y}\sum_{c\leqslant H}\frac{1}{c^2}\sum_{w}\frac{1}{w}.$$

Таким образом

$$S_4 \ll \sum_{\mu,\lambda\geqslant 1}|S(\mu,\lambda)| \ll x\Delta_2(\ln m)^{13/4}\sum_{\mu\geqslant 1}\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{1}{\mu\lambda}\sum_{c\leqslant H}\frac{f(c^2)}{c^2}\sum_{w\leqslant x}\frac{f(w)}{w}\sum_{u_1\leqslant x}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1\leqslant x}\frac{f(v_1)}{v_1}+$$

$$+\frac{F(x)(\ln x)^2}{Y}\sum_{\mu\geqslant 1}\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{1}{\mu\lambda}\sum_{c\leqslant H}\frac{1}{c^2}\sum_{w\leqslant x}\frac{1}{w} \ll x\Delta_2(\ln m)^{13/4}D+\frac{F(x)}{H}(\ln x)^5,$$

где

$$D=\sum_{\mu\geqslant 1}\sum_{\lambda\geqslant 1}\frac{1}{\mu\lambda}\sum_{c\leqslant H}\frac{f(c^2)}{c^2}\sum_{w\leqslant x}\frac{f(w)}{w}\sum_{u_1\leqslant x}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1\leqslant x}\frac{f(v_1)}{v_1}.$$

Оценивая сумму D, будем иметь:

$$D \ll \Big(\sum_{c=1}^{+\infty}\frac{f(c^2)}{c^2}\Big)\Big(\sum_{w\leqslant x}\frac{f(w)}{w}\Big)\Big(\sum_{\mu\geqslant 1}\sum_{u_1}\frac{f(u_1)}{u_1}\Big)\Big(\sum_{\lambda\geqslant 1}\sum_{v_1}\frac{f(v_1)}{v_1}\Big) \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{w\leqslant x}\frac{f(w)}{w}\Big)\sum_{u}\frac{f(u)}{u}\sum_{v}\frac{f(v)}{v},$$

где u и v пробегают возрастающие последовательности бесквадратных чисел, все простые делители которых принадлежат множествам I и J соответственно, а w пробегает бесквадратные числа, не имеющие простых делителей из I и J. Далее находим:

$$D \ll \prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\notin I, p\notin J}}\Big(1+\frac{f(p)}{p}\Big)\prod_{p\in I}\Big(1+\frac{f(p)}{p}\Big)\prod_{p\in J}\Big(1+\frac{f(p)}{p}\Big) \ll \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{f(p)}{p}\Big) \ll (\ln x)^{\alpha}$$

Таким образом

$$S_4 \ll x\Delta_2(\ln m)^{13/4}(\ln x)^{\alpha}+\frac{F(x)}{H}(\ln x)^5 \ll F(x)\Delta_2(\ln m)^{17/4}+\frac{F(x)}{\sqrt{H}},$$

откуда

$$S \ll F(x)\exp\Big(-\frac{1}{5}(\ln\ln x)\ln\ln\ln x\Big)+F(x)\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}(\ln\ln x)^{\beta}+\frac{F(x)}{\sqrt{H}}+F(x)\Delta_2(\ln m)^{17/4} \ll$$

$$\ll F(x)\left(\Big(\frac{l}{n}\Big)^{\alpha}(\ln\ln x)^{\beta}+(\ln m)^{17/4}m^{-1/(16ln^2)}\right).$$

Выберем теперь n так, чтобы выполнялось неравенство

$$m^{1/(16ln^2)} \geqslant (\ln m)^C, \tag{3}$$

где $C \geqslant \alpha + 5$ – постоянная. Замечая, что

$$\frac{1}{2}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln x \leqslant l < \frac{1}{2}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln x + 1 < \frac{3}{4}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln m$$

находим:

$$\frac{1}{16ln^2} > \frac{1}{16n^2}\cdot\frac{4\ln x}{3\ln m}\cdot\frac{1}{\ln\ln m} \geqslant \frac{1}{12n^2}\cdot\frac{\ln x}{(\ln m)(\ln\ln m)}, \quad m^{1/(16ln^2)} > \exp\left(\frac{1}{12n^2}\cdot\frac{\ln x}{\ln\ln m}\right),$$

Следовательно, условие (3) будет выполнено, если выбрать n так, чтобы

$$\frac{1}{12n^2}\cdot\frac{\ln x}{\ln\ln m} \geqslant C\ln\ln m, \quad \text{т.е.} \quad n^2 \leqslant \frac{1}{12C}\frac{\ln x}{(\ln\ln m)^2}.$$

Положим

$$n = \left[\frac{1}{\sqrt{12C}}\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln\ln m}\right].$$

Поскольку неравенство $n \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\ln m}$ очевидно, необходимо лишь проверить, что $3l \leqslant n$. В свою очередь для этого достаточно убедиться, что

$$\frac{2\ln m}{\ln x}\ln\ln m < \frac{1}{4\sqrt{C}}\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln\ln m}$$

или, что то же самое, $(\ln x)^{3/2} > 8\sqrt{C}(\ln m)(\ln\ln m)^2$. Но последнее неравенство следует из условия теоремы.

Таким образом

$$S(x) \ll F(x)\Delta, \qquad \Delta = \left(\frac{\ln m}{(\ln x)^{3/2}}(\ln\ln m)^2\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание 4 *В случае фиксированного ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, и $x = m^{\varepsilon}$ верна следующая оценка:*

$$S(x) \ll_{\varepsilon} F(x)\Delta, \qquad \Delta = \frac{(\ln\ln m)^{2\alpha+\beta}}{(\ln m)^{\alpha/2}}.$$

2 Неоднородные короткие суммы Клоостермана с весами

2.1 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основной теоремы в случае неоднородных сумм нам понадобится оценка, аналогичная оценке леммы 1.3:

Лемма 2.1 *Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда для суммы W_2,*

$$W_2 = \sum_{Q<q\leqslant Q_1} \sum_{P<p\leqslant P_1} \xi(p)\eta(q)e_m(a\overline{pq}+bpq),$$

справедлива оценка $|W_2| \leqslant \xi_0\eta_0\Delta$, в которой

$$\Delta = (4\xi\sqrt{k})^{1/s}(4\eta\sqrt{s})^{1/k}s^{1/(2ks)}\Big(\frac{P}{\xi_0}\Big)^{1/s}\Big(\frac{Q}{\eta_0}\Big)^{1/k}\left(Q\Big(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\Big)\Big(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\Big)\right)^{1/(2ks)}.$$

Доказательство

Следуя [10] и пользуясь обозначениями леммы 1.3 наряду с неравенствами леммы 1.1, последовательно находим:

$$|W_2|^s \leqslant \Big(\sum_p |\xi(p)|\Big|\sum_q \eta(q)e_m(a\overline{pq}+bpq)\Big|\Big)^s \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_p |\xi(p)|\Big)^{s-1}\sum_p |\xi(p)|\Big|\sum_q \eta(q)e_m(a\overline{pq}+bpq)\Big|^s =$$

$$= \xi_0^{s-1}\sum_p |\xi(p)|\Big|\sum_q \eta(q)e_m(a\overline{pq}+bpq)\Big|^s \leqslant$$

$$\leqslant \xi_0^{s-1}\xi\sum_p\Big|\sum_{q_1,\ldots,q_s}\eta(q_1)\ldots\eta(q_s)e_m(a\overline{p}(\overline{q}_1+\ldots+\overline{q}_s)+bp(q_1+\ldots+q_s))\Big| =$$

$$= \xi_0^{s-1}\xi\sum_p\Big|\sum_{\lambda=1}^{m}\sum_{sQ<\mu\leqslant sQ_1} e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu)A_s(\lambda,\mu)\Big|,$$

где

$$A_s(\lambda,\mu) = \sum_{\substack{q_1,\ldots,q_s\\ \overline{q}_1+\ldots+\overline{q}_s\equiv\lambda \pmod m\\ q_1+\ldots+q_s\equiv\mu \pmod m}} \eta(q_1)\ldots\eta(q_s).$$

Пусть $\theta(p)$ – аргумент внутренней суммы. Тогда:

$$|W_2|^s \leqslant \xi_0^{s-1}\xi\sum_p e^{-i\theta(p)}\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} A_s(\lambda,\mu)e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu) =$$

$$= \xi_0^{s-1}\xi \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} A_s(\lambda,\mu)\sum_p e^{-i\theta(p)}e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu),$$

откуда

$$|W_2|^s \leqslant \xi_0^{s-1}\xi \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|\Big|\sum_p e^{-i\theta(p)}e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu)\Big|.$$

Возведем полученное неравенство в степень k и применим лемму 1.1:

$$|W_2|^{ks} \leqslant \xi_0^{k(s-1)}\xi^k\Big(\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|\Big)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|\Big|\sum_p e^{-i\theta(p)}e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu)\Big|^k \leqslant$$

$$\leqslant \xi_0^{k(s-1)}\xi^k\eta_0^{s(k-1)}\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|\Big|\sum_p e^{-i\theta(p)}e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu)\Big|^k.$$

Возведя неравенство в квадрат и используя лемму 1.1, получим:

$$|W_2|^{2ks} \leqslant \xi_0^{2k(s-1)}\xi^{2k}\eta_0^{2s(k-1)}BC,$$

где

$$B = \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|^2, \quad C = \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} \Big|\sum_p e^{-i\theta(p)}e_m(a\overline{p}\lambda+bp\mu)\Big|^{2k}$$

Оценивая сумму B, будем иметь:

$$\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} |A_s(\lambda,\mu)|^2 = \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} \Big|\sum_{\substack{q_1,\dots,q_s\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\lambda \pmod m\\ q_1+\dots+q_s\equiv\mu \pmod m}} \eta(q_1)\dots\eta(q_s)\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_{2s}\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\lambda\equiv\overline{q}_{s+1}+\dots+\overline{q}_{2s} \pmod m\\ q_1+\dots+q_s\equiv\mu\equiv q_{s+1}+\dots+q_{2s} \pmod m}} |\eta(q_1)|\dots|\eta(q_{2s})| \leqslant$$

$$\leqslant \eta^{2s}\sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_{2s}\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\lambda\equiv\overline{q}_{s+1}+\dots+\overline{q}_{2s} \pmod m\\ q_1+\dots+q_s\equiv\mu\equiv q_{s+1}+\dots+q_{2s} \pmod m}} 1 =$$

$$= \eta^{2s}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_{2s}\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\overline{q}_{s+1}+\dots+\overline{q}_{2s} \pmod m\\ q_1+\dots+q_s\equiv q_{s+1}+\dots+q_{2s} \pmod m}} 1 \leqslant \eta^{2s}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_{2s}\\ \overline{q}_1+\dots+\overline{q}_s\equiv\overline{q}_{s+1}+\dots+\overline{q}_{2s} \pmod m}} 1 = \eta^{2s}I_s(Q).$$

Оценивая сумму C, получаем:

$$C = \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} \sum_{p_1,\dots,p_{2k}} e^{-i(\theta(p_1)+\dots-\theta(p_{2k}))}e_m(a\lambda(\overline{p}_1+\dots-\overline{p}_{2k})+b\mu(p_1+\dots-p_{2k})) =$$

$$= \sum_{p_1,\dots,p_{2k}} e^{-i(\theta(p_1)+\dots-\theta(p_{2k}))} \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} e_m(a\lambda(\overline{p}_1+\dots-\overline{p}_{2k})+b\mu(p_1+\dots-p_{2k})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p_1,\dots,p_{2k}} \Bigg| \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\leqslant m\\ sQ<\mu\leqslant sQ_1}} e_m(a\lambda(\overline{p}_1+\dots-\overline{p}_{2k})+b\mu(p_1+\dots-p_{2k}))\Bigg| =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{|\tau|\leqslant kP} j_k(\sigma,\tau)\Bigg| \sum_{sQ<\mu\leqslant sQ_1} \sum_{\lambda=1}^{m} e_m(a\lambda\sigma+b\mu\tau)\Bigg|,$$

где $j_k(\sigma,\tau)$ – число решений системы при заданных условиях на p_j, $j=1,\dots,2k$:

$$\begin{cases} \overline{p}_1+\dots+\overline{p}_k \equiv \overline{p}_{k+1}+\dots+\overline{p}_{2k}+\sigma \pmod m,\\ p_1+\dots+p_k \equiv p_{k+1}+\dots+p_{2k}+\tau \pmod m, \end{cases}$$

Таким образом,

$$C \leqslant \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{|\tau|\leqslant kP} j_k(\sigma,\tau) \sum_{sQ<\mu\leqslant sQ_1} \Bigg|\sum_{\lambda=1}^{m} e_m(a\lambda\sigma)\Bigg| \leqslant sQ \sum_{\sigma=1}^{m}\Bigg(\sum_{|\tau|\leqslant kP} j_k(\sigma,\tau)\Bigg)\Bigg|\sum_{\lambda=1}^{m} e_m(a\lambda\sigma)\Bigg| =$$

$$= sQm \sum_{|\tau|\leqslant kP} j_k(0,\tau) \leqslant smQI_k(P)$$

Так получаем:

$$|W_2|^{2ks} \leqslant \xi_0^{2k(s-1)}\xi^{2k}\eta_0^{2s(k-1)}\eta^{2s} smQI_s(Q)I_k(P)$$

Применив к $I_k(P)$, $I_s(Q)$ лемму 1.2, приходим к искомому утверждению. Лемма доказана.

Следствие 2.1 *В случае $\xi(\nu)=\eta(\nu)=f(\nu)$ для суммы W_2 справедлива оценка $|W_2| \ll PQ\Delta_1$, где*

$$\Delta_1 = k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}\left(Q\left(\frac{\sqrt{m}}{P^k}+\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\right)\right)^{1/(2ks)}.$$

2.2 Доказательство основного утверждения

Будем придерживаться той же схемы рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1.

ШАГ 1. Положим $H=\exp(2\sqrt{\ln x})$. Пусть S_1 – часть суммы $S(x)$ по тем ν, которые имеют вид $\nu=c^2d$, $c>H$. Согласно лемме 1.4, $S_1 \ll F(x)e^{-\sqrt{\ln x}}$. Остальные ν будут иметь вид $\nu=c^2d$, где $c\leqslant H$, d – бесквадратное число, $\mu(d)\neq 0$.

ШАГ 2. Обзначим $R = \exp\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)$ и выберем целое l_1 из условия: $m^{1/(2l_1)} \leqslant R < m^{1/(2l_1-2)}$. Отнесем к сумме S_2 те из оставшихся слагаемых $S(x)$, что отвечают числам ν, все простые делители которых не превосходят $M = m^{1/(2l_1)}$. Тогда, согласно лемме 1.5, будет верна оценка

$$S_2 \ll F(x)\exp\Big(-\frac{1}{5}(\ln\ln x)\cdot\ln\ln\ln x\Big).$$

Все ν, которые остались, будут иметь хотя бы один простой делитель, больший M.

Прежде чем перейти к шагу 3, введем следующие параметры. Пусть n_1 удовлетворяет условию $3l_1 \leqslant n_1 \leqslant \frac{1}{60}\sqrt{\ln m}$ (точное значение n_1 выберем позднее), $\delta = \frac{1}{4n_1}$. Для целого k, $l_1 \leqslant k \leqslant n_1$, положим

$$X_k = m^{(1-\delta)/(2k)} \qquad Y_k = m^{(1+\delta)/(2k)}.$$

Подобно тому, как это делалось выше, несложно проверить, что $X_{k-1} > 2Y_k$ для всех рассматриваемых k. Пусть l_2, n_2 удовлетворяют $l_2 \geqslant 5n_1$, $n_2 \geqslant 3l_2$, $n_2 \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\ln m}$ (точные значения l_2, n_2 укажем позднее). Положим:

$$U = m^{1/(2n_2)} \qquad V = m^{1/(2l_2)}.$$

Обозначим за J множество простых чисел из $(U, V]$, за I – множество простых из объединения $(Y_k, X_{k-1}]$, $l_1 < k \leqslant n_1$.

ШАГ 3. Отнесем к S_3 те оставшиеся слагаемые $S(x)$, что отвечают числам ν, не имеющим простых делителей из I. Практически дословно повторяя рассуждения, аналогичные шагу 3 теоремы 1, приходим к оценке:

$$|S_3| \ll F(x)\Big(\frac{l_1}{n_1}\Big)^{\alpha}(\ln\ln x)^{\beta}.$$

ШАГ 4. Отнесем к S_4 те слагаемые, которые остались в $S(x)$, что отвечают числам ν, не имеющим простых делителей из J. Аналогично шагу 3 получаем следующую оценку:

$$|S_4| \ll F(x)\Big(\frac{l_2}{n_2}\Big)^{\alpha}(\ln\ln x)^{\beta}.$$

Слагаемые, не вошедшие в рассматриваемые выше суммы, отнесем к сумме S_5. Все числа ν, им отвечающие, имеют хотя бы один простой делитель из I и хотя бы один простой делитель из J. Таким образом, все такие ν имеют вид $\nu = c^2uvw$, где $1 \leqslant c \leqslant H$, $\mu(uvw) \neq 0$, причем все простые делители u принадлежат множеству I, все простые делители v принадлежат множесту J, а w, напротив, не имеет простых делителей из объединения множеств I и J.

Зададимся целыми числами λ, $\mu \geqslant 1$ и обозначим через $S_5(\mu, \lambda)$ сумму тех слагаемых из S_5, что отвечают числам $\nu = c^2uvw$, у которых u и v состоят соответственно из μ и λ простых сомножителей. В таком случае

$$S_5 = \sum_{\mu \geqslant 1} \sum_{\lambda \geqslant 1} S_5(\mu, \lambda).$$

Положим $\Phi(n) = e_m(a\overline{n} + bn)$, тогда

$$|S_5(\mu, \lambda)| = \Big| \sum_{c^2uvw \leqslant x} f(c^2uvw)\Phi(c^2uvw) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{c \leqslant H} f(c^2) \sum_{w} f(w) \Big| \sum_{uv \leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u)f(v)\Phi(c^2uvw) \Big|,$$

где w пробегает возрастающую последовательность чисел, не имеющих простых делителей из объединения промежутков I и J, $w \leqslant x(c^2X^{\mu}U^{\lambda})^{-1}$. Пусть c и w фиксировано. Сравним внутреннюю сумму $S_5(\mu, \lambda; w)$ по u, v с суммой

$$S'(\mu, \lambda; w) = \frac{1}{\mu\lambda} \sum_{u_1, v_1} \sum_{p, q} f(u_1)f(p)f(v_1)f(q)\Phi(c^2u_1pv_1qw),$$

где u_1, v_1 независимо пробегают возрастающие последовательности чисел, которые являются произведениями $(\mu - 1)$ и $(\lambda - 1)$ различных простых сомножителей из I и J соответственно, а p и q принимают значения простых из I и J, причем выполнено условие $u_1v_1pq \leqslant x(c^2w)^{-1}$. Числа u и v, отвечающие слагаемым из $S_5(\mu, \lambda; w)$, представляются в виде $u = u_1p$ и $v = v_1q$, где $(u_1, p) = 1$ и $(v_1, q) = 1$, ровно μ и λ способами. Следовательно, любое слагаемое из $S_5(\mu, \lambda; w)$ входит в $S'(\mu, \lambda; w)$ с коэффициентом 1. Кроме того, в $S'(\mu, \lambda; w)$ встретятся слагаемые, для которых нарушено хотя бы одно из условий $(u_1, p) = 1$, $(v_1, q) = 1$. Обозначим за $S''(\mu, \lambda; w)$ сумму по таким слагаемым. Полагая $u_1 = u_2p$, $v_1 = v_2q$, получим:

$$\big|S''(\mu, \lambda; w)\big| \leqslant \frac{1}{\mu\lambda}\Big(\sum_{p^2qu_2v_1 \leqslant x(c^2w)^{-1}} f(pu_2)f(p)f(v_1)f(q) +$$

$$+ \sum_{pq^2u_1v_2 \leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u_1)f(p)f(v_2q)f(q) + \sum_{p^2q^2u_2v_2 \leqslant x(c^2w)^{-1}} f(u_2p)f(p)f(v_2q)f(q)\Big).$$

Оценивая $S''(\mu, \lambda; w)$ аналогично тому, как это делалось в теореме 1, получаем оценку

$$\big|S''(\mu, \lambda; w)\big| \ll \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{H}.$$

Таким образом $|S_5(\mu,\lambda;w)| \leqslant |S'|+|S''|$, где

$$S'(\mu,\lambda;w)=\frac{1}{\mu\lambda}\sum_{u_1}\sum_{v_1}f(u_1)f(v_1)\widetilde{S},$$

и для фиксированных μ,λ,w,u_1,v_1 обозначено:

$$\widetilde{S}=\sum_{pq\leqslant Z}f(p)f(q)\Phi(c^2u_1v_1wpq),\quad Z=\left[\frac{x}{c^2u_1v_1w}\right].$$

Представим $\widetilde{S}$ в виде

$$\widetilde{S}=\sum_{pq\leqslant Z}f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}+b_1pq),$$

где $a_1\equiv a(\overline{c^2u_1v_1}) \pmod m$, $b_1\equiv bc^2u_1v_1w \pmod m$. Далее разобьем области изменения p и q на промежутки вида $P<p\leqslant P_1\leqslant 2P$, $Q<q\leqslant Q_1\leqslant 2Q$, причем выберем величины P, P_1, Q, Q_1 так, чтобы всякий промежуток $(P,P_1]$ содержался целиком в некотором промежутке $(Y_k,X_{k-1}]$, $l_1<k\leqslant n_1$, а всякий промежуток $(Q,Q_1]$ содержался целиком в некотором промежутке $(m^{1/(2s)},m^{1/(2s-2)}]$, $l_2<s\leqslant n_2$. Таким образом $\widetilde{S}$ разбивается на $\leqslant(\ln m)^2$ сумм вида

$$S(P,Q)=\sum_{P<p\leqslant P_1}\sum_{\substack{Q<q\leqslant Q_1\\ pq\leqslant Z}}f(p)f(q)e_m(a_1\overline{pq}+b_1pq).$$

Рассмотрим одну из таких сумм. Избавляясь от условия $pq\leqslant Z$ подобно тому, как это делалось в теореме 1, находим

$$S(P,Q)=\sum_{|d|<m/2}\frac{T(d)}{|d|+1},\quad T(d)=\sum_{P<p\leqslant P_2}\sum_{Q<q\leqslant Q_1}\alpha(p)\beta(q)e_m(a_1\overline{pq}+b_1pq),$$

где

$$\alpha(p)=\frac{|d|+1}{m}\Big(\sum_{Q<\xi\leqslant Q_2}e_m(d\xi)\Big)f(p),\qquad \beta(q)=e_m(dq)f(q),$$

причем $|\alpha(p)|\leqslant|f(p)|$, и $|\beta(q)|\leqslant|f(q)|$. Согласно следствию леммы 2.1, для $T(d)$ справедлива оценка $|T(d)|\ll PQ\Delta_1$, где

$$\Delta_1=k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}Q^{1/(2ks)}\Big(\frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{m}}{P^k}\Big)^{1/(2ks)}\Big(\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{m}}{Q^s}\Big)^{1/(2ks)}.$$

Из условий на P, Q заключаем:

$$\frac{\sqrt{m}}{P^k}\leqslant\frac{\sqrt{m}}{m^{\frac{1+\delta}{2}}}=m^{-\delta/2},\qquad \frac{P^{k-1}}{\sqrt{m}}\leqslant\frac{m^{(1-\delta)/2}}{\sqrt{m}}\leqslant m^{-\delta/2},\qquad \frac{\sqrt{m}}{Q^s}+\frac{Q^{s-1}}{\sqrt{m}}\leqslant 2.$$

Следовательно,

$$\Delta_1 \ll$$

$$\ll k^{1/(2s)}s^{1/(2k)}\Big(m^{1/(2l_2)}m^{-\delta/2}\Big)^{1/(2ks)} \ll n_2^{1/(2l_1)}n_1^{1/(2l_2)}\Big(m^{1/(10n_1)-1/(8n_1)}\Big)^{1/(2ks)} \ll$$

$$\ll n_2^{1/(2l_1)}\Big(\frac{1}{5}l_2\Big)^{1/(2l_2)}m^{-1/(80n_1ks)} \ll (\ln m)^{1/4}m^{-1/(80n_1^2n_2)} = \Delta_2(\ln m)^{1/4}.$$

Таким образом, $T(d) \ll PQ\Delta_2(\ln m)^{1/4}$, откуда:

$$S(P,Q) \ll PQ\Delta_2(\ln m)^{5/4} \ll Z\Delta_2\ln m, \qquad \widetilde{S} \ll Z\Delta_2(\ln m)^{13/4}.$$

Перейдем к оценке суммы S_5. Последовательно получаем:

$$S_5(\mu,\lambda;w) \ll \frac{1}{\mu\lambda}\sum_{u_1}\sum_{v_1} f(u_1)f(v_1)\frac{x\Delta_2(\ln m)^3}{c^2u_1v_1w} + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{H} =$$

$$= \frac{x\Delta_2}{\mu\lambda}\frac{(\ln m)^3}{c^2w}\sum_{u_1}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1}\frac{f(v_1)}{v_1} + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)}{c^2w}\frac{(\ln x)^2}{H}.$$

Далее,

$$S_5(\mu,\lambda) \ll \frac{x\Delta_2(\ln m)^3}{\mu\lambda}\sum_{c\leqslant H}\frac{f(c^2)}{c^2}\sum_{w}\frac{f(w)}{w}\sum_{u_1}\frac{f(u_1)}{u_1}\sum_{v_1}\frac{f(v_1)}{v_1} + \frac{1}{\mu\lambda}\frac{F(x)(\ln x)^3}{H}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям теоремы 1, находим:

$$S_5 \ll x\Delta_2(\ln m)^{13/4}(\ln x)^\alpha + \frac{F(x)}{\sqrt{H}}.$$

Таким образом

$$S(x) \ll F(x)\Big(\frac{l_1}{n_1}\Big)^\alpha(\ln\ln x)^\beta + F(x)\Big(\frac{l_2}{n_2}\Big)^\alpha(\ln\ln x)^\beta + \frac{F(x)}{\sqrt{H}} + F(x)(\ln m)^{17/4}m^{-1/(80n_1^2n_2)} \ll$$

$$\ll F(x)\left(\Big(\frac{l_1}{n_1}\Big)^\alpha(\ln\ln x)^\beta + \Big(\frac{l_2}{n_2}\Big)^\alpha(\ln\ln x)^\beta + (\ln m)^{17/4}m^{-1/(80n_1^2n_2)}\right).$$

Выберем теперь n_1, n_2 так, чтобы выполнялось неравенство:

$$m^{1/(80n_1^2n_2)} \geqslant (\ln m)^C,$$

где $C \geqslant \alpha+5$ – постоянная. Данное условие будет выполнено, если выбрать n_2 так, что

$$\frac{1}{80n_1^2n_2}\ln m \geqslant C\ln\ln m, \quad \text{т.е.} \quad n_2 \leqslant \frac{1}{80C}\frac{\ln m}{n_1^2\ln\ln m}.$$

Положим

$$n_2 = \left[\frac{1}{80C}\frac{\ln m}{n_1^2 \ln\ln m}\right].$$

Замечая, что

$$n_2 \geqslant \frac{\ln m}{80Cn_1^2 \ln\ln m} - 1 \geqslant \frac{\ln m}{102Cn_1^2 \ln\ln m}, \text{ т.е. } \frac{1}{n_2} \leqslant \frac{102Cn_1^2 \ln\ln m}{\ln m}$$

и

$$\frac{1}{2}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln x \leqslant l_1 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln x + 1 < \frac{3}{4}\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln m,$$

находим

$$\left(\frac{l_1}{n_1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{l_2}{n_2}\right)^{\alpha} \ll \left(\frac{3}{4}\frac{\ln m}{n_1 \ln x}\ln\ln m\right)^{\alpha} + \left(102C\frac{l_2 n_1^2}{\ln m}\ln\ln m\right)^{\alpha}.$$

Определим n_2, l_2 следующим образом

$$n_1 = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{680C}}\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{1/4}}\right], \quad l_2 = 5n_1.$$

Тогда

$$\left(\frac{l_1}{n_1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{l_2}{n_2}\right)^{\alpha} \ll \left(\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{3/4}}\ln\ln m\right)^{\alpha}.$$

Поскольку неравенства $l_2 \geqslant 5n_1$, $n_2 \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\ln m}$ и $n_2 \leqslant \frac{1}{60}\sqrt{\ln m}$ очевидны, необходимо лишь проверить что $3l_1 \leqslant n_1$, $3l_2 \leqslant n_2$. В свою очередь, для выполнения первого неравенства достаточно убедиться, что

$$2\frac{\ln m}{\ln x}\ln\ln m < \frac{1}{6\sqrt[4]{C}}\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{1/4}}$$

или, что тоже самое,

$$(\ln x)^{3/4} > 12\sqrt[4]{C}(\ln m)^{1/2}\ln\ln m.$$

Но последнее неравенство следует из условия теоремы. Справедливость второго неравенства будет следовать из оценки

$$15n_1 \leq \frac{\ln m}{102Cn_1^2 \ln\ln m}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{5}{9\sqrt[4]{C^3}}\frac{(\ln m)^{3/2}}{(\ln x)^{3/4}} \leqslant \frac{1}{102C}\frac{\ln m}{\ln\ln m},$$

или, что тоже самое,

$$(\ln x)^{3/4} \geqslant \frac{170}{3}\sqrt[4]{C}(\ln m)^{1/2}\ln\ln m.$$

Но последнее соотношение следует из условия теоремы. Таким образом

$$S(x) \ll F(x)\Delta, \qquad \Delta = \left(\frac{\sqrt{\ln m}}{(\ln x)^{3/4}}\ln\ln m\right)^{\alpha}(\ln\ln m)^{\beta}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 5 *В случае фиксированного* ε, $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, *и* $x = m^{\varepsilon}$ *верна следующая оценка:*

$$S(x) \ll F(x)\Delta, \qquad \Delta = \frac{(\ln\ln m)^{\alpha+\beta}}{(\ln m)^{\alpha/4}}.$$

3 Сумма дробных долей с весами

3.1 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма

Лемма 3.1 *Пусть ρ – натуральное число, v и w – вещественные числа, $0 < \delta < 1/8$, $\delta \leqslant w-v \leqslant 1-\delta$. Тогда существует периодическая функция $g_{v,w}(x)$ с периодом 1, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $g_{v,w}(1) = 1$ *при* $v + \delta/2 \leqslant x \leqslant w - \delta/2$,

2. $0 < g_{v,w}(x) < 1$ *при* $v - \delta/2 < x < v + \delta/2$ *и* $w - \delta/2 < x < w + \delta/2$,

3. $g_{v,w}(x) = 0$ *при* $w + \delta/2 < x < 1 + v - \delta/2$,

4. $g_{v,w}(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$g_{v,w}(x) = w - v + \sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty} a_r e^{2\pi i r x},$$

причем для коэффициентов Фурье справедлива оценка

$$|a_r| \leqslant b_r = \min\left(w - v, \frac{1}{\pi|r|}, \frac{1}{\pi|r|}\left(\frac{\rho}{\pi|r|\delta}\right)^{\rho}\right).$$

Это есть лемма 12 из [18].

Функция $g_{v,w}(x)$ называется “стаканчиком” Виноградова.

3.2 Доказательство основного утверждения

Докажем теорему 3. Для теоремы 4 доказательство проводится аналогично.

ШАГ 1. Обозначим за $V(v,w)$ следующую сумму

$$V(v,w) = \sum_{\nu\leqslant x} f(\nu) g_{v,w}\left(\frac{a\overline{\nu}}{m}\right),$$

где $g_{v,w}(x)$ – “стаканчик” Виноградова, построенный по заданным v, w, δ, ρ, $2\delta < w-v < 1-2\delta$. Точное значение параметров δ, ρ выберем позднее. Разложим $g_{v,w}(x)$ в ряд Фурье:

$$V(v,w) = \sum_{\nu\leqslant x} f(\nu)\left(w - v + \sum_{\substack{r=-\infty \\ r\neq 0}}^{+\infty} a_r e^{2\pi i r \frac{a\overline{\nu}}{m}}\right) =$$

$$= (w-v)F(x) + \sum_{r\neq 0} a_r \sum_{\nu\leqslant x} f(\nu) e_m(ar\overline{\nu}) = (w-v)F(x) + R,$$

где

$$R = \sum_{r\neq 0} a_r S_r, \quad S_r = \sum_{\nu\leqslant x} f(\nu) e_m(ar\overline{\nu}).$$

Оценим R

$$|R| \ll \sum_{r=1}^{+\infty} b_r |S_r| = \sum_{r\leqslant r_0} b_r |S_r| + \sum_{r>r_0} b_r |S_r| = R_1 + R_2.$$

Положим

$$r_0 = (\ln m)^{\alpha}, \quad \delta = r_0^{-1/2}, \quad \rho = [r_0^{1/4}].$$

Будем оценивать первую сумму R_1. В силу выбора r_0 для любого $r \leqslant r_0$ верно $(ar, m) = 1$. Применяя теорему 1, будем иметь

$$R_1 = \sum_{r\leqslant r_0} b_r |S_r| \ll \sum_{r\leqslant r_0} b_r F(x)\Delta \ll F(x)\Delta \sum_{r\leqslant r_0} \frac{1}{r} \ll F(x)\Delta \ln r_0,$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\ln m}{(\ln x)^{3/2}} (\ln\ln m)^2 \right)^{\alpha} (\ln\ln m)^{\beta}.$$

Оценим вторую сумму.

$$R_2 = \sum_{r>r_0} b_r |S_r| \ll F(x) \sum_{r>r_0} b_r \ll F(x) \sum_{r>r_0} \frac{1}{\pi r} \left(\frac{\rho}{\pi r \delta}\right)^{\rho} \ll F(x) \frac{1}{r_0} \left(\frac{\rho}{r_0 \delta}\right)^{\rho} \ll F(x) \frac{1}{r_0} r_0^{-\rho/4}.$$

Покажем, что $R_2 \ll F(x)\Delta$. В самом деле, в силу выбора ρ, r_0 будем иметь

$$\frac{1}{r_0} r_0^{-\rho/4} \ll \frac{1}{(\ln m)^{\alpha/2}} \ll \frac{(\ln m)^{\alpha}}{(\ln x)^{3\alpha/2}} \ll \Delta.$$

Таким образом

$$V(v,w) = (w-v)F(x) + O(F(x) + \Delta_1) = F(x)\left(w - v + O(\Delta_1)\right), \quad \Delta_1 = \Delta \ln\ln m$$

ШАГ 2. Обозначим за $D(v,w)$ следующую сумму

$$D(v,w) = \sum_{\substack{\nu\leqslant x \\ v\leqslant \{\frac{a\overline{\nu}}{m}\} \leqslant w}} f(\nu).$$

Справедливы следующие неравенства

$$\sum_{\nu\leqslant x} f(\nu) g_{v+\delta/2, w-\delta/2}(\frac{a\overline{\nu}}{m}) \leqslant D(v,w) \leqslant \sum_{\nu\leqslant x} f(\nu) g_{v-\delta/2, w+\delta/2}(\frac{a\overline{\nu}}{m})$$

$$V(v+\delta/2, w-\delta/2) \leqslant D(v,w) \leqslant V(v-\delta/2, w+\delta/2)$$

Тогда при $2\delta \leqslant w-v \leqslant 1-2\delta$ будем иметь

$$V(v+\delta/2, w-\delta/2) = F(x)\left((w-v)-\delta+O(\Delta_1)\right),$$

$$V(v-\delta/2, w+\delta/2) = F(x)\left((w-v)+\delta+O(\Delta_1)\right).$$

Следовательно, $D(v,w) = F(x)(w-v)+O(F(x)\delta)+O(F(x)\Delta_1)$. Данное равенство распространяется и на случай произвольных v, w, $0 \leqslant v < w \leqslant 1$. Действительно, при $0 < w-v \leqslant 2\delta$ имеет место равенство $D(v,w) = D(v, v+1-2\delta)-D(w, v+1-2\delta)$, а при $1-2\delta \leqslant w-v < 1$ имеет место $D(v,w) = D(v, v+1/2)+D(v+1/2, w)$. В силу выбора δ ($\delta \ll \Delta_1$), окончательно получаем $D(v,w) = F(x)\left((w-v)+O(\Delta_1)\right)$.

ШАГ 3. Зададим параметр $n = [(\ln m)^{\alpha/2}]$. Справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ \frac{k-1}{n} \leqslant \{\frac{a\overline{\nu}}{m}\} < \frac{k}{n}}} f(\nu)\frac{k-1}{n} \leqslant \sum_{\nu \leqslant x} f(\nu)\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\nu \leqslant x \\ \frac{k-1}{n} \leqslant \{\frac{a\overline{\nu}}{m}\} < \frac{k}{n}}} f(\nu)\frac{k}{n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{\nu \leqslant x} f(\nu)\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right).$$

Оценим правую сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(D\left(0, \frac{k}{n}\right) - D\left(0, \frac{k-1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(0, \frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{n} D\left(0, \frac{k-1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} D\left(0, \frac{k}{n}\right) + F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} D\left(0, \frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D\left(0, \frac{k-1}{n}\right) = F(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D\left(0, \frac{k-1}{n}\right).$$

Пользуясь результатом шага 2, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} D\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = F(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}F(x) + F(x)O(\Delta_1)\right) =$$

$$= F(x) - \frac{F(x)}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + F(x)O(\Delta_1) = F(x) - F(x)\frac{n(n-1)}{2n^2} + F(x)O(\Delta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}F(x) + F(x)O(\frac{1}{n}) + F(x)O(\Delta_1) = \frac{1}{2}F(x)\left(1+O(\Delta_1)\right).$$

Для левой суммы имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}D\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}D\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D\left(\frac{k-1}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}F(x)(1+O(\Delta_1))-\frac{1}{n}F(x)=\frac{1}{2}F(x)(1+O(\Delta_1)).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\sum_{\nu\leqslant x}f(\nu)\{\frac{a\overline{\nu}}{m}\}=\frac{1}{2}F(x)(1+O(\Delta_1)).$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] H. D. Kloosterman *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ Acta Math., 1926, Vol. 49, p. 407-464.

[2] H. Salie *Zur Abschatzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen* Math. Z., 1932, Vol. 36, p. 263-278.

[3] Davenport H. *On certain exponential sums* J. reine angew. Math., 1933, Vol. 169, p. 158-176.

[4] A. Weil *On some exponential sums* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948, Vol. 34, p. 204-207.

[5] T. Estermann *On Klostermann's sum* Mathematika,1961, Vol. 8, p. 83-86.

[6] G. Tenenbaum *Introduction to analytic and probabilistic number theory* Camb. Univ. Press, 1995.

[7] А. А. Карацуба *Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю* Докл. РАН, 1995, 333 (2), с. 138-139.

[8] А. А. Карацуба *Дробные доли специального вида функций* Изв. РАН. Сер. матем., 1995, 59 (4), с. 61-80.

[9] А. А. Карацуба *Аналоги сумм Клоостермана* Изв. РАН. Сер. матем., 1995, 59 (5), с. 93-102.

[10] А. А. Карацуба *Двойные суммы Клоостермана* Матем. заметки, 1999, 66 (5), с. 682-687.

[11] Ж. Бургейн, М. З. Гараев *Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана* Изв. РАН. Сер. матем., 2014, 78 (4), с. 19-72.

[12] М. А. Королёв *Неполные суммы Клоостермана и их приложения* Изв. РАН. Сер. матем., 2000, 64 (6), с. 41-64.

[13] М. А. Королёв *Короткие суммы Клоостермана с весами* Матем. заметки, 2010, 8 (3), с. 415-427.

[14] М. А. Королёв *Обобщенная сумма Клоостермана с простыми числами* Аналитическая и комбинаторная теория чисел, Сборник статей. К 125-летию со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, 2017, 296, с. 163-180.

[15] М. А. Королёв *Новая оценка суммы Клоостермана с простыми числами по составному модулю* Матем. сб., 2018, 209 (5), с. 54-61.

[16] М. А. Королёв *Методы оценок коротких сумм Клоостермана* Чебышевский сб., 2016, 17 (4), с. 79-109.

[17] M. Korolev, I. Shparlinski *Sums of algebraic trace functions twisted by arithmetic functions* Pacific J. Math., 2020, 304 (2), с. 505-522.

[18] И. М. Виноградов *Метод тригонометрических сумм в теории чисел* Тр. МИАН СССР, 1947, 23, с. 3-109.