Предельная теорема для последнего момента выхода гауссовского процесса за подвижную границу.

Н.А. Карагодин*

Аннотация

В работе доказывается предельная теорема о сходимости распределения нормированного времени окончательного ухода стационарного гауссовского процесса под медленно растущую границу к двойному экспоненциальному распределению.

Ключевые слова и фразы: время окончательного ухода, нелинейная граница, гауссовский процесс, предельная теорема, двойное экспоненциальное распределение.

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим гауссовский стационарный случайный процесс с непрерывными траекториями и его «момент окончательного ухода под подвижную границу», то есть последний момент, когда процесс находится на линии $af(t)$, где t – время, а a – меняющийся параметр. После указанного момента процесс навсегда опускается *под* подвижную границу $af(t)$. Нас интересует асимптотическое распределение момента окончательного ухода, когда параметр a стремится к нулю. В работе доказана предельная теорема о слабой сходимости распределения должным образом центрированного и нормированного момента ухода к двойному экспоненциальному распределению (распределению Гумбеля).

Частный случай этой задачи, для совершенно конкретного процесса, возник в недавних работах [1, 2], посвящённых математическому исследованию одной физической модели (разрыв броуновской цепочки частиц). В работе [3] был изучен момент ухода под линейную границу для широкого семейства процессов. Здесь же мы естественным образом обобщаем результат на достаточно широкий класс границ.

*СПбГУ, Факультет математики и компьютерных наук, 199034, СПб, Университетская наб., 7–9. email: nikitus20@gmail.com.

Насколько известно автору, постановка задачи с малым трендом является новой, хотя момент окончательного ухода – достаточно популярный объект, но в задачах не физического, а экономического характера. В теории риска изучаются процессы вида

$$R(t) = u + at - Y(t),$$

где $Y(t)$ – гауссовский центрированный процесс с непрерывными траекториями. Компонента at или просто параметр a называется трендом, а стандартное отклонение $Y(t)$ – волатильностью. Естественным прикладным примером является модель баланса страховой компании. В ней u – изначальный баланс, at – накопленный доход, а $Y(t)$ – стохастические расходы к моменту времени t. В такой постановке задачи $\inf\{t : R(t) < 0\}$(момент разорения) – момент времени, после которого баланс впервые станет отрицательным, а $\max\{t : R(t) \leq 0\}$ (его еще называют моментом восстановления) – это момент, начиная с которого компания всегда будет иметь положительный баланс.

Имеется множество работ, посвящённых моментам выхода процесса с трендом на некоторый уровень. Чтобы получить положительный результат, приходится балансировать между разнообразием видов тренда и обширностью рассматриваемого класса процессов.

Так, например, классический момент разорения хорошо изучен. Результат для локально стационарного гауссовского процесса $Y(t)$ приведён в [13].

В работе [6] изучена асимптотика времени окончательного восстановления модели, то есть асимптотика расстояния между моментом разорения и моментом восстановления при больших u, когда процесс $Y(t)$ обладает стационарными приращениями.

В статье [12] рассмотрен так называемый Парижский момент разорения, то есть первый момент, когда $R(t)$ находится под границей $t = 0$ некоторое заранее фиксированное время, тренд имеет вид at^{β}, а процесс $Y(t)$ – самоподобный гауссовский.

С другой стороны, в работе [14] изучен момент разорения и момент восстановления для произвольного гладкого тренда, когда процесс $Y(t)$ – стандартное броуновское движение.

Ключевые отличия уже имеющихся работ в том, что в них тренд всегда фиксирован, а рассмотренный процес, как правило, не стационарен, а обладает стационарными приращениями, см. также [7, 9].

В данной же работе исследована асимптотика распределения момента восстановления для процессов риска с нулевым изначальным балансом при малом отношении тренда к волатильности. Рассматривается широкий класс стационарных процессов $Y(t)$ с ковариационной функцией, обладающей регулярностью гёльдеровского типа в нуле и убывающей на бесконечности быстрее обратного логарифма. В то же время, рассмотрено весьма обширное множество трендов, включающее функции вида at^{β} и $a\exp\{t^q\}$.

1.2 Основной результат

Пусть $Y(t), t \in \mathbb{R}$, – гауссовский вещественный центрированный стационарный процесс с корреляционной функцией $\rho(t) := \mathbb{E}\,[Y(t)Y(0)]$. Относительно корреляционной функции сделаем предположения о поведении в нуле (условие Пикандса)

$$\rho(t) = v^2(1 - Q|t|^{\alpha} + o(|t|^{\alpha})) \quad \text{при } t \to 0, \tag{1}$$

для некоторых $v>0, Q>0$ и $\alpha\in(0,2]$, и на бесконечности (условие Бермана)

$$\rho(t)=o((\ln t)^{-1}) \quad \text{при } t\to+\infty. \tag{2}$$

Здесь и далее мы пользуемся обозначениями

- $f\prec g$, когда $\exists C>0: f<Cg$,
- $f\asymp g$, когда одновременно $f\succ g$ и $f\prec g$,
- $f\sim g$, когда $\lim\frac{f}{g}=1$.

Напомним, что соотношение (1) возникает в следующей лемме, которая выступает одним из двух основных инструментов в наших вычислениях.

Лемма 1 *(лемма Пикандса–Питербарга). Пусть $Y(t), t\in\mathbb{R}$, – гауссовский вещественный центрированный стационарный процесс, удовлетворяющий условиям* (1) *и*

$$\limsup_{t\to\infty}\rho(t)<1.$$

Тогда

$$\mathbb{P}\left\{\max_{s\in[0,t]}Y(s)\ge x\right\}\sim\frac{Q^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha}{\sqrt{2\pi}}\cdot t\cdot(x/v)^{2/\alpha-1}e^{-x^2/2v^2}$$

для любых таких x и t, что правая часть стремится к нулю и $tx^{2/\alpha}\to\infty$. Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ – константы Пикандса (в частности, $\mathcal{H}_1=1$, $\mathcal{H}_2=\pi^{-1/2}$).

Первый вариант этой леммы с постоянным t получен Пикандсом [10], а приведённая здесь версия с переменным t (что очень важно для наших целей) принадлежит Питербаргу, см. [11, лекция 9].

Отметим, что условие Бермана (2) появляется в контексте предельных теорем для максимумов гауссовских стационарных последовательностей и процессов, см. [4], а также [5, теорема 3.8.2].

Определим момент окончательного ухода процесса Y под границу, определяемую функцией f, как

$$T=T(\varepsilon):=\max\{t:Y(t)=\varepsilon f(t)\}.$$

Возьмем $\gamma=\gamma(\varepsilon)$ такое, что

$$\gamma^2=2\ln\left[\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\right]+o(1), \quad \text{при } \varepsilon\to0. \tag{3}$$

и $\tau_0=\tau_0(\varepsilon)$, для которого

$$f(\tau_0)=\frac{\gamma+o(1/\gamma)}{\varepsilon_v}.$$

Функция f должна удовлетворять следующим условиям:

- *Асимптотическая монотонность*: $f(x)$ монотонна и дважды дифференцируема с некоторого момента, а также стремится к бесконечности при $x\to\infty$.

- *Слабое ограничение на скорость роста*: для некоторого $0 < \lambda \leq 1$ выполнено $f''(x)/f'(x) \asymp x^{-\lambda}$.
- *Регулярность*: для некоторых $\rho > 0$ и β выполнено
$$(f^{-1})'(y/\varepsilon) \sim y^{\beta}(f^{-1})'(1/\varepsilon), \quad \text{при } y \in [(1-\rho)\gamma, (1+\rho)\gamma], \tag{4}$$
а для некоторого $\tilde{\beta}$ верно
$$(f^{-1})'(y/\varepsilon) = o\left(y^{\tilde{\beta}}(f^{-1})'(1/\varepsilon)\right), \quad \text{при } y \in [(1+\rho)\gamma, \infty]. \tag{5}$$

Тогда верна следующая предельная теорема.

Теорема 2 *Пусть $Y(t), t \in \mathbb{R}$, – гауссовский вещественный центрированный стационарный процесс, удовлетворяющий условиям (1) и (2), а f – функция, удовлетворяющая трем наложенным выше условиям. Положим $c := \frac{Q^{1/\alpha}\mathcal{H}_\alpha}{\sqrt{2\pi}}$, $\varepsilon_v := \frac{\varepsilon}{v}$. Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$ верно*
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}\left\{\frac{T(\varepsilon) - A_\varepsilon}{B_\varepsilon} \leq r\right\} = \exp(-c\exp(-r)),$$
где нормирующие константы зависят от определенных выше γ и τ_0 следующим образом
$$\begin{aligned} A_\varepsilon &:= \tau_0 + \frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon_v}\left[\left(\frac{2}{\alpha} + \beta - 2\right)\frac{\ln\gamma}{\gamma}\right] + o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon_v\gamma}\right), \\ B_\varepsilon &:= \frac{1+o(1)}{f'(\tau_0)\varepsilon_v\gamma}. \end{aligned}$$

Отметим, что в работе [3] накладываются те же ограничения на процесс $Y(t)$ и идейно приведенное ниже доказательство повторяет рассуждения из [3]. Основную трудность здесь представляет работа с целым классом границ, требующая более детального анализа.

1.3 Доказательство теоремы 2

Линейной заменой переменных $Y(t) = v\widetilde{Y}(Q^{1/\alpha}t)$ можно свести задачу к случаю $v = Q = 1$, $\varepsilon_v = \varepsilon$, который и будет рассматриваться в дальнейшем. Зафиксируем $r \in \mathbb{R}$ и положим
$$\tau = \tau(\varepsilon, r) := A_\varepsilon + B_\varepsilon r.$$
Нам понадобится асимптотика γ, определенного в (3). Доказательство приведено в параграфе 1.4.

Лемма 3 *Если функция f удовлетворяет слабому ограничению на скорость роста $f''(x)/f'(x) \asymp x^{-\lambda}$, то*
$$\gamma \sim \sqrt{\frac{2\lambda}{1-\lambda}\ln(-\ln\varepsilon)}, \quad \text{для } \lambda < 1. \tag{6}$$
$$\gamma \asymp \sqrt{-\ln\varepsilon}, \quad \text{для } \lambda = 1. \tag{7}$$

Замечание 4 *При сильном ограничении $f''(x)/f'(x) \sim \nu x^{-\lambda}$ можно найти точный выбор γ*

$$\gamma^2 = \frac{2\lambda}{1-\lambda}\ln(-\ln\varepsilon) + \frac{2\lambda}{1-\lambda}\ln(1-\lambda) - \frac{2}{1-\lambda}\ln\nu + o(1).$$

Утверждение теоремы сводится к проверке соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}\left\{T(\varepsilon) \le \tau\right\} = \exp(-c\exp(-r)).$$

С этой целью мы покрываем луч $[\tau, \infty)$ системой множеств:

- луч $[\sigma, \infty)$, где $\sigma = A_\varepsilon + B_\varepsilon R$ и $R = R(\varepsilon)$ медленно стремится к бесконечности. Выбор R будет уточнён в конце доказательства, однако отметим, что мы будем накладывать лишь верхние ограничения на скорость роста R.
- длинные отрезки $L_i = [(\ell+s)i, (\ell+s)i+\ell]$, $i \in \mathbb{Z}$, некоторой длины $\ell = \ell(\varepsilon)$,
- более короткие отрезки $S_i = [(\ell+s)i+\ell, (\ell+s)(i+1)]$,$i \in \mathbb{Z}$, длины $s = s(\varepsilon)$.

Длины отрезков $\ell = \ell(\varepsilon)$, $s = s(\varepsilon)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\ln s \succ \gamma^2, \text{то есть } \ln s \succ -\ln(\varepsilon) \text{ при } \lambda = 1 \text{ и } \ln s \succ \ln(-\ln\varepsilon) \text{ при } \lambda < 1, \tag{8}$$

$$s/\ell \to 0, \tag{9}$$

$$f(\tau)f'(\tau)\varepsilon^2\,\ell \to 0. \tag{10}$$

Возможность выбора ℓ и s, удовлетворяющих этим условиям, объяснена в параграфе 1.4. При этом R должно стремиться к бесконечности достаточно медленно, чтобы

$$\tau \sim \sigma, \quad f'(\tau) \sim f'(\sigma), \quad f(\tau) \sim f(\sigma). \tag{11}$$

Следующая лемма позволяет оценить некоторые асимптотики, которые понадобятся нам в дальнейшем, к тому же из неё следует, что мы можем взять достаточно медленно растущее R. Доказательство приведено в параграфе 1.4.

Лемма 5 *Рассмотрим любую функцию $\tilde{R}(\varepsilon)$ настолько медленно растущую, что $\tilde{R} = o(\ln\gamma)$ и*

$$B_\varepsilon\tilde{R} = \frac{\tilde{R}}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma} + o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right)$$

Тогда для A_ε и B_ε, определенных в теореме 2, выполнено

$$f(A_\varepsilon + B_\varepsilon\tilde{R})\varepsilon = \gamma + \left(\frac{2}{\alpha} + \beta - 2\right)\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{\tilde{R}}{\gamma} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right). \tag{12}$$

Из соотношения (12), примененного к $\tilde{R} = r$ и $\tilde{R} = R$ следует, что

$$f(\tau)\varepsilon \quad \sim \quad \gamma, \tag{13}$$

$$(f(\tau)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\tau)\varepsilon)^2/2\}\} \quad \sim \quad e^{-r-\gamma^2/2}, \tag{14}$$

$$(f(\sigma)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\sigma)\varepsilon)^2/2\} \quad = \quad o\left(e^{-\gamma^2/2}\right). \tag{15}$$

Поэтому
$$f(\tau)f'(\tau)\varepsilon^2 \asymp (f(\tau)\varepsilon)^2\tau^{-\lambda} \sim \gamma^2\tau^{-\lambda}. \tag{16}$$

Перейдем от процесса к последовательности случайных величин при помощи леммы Пикандса-Питербарга. Положим

$$X_i^\varepsilon := \max_{t\in L_i} Y(t); \quad V_i^\varepsilon := \max_{t\in S_i} Y(t).$$

Используя стационарность, по лемме Пикандса–Питербарга имеем асимптотики $\mathbb{P}\{X_i^\varepsilon \geq x\} \sim c\,\ell\, x^{2/\alpha-1}\exp(-x^2/2)$ и $\mathbb{P}\{V_i^\varepsilon \geq x\} \sim c\, s\, x^{2/\alpha-1}\exp(-x^2/2)$, как только соответствующие правые части стремятся к нулю. Здесь $c = \frac{\mathcal{H}_\alpha}{\sqrt{2\pi}}$.

Определим множества индексов

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{i : {\scriptstyle (\ell+s)i+\ell\geq\tau \atop (\ell+s)i<\sigma}\}, \\ I_2 &:= \{i : {\scriptstyle (\ell+s)i\geq\tau \atop (\ell+s)i+\ell<\sigma}\}, \\ I_3 &:= \{i : {\scriptstyle (\ell+s)(i+1)\geq\tau \atop (\ell+s)i+\ell<\sigma}\}, \end{aligned}$$

подобранные так, чтобы выполнялись включения

$$\bigcup_{i\in I_2} L_i \subset [\tau,\sigma] \subset \Big(\bigcup_{i\in I_1} L_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in I_3} S_i\Big). \tag{17}$$

Определим события, связанные с выходом процесса за границу:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \bigcup_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon \geq f([\ell+s]i)\varepsilon\}, \\ \mathcal{E}_2 &:= \bigcup_{i\in I_2}\{X_i^\varepsilon \geq f([\ell+s][i+1])\varepsilon\}, \\ \mathcal{E}_3 &:= \bigcup_{i\in I_3}\{V_i^\varepsilon \geq f([\ell+s]i)\varepsilon\}, \\ \mathcal{E}_4 &:= \{\exists\, t>\sigma : Y(t) \geq \varepsilon f(t)\}. \end{aligned}$$

Из включений (17) и монотонности функции f следуют две оценки.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{T(\varepsilon)>\tau\} &= \mathbb{P}\{\exists\, t>\tau : Y(t)\geq \varepsilon f(t)\} \leq \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} + \mathbb{P}\{\mathcal{E}_3\} + \mathbb{P}\{\mathcal{E}_4\}, \\ \mathbb{P}\{T(\varepsilon)>\tau\} &\geq \mathbb{P}\{\mathcal{E}_2\}. \end{aligned}$$

Поэтому нам достаточно доказать, что при $\varepsilon \to 0$ верно

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}, \mathbb{P}\{\mathcal{E}_2\} &\to 1-\exp(-c\exp(-r)), \\ \mathbb{P}\{\mathcal{E}_3\}, \mathbb{P}\{\mathcal{E}_4\} &\to 0. \end{aligned}$$

Сначала покажем, что вероятности событий $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ отличаются мало, так что будет достаточно найти предел $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}$. Действительно, пусть для определённости индексы

m и n таковы, что $I_1 = [m, n]$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\mathcal{E}_2\} &\le \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=m}^{n}\{X_i^\varepsilon \ge f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\} \\
&\le \mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge f([\ell+s]m)\varepsilon\right\} + \mathbb{P}\left\{X_{m+1}^\varepsilon \ge f([\ell+s][m+1])\varepsilon\right\} \\
&\quad + \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=m+2}^{n}\{X_i^\varepsilon \ge f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\} \\
&\le 2\,\mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge f([\ell+s]m)\varepsilon\right\} + \mathbb{P}\left\{\bigcup_{j=m+1}^{n-1}\{X_{j+1}^\varepsilon \ge f([\ell+s][j+1])\varepsilon\}\right\} \\
&\le 2\,\mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge f([\ell+s]m)\varepsilon\right\} + \mathbb{P}\{\mathcal{E}_2\},
\end{aligned}$$

причём в предпоследнем неравенстве мы воспользовались стационарностью последовательности X_i^ε, следующей из стационарности процесса Y. Для лишнего слагаемого запишем оценку Пикандса–Питербарга

$$\mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge f([\ell+s]m)\varepsilon\right\} \le \mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge f(\tau-\ell)\varepsilon\right\} \sim c\ell[f(\tau-\ell)\varepsilon]^{2/\alpha-1}\exp\{-[f(\tau-\ell)\varepsilon]^2/2\}.$$

Воспользуемся оценками (10), (16) и получим, что $\ell/\tau \to 0$, $\ell f(\tau) f'(\tau)\varepsilon^2 \to 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\ell[f(\tau-\ell)\varepsilon]^{2/\alpha-1}\exp\{-[f(\tau-\ell)\varepsilon]^2/2\} &\sim \ell(f(\tau)\varepsilon)^{2/\alpha-1}\exp\{-(f(\tau)\varepsilon)^2/2\} \\
&\sim \ell(f(\tau)\varepsilon)^{-\beta}e^{-r-\gamma^2/2} \to 0.
\end{aligned}$$

Приходим к выводу, что $\mathbb{P}\left\{X_m^\varepsilon \ge (\ell+s)m\varepsilon\right\} \to 0$, так что разность между $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}$ и $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_2\}$ действительно пренебрежимо мала.

В дальнейшем нам многократно понадобится следующая техническая лемма. Её доказательство приведено в п. 1.4.

Лемма 6 *Для любого $\alpha \ne 0$ и любых $\theta(\varepsilon), a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon)$ таких, что при $\varepsilon \to 0$ выполнено $f'(\theta \pm a) \sim f'(\theta)$, $f(\theta)\varepsilon \sim \gamma$, $a = o(\theta)$, $f(\theta)c\varepsilon^2 \to 0$, $f(\theta)f'(\theta)a\varepsilon^2 \to 0$, имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i:ai+b\ge\theta}^{\infty}[f(ai+b)\varepsilon + c\varepsilon]^{2/\alpha-1}\exp\{-[f(ai+b)\varepsilon+c\varepsilon]^2/2\} \\
&\qquad\qquad \sim \frac{e^{\gamma^2/2}}{a}(f(\theta)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\varepsilon)^2/2\}.
\end{aligned}$$

Оценим $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_3\}$. В силу асимптотики Пикандса–Питербарга

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\mathcal{E}_3\} &\le \sum_{i\in I_3}\mathbb{P}\{V_i^\varepsilon \ge f([\ell+s]i)\varepsilon\} \\
&\le c\,s\sum_{i:(\ell+s)(i+1)\ge\tau}[f([\ell+s]i)\varepsilon]^{2/\alpha-1}\exp\{-[f([\ell+s]i)\varepsilon]^2/2\}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 6 с параметрами $a = \ell + s, b = 0, c = 0, \theta = \tau - \ell - s$. Тогда в силу (9), (10) и (13) имеем $a \sim \ell, \theta \sim \tau, (f(\theta)\varepsilon)^2 = (f(\tau)\varepsilon)^2 + o(1)$. Поэтому лемма 6 вместе с соотношением (14) и условием (9) дает асимптотику

$$\begin{aligned} & \frac{cse^{\gamma^2/2}}{a}(f(\theta)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\varepsilon)^2/2\} \\ \sim \quad & \frac{cse^{\gamma^2/2}}{\ell}(f(\tau)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\tau)\varepsilon)^2/2\} = o(1). \end{aligned}$$

Оценим $\mathbb{P}\{\mathcal{E}_4\}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_4\} & \le \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\{\max_{t\in[\sigma+j,\sigma+j+1]} Y(t) > f(\sigma+j)\varepsilon\} \\ & \le \quad c\sum_{j=0}^{\infty}[f(\sigma+j)\varepsilon]^{2/\alpha-1}\exp\{-(f(\sigma+j)\varepsilon)^2/2\}(1+o(1)). \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 6 с параметрами $a = 1, b = \sigma, c = 0, \theta = \sigma$. В силу (15) асимптотика суммы равна

$$ce^{\gamma^2/2}(f(\sigma)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\sigma)\varepsilon)^2/2\} = o(1).$$

Естественно, труднее всего доказать нужную сходимость

$$1 - \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} \to \exp(-c\exp(-r)), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Здесь нашим основным инструментом будет следующее классическое неравенство Слепяна (см. например, [8, §14], [11, лекция 2]).

Лемма 7 *Пусть* $(U_1, ..., U_n)$ *и* $(V_1, ..., V_n)$ *два центрированных гауссовских вектора, причём выполнено* $\mathbb{E}\,U_j^2 = \mathbb{E}\,V_j^2$, $1 \le j \le n$, *и* $\mathbb{E}\,(U_iU_j) \le \mathbb{E}\,(V_iV_j)$, $1 \le i, j \le n$. *любого* $r \in \mathbb{R}$ *верно*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\le j\le n} U_j \ge r\right\} \ge \mathbb{P}\left\{\max_{1\le j\le n} V_j \ge r\right\}.$$

Это неравенство можно записать в чуть более общей форме (см. [11, лекция 2]): в условиях леммы Слепяна для любых неотрицательных $r_1, ..., r_n$ верно

$$\mathbb{P}\{\exists j:\ U_j \ge r_j\} \ge \mathbb{P}\{\exists j:\ V_j \ge r_j\}.$$

Для доказательства этого факта достаточно применить неравенство Слепяна к векторам $(\frac{U_1}{r_1}, ..., \frac{U_n}{r_n})$, $(\frac{V_1}{r_1}, ..., \frac{V_n}{r_n})$ и $r = 1$.

Последнее неравенство очевидным образом распространяется на гауссовские процессы с непрерывными траекториями, заданные на метрическом пространстве (отметим попутно, что стационарные процессы, удовлетворяющие условию (1), заведомо относятся к этому классу). А именно, пусть $\{U(t), t \in T\}$ и $\{V(t), t \in T\}$ – два центрированных гауссовских процесса с непрерывными траекториями, заданных на общем метрическом пространстве T. Пусть $\mathbb{E}\,U(t)^2 = \mathbb{E}\,V(t)^2$, $t \in T$, и $\mathbb{E}\,(U(t_1)U(t_2)) \le$

$\mathbb{E}\,(V(t_1)V(t_2))$, $t_1, t_2 \in T$. Тогда для любых компактных множеств $T_1, ..., T_n$ в T и для любых неотрицательных $r_1, ..., r_n$ верно

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\left\{\max_{t\in T_j} U(t) \ge r_j\right\}\right\} \ge \mathbb{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\left\{\max_{t\in T_j} V(t) \ge r_j\right\}\right\}. \tag{19}$$

Верхняя оценка.

Сравним наш процесс Y с некоторым вспомогательным процессом Z, который определяется следующим образом. Сначала введём в рассмотрение случайный процесс $\widetilde{Y}(t), t \in \cup L_i$, состоящий из независимых между собой копий $Y(t)$ на отрезках L_i.

Далее, положим

$$\delta^2 = \delta^2(\varepsilon) := \sup_{t \ge s(\varepsilon)} |\mathbb{E}\,[Y(t)Y(0)]|\,.$$

Учитывая условие убывания корреляций (2) и условие (8) выбора s, имеем

$$\delta^2 = o((\ln s)^{-1}) = \left\{ \begin{array}{ll} o((-\ln\varepsilon)^{-1}), & \text{при } \lambda = 1, \\ o([\ln(-\ln\varepsilon)]^{-1}), & \text{при } \lambda < 1. \end{array} \right. \tag{20}$$

Пусть ξ – вспомогательная стандартная нормальная случайная величина, независимая с процессом $\widetilde{Y}$. Определим центрированный гауссовский процесс $Z(t)$, $t \in \cup L_i$, равенством

$$Z(t) := \sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{Y}(t) + \delta\xi.$$

Тогда при всех t имеем равенство дисперсий: $\mathbb{E}\,Y(t)^2 = \mathbb{E}\,Z(t)^2 = 1$. Для ковариаций имеем следующие неравенства:

- для t_1 и t_2 из одного отрезка L_i выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[Z(t_1)Z(t_2)] &= \mathbb{E}\left[\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{Y}(t_1) + \delta\xi\right)\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{Y}(t_2) + \delta\xi\right)\right] \\ &= (1-\delta^2)\mathbb{E}\,[Y(t_1)Y(t_2)] + \delta^2 \ge \mathbb{E}\,[Y(t_1)Y(t_2)], \end{aligned}$$

  где последнее неравенство следует из $\mathbb{E}\,[Y(t_1)Y(t_2)] \le \sqrt{\mathbb{E}\,Y(t_1)^2\mathbb{E}\,Y(t_2)^2} = 1$,

- для t_1 и t_2 из разных отрезков L_i и L_j по определению δ и построению отрезков выполнено

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,[Z(t_1)Z(t_2)] &= \mathbb{E}\left[\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{Y}(t_1) + \delta\xi\right)\left(\sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{Y}(t_2) + \delta\xi\right)\right] \\ &= \delta^2 \ge \mathbb{E}\,[Y(t_1)Y(t_2)]. \end{aligned}$$

Положим $\widetilde{X}_i^\varepsilon := \max_{t\in L_i}\widetilde{Y}(t)$. Применяя неравенство Слепяна (19) к процессам Y и Z, получим

$$\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon \ge f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\} \ge \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{\sqrt{1-\delta^2}\,\widetilde{X}_i^\varepsilon + \delta\xi \ge f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\}.$$

Перейдем к дополнительным событиям и для любого $h = h(\varepsilon) > 0$ запишем элементарную оценку,

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon \le f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\} \\
&\le \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{\sqrt{1-\delta^2}\widetilde{X}_i^\varepsilon + \delta\xi \le f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\} \\
&\le \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{\sqrt{1-\delta^2}\widetilde{X}_i^\varepsilon \le f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon\}\right\} + \mathbb{P}\{\delta\xi \le -h\varepsilon\} \\
&= \prod_{i\in I_1}\mathbb{P}\left\{X_i^\varepsilon \le \frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\} + \mathbb{P}\{\xi \le -h\varepsilon/\delta\}, \qquad (21)
\end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено, поскольку $\widetilde{X}_i^\varepsilon$ – независимые копии X_i^ε. Порог $h = h(\delta,\varepsilon)$ мы выберем так, чтобы

$$h\varepsilon/\delta \to \infty, \qquad (22)$$

$$hf(\tau)\varepsilon^2 \to 0, \qquad (23)$$

что возможно при условии (20).

В силу (22) последнее слагаемое в нашей оценке (21) будет пренебрежимо. Теперь проверим, что произведение стремится к $\exp(-c\exp(-r))$. Беря логарифм и переходя к дополнительным событиям, приходим к необходимости проверить сходимость

$$\sum_{i\in I_1}\mathbb{P}\left\{X_i^\varepsilon \ge \frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right\} \to c\exp(-r).$$

По лемме Пикандса–Питербарга мы приходим к эквивалентному выражению

$$c\,\ell\sum_{i\in I_1}\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^2/2\right).$$

Распишем его в виде разности двух сумм

$$c\,\ell\sum_{i:(\ell+s)i+\ell\ge\tau}\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^2/2\right) \qquad (24)$$

и

$$c\,\ell\sum_{i:(\ell+s)i\ge\sigma}\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(-\left(\frac{f([\ell+s]i)\varepsilon + h\varepsilon}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)^2/2\right) \qquad (25)$$

Асимптотика первой суммы получается из леммы 6 при помощи замены – положим $\tilde\varepsilon = \varepsilon/\sqrt{1-\delta^2} \sim \varepsilon$ и возьмем параметры $a = \ell + s \sim \ell, b = 0, c = h$ и $\theta = \tau - \ell \sim \tau$. В силу оценок (23), (13), (10) и (20) верно

$$\begin{aligned}
(f(\theta)\tilde\varepsilon)^2 &= (f(\tau-\ell)\tilde\varepsilon)^2 = (f(\tau)\tilde\varepsilon)^2 + o(1) = (f(\tau)\varepsilon)^2/(1-\delta^2) + o(1) \\
&= (f(\tau)\varepsilon)^2 + O((f(\tau)\varepsilon\delta)^2) + o(1) = (f(\tau)\varepsilon)^2 + o(1).
\end{aligned}$$

С учётом этого и соотношения (14), лемма 6 даёт для (24) асимптотику

$$
\begin{aligned}
& c\,\ell\,\frac{e^{\gamma^2/2}}{a}(f(\theta)\tilde{\varepsilon})^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\tilde{\varepsilon})^2/2\} \\
\sim\quad & c\,\ell\,\frac{e^{\gamma^2/2}}{\ell}(f(\tau)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\tau)\varepsilon)^2/2\} \sim ce^{-r}.
\end{aligned}
$$

В то же время, лемма 6 с тем же $\tilde{\varepsilon}$ и параметрами $a = \ell + s \sim \ell, b = 0, c = h$ и $\theta = \sigma$ даст асимптотику для (25). Поскольку выполнено $(f(\theta)\tilde{\varepsilon})^2 = (f(\sigma)\varepsilon)^2 + o(1)$ и (15), получим

$$
\begin{aligned}
& c\,\ell\,\frac{e^{\gamma^2/2}}{a}(f(\theta)\tilde{\varepsilon})^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-f(\theta\tilde{\varepsilon})^2/2\} \\
\sim\quad & c\,\ell\,\frac{e^{\gamma^2/2}}{\ell}(f(\sigma)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\sigma)\varepsilon)^2/2\} = o(1).
\end{aligned}
$$

Вычитая полученные соотношения, приходим к искомой верхней оценке для $1-\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}$.

Нижняя оценка.

Чтобы оценить $1-\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}$ с другой стороны, введём ещё два вспомогательных процесса Y_1, $\widetilde{Y}_1$ и сравним их между собой. Пусть ξ – вспомогательная стандартная нормальная случайная величина, независимая с процессом Y. Положим $Y_1(t) := Y(t)+\delta\xi$, $t \in \cup L_i$. Далее, рассмотрим последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин ξ_i, независимую с процессом $\widetilde{Y}(t)$, и положим

$$
\widetilde{Y}_1(t) := \widetilde{Y}(t) + \delta\xi_i, \qquad t \in L_i.
$$

Тогда при всех t имеем равенство дисперсий: $\mathbb{E}\,Y_1(t)^2 = \mathbb{E}\,\widetilde{Y}_1(t) = 1+\delta^2$. Для ковариаций имеем следующие неравенства:

- для t_1 и t_2 из одного длинного отрезка L_i выполнено

$$
\mathbb{E}\,[Y_1(t_1)Y_1(t_2)] = \mathbb{E}\,[\widetilde{Y}_1(t_1)\widetilde{Y}_1(t_2)],
$$

- для t_1 и t_2 из разных отрезков L_i и L_j выполнено

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[Y_1(t_1)Y_1(t_2)] &= \mathbb{E}\,[(Y(t_1)+\delta\xi)(Y(t_2)+\delta\xi)] = \mathbb{E}\,[Y(t_1)Y(t_2)] + \delta^2 \\
&\geq 0 = \mathbb{E}\,[\widetilde{Y}_1(t_1)\widetilde{Y}_1(t_2)].
\end{aligned}
$$

Порог $h = h(\delta,\varepsilon)$ выберем, как и ранее, удовлетворяющим условиям (22) и (23). Неравенство Слепяна (19) даёт

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{\widetilde{X}_i^\varepsilon + \delta\xi_i \geq f([\ell+s]i)\varepsilon - h\varepsilon\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{\max_{t\in L_i}\widetilde{Y}_1(t) \geq f([\ell+s]i)\varepsilon - h\varepsilon\}\right\} \\
\geq\quad & \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{\max_{t\in L_i}Y_1(t) \geq f([\ell+s]i)\varepsilon - h\varepsilon\}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon + \delta\xi \geq f([\ell+s]i)\varepsilon - h\varepsilon\}\right\}.
\end{aligned}
$$

Переходя к дополнениям, получим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\}\right\}\ge\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{\widetilde{X}_i^\varepsilon+\delta\xi_i\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\}\right\}\\
=\;&\prod_{i\in I_1}\mathbb{P}\left\{\widetilde{X}_i^\varepsilon+\delta\xi_i\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\right\}=\prod_{i\in I_1}\mathbb{P}\left\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

Далее, применим элементарную оценку

$$\begin{aligned}
1-\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon\le f([\ell+s]i)\varepsilon\}\right\}\\
&\ge \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i\in I_1}\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\}\right\}-\mathbb{P}\{\delta\xi\le -h\varepsilon\}\\
&\ge \prod_{i\in I_1}\mathbb{P}\left\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\le f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\right\}-\mathbb{P}\{\delta\xi\le -h\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

При условии (22), имеем $\mathbb{P}\{\delta\xi\le -h\varepsilon\}\to 0$. Остаётся показать, что произведение оценивается снизу величиной $\exp(-c\exp(-r))(1+o(1))$. Беря логарифм и переходя к дополнительным событиям, приходим к необходимости проверить сходимость

$$\sum_{i\in I_1}\mathbb{P}\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\ge f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\}\le c\exp(-r)(1+o(1)).$$

Воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_1}\mathbb{P}\{X_i^\varepsilon+\delta\xi\ge f([\ell+s]i)\varepsilon-h\varepsilon\}\\
\le\;&\sum_{i\in I_1}\left[\mathbb{P}\{X_i^\varepsilon\ge f([\ell+s]i)\varepsilon-2h\varepsilon\}+\mathbb{P}\{\delta\xi>h\varepsilon\}\right]\\
\le\;&\sum_{i:(\ell+s)i+\ell\ge\tau}\mathbb{P}\{X_i^\varepsilon\ge f([\ell+s]i)\varepsilon-2h\varepsilon\}+N_1\mathbb{P}\{\delta\xi>h\varepsilon\},
\end{aligned}\tag{26}$$

где N_1 обозначает количество элементов множества I_1 и имеет асимптотику

$$N_1\sim\frac{\sigma-\tau}{\ell+s}=\frac{(R-r)B_\varepsilon}{\ell+s}\sim\frac{R}{f'(\tau)\varepsilon\gamma\,\ell}\sim\frac{R}{f(\tau)f'(\tau)\varepsilon^2\,\ell}.$$

Для суммы из (26) по лемме Пикандса–Питербарга мы приходим к эквивалентному выражению

$$c\,\ell\sum_{i\in I_1}\left(f([\ell+s]i)\varepsilon-2h\varepsilon\right)^{2/\alpha-1}\exp\left(-\left(f([\ell+s]i)\varepsilon-2h\varepsilon\right)^2/2\right).\tag{27}$$

Асимптотика для последней суммы получается из леммы 6 с параметрами $a=\ell+s$, $b=0$, $c=-2h$ $\theta=\tau-\ell$, причём, как и в верхней оценке, имеем $a\sim\ell$, $\theta\sim\tau$,

$(f(\theta)\varepsilon)^2 = (f(\tau)\varepsilon)^2 + o(1)$. Поэтому лемма 6 вместе с (14) даёт асимптотику

$$\begin{aligned} &\frac{c\,\ell\, e^{\gamma^2/2}}{a}(f(\theta)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\varepsilon)^2/2\} \\ \sim\quad & c\, e^{\gamma^2/2}(f(\tau)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\tau)\varepsilon)^2/2\} \sim ce^{-r}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли асимптотику первого слагаемого из (26)

$$\sum_{i:(\ell+s)i+\ell\geq\tau} \mathbb{P}\{X_i^\varepsilon \geq f([\ell+s]i)\varepsilon - 2h\varepsilon\} = c\, e^{-r}(1+o(1)).$$

Осталось оценить последнее слагаемое в (26). Для этого придётся уточнить выбор параметров ℓ и R.

Поскольку $\mathbb{P}(\delta\xi > h\varepsilon) \to 0$, то мы можем выбрать $\ell = \ell(\varepsilon)$, хотя и удовлетворяющим условию (10), но всё же таким, что

$$\frac{\mathbb{P}(\delta\xi > h\varepsilon)}{\ell f(\tau) f'(\tau)\varepsilon^2} \to 0.$$

Тогда $R = R(\varepsilon)$ можно выбрать стрямящимся к бесконечности настолько медленно, что

$$N_1\, \mathbb{P}\{\delta\xi > h\varepsilon\} \sim \frac{R\,\mathbb{P}(\delta\xi > h\varepsilon)}{\ell f(\tau) f'(\tau)\varepsilon^2} \to 0.$$

Суммируя оценки для слагаемых в (26), приходим к искомой нижней оценке для $1 - \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1\}$.

1.4 Доказательство технических лемм

1.4.1 Доказательство леммы 3

Из слабого ограничения на скорость роста $f''/f' \asymp x^{-\lambda}$ следует

$$\frac{f'(x)x^\lambda}{f(x)} \asymp \frac{f''(x)x^\lambda + \lambda x^{\lambda-1} f'(x)}{f'(x)} \asymp 1.$$

Тогда при $\lambda < 1$ имеем

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \asymp \frac{(f^{-1}(x))^\lambda}{x},$$

откуда

$$((f^{-1}(x))^{1-\lambda})' \asymp \frac{1}{x}$$

и значит

$$f^{-1}(x) \asymp (\ln x)^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{28}$$

и

$$(f^{-1})'(x) \asymp \frac{(f^{-1}(x))^\lambda}{x} \asymp \frac{(\ln x)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}}{x}.$$

Поэтому
$$2\ln\left(\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=\frac{2\lambda}{1-\lambda}\ln(-\ln\varepsilon)+O(1).$$
Следовательно, мы получаем асимптотику γ при $\lambda<1$. В то же время, при $\lambda=1$ имеем
$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\asymp\frac{f^{-1}(x)}{x},$$
то есть
$$(\ln f^{-1}(x))'\asymp\frac{1}{x},$$
откуда
$$\ln f^{-1}(x)\asymp\ln x. \tag{29}$$
Поэтому
$$\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\asymp f^{-1}(1/\varepsilon)$$
$$2\ln\left(\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=2\ln\left(f^{-1}(1/\varepsilon)\right)+O(1)\asymp-\ln\varepsilon,$$
из чего следует асимптотика γ для $\lambda=1$.

1.4.2 Доказательство леммы 5

Обозначим
$$\Delta=\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon}\left(\left(\frac{2}{\alpha}+\beta-2\right)\frac{\ln\gamma}{\gamma}+\frac{\tilde{R}}{\gamma}\right).$$
Тогда требуется проверить, что
$$f\left(\tau_0+\Delta+o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right)\right)=\frac{\gamma}{\varepsilon}+\Delta f'(\tau_0)+o\left(\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right)=f(\tau_0)+\Delta f'(\tau_0)+o\left(\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right).$$
Заметим, что
$$\Delta\tau_0^{-\lambda}\sim\frac{\ln\gamma}{f'(\tau_0)\gamma\varepsilon\tau_0^{\lambda}}\prec\frac{\ln\gamma}{f(\tau_0)\gamma\varepsilon}\sim\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}.$$
В частности, $\Delta=o(\tau_0)$. К тому же, равномерно по $\omega\in[0,2]$ имеем
$$f(\tau_0+\omega\Delta)\sim f(\tau_0)\quad\text{и}\quad f'(\tau_0+\omega\Delta)\sim f'(\tau_0),$$
поскольку при $\lambda<1$
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{f(\tau_0+\omega\Delta)}{f(\tau_0)}\right)&=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\omega\Delta}(\ln f)'(x)\,dx\asymp\int_{\tau_0}^{\tau_0+\omega\Delta}x^{-\lambda}\,dx\\&\asymp(\tau_0+\omega\Delta)^{1-\lambda}-\tau_0^{1-\lambda}\asymp\omega\Delta\tau_0^{-\lambda}=o(1),\end{aligned}$$
а при $\lambda=1$
$$\ln\left(\frac{f(\tau_0+\omega\Delta)}{f(\tau_0)}\right)\asymp\int_{\tau_0}^{\tau_0+\omega\Delta}x^{-1}\,dx=\ln(1+\omega\Delta\tau_0^{-1})=o(1).$$

Для f' работает аналогичное рассуждение.
Поэтому равномерно по $\omega \in [0,2]$

$$f''(\tau_0+\omega\Delta) \asymp f(\tau_0+\omega\Delta)(\tau_0+\omega\Delta)^{-2\lambda} \sim f(\tau_0)\tau_0^{-2\lambda} \asymp f''(\tau_0).$$

По теореме Лагранжа для некоторого $\omega \in [0,2]$ имеем

$$f\left(\tau_0+\Delta+o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right)\right)-f(\tau_0)=f'(\tau_0+\omega\Delta)\left(\Delta+o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right)\right),$$

ведь поправка в аргументе функции точно меньше 2Δ с некоторого момента. Сразу заметим, что

$$f'(\tau_0+\omega\Delta)\cdot o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right)=o\left(\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right).$$

Значит достаточно показать, что

$$(f'(\tau_0+\omega\Delta)-f'(\tau_0))\Delta=o\left(\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right),$$

что равносильно

$$\frac{(f'(\tau_0+\omega\Delta)-f'(\tau_0))\ln\gamma}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}=o\left(\frac{1}{\gamma\varepsilon}\right).$$

По теореме Лагранжа для некоторого $\tilde\omega \in [0,\omega]$

$$f'(\tau_0+\omega\Delta)-f'(\tau_0)=\omega\Delta f''(\tau_0+\tilde\omega\Delta) \asymp \omega\Delta f''(\tau_0) \asymp \omega\Delta f'(\tau_0)\tau_0^{-\lambda}.$$

Поэтому осталось воспользоваться тем, что

$$\Delta\tau_0^{-\lambda}\ln\gamma=o(1).$$

1.4.3 Выбор параметров $\ell(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$

Напомним, что мы выбираем параметры ℓ и s, для которых выполнено

$$\begin{aligned}\ln s \succ \gamma^2, \text{то есть } \ln s \succ -\ln(\varepsilon) \text{ при } \lambda=1 \text{ и } \ln s \succ \ln(-\ln\varepsilon) \text{ при } \lambda<1,\\ s/\ell \to 0,\\ f(\tau)f'(\tau)\varepsilon^2\,\ell \to 0.\end{aligned}$$

Покажем, что требуемый выбор s и ℓ возможен. Мы знаем асимптотику γ из соотношений (6) и (7). При $\lambda<1$ имеем

$$\gamma^2 \asymp \ln(-\ln\varepsilon),$$

но в то же время

$$f(\tau)>1/\varepsilon,$$

откуда в силу асимптотической монотонности f и соотношения (28) имеем

$$\tau > f^{-1}(1/\varepsilon) \asymp (-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Так что

$$\gamma^2 \tau^{-\lambda} \prec \ln(-\ln\varepsilon)^2(-\ln\varepsilon)^{\frac{-\lambda}{1-\lambda}},$$

поэтому можно выбрать ℓ и s, удовлетворяющие соотношениям (8), (9), (10).
При $\lambda = 1$ имеем

$$\gamma^2 \asymp -\ln\varepsilon$$

и из монотонности f и тождества (29) следует

$$\ln\tau > \ln f^{-1}(1/\varepsilon) \succ -\ln\varepsilon,$$

так что для некоторой константы $d > 0$

$$\tau > \frac{1}{\varepsilon^d}.$$

Поэтому

$$\gamma^2\tau^{-1} \succ (-\ln\varepsilon)\varepsilon^d$$

и значит можно выбрать требуемые ℓ и s при $\lambda = 1$.

1.4.4 Доказательство леммы 6

Монотонное убывание функции $x \mapsto x^{2/\alpha-1}\exp\{-x^2/2\}$ при больших x вместе с соотношением $(f(\theta - a) + c)\varepsilon \to \infty$ позволяет зажать сумму между двумя интегралами

$$\frac{1}{a}\int_{\theta\pm a}^{\infty}(f(x)\varepsilon + c\varepsilon)^{2/\alpha-1}\exp\{-(f(x)\varepsilon + c\varepsilon)^2/2\}dx.$$

Сделаем замену $y = (f(x)+c)\varepsilon$, то есть $x = f^{-1}(y/\varepsilon - c)$. Значит $dx = \frac{1}{\varepsilon}(f^{-1})'(y/\varepsilon - c)dy$. Интегралы можно будет переписать в виде

$$\frac{1}{a\varepsilon}\int_{(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon}^{\infty} y^{2/\alpha-1}\exp\{-y^2/2\}(f^{-1})'(y/\varepsilon - c)dy.$$

С интегралом разберемся так: нужно оценить $(f^{-1})'(y/\varepsilon - c)$ для больших y и показать, что асимптотика на самом деле сосредоточена в начале луча, а для y из $[(1-\rho)\gamma, (1+\rho)\gamma]$ воспользоваться регулярностью и условием

$$(f(\theta \pm a) + c)\varepsilon \sim \gamma.$$

Поскольку $f(\theta \pm a)\varepsilon \sim \gamma$, то с некоторого места выполнено

$$[f(\theta \pm a)\varepsilon, (1 + \rho/2)f(\theta \pm a)\varepsilon] \subset [(1-\rho)\gamma, (1+\rho)\gamma].$$

Поэтому, используя наложенное на f условие регулярности (4), имеем

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{a\varepsilon}\int_{(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon}^{(1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon} y^{2/\alpha-1}\exp\{-y^2/2\}(f^{-1})'(y/\varepsilon-c)dy \\
\sim\quad & \frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}\int_{(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon}^{(1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon} y^{2/\alpha-1}\exp\{-y^2/2\}(y-c\varepsilon)^{\beta}dy \\
\sim\quad & \frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}\int_{(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon}^{(1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon} y^{2/\alpha+\beta-1}\exp\{-y^2/2\}dy \\
\sim\quad & \frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}([f(\theta\pm a)+c]\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-[(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon]^2/2\} \\
\sim\quad & \frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}(f(\theta)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\varepsilon)^2/2\}.
\end{aligned}
$$

В то же время, вторая часть условия регулярности (5) дает оценку

$$
(f^{-1})'\left(\frac{y-c\varepsilon}{\varepsilon}\right) < (y-c\varepsilon)^{\tilde\beta}(f^{-1})'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),
$$

из которой следует

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{a\varepsilon}\int_{(1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon}^{\infty} y^{2/\alpha-1}\exp\{-y^2/2\}(f^{-1})'(y/\varepsilon-c)dy \\
\prec\ & \frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}((1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon)^{2/\alpha+\tilde\beta-2}\exp\{-[(1+\rho/2)(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon]^2/2\} \\
& = o\left(\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}(f(\theta)\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-(f(\theta)\varepsilon)^2/2\}\right).
\end{aligned}
$$

Получается итоговая асимптотика интеграла

$$
\frac{(f^{-1})'(1/\varepsilon)}{a\varepsilon}([f(\theta\pm a)+c]\varepsilon)^{2/\alpha+\beta-2}\exp\{-[(f(\theta\pm a)+c)\varepsilon]^2/2\}.
$$

2 Примеры

Ниже приведены интересные варианты границ, для которых нормировочные константы можно найти в явном виде.

Степенная граница.

Если $f(x)=x^d, d>0$, то $f''(x)=(d-1)x^{-1}f'(x)$, то есть $\lambda=1$. При этом $f^{-1}(x)=x^{1/d}$ и $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{d}x^{1/d-1}$. Поэтому мы выбираем

$$
\gamma^2 = 2\ln\left(\frac{1}{d}\varepsilon^{-1/d}\right)+o(1) = \frac{-2\ln\varepsilon}{d} - 2\ln d + o(1).
$$

При этом для всех y выполнено

$$
(f^{-1})'(y/\varepsilon) = \frac{1}{d}y^{1/d-1}\varepsilon^{1-1/d} = y^{1/d-1}(f^{-1})'(1/\varepsilon),
$$

то есть выполнено условие регулярности с параметром $\beta = 1/d - 1$.
Возьмем

$$\tau_0 = f^{-1}(\gamma/\varepsilon) = (\gamma/\varepsilon)^{1/d}.$$

При этом

$$f'(\tau_0) = d\frac{f(\tau_0)}{\tau_0} = d\frac{\gamma}{\varepsilon\tau_0},$$

а значит, подставляя в формулу теоремы 2, получаем

$$A_\varepsilon = \tau_0 + \frac{\tau_0}{\gamma}\left[\left(\frac{2}{\alpha} + \beta - 2\right)\frac{\ln\gamma}{\gamma}\right] + o\left(\frac{\tau_0}{\gamma^2}\right); \quad B_\varepsilon = \frac{\tau_0 + o(\tau_0)}{\gamma^2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \frac{\gamma^{\frac{1}{d}}}{\varepsilon^{\frac{1}{d}}} + \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{d} - 3\right)\frac{\gamma^{\frac{1}{d}-2}\ln\gamma}{\varepsilon^{\frac{1}{d}}} + o\left(\frac{\gamma^{\frac{1}{d}-2}}{\varepsilon^{\frac{1}{d}}}\right) \\
&= \frac{(-2\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2d}-1}}{d^{\frac{1}{2d}}\varepsilon^{\frac{1}{d}}}\left(-2\ln\varepsilon + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2d} - \frac{3}{2}\right)\ln(-2\ln\varepsilon)\right. \\
&- \left.\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2d} - \frac{1}{2}\right)\ln d\right), \\
B_\varepsilon &= \frac{\gamma^{\frac{1}{d}-2}}{\varepsilon^{\frac{1}{d}}} = \frac{(-2\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2d}-1}(1+o(1))}{d^{\frac{1}{2d}}\varepsilon^{\frac{1}{d}}}.
\end{aligned}$$

Экспоненциальная граница.

Если $f(x) = \exp\{x^q\}, 0 < q < 1$, то

$$f'(x) = qx^{q-1}\exp\{x^q\}$$

и

$$f''(x) = q(q-1)x^{q-2}\exp\{x^q\} + q^2x^{2q-2}\exp\{x^q\}.$$

Поэтому выполнено сильное ограничение на скорость роста

$$f''(x)/f'(x) \sim qx^{-(1-q)}.$$

При этом

$$(f^{-1})'(t) = \frac{(\ln t)^{\frac{1}{q}-1}}{qt},$$

То есть

$$\gamma^2 = \left(\frac{2}{q} - 2\right)\ln(-\ln\varepsilon) - 2\ln q + o(1).$$

Поэтому выполнено первое условие регулярности с $\beta = -1$. При $y \in [0.5\gamma, 2\gamma]$ имеем

$$(f^{-1})'(y/\varepsilon) = \frac{(\ln y - \ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}}{qy/\varepsilon} \sim y^{-1}(f^{-1})'(1/\varepsilon).$$

Второе условие регулярности тоже выполнено, а значит функция подходит под условие теоремы. Возьмем
$$\tau_0 = f^{-1}(\gamma/\varepsilon) = (\ln\gamma - \ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}},$$
тогда
$$f'(\tau_0)\varepsilon = q\tau_0^{q-1} f(\tau_0)\varepsilon = q\tau_0^{q-1}\gamma.$$
Поэтому в формуле для A_ε и B_ε нас интересует точность
$$o\left(\frac{1}{f'(\tau_0)\varepsilon\gamma}\right) = o\left(\frac{\tau_0^{1-q}}{q\gamma^2}\right) = o\left(\frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}}{\gamma^2}\right).$$

Получается
$$A_\varepsilon = \tau_0 + \frac{\tau_0^{1-q}}{q\gamma}\left[\left(\frac{2}{\alpha} + \beta - 2\right)\right]\frac{\ln\gamma}{\gamma} + o\left(\frac{\tau_0^{1-q}}{\gamma^2}\right); \quad B_\varepsilon = \frac{\tau_0^{1-q}(1+o(1))}{q\gamma^2}.$$

Тогда запишем
$$\tau_0 = (-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}\ln\gamma + o\left(\frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}}{\gamma^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\ln\gamma &= \frac{1}{2}\ln\gamma^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left[\frac{2}{q} - 2\right]\ln(-\ln\varepsilon)\right) + \ln\left(1 - \frac{q}{[\frac{1}{q} - 1]\ln(-\ln\varepsilon)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\ln(-\ln\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{q} - 2\right) - \frac{\ln q}{[\frac{2}{q} - 2]\ln(-\ln\varepsilon)} + o\left(\frac{1}{\ln(-\ln\varepsilon)}\right).
\end{aligned}$$

Откуда нетрудно найти, что
$$\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}}{q}\left(q(-\ln\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln\ln(-\ln\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{q} - 2\right)\right.\\
&+ \left.\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\right)\frac{\ln\ln(-\ln\varepsilon)}{[\frac{2}{q} - 2]\ln(-\ln\varepsilon)} + \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{2}{q} - 2\right) - \ln q}{[\frac{2}{q} - 2]\ln(-\ln\varepsilon)}\right),\\
B_\varepsilon &= \frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{q}-1}}{(2-2q)\ln(-\ln\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Список литературы

[1] F.Aurzada, V.Betz, M.Lifshits, Breaking a chain of interacting Brownian particles. https://arxiv.org/abs/1912.05168.

[2] F.Aurzada, V.Betz, M.Lifshits, Universal break law for chains of Brownian particles with nearest neighbour interaction. Preprint `www.arxiv.org/abs/2010.07706`.

[3] Н. А. Карагодин, М. А. Лифшиц, О распределении времени окончательного ухода гауссовского процесса под медленно растущую линейную границу. Теория вероятн. и ее примен., 2021, том 66, выпуск 3, страницы 419–432.

[4] S.M.Berman, Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. Ann. Math. Statist., 35, 502–516, 1964.

[5] Я.Галамбош, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, М.: Наука, 1984.

[6] K.Debicki, P.Liu, The time of ultimate recovery in Gaussian risk model. Extremes, 22(3), 499-521, 2019. https://arxiv.org/abs/1801.02469.

[7] J.Hüsler, Y.Zhang, On first and last ruin times of Gaussian processes. Statist. Probab. Lett., 78(10):1230–1235, 2008.

[8] M.Lifshits, Gaussian random functions, Kluwer, Dordrecht, 1995.

[9] Ch.Paroissin, L.Rabehasaina, First and last passage times of spectrally positive Lévy processes with application to reliability. Methodology and Computing in Applied Probability, 17, 351–372, 2015.

[10] J.Pickands III, Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 75–86.

[11] В.И.Питербарг, Двадцать лекций о гауссовских процессах, М.: МЦНМО, 2015.

[12] K. Debicki, E. Hashorva, L. Ji, Parisian ruin of self-similar gaussian risk processes. https://arxiv.org/abs/1405.2958.

[13] J. Hüsler, V.I. Piterbarg. A limit theorem for the time of ruin in a Gaussian ruin problem. Stochastic Process. Appl., 118(11):2014–2021, 2008.

[14] P. Salminen, On the first hitting time and the last exit time for a Brownian Motion to/from a moving boundary, Advances in Applied Probability Vol. 20, No. 2 (Jun., 1988), pp. 411-426.