

# Движение кругового профиля в присутствии точечного источника.

Артемова Е. М.<sup>1</sup>

научный руководитель: Ветчанин Е. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

**Аннотация:** Рассмотрено движение кругового цилиндра в идеальной жидкости в поле неподвижного источника. Показано, что при постоянной интенсивности источника система обладает интегралом момента импульса и интегралом энергии. Найдены условия, при которых уравнения движения, редуцированные на уровень интеграла момента импульса, допускают неустойчивую неподвижную точку. Эта неподвижная точка соответствует круговому движению цилиндра вокруг источника. Построена обратная связь, которая обеспечивает асимптотическую стабилизацию упомянутой выше фиксированной точки за счет изменения интенсивности источника.

**Ключевые слова:** управление, идеальная жидкость, обратная связь, движение в поле источника.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>2</b>
1.1	Случай подвижного источника переменной интенсивности . . . . .	2
1.2	Случай подвижного источника постоянной интенсивности . . . . .	4
1.3	Случай неподвижного источника постоянной интенсивности . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Уравновешенный круговой профиль</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Стабилизация движения по окружности</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>12</b>

## Введение

Анализ движения точечных особенностей (источники, вихри, вихреисточники, диполи) в жидкости и их взаимодействия с твердыми телами представляют отдельный интерес. В частности, движение  $N$  источников рассматривалось в работах [17, 18]. Также рассматривались модели движения точечных вихрей на плоскости [21, 22, 23, 24], сфере [26], криволинейных поверхностях [25, 29] и под действием внешнего периодического возмущения [30, 31]. Более сложные модели движения вихреисточников и диполей рассматривались в работах [33, 32, 34]. Анализ совместного движения точечных вихрей и гладкого твердого тела был выполнен в работах [27, 28, 37, 20]. В работах [28, 35] на основе условия Кутты – Чаплыгина [11, 36] моделировался сход точечных вихрей с острых кромок твердого тела

# 1 Математическая модель

## 1.1 Случай подвижного источника переменной интенсивности

Рассмотрим плоскопараллельное движение неуравновешенного кругового профиля в присутствии точечного источника в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Будем считать, что жидкость совершает потенциальное безциркуляционное движение и покоится на бесконечности.

Для построения математической модели введем обозначения для параметров системы:

- $m_c$  — масса профиля,
- $I_c$  — центральный момент инерции профиля,
- $R$  — радиус профиля,
- $d$  — расстояние между геометрическим центром профиля и центром масс,
- $q$  — интенсивность источника, в общем случае являющаяся заданной функцией времени.

Поскольку мы рассматриваем плоскопараллельное движение, то величины  $m_c$ ,  $I_c$ ,  $q$  будем считать отнесенными к единице длины профиля.

Для описания движения рассматриваемой системы введем три системы координат: неподвижную (инерциальную)  $OXY$ , подвижную  $Cx'y'$ , жестко связанную с профилем, и  $Oxy$  вращающуюся синхронно с профилем (см. рис. 1). Будем считать, что начало подвижной системы координат  $C$  совпадает с геометрическим центром профиля, а центр масс профиля лежит на положительной части оси  $Cx'$ .

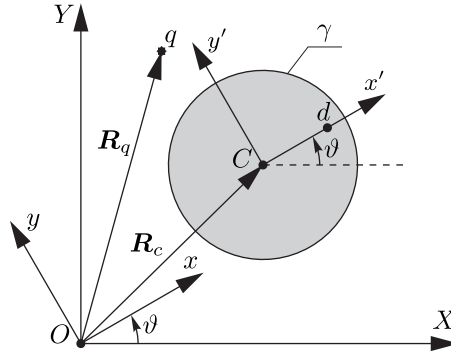


Рис. 1:  $OXY$  — неподвижная система координат,  $Cx'y'$  — подвижная система координат, связанная с профилем,  $Oxy$  — система координат, вращающаяся синхронно с профилем.

Положение профиля относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором его геометрического центра  $\mathbf{R}_c = (X_c, Y_c)$ , а ориентацию профиля — углом  $\vartheta$  между положительными направлениями осей  $OX$  и  $Cx'$ . Положение источника относительно неподвижной системы координат будем задавать радиус-вектором  $\mathbf{R}_q = (X_q, Y_q)$ . Таким образом, конфигурационное пространство системы пятимерно и представляет собой  $\mathcal{Q} = \{(X_q, Y_q, X_c, Y_c, \vartheta) \mid (X_q - X_c)^2 + (Y_q - Y_c)^2 > R^2\} \approx \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2$ . Величины, задающие конфигурацию системы, показаны на рис. 1.

Движение рассматриваемой системы определяется взаимодействием профиля и источника с окружающей жидкостью. Поскольку движение жидкости считается потенциальным, оно может быть полностью описано комплексным потенциалом. Для построения комплексного потенциала каждой точке плоскости  $OXY$  поставим в соответствие комплексное число  $Z = X + iY$ , тогда комплексный потенциал может быть записан в виде:

$$W = -\frac{R^2 \dot{Z}_c}{Z - Z_c} + \frac{q}{2\pi} \ln(Z - Z_q) + \frac{q}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{Z - Z_c} - \overline{Z_q - Z_c}\right), \quad (1)$$

где  $Z_c = X_c + iY_c$ ,  $Z_q = X_q + iY_q$  — комплексно значные функции времени, задающие положение центра профиля и источника соответственно.

**Замечание 1.** Первое и второе слагаемые в выражении (1) являются комплексными потенциалами движущегося цилиндра и источника соответственно [12]. Третье слагаемое в выражении (1) возникает в результате применения теоремы Милна – Томсона [9] и описывает изменение потока, создаваемого источником, вследствие добавления в него кругового профиля.

Для построения уравнений движения введем следующие величины:

$$\begin{aligned} P_x &= m_c \dot{X}_c - m_c d \dot{\vartheta} \sin \vartheta, & P_y &= m_c \dot{Y}_c + m_c d \dot{\vartheta} \cos \vartheta, \\ P_\vartheta &= m_c d (-\dot{X}_c \sin \vartheta + \dot{Y}_c \cos \vartheta) + (I_c + m_c d^2) \dot{\vartheta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P_x$ ,  $P_y$  — проекции импульса профиля на оси неподвижной системы координат,  $P_\vartheta$  — момент импульса профиля относительно его геометрического центра.

Изменение импульса профиля определяется главным вектором сил давления  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , действующих на него со стороны жидкости. Компоненты вектора  $\mathbf{F}$  могут быть вычислены по формуле Седова [8]

$$F_x + iF_y = \overline{\frac{i\rho}{2} \oint_{\gamma} \left( \frac{dW}{dZ} \right)^2 dZ} + \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{dSZ_c}{dt} + i\rho \oint_{\gamma} Z \frac{dW}{dZ} dZ \right). \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $S = \pi R^2$  — площадь профиля,  $\gamma$  — граница кругового профиля. Поскольку движение жидкости считается безциркуляционным, в формуле (3) опущены слагаемые связанные с циркуляцией.

Подставив потенциал (1) в формулу (3) и применив теорему о вычетах функции комплексного переменного, получим следующее явное представление главного вектора сил давления в комплексной форме:

$$\begin{aligned} F_x + iF_y &= \rho q R^2 \frac{(Z_q - Z_c)^2}{|Z_q - Z_c|^4} \dot{Z}_q - \rho \dot{q} R^2 \frac{Z_q - Z_c}{|Z_q - Z_c|^2} + \\ &+ \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi} \frac{(Z_q - Z_c)}{(|Z_q - Z_c|^2 - R^2)|Z_q - Z_c|^2} - \rho \pi R^2 \ddot{Z}_c. \end{aligned} \quad (4)$$

Вычисленные таким образом компоненты силы  $F_x$ ,  $F_y$  отнесены к единице длины цилиндра. Последнее слагаемое в выражении (4) совпадает с классическим выражением для силы, обусловленной эффектом присоединенных масс [16], и, действующей на круговой профиль при его ускоренном движении.

**Замечание 2.** Отметим, что вычисление сил (4) может быть выполнено также в вещественной форме

$$F_x = - \oint_{\gamma} p dy, \quad F_y = \oint_{\gamma} p dx,$$

где давление  $p$  однозначно вычисляется с помощью интеграла Коши – Лагранжа [12]. Однако вычисления в комплексной форме по формуле (3) на практике оказывают проще.

Поскольку профиль является круговым, то момент сил давления, вычисленный относительно геометрического центра профиля, равен нулю. При этом момент импульса  $P_\vartheta$

может изменяться только вследствие вращения профиля. Таким образом, уравнения движения профиля примут вид:

$$\dot{P}_x = F_x, \quad \dot{P}_y = F_y, \quad \dot{P}_\vartheta + d(P_x \cos \vartheta + P_y \sin \vartheta) \dot{\vartheta} = 0. \quad (5)$$

Дополним уравнения (5) уравнениями движения источника. Согласно [14] скорость движения источника равна скорости жидкости в точке  $Z = Z_q$ , вычисленной по регулярной части потенциала (1) в той же точке:

$$\dot{Z}_q = \left. \overline{\left( \frac{dW^*}{dZ} \right)} \right|_{Z=Z_q}, \quad W^* = W - \frac{q}{2\pi} \ln(Z - Z_q). \quad (6)$$

Уравнения (2), (5), (6) представляют собой замкнутую систему и полностью описывают совместное движение кругового профиля и точечного источника переменной интенсивности в идеальной жидкости.

## 1.2 Случай подвижного источника постоянной интенсивности

В случае источника постоянной интенсивности ( $\dot{q} = 0$ ) уравнения движения профиля (2) могут быть представлены в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_c} - \frac{\partial L}{\partial X_c} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_c} - \frac{\partial L}{\partial Y_c} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad (7)$$

с лагранжианом

$$L = T - U - (\mathbf{A}, \dot{\mathbf{R}}_c), \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

1.  $T$  — кинетическая энергия профиля и жидкости

$$T = \frac{1}{2} (m_c + \rho\pi R^2) (\dot{X}_c^2 + \dot{Y}_c^2) + m_c d (-\dot{X}_c \sin \vartheta + \dot{Y}_c \cos \vartheta) \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} (I_c + m_c d^2) \dot{\vartheta}^2,$$

2.  $U$  — скалярный потенциал

$$U = -\frac{\rho q^2}{4\pi} \left( \ln((X_c - X_q)^2 + (Y_c - Y_q)^2) - \ln((X_c - X_q)^2 + (Y_c - Y_q)^2 - R^2) \right),$$

3.  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал

$$\mathbf{A} = -\frac{\rho q R^2}{(X_q - X_c)^2 + (Y_q - Y_c)^2} (\mathbf{R}_q - \mathbf{R}_c).$$

Правые части уравнений движения источника (6) также выражаются через лагранжиан (8) следующим образом

$$\dot{X}_q = -\frac{1}{\rho q} \frac{\partial L}{\partial X_q}, \quad \dot{Y}_q = -\frac{1}{\rho q} \frac{\partial L}{\partial Y_q}, \quad (9)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (7), (9) в частично лагранжевой форме, которая описывает совместное движение кругового профиля и источника постоянной интенсивности.

### 1.3 Случай неподвижного источника постоянной интенсивности

В случае неподвижного источника постоянной интенсивности ( $\dot{X}_q = 0$ ,  $\dot{Y}_q = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ ) уравнения движения профиля (7) могут быть представлены в гамильтоновой форме. При этом без потери общности будем считать, что источник расположен в начале неподвижной системы координат ( $X_q = Y_q = 0$ ). Выполнения данных условий всегда можно добиться с помощью замены переменных

$$X_c \rightarrow X_c - X_q, \quad Y_c \rightarrow Y_c - Y_q.$$

Для приведения уравнений (7) к гамильтоновой форме введем новые обобщенные импульсы  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$ ,  $\Pi_\vartheta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_c} = P_x + \rho\pi R^2 \dot{X}_c - A_x, \quad \Pi_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_c} = P_y + \rho\pi R^2 \dot{Y}_c - A_y, \quad \Pi_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = P_\vartheta, \quad (10) \\ A_x = \frac{\rho q R^2 X_c}{X_c^2 + Y_c^2}, \quad A_y = \frac{\rho q R^2 Y_c}{X_c^2 + Y_c^2}. \end{aligned}$$

и выполним преобразование Лежандра

$$H = \Pi_x \dot{X}_c + \Pi_y \dot{Y}_c + \Pi_\vartheta \dot{\vartheta} - L \Big|_{\dot{X}_c, \dot{Y}_c, \dot{\vartheta} \rightarrow \Pi_x, \Pi_y, \Pi_\vartheta}. \quad (11)$$

Тогда уравнения движения кругового профиля (7) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}_c = \frac{\partial H}{\partial \Pi_x}, \quad \dot{Y}_c = \frac{\partial H}{\partial \Pi_y}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \Pi_\vartheta} \\ \dot{\Pi}_x = -\frac{\partial H}{\partial X_c}, \quad \dot{\Pi}_y = -\frac{\partial H}{\partial Y_c}, \quad \dot{\Pi}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} \end{aligned} \quad (12)$$

где гамильтониан  $H$  задается следующим выражением

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}(\mathcal{P}, \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{P}) - \frac{\rho q^2}{4\pi} \left( \ln(X_c^2 + Y_c^2) - \ln(X_c^2 + Y_c^2 - R^2) \right), \quad (13) \\ \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \Pi_x + A_x \\ \Pi_y + A_y \\ \Pi_\vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} m_c + \rho\pi R^2 & 0 & -m_c d \sin \vartheta \\ 0 & m_c + \rho\pi R^2 & m_c d \cos \vartheta \\ -m_c d \sin \vartheta & m_c d \cos \vartheta & I_c + m_c d^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Замечание 3.** Нам не удалось представить в гамильтоновой форме полную систему уравнений (7), (9), описывающую совместное движение кругового профиля и точечного источника постоянной интенсивности. Препятствием к такому представлению является вид лагранжиана (8) и форма уравнений (9).

Отметим, что в подобной системе, описывающей движение кругового профиля в присутствии точечных вихрей [3], представление в гамильтоновой форме оказывается возможным.

Уравнения (12) допускают два первых интеграла: интеграл энергии, совпадающий с гамильтонианом (13), и интеграл момента импульса

$$K = \Pi_\vartheta + \Pi_y X_c - \Pi_x Y_c = \text{const}, \quad (14)$$

который является следствием существования поля симметрии

$$\mathbf{u} = -Y_c \frac{\partial}{\partial X_c} + X_c \frac{\partial}{\partial Y_c} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \Pi_y \frac{\partial}{\partial \Pi_x} + \Pi_x \frac{\partial}{\partial \Pi_y}. \quad (15)$$

Далее исследуем динамику системы и свойства уравнений (12) в случае *уравновешенного* профиля ( $d = 0$ ).

## 2 Уравновешенный круговой профиль

Рассмотрим движение уравновешенного ( $d = 0$ ) кругового профиля в поле неподвижного источника постоянной интенсивности. Оказывается, что в данном случае может быть выполнен полный качественный анализ динамики.

При  $d = 0$  гамильтониан (13) принимает вид:

$$H = H_{rot} + H_{trans}, \quad (16)$$

$$H_{rot} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}_\vartheta^2}{I_c}, \quad (17)$$

$$H_{trans} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{P}_x^2}{m} + \frac{\mathcal{P}_y^2}{m} \right) - \frac{\rho q^2}{4\pi} \left( \ln(X_c^2 + Y_c^2) - \ln(X_c^2 + Y_c^2 - R^2) \right), \quad (18)$$

где введены следующие обозначения

$$\mathcal{P}_x = m\dot{X}_c, \quad \mathcal{P}_y = m\dot{Y}_c, \quad \mathcal{P}_\vartheta = m\dot{\vartheta}, \quad m = m_c + \rho\pi R^2. \quad (19)$$

При этом уравнения (12) распадаются на две независимых подсистемы, описывающие вращательное

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_\vartheta} = \frac{\partial H_{rot}}{\partial \mathcal{P}_\vartheta}, \quad \dot{\mathcal{P}}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial H_{rot}}{\partial \vartheta}, \quad (20)$$

и поступательное движения профиля

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_x} = \frac{\partial H_{trans}}{\partial \mathcal{P}_x}, & \dot{\mathcal{P}}_x &= -\frac{\partial H}{\partial X_c} = -\frac{\partial H_{trans}}{\partial X_c} \\ \dot{Y}_c &= \frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}_y} = \frac{\partial H_{trans}}{\partial \mathcal{P}_y}, & \dot{\mathcal{P}}_y &= -\frac{\partial H}{\partial Y_c} = -\frac{\partial H_{trans}}{\partial Y_c} \end{aligned} \quad (21)$$

с гамильтонианами (17) и (18) соответственно.

В первую очередь рассмотрим подсистему (20). Поскольку гамильтониан (17) явно не зависит от  $\vartheta$ , то данная переменная является циклической, а соответствующий ей обобщенный импульс представляет собой первый интеграл:

$$C = \mathcal{P}_\vartheta = \text{const}. \quad (22)$$

На фиксированном уровне  $C = c$  первого интеграла (22) решение подсистемы (20) может быть представлено в виде:

$$\mathcal{P}_\vartheta = c = \text{const}, \quad \vartheta(t) = \vartheta(0) + \frac{c}{I_c} t. \quad (23)$$

Далее рассмотрим подсистему (21). Для ее исследования удобнее перейти к полярным координатам:

$$s = |Z_c| = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}, \quad \alpha = \arg Z_c. \quad (24)$$

При этом обобщенные импульсы, соответствующие координатам  $s, \alpha$  определим как:

$$\mathcal{P}_s = m\dot{s}, \quad \mathcal{P}_\alpha = ms^2\dot{\alpha}. \quad (25)$$

Уравнения движения (21) в новых переменных (24), (25) остаются каноническими:

$$\dot{s} = \frac{\partial H_{trans}}{\partial \mathcal{P}_s}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial H_{trans}}{\partial \mathcal{P}_\alpha}, \quad \dot{\mathcal{P}}_s = -\frac{\partial H_{trans}}{\partial s}, \quad \dot{\mathcal{P}}_\alpha = -\frac{\partial H_{trans}}{\partial \alpha}, \quad (26)$$

где гамильтониан (18) принимает вид

$$H_{trans} = \frac{1}{2m} \left( \mathcal{P}_s^2 + \frac{\mathcal{P}_\alpha^2}{s^2} \right) + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left( 1 - \frac{R^2}{s^2} \right). \quad (27)$$

Гамильтониан (27) явно не зависит от угла  $\alpha$ , следовательно, обобщенный импульс  $\mathcal{P}_\alpha$  является первым интегралом:

$$F = \mathcal{P}_\alpha = \text{const}. \quad (28)$$

**Замечание 4.** В рассматриваемом случае ( $d = 0$ ) с учетом выражений (24), (25) первый интеграл (14) может быть представлен в виде:

$$K = \mathcal{P}_\vartheta + \mathcal{P}_\alpha = C + F = \text{const}.$$

На фиксированном уровне  $F = f$  первого интеграла (28) уравнения для  $s$  и  $\mathcal{P}_s$  отделяются от системы (26) и принимают вид

$$\dot{s} = \frac{\mathcal{P}_s}{m}, \quad \dot{\mathcal{P}}_s = \frac{f^2}{ms^3} - \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi s(s^2 - R^2)}. \quad (29)$$

При этом эволюция фазовой переменной  $\alpha$  выражается с помощью квадратуры

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{f}{m} \int_0^t \frac{d\tau}{s^2(\tau)}.$$

Данная квадратура необходима для реконструкции движения профиля относительно неподвижной системе координат.

Уравнения (29) допускают первый интеграл

$$H_{trans} = \frac{1}{2m} \mathcal{P}_s^2 + U(s), \quad (30)$$

$$U(s) = \frac{1}{2m} \frac{f^2}{s^2} + \frac{\rho q^2}{4\pi} \ln \left( 1 - \frac{R^2}{s^2} \right), \quad (31)$$

который является ограничением гамильтониана (27) на фиксированный уровень  $F = f$  первого интеграла (28). Также уравнения (29) обладают инволюцией

$$t \rightarrow -t, \quad s \rightarrow s, \quad \mathcal{P}_s \rightarrow -\mathcal{P}_s. \quad (32)$$

**Замечание 5.** Движения редуцированной системы (29) при  $F = f > 0$  и  $F = -f$  совпадают. Следовательно, достаточно выполнить анализ динамики при  $f > 0$ .

Таким образом, анализ движения уравношенного кругового профиля в поле неподвижного источника постоянной интенсивности сводится к изучению гамильтоновой системы (29) с одной степенью свободы.

В дальнейшем анализе динамики системы (29) будем опираться на классический подход теоретической механики, основанный на изучении линий уровня гамильтониана (фазового портрета) системы и бифуркаций, возникающих при изменении значений параметров [1, 5].

В первую очередь отметим, что гамильтониан (30) определен при  $s > R$ , и не зависимо от значений параметров обладает следующим свойством:

$$\lim_{s \rightarrow R+0} H_{trans}(s, \mathcal{P}_s) = -\infty. \quad (33)$$

Гамильтониан (30) является четной функцией  $\mathcal{P}_s$ , то есть  $H_{trans}(s, -\mathcal{P}_s) = H_{trans}(s, \mathcal{P}_s)$ , и при фиксированном  $s$  является монотонно возрастающей функцией на промежутке  $\mathcal{P}_s \in (0, +\infty)$ . Таким образом, все неподвижные точки системы лежат на прямой  $\mathcal{P}_s = 0$  и соответствуют критическим точкам потенциала (31).

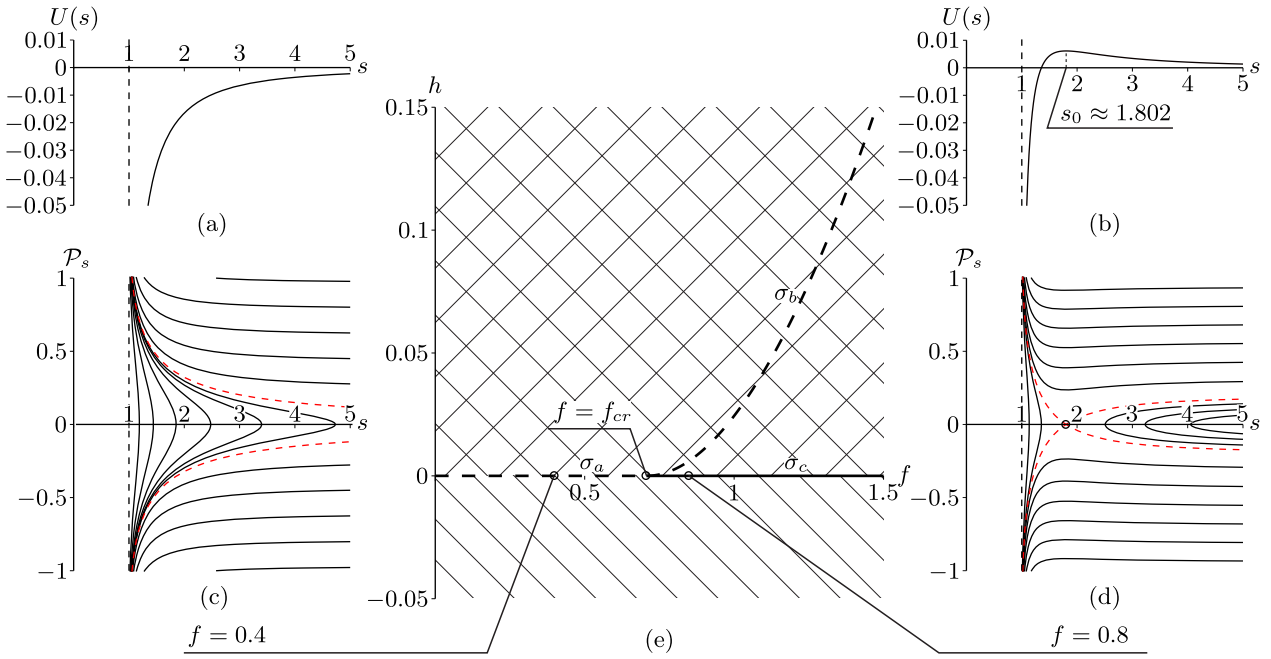


Рис. 2: Характерный вид а) потенциала (31) при  $f < f_{cr}$ , б) потенциала (31) при  $f > f_{cr}$ , в) фазового портрета системы при  $f < f_{cr}$ , г) фазового портрета системы при  $f > f_{cr}$ . е) Бифуркационная диаграмма. Значения параметров  $m_c = 1$ ,  $R = 1$ ,  $q = 1$ ,  $\rho = 1$ .

Выделяется два качественно различных случая:

А. Потенциал  $U(s)$  (см. рис. 2б) имеет максимум в точке

$$s_0 = R|f| \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi f^2 - \rho m q^2 R^2}} \quad (34)$$

при  $f > f_{cr}$ , где

$$f_{cr} = |q|R \sqrt{\frac{\rho m}{2\pi}}.$$

Точка максимума (34) соответствует седловой неподвижной точке системы (29):

$$s = s_0, \quad \mathcal{P}_s = 0. \quad (35)$$

В исходном пространстве данной неподвижной точке соответствует движение кругового профиля вокруг точечного источника по окружности

$$\begin{aligned} X_c &= s_0 \cos \alpha(t), & Y_c &= s_0 \sin \alpha(t), \\ \alpha(t) &= \alpha(0) + \frac{ft}{ms_0^2}. \end{aligned}$$

Характерный вид фазового портрета системы при  $f > f_{cr}$  показан на рис. 2д. На рис. 2д красными пунктирными линиями отмечены устойчивые и неустойчивые многообразия седловой точки (35). Пунктирная линия  $s = R$  соответствует особенности (33).

В. При  $f < f_{cr}$  потенциал  $U(s)$  является монотонно возрастающей функцией на промежутке  $s \in (R, +\infty)$  (см. рис. 2а), следовательно, система не имеет неподвижных точек. Характерный вид фазового портрета системы при  $f < f_{cr}$  показан на рис. 2с. На рис. 2с красными пунктирными линиями отмечены критические траектории, разделяющие различные типы движения. Пунктирная линия  $s = R$  соответствует особенности (33).



Из фазовых портретов (см. рис. 2с и 2d) видно, что почти все фазовые траектории системы (29) либо «убегают» на бесконечность, либо «притягиваются» к источнику. Исключение составляет единственная неподвижная точка, существующая при  $f > f_{cr}$ .

Бифуркационная диаграмма системы на плоскости первых интегралов  $(f, h)$ , где  $h$  — уровень интеграла (30), приведена на рис. 2е. В силу замечания 5 мы привели только часть бифуркационной диаграммы, соответствующую значениям  $f > 0$ .

При фиксированном  $f$  каждому значению  $h > 0$  (двойная штриховка на рис. 2е) соответствует по две фазовых траектории, значению  $h < 0$  (одинарная штриховка на рис. 2е) — одна фазовая траектории.

Линия  $\sigma_a$  соответствует критическим траекториям системы, возникающим в системе при  $f < f_{cr}$ . Линия  $\sigma_b$  соответствует неподвижной точке (35) и ее устойчивым и неустойчивым многообразиям. Линия  $\sigma_c$  соответствует границе листа.

### 3 Стабилизация движения по окружности

Оказывается, что описанное выше неустойчивое движение по окружности может быть стабилизировано с помощью управления интенсивностью источника через обратную связь. При этом уравнения, описывающие движение в этом случае, перестают быть гамильтоновыми.

Как и в предыдущем случае положение профиля относительно источника будем задавать полярными координатами (24), которым соответствуют импульсы (25). При  $\dot{q} \neq 0$  рассматриваемая система также допускает интеграл момента (28). Уравнения движения на фиксированном уровне  $F = \mathcal{P}_\alpha = f$  интеграла (28) примут вид:

$$\dot{s} = \frac{\mathcal{P}_s}{m}, \quad \dot{\mathcal{P}}_s = \frac{f^2}{ms^3} - \frac{\rho q^2 R^2}{2\pi s(s^2 - R^2)} + \frac{\rho R^2 \dot{q}}{s}. \quad (36)$$

В качестве управления удобно выбрать производную  $\dot{q}$ , так как данная величина входит в уравнения (36) линейно. Для доказательства управляемости и синтеза обратной связи оказывается удобным выполнить следующую замену переменных

$$s = s, \quad \mathcal{P}_s = \frac{\mathcal{P}}{s}. \quad (37)$$

С учетом замены (37) уравнения (36) примут вид

$$\dot{s} = \frac{\mathcal{P}}{ms}, \quad \dot{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}^2 + f^2}{ms^2} - \frac{\rho R^2 q^2}{2\pi(s^2 - R^2)} + \rho R^2 u, \quad \dot{q} = u, \quad (38)$$

где  $u$  — управляющее воздействие. Фазовое пространство управляемой системы (38) трехмерно, обозначим его  $\mathcal{Q} = \{(s, \mathcal{P}, q) \mid s > R\}$ .

В отсутствие управления ( $u = 0$ ) система (38) допускает однопараметрическое семейство неподвижных точек

$$s = s_0 = R|f| \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi f^2 - \rho m q^2 R^2}}, \quad \mathcal{P} = 0, \quad q = q_0, \quad (39)$$

где  $q_0$  — параметр удовлетворяющий следующему неравенству

$$0 < |q_0| < \frac{|f|}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{m\rho}}. \quad (40)$$

Анализ управляемости и синтез обратной связи выполним по аналогии с работой [10]. Для этого зафиксируем величину  $q_0$  и линеаризуем уравнения (38) в окрестности соответствующей неподвижной точки семейства (39):

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}\mathbf{w} + \mathbf{b}u, \quad (41)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \mathcal{P} \\ \delta q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho R^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{1}{ms_0}, \quad \beta = -\frac{2f^2}{ms_0^3} + \frac{\rho R^2 s_0 q_0^2}{\pi(s_0^2 - R^2)^2}, \quad \gamma = -\frac{\rho R^2 q_0}{\pi(s_0^2 - R^2)}.$$

Здесь компоненты вектора  $\mathbf{w}$  задают отклонение от неподвижной точки  $(s_0, 0, q_0)$ .

Якобиан  $\mathbf{J}$  обладает следующим набором собственных чисел и правых собственных векторов:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\alpha\beta}, \quad (42)$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\sqrt{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Отметим, что собственные числа  $\lambda_2, \lambda_3$  являются действительными, а нулевое собственное число  $\lambda_1$  соответствует сдвигу по параметру  $q_0$  семейства неподвижных точек (39).

Поскольку система (41) является линейной системой с постоянными коэффициентами, ее управляемость может быть исследована на основе критерия Калмана [15]. Согласно данному критерию система (41) будет вполне управляемой, если выполнено следующее условие

$$\det \|\mathbf{b}, \mathbf{J}\mathbf{b}, \mathbf{J}^2\mathbf{b}\| = -\frac{2\rho^2 q_0^2 f^2 R^8 (2m_c f^2 + m\rho^2 R^2 q_0^2)}{m^3 s_0^5 (s_0^2 - R^2)^2 (2\pi f^2 - m\rho R^2 q_0^2)^2} \neq 0. \quad (44)$$

Из выражения (44) видно, что линеаризованная система является вполне управляемой. Таким образом, оказывается возможным построить управление, приводящее систему к нулевому решению.

Будем строить управление через обратную связь в виде линейной комбинации отклонений  $\delta s, \delta \mathcal{P}, \delta q$ :

$$u = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T = \text{const}. \quad (45)$$

Подставим выражение (45) в уравнения (41), получим

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{J}_f \mathbf{w}, \quad \mathbf{J}_f = \mathbf{J} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}^T. \quad (46)$$

Из уравнений (46) видно, что для стабилизации нулевого решения необходимо выбрать коэффициенты  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) таким образом, чтобы все собственные числа матрицы  $\mathbf{J}_f$  имели отрицательную действительную часть. При этом нулевое решение становится асимптотически устойчивым, тогда в исходной системе движение по окружности становится предельным циклом.

В общем случае собственные числа матрицы  $\mathbf{J}_f$  задаются громоздкими выражениями. Тем не менее, их анализ может быть выполнен в некоторых частных случаях. Для этого оказывается удобным перейти в базис собственных векторов матрицы  $\mathbf{J}$  с помощью следующей замены переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{w}, \quad (47)$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица, столбцами которой являются собственные векторы (43). Тогда уравнения (46) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{\Omega}\mathbf{y}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda} + \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{g}^T, \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{f}^T = \mathbf{g}^T\mathbf{K}^{-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

**Замечание 6.** Нетрудно показать, что для  $\tilde{\mathbf{b}}$  справедливо следующее

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &> 0, \quad \tilde{b}_2(-q_0) = -\tilde{b}_3(q_0), \\ \tilde{b}_2(q_0)q_0 &< 0, \quad \tilde{b}_3(q_0)q_0 < 0, \quad \tilde{b}_2 > \tilde{b}_3. \end{aligned} \quad (49)$$

Рассмотрим частные случаи, когда один из коэффициентов  $g_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равен нулю.

1. При  $g_1 = 0$  матрица  $\mathbf{J}_f$  обладает следующим набором собственных чисел

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \tilde{b}_2g_2 + \tilde{b}_3g_3 \pm \sqrt{(\tilde{b}_2g_2 + \tilde{b}_3g_3)^2 + 4\lambda_2(\tilde{b}_2g_2 - \tilde{b}_3g_3 + \lambda_2)} \right) \quad (50)$$

Таким образом, при  $g_1 = 0$  одно из собственных чисел матрицы  $\mathbf{J}_f$  является нулевым, то есть обратная связь не обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого решения уравнений (46).

2. При  $g_2 = 0$  матрица  $\mathbf{J}_f$  обладает следующим набором собственных чисел

$$\mu_1 = \lambda_2, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \tilde{b}_1g_1 + \tilde{b}_3g_3 - \lambda_2 \pm \sqrt{(\tilde{b}_1g_1 + \tilde{b}_3g_3)^2 + \lambda_2(2\tilde{b}_1g_1 - 2\tilde{b}_3g_3 + \lambda_2)} \right) \quad (51)$$

Очевидно, что при  $g_2 = 0$  одно из собственных чисел матрицы  $\mathbf{J}_f$  является положительным, таким образом обратная связь также не обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого решения уравнений (46).

3. При  $g_3 = 0$  матрица  $\mathbf{J}_f$  обладает следующим набором собственных чисел:

$$\mu_1 = \lambda_3, \quad \mu_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \tilde{b}_1g_1 + \tilde{b}_2g_2 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\tilde{b}_1g_1 + \tilde{b}_2g_2 + \lambda_2)^2 - 4\tilde{b}_1g_1\lambda_2} \right). \quad (52)$$

Из (52) следует что собственное число  $\mu_1$  всегда является отрицательным. Согласно выражениям для  $\mu_{2,3}$  и неравенствам (49), действительная часть собственных чисел  $\mu_{2,3}$  будет отрицательной, если коэффициенты  $g_1, g_2$  удовлетворяют следующим неравенствам:

$$g_2 > -\frac{\tilde{b}_1g_1 + \lambda_2}{\tilde{b}_2} \quad \text{при} \quad q_0 > 0, \quad g_2 < -\frac{\tilde{b}_1g_1 + \lambda_2}{\tilde{b}_2} \quad \text{при} \quad q_0 < 0 \quad (53)$$

Возвращаясь в исходный базис и к исходным переменным, получим следующую обратную связь:

$$u = \frac{g_2}{2\alpha}(s - s_0) + \frac{g_2}{2\sqrt{\alpha\beta}}sp_s + \left( \frac{g_1}{\beta} + \frac{g_2\gamma}{2\alpha\beta} \right) (q - q_0). \quad (54)$$

Управление (54) было построено на основе линеаризованных уравнений и при заданном  $q_0$  гарантирует стабилизацию неподвижной точки (35) лишь при малых отклонениях от нее.

Тем не менее, численные эксперименты показывают, что обратная связь (54) позволяет стабилизировать орбитальное движение профиля и при существенных отклонениях.

Исследуем численно поведение системы с обратной связью (54) в зависимости от начальных условий при следующих значениях параметров:

$$m_c = 1, \quad R = 1, \quad \rho = 1, \quad q_0 = 1, \quad f = 1, \quad g_1 = 0.8, \quad g_2 = 3 \quad (55)$$

На рис. 3 для различных начальных значений интенсивности источника  $q(0)$  на плоскости начальных условий  $(x(0), \mathcal{P}_s(0))$  показаны области притяжения к неподвижной точке (белый цвет), области притяжения к источнику (серый цвет), области отталкивания (черный цвет).

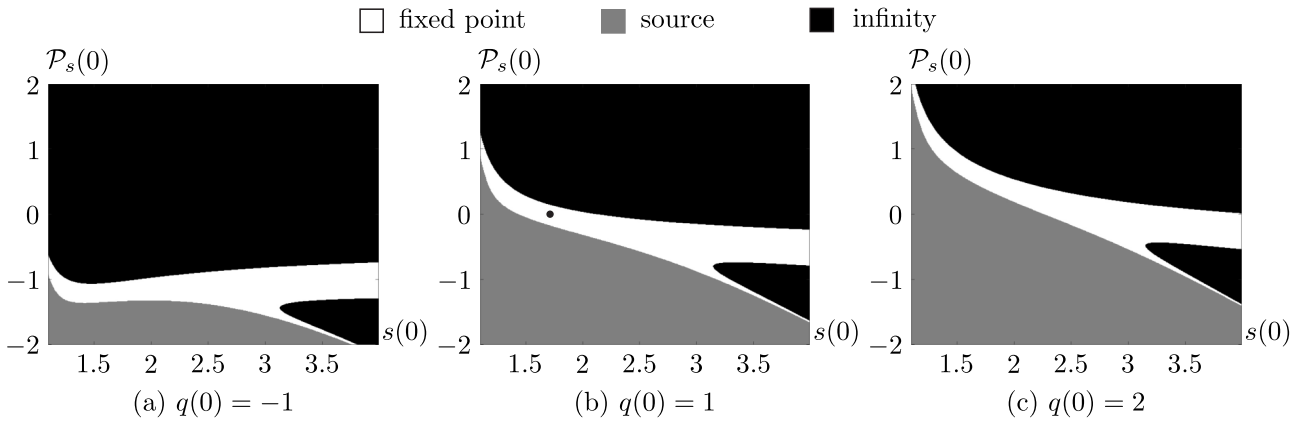


Рис. 3: Сечения области притяжения при различных значениях  $q_0$  и значениях параметров (55).

## 4 Заключение

В работе были получены уравнения, описывающие движение неуравновешенного кругового профиля в поле точечного источника. Показано, что в случае уравновешенного профиля и неподвижного источника постоянной интенсивности, уравнения могут быть представлены в гамильтоновой форме. Данные уравнения помимо интеграла энергии, совпадающего с гамильтонианом, допускают дополнительный первый интеграл. Таким образом, рассматриваемая система является интегрируемой. Представлен анализ динамики данной интегрируемой системы, приведена бифуркационная диаграмма.

Изучено частное решение редуцированной на уровень интеграла системы – неподвижная точка, которая соответствует движению уравновешенного профиля вокруг источника. Показано, что данное движение неустойчиво, однако оно может быть стабилизировано с помощью обратной связи. Приведена процедура построения обратной связи и выполнена численная оценка областей притяжения к стабилизируемому решению.

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики, 1989
- [2] Artemova E. M., Vetchanin E. V., Control of the motion of a circular cylinder in an ideal fluid using a source, Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 604-617

- [3] Bizyaev I. A., Mamaev I. S., Dynamics of a pair of point vortices and a foil with parametric excitation in an ideal fluid, *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 618-627
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., The Dynamics of Vortex Rings: Leapfrogging, Choreographies and the Stability Problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 1-2, pp. 33-62
- [5] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S., Topology and stability of integrable systems, *Russian Mathematical Surveys*, 2010, vol. 65, no. 2, pp. 259-318
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S., Symmetries and Reduction in Nonholonomic Mechanics, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553-604
- [7] Hairer, E., Lubich, Ch., and Wanner, G., *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 31, New York: Springer, 2006
- [8] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966, с. 27.
- [9] Милн-Томсон Л. М. и др. Теоретическая гидродинамика: Пер. с англ. – Мир, 196
- [10] Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ, 2005, т. 69, № 4, с. 569-583
- [11] Kutta W.M. Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten, *Illustr. aeronaut. Mitteilungen*, 1902, vol. 6, pp. 133–135
- [12] Kochin, N. E., Kibel, I. A., and Roze, N. V., *Theoretical Hydrodynamics*, New York: Wiley, 1964
- [13] Jung C. Poincare map for scattering states // *J. Phys. A: Math. Gen.* 19 (1986) 1345-1353
- [14] Фридман А.А., Полубаринова П.Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // Геофизический сборник, ????????? с.9-23
- [15] Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in Mathematical System Theory*. N.Y.: McGraw-Hill, 1969
- [16] Korotkin, A. I. *Added Masses of Ship Structures (Fluid Mech. Appl., vol. 88*, Springer, Dordrecht, 2009)
- [17] Bogomolov V. A. The movement of an ideal fluid of constant density in the presence of drains, *Izv. USSR Academy of Sciences, Mechanics of liquid and gas*, 1976, no. 4, pp. 21-27. (In Russian).
- [18] Fridman A. A., Polubarinova P. Ya. On moving singularities of a flat motion of an incompressible fluid, In: *Geofizicheskii Sbornik*, 1928, pp. 9–23. (In Russian).
- [19] Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций): Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2006. — 356 с.
- [20] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices, *Physics of Fluids*, 2002, vol. 14, No. 3, pp. 1214–1227.

- [21] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Transition to chaos in dynamics of four point vortices on a plane, *Doklady physics*, 2006, vol. 51, no. 5, pp. 262–267
- [22] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Absolute and Relative Choreographies in the Problem of the Motion of Point Vortices in a Plane, *Doklady Physics*, 2005, vol. 71, no. 1, pp. 139–144
- [23] Gebhard B., Ortega R. Stability of Periodic Solutions of the  $N$ -vortex Problem in General Domains, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 649–670
- [24] Kurakin L. G., Ostrovskaya I. V. On the Stability of Thomson’s Vortex  $N$ -gon and a Vortex Tripole/Quadrupole in Geostrophic Models of Bessel Vortices and in a Two-Layer Rotating Fluid: a Review, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, Vol. 15, no. 4, pp. 533–542
- [25] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. Three Vortices in Spaces of Constant Curvature: Reduction, Poisson Geometry, and Stability, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 5, pp. 613–636.
- [26] Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson’s Configurations of Vortices on a Sphere, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2000, vol. 5, no. 2, pp. 189–200
- [27] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and  $n$  point vortices in a perfect fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2003, vol. 8, no. 4, pp. 449–462.
- [28] Mason R. J. Fluid Locomotion and Trajectory Planning for Shape-Changing Robots, *PhD Dissertation*, Pasadena, Calif.: California Institute of Technology, 2003, 264 pp.
- [29] Koiller J., Castilho C., Rodrigues A. R. Vortex Pairs on the Triaxial Ellipsoid: Axis Equilibria Stability, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, vol. 24, no. 1, pp. 61–79
- [30] Vetchanin E. V., Kazakov A. O. Bifurcations and chaos in the dynamics of two point vortices in an acoustic wave, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 4, 1650063, 13 pp.
- [31] Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Dynamics of Two Point Vortices in an External Compressible Shear Flow, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 893–908
- [32] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Dynamics of Vortex Sources in a Deformation Flow, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 3, pp. 367–376.
- [33] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Dynamics of Three Vortex Sources, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 694–701.
- [34] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the problem of motion of vortex sources on a plane, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2006, vol. 11, no. 4, pp. 455–466.
- [35] Michelin S., Llewellyn Smith S. G. An Unsteady Point Vortex Method for Coupled Fluid-Solid Problems, *Theoret. Comput. Fluid Dyn*, 2009, vol. 23, no. 2, pp. 127–153.
- [36] Chaplygin S. A. On the pressure of a plane-parallel flow on obstructing bodies (to the theory of an airplane), *Collection of Mathematics*, 1910, vol. XXVIII, pp. 184–229. (In Russian).
- [37] Ramodanov S. M. Motion of a Circular Cylinder and  $N$  Point Vortices in a Perfect Fluid, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, no. 3, pp. 291–298.