Несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действий непериодических аменабельных групп

Георгий Вепрев

19 сентября 2020 г.

Аннотация

В работе Я. Серафина обсуждается восходящий к Б. Вейсу вопрос о существовании топологической динамической системы, в которой могут быть реализованы все метрические системы нулевой энтропии и только они. Вариационный принцип гарантирует, что такая система должна иметь нулевую топологическую энтропию. В работе Я. Серафина доказано, что такой системы не существует в случае одного преобразования (действий группы $\mathbb{Z}$). Мы доказываем несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действий любой непериодической аменабельной группы.

1 Введение

В данной работе обобщается результат статьи [7] на случай непериодической аменабельной группы G. А именно, мы доказываем, что не существует системы нулевой топологической энтропии универсальной для действий группы G нулевой метрической энтропии. Основным инструментом доказательства служит понятие масштабированной энтропии, введенное в работах А. М. Вершика [9, 10]. Теория масштабированной энтропии получила развитие в работах [11, 13, 6, 14]. В настоящей работе мы доказываем нижнюю оценку на энтропию усреднения метрик (лемма 5), которая позволяет вычислить масштабирующую энтропию для серии примеров действий группы G. Существование такой (см. определение 4) серии примеров влечёт отсутствие универсальной топологической системы нулевой энтропии.

1.1 Классические понятия

Напомним классические понятия энтропийной теории динамических систем (см., например, [4]). Счетная группа G называется *аменабельной* если она удовлетворяет условию Фёльнера, то есть, существует такая последовательность конечных подмножеств $F_n \subset G$, что для любого $g \in G$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Такую последовательность F_n мы будем называть левой последовательностью Фёльнера. Аналогично определяется правая последовательность Фельнера. Мы будем рассматривать левые действия группы G на пространствах Лебега, не содержащих атомов, то есть, на пространствах, изоморфных единичному отрезку $[0,1]$ с мерой Лебега.

1.1.1 Топологическая энтропия

Пусть аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X,d). Топологическая энтропия действия определяется следующим образом:

$$h_{top}(X,G) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|F_n|} \log \operatorname{spn}(d,F_n,\varepsilon) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|F_n|} \log \operatorname{sep}(d,F_n,\varepsilon),$$

где $\operatorname{spn}(d,F_n,\varepsilon)$ и $\operatorname{sep}(d,F_n,\varepsilon)$ — размер минимальной ε–сети и максимального ε–разделенного множества соответственно для метрики

$$G^n_{max} d(x,y) = \max_{g\in F_n} d(gx,gy), \qquad x,y\in X.$$

Величина $h_{top}(X,G)$ не зависит от выбора фёльнеровской последовательности множеств F_n и является инвариантом топологической динамической системы.

1.1.2 Метрическая энтропия

Предположим, что группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Для измеримого разбиения ξ пространства (X,μ) символом $H(\xi)$ обозначим его *энтропию*, т. е. следующую неотрицательную величину:

$$H(\xi) = -\int\limits_X \log\mu(\xi(x))\, \mathrm{d}\mu(x),$$

где символом $\xi(x)$ обозначен элемент разбиения ξ, содержащий точку $x\in X$. Далее, для измеримого разбиения ξ с конечной энтропией $H(\xi)$ определим его энтропию относительно действия группы G:

$$h(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|F_n|} H\left(\bigvee_{g\in F_n} g^{-1}\xi\right),$$

где символом $\vee$ обозначено произведение разбиений. *Метрическая энтропия действия группы G* определяется следующим образом:

$$h(X,\mu,G) = \sup\{h(\xi)\colon H(\xi)<+\infty\}.$$

Метрическая энтропия не зависит от выбора фёльнеровской последовательности F_n и является инвариантом метрической динамической системы.

1.1.3 Вариационный принцип

Хорошо известен вариационный принцип для действия аменабельной группы G. А именно, пусть $M_G(X)$ есть множество G–инвариантных вероятностных борелевских мер на компактном метрическом пространстве X. Тогда

$$h_{top}(X,G) = \sup_{\mu\in M_G(X)} h(X,\mu,G),$$

в частности, множество $M_G(X)$ не пусто. Отметим также, что $h_{top}(X,G) \geqslant h(X,\mu,G)$, в частности, если топологическая энтропия равна нулю, то и метрическая тоже.

1.2 Универсальная система нулевой энтропии

В работе [7] предложено следующее определение, удобное в контексте данной работы.

Определение 1. Топологическая система (X, G) называется *универсальной* для класса $\mathcal{S}$ метрических действий группы G, если выполняются следующие два условия.

1. Для любой $\mu \in M_G(X)$ система (X, μ, G) принадлежит классу $\mathcal{S}$.
2. Для любой системы $(Y, \nu, G) \in \mathcal{S}$ существует инвариантная мера μ на (X, G), такая, что метрическая система (X, μ, G) изоморфна (Y, ν, G).

В работе [7] обсуждается восходящий к Б. Вейссу вопрос о существовании универсальной топологической системы для класса $\mathcal{S}$, состоящего из систем нулевой энтропии. В силу вариационного принципа и первого свойства из определения 1, такая топологическая система должна обладать нулевой топологической энтропией.

Вопрос 1. Существует ли система (X, G) нулевой топологической энтропии, универсальная для класса всех действий нулевой метрической энтропии?[1]

В работе [7] дан отрицательный ответ на вопрос 1 для действия группы $\mathbb{Z}$, однако вопрос для действия аменабельных групп остается открытым. Подход работы [7] основан на понятии символической и метрической сложности динамической системы (см. также [2]), а также специальных конструкциях динамических систем с промежуточным ростом метрической сложности. Автор указывает, что данный подход для аменабельных групп не дал искомого результата ввиду недостаточной степени развития теории символических продолжений. Стоит отметить, что понятие метрической сложности тесно связано с понятием масштабированной энтропии, используемой нами. Основным результатом данной работы является следующая теорема, дающая отрицательный ответ на поставленный вопрос 1 для случая непериодической аменабельной группы G.

Теорема 1. *Пусть счетная непериодическая аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X, d). Предположим, что для любой динамической системы (Y, ν, G) нулевой метрической энтропии существует мера μ на X, инвариантная относительно G, такая, что*

$$(X, \mu, G) \cong (Y, \nu, G).$$

Тогда топологическая энтропия системы (X, d, G) положительна.

Автор благодарен В. В. Рыжикову, который привлек его внимание к данному вопросу.

[1] Отметим, что часто термин "универсальная" употребляется в чуть ином смысле — требуется выполнение лишь второго условия из определения 1. В таком случае вопрос становится не столь содержательным — сдвиг на $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ допускает реализацию любого автоморфизма T с метрической энтропией $h(T)$ меньшей 1, это следует из теоремы Кригера об образующей [5]. Теорема Кригера справедлива для действий аменабельных групп, а также более общего класса счетных групп.

2 Масштабированная энтропия

2.1 Эпсилон–энтропия и масштабирующая энтропийная последовательность

Основным инструментом в доказательстве теоремы 1 служит понятия масштабированной энтропии, введенное в работах Вершика [9, 10]. В работах Ференци [2] и Катка–Тувено [3] рассматривалось близкое понятие метрической сложности динамической системы, использующее символическое кодирование и метрики Хэмминга. Предложенный Вершиком подход основывается на динамике функций нескольких переменных, а именно, *допустимых* полуметрик (см. [11]). Теория масштабированной энтропии получила развитие в работах Вершика, Петрова и Затицкого [11, 13, 6, 14]. Напомним основные понятия и утверждения этой теории.

Пусть $\rho\colon (X^2,\mu^2)\to[0,+\infty)$ — измеримая полуметрика на пространстве с мерой (X,μ), то есть, измеримая по мере μ^2 неотрицательная симметричная функция, удовлетворяющая неравенству треугольника. Для положительного ε определим её *ε–энтропию* $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)$ следующим образом. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого пространство X можно представить в виде объединения измеримых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_k$, таких, что $\mu(X_0)<\varepsilon$ и при $i=1,\ldots,k$, диаметр множества X_i в полуметрике ρ меньше ε. Положим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)=\log_2 k.$$

Если же такого k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)=+\infty$.

Полуметрика называется *допустимой*, если она сепарабельна на некотором подмножестве $X_0\subset X$, таком, что $\mu(X\setminus X_0)=0$. В работе [11] изучаются свойства допустимых полуметрик. В частности, доказано, что полуметрика допустима тогда и только тогда, когда её ε–энтропия конечна при любом $\varepsilon>0$.

Пусть группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Символом $g^{-1}\rho$ мы будем обозначать сдвинутую полуметрику: $g^{-1}\rho(x,y)=\rho(gx,gy)$, $x,y\in X$. Ясно, что полуметрика $g^{-1}\rho$ допустима тогда и только тогда, когда полуметрика ρ является таковой.

Зафиксируем некоторую последовательность $\sigma=\{S_n\}_{n=1}^\infty$ конечных подмножеств группы G, будем называть ее *оснащением* группы G. Измеримая полуметрика ρ называется *порождающей* относительно (G,σ), если ее сдвиги под действием элементов $\cup_n S_n$ разделяют точки mod 0, т. е. существует такое подмножество $X_0\subset X$ полной меры, что для любых различных $x,y\in X_0$ найдется такой элемент $g\in\cup_n S_n$, что $g^{-1}\rho(x,y)>0$. Отметим, что измеримая метрика всегда является порождающей. Символом $G^n_{av}\rho$ мы будем обозначать усреднение сдвигов полуметрики ρ под действием элементов множества S_n:

$$G^n_{av}\rho(x,y)=\frac{1}{|S_n|}\sum_{g\in S_n}\rho(gx,gy),\qquad x,y\in X.$$

Рассмотрим следующую величину

$$\Phi(n,\varepsilon)=\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,G^n_{av}\rho).$$

Априори, функция $\Phi(n,\varepsilon)$ зависит от n, ε и полуметрики ρ. Однако, предполагается, что асимптотическое поведение по n этой функции в некотором смысле не зависит от полуметрики ρ и числа ε (см. [9, 10]). Напомним определение, предложенное в работах [6, 14].

Определение 2. Пусть $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ — действие группы G с оснащением σ автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Пусть ρ — допустимая полуметрика на (X, μ). Последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *масштабирующей энтропийной последовательностью* для полуметрики ρ и действия группы G с оснащением σ, если при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}(X, \mu, G_{av}^n \rho) \asymp h_n.$$

Здесь и далее для двух последовательностей ϕ и ψ соотношение $\phi(n) \asymp \psi(n)$ означает, что существуют такие положительные константы c и C, что $c\phi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant C\phi(n)$. Отметим, что, вообще говоря, имеет смысл говорить сразу о классе масштабирующих последовательностей. Действительно, как видно из определения 2, если последовательность $\{h_n\}$ является масштабирующей и для некоторой другой последовательности $\{h'_n\}$ имеет место соотношение $h'_n \asymp h_n$, то $\{h'_n\}$ тоже является масштабирующей.

В работах [13, 14] доказано, что, если последовательность h_n является масштабирующей для какой-то суммируемой допустимой метрики ρ, то она является масштабирующей и для любой другой суммируемой допустимой метрики. Суммируемость полуметрики ρ означает, что её интеграл по множеству X^2 конечен, то есть $\rho \in L_1(X^2, \mu^2)$, в частности, любая ограниченная измеримая полуметрика заведомо является суммируемой. Отметим, что это верно для любого оснащения σ, но рассматриваются лишь настоящие метрики. Для порождающих полуметрик необходимо наложить некоторые условия на оснащение σ (см. работу [14]).

Определение 3. Оснащение $\sigma = \{S_n\}$ группы G называется *подходящим*, если для любого $g \in \cup S_n$ и любого $\delta > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $g_1, \dots, g_k \in G$, что выполнено неравенство

$$\left| gS_n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} S_n g_j \right| \leqslant \delta |S_n|.$$

Отметим, что любая (левая) последовательность Фёльнера аменабельной группы является подходящим оснащением. Для действия группы G с подходящим оснащением в работах [13, 14] доказано, что если последовательность h_n является масштабирующей для какой-то суммируемой допустимой порождающей полуметрики ρ, то она является масштабирующей и для любой другой суммируемой допустимой порождающей полуметрики. Таким образом, класс масштабирующих последовательностей не зависит от выбора полуметрики и образует метрический инвариант действия группы с оснащением.

Также необходимо отметить, что масштабирующая последовательность действия группы, вообще говоря, априори может зависеть от выбора оснащения. В работе [6] показано, что при некоторых условиях на оснащение σ счетной группы G, если масштабирующая энтропийная последовательность существует, то существует такая возрастающая субаддитивная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h_n \asymp f(|S_n|)$. Однако, на данный момент не известно, можно ли выбрать такую функцию f одновременно для всех оснащений. Более того, не известно, зависит ли стабильность (см. пункт 2.2) системы от выбора оснащения σ.

В работе [6] показано, что для действия одного автоморфизма (т. е. группы $\mathbb{Z}$ с естественным оснащением отрезками) класс масштабирующих последовательностей, если не является пустым, содержит возрастающую субаддитивную последовательность, а в работе [14] были построены примеры автоморфизмов с наперед заданными возрастающими субаддитивными масштабирующими последовательностями, тем самым были полностью описаны непустые классы масштабирующих последовательностей автоморфизмов. Кроме того, в работе [14] были построены примеры действий группы $\bigoplus \mathbb{Z}_2$ с наперед заданными масштабирующими последовательностями промежуточного роста, и эта конструкция может быть с легкостью модифицирована для случая действия групп $\bigoplus_k \mathbb{Z}_{r_k}$ для произвольной последовательности натуральных чисел $\{r_k\}$.

2.2 Стабильные и нестабильные системы, примеры почти полного роста

Как было недавно выяснено автором данной работы, масштабирующая последовательность существует не всегда, даже для действия группы $\mathbb{Z}$. Системы, для которых масштабирующая последовательность существует, мы будем называть *стабильными*. Недавно автором работы были построены примеры *нестабильных* систем, т. е. таких систем, для которых класс масштабирующих последовательностей пуст.

Понятие масштабирующей последовательности, однако, может быть обобщено и на нестабильные случаи. На множестве функций из $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$ зададим отношение частичного порядка $\preceq$ следующим образом:

$$\Psi \preceq \Phi \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \Psi(n, \varepsilon) \lesssim \Phi(n, \delta). \tag{1}$$

Здесь и далее соотношение $\phi(n) \lesssim \psi(n)$ для двух последовательностей ϕ и ψ означает, что существует такая положительная константа C, что $\phi(n) \leqslant C\psi(n)$ при всех n. Две функции Ψ и Φ назовём эквивалентными, если одновременно $\Psi \preceq \Phi$ и $\Phi \preceq \Psi$. Класс эквивалентности функции Φ относительно такого отношения мы будем обозначать символом $[\Phi]$.

Пусть $G \curvearrowright (X, \mu)$ — действие группы G с подходящим оснащением σ. Пусть ρ — некоторая допустимая порождающая суммируемая полуметрика на (X, μ). В работах [13, 14] доказано (см. лемму 9 работы [13] и аналогичные утверждения работы [14]), что класс эквивалентности функции $\Phi_\rho(n, \varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av}\rho)$ не зависит от полуметрики ρ и образует метрический инвариант $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ действия группы G:

$$\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma) = \Big[\Phi_\rho(n, \varepsilon)\Big]. \tag{2}$$

Отметим, что система является стабильной тогда и только тогда, когда в классе $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ можно найти функцию $\Phi(n, \varepsilon) = \phi(n)$, не зависящую от ε.

Масштабированная энтропия также априори зависит от выбора оснащения. Однако, отметим, что если два подходящих оснащения $\sigma = \{S_n\}$ и $\theta = \{W_n\}$ таковы, что $|S_n \triangle W_n| = o(|S_n|)$, то $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \theta)$ для любого сохраняющего меру действия (X, μ, G).

В теореме 2 показано, что для любой аменабельной группы G с оснащением фёльнеровской последовательностью $\sigma = \{F_n\}$, любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\Phi(n, \varepsilon) \lesssim |F_n|. \tag{3}$$

Эквивалентность в (3) достигается в том и только том случае, когда метрическая энтропия системы (X, μ, G) положительна. В работе [14] построены примеры стабильных систем для действия групп $\mathbb{Z}$ почти почти полного роста (см. определение 4) для стандартного оснащения отрезками.

Основная теорема данной работы (теорема 4) гарантирует существование таких действий для любой непериодической аменабльной группы относительно любого Фёльнеровского оснащения. Несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действия непериодических аменабельных групп доказывается в теореме 1 с помощью построенных действий с масштабирующими последовательностями почти полного роста.

3 Метрическая энтропия и масштабирущая последовательность

В этом разделе мы изучаем связь масштабированной энтропии с метрической энтропией.

Сначала сформулируем несколько технических лемм, необходимых для доказательства теоремы 2. Каждому измеримому разбиению ξ пространства (X, μ) канонически соответствует *разрезная полуметрика* $\rho_\xi(x, y)$, принимающая значение 0, если x и y лежат в одном элементе ξ, и значение 1 иначе. Следующая лемма, доказанная в работе [13], связывает ε–энтропию полуметрики ρ_ξ с энтропией $H(\xi)$ измеримого разбиения.

Лемма 1. *Справедливы следующие соотношения между энтропией разбиений и ε–энтропией полуметрик.*

1. *Для любого измеримого разбиения ξ стандартного вероятностного пространства (X, μ) и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_\xi) \leqslant \frac{H(\xi)}{\varepsilon},$$

где ρ_ξ — соответствующая разбиению разрезная полуметрика.

2. *Пусть $m, k \in \mathbb{N}$ и пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ — семейство конечных измеримых разбиений пространства (X, μ), каждое из которых состоит из не более чем m элементов. Пусть $\xi = \bigvee_{i=1}^k \xi_i$ — произведение этих разбиений, $\rho = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_{\xi_i}$ — усреднение соответствующих этим разбиениям разрезных полуметрик. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ справедлива следующая оценка*

$$\frac{H(\xi)}{k} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)}{k} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon) + \frac{1}{k}.$$

Следующая техническая лемма доказана в работе [6], она даёт верхнюю оценку ε–энтропии усреднений полуметрик.

Лемма 2. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ — допустимые полуметрики на (X, μ), причём $\rho_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$. И пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i) > 0$. Тогда выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}\left(X, \mu, \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \rho_i\right) \leqslant 2\sum_{i=1}^k \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_i).$$

Следующая теорема, связывающая масштабирующую последовательность с классической метрической энтропией, является аналогом теоремы 7 работы [13] для случая действия аменабельной группы с оснащением фёльнеровской последовательностью.

Теорема 2. *Пусть аменабельная группа G действует автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). И пусть $\sigma = \{F_n\}$ — последовательность Фёльнера группы G. Пусть $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$.*

1. *Предположим, что метрическая энтропия $h(X, \mu, G)$ положительна. Тогда система (X, μ, G) стабильна, и при достаточно малых ε*
$$\Phi(n, \varepsilon) \asymp |F_n|.$$
2. *Если же $h(X, \mu, G) = 0$, то при всех ε*
$$\Phi(n, \varepsilon) = o(|F_n|).$$

Доказательство. Предположим, что метрическая энтропия $h(X, \mu, G)$ положительна. Пусть ξ есть некоторое конечное измеримое разбиение, $\zeta_n = \bigvee_{g \in F_n} g^{-1}\xi$. Пусть ρ_ξ — разрезная полуметрика, соответствующая ξ. Также, пусть $\xi_g = g^{-1}\xi$ для $g \in F_n$ и $m = |\xi| = |\xi_g|$ — количество элементов разбиения. По 2 пункту леммы 1 имеем:
$$\frac{H(\zeta_n)}{|F_n|} \leqslant \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n \rho_\xi)}{|F_n|} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon) + \frac{1}{|F_n|}. \tag{4}$$
В силу того, что $h(X, \mu, G) > 0$, разбиение ξ можно выбрать так, что
$$h(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|F_n|} H(\zeta_n) > 0.$$
Значит, из неравенства (4) при достаточно малом ε следует, что
$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n \rho_\xi) \gtrsim |F_n|. \tag{5}$$
Отметим, что полуметрика ρ_ξ может не быть порождающей (если разбиение ξ не является порождающим), однако для любой измеримой допустимой метрики ω на X функция $\rho_\xi + \omega$ также является измеримой допустимой метрикой. Тогда $\Psi(n, \varepsilon) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n(\rho_\xi + \omega))$ лежит в $\mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$. При этом
$$\Psi(n, \varepsilon) \geqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n \rho_\xi) \gtrsim |F_n|.$$
Верхняя оценка на рост масштабированной энтропии сразу следует из леммы 2. Действительно, пусть $\rho \leqslant 1$ — некоторая допустимая порождающая полуметрика. Применяя лемму 2 для полуметрик $g^{-1}\rho$ при $g \in F_n$ получаем
$$\mathbb{H}_{2\sqrt{\varepsilon}}(X, \mu, G_{av}^n \rho) \leqslant 2|F_n| \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho).$$
Это означает, что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \sigma)$ и достаточно малого (а тогда и для любого) $\varepsilon > 0$
$$\Phi(n, \varepsilon) \lesssim |F_n|.$$
Тем самым, первый пункт теоремы доказан.

Пусть теперь энтропия $h(X, \mu, G)$ равна нулю. В этом случае рассмотрим порождающее разбиение ξ конечной энтропии и соответствующую ему (порождающую) допустимую полуметрику ρ_ξ. Как и раньше, пусть $\zeta_n = \bigvee_{g \in F_n} g^{-1}\xi$. Первый пункт леммы 1 гарантирует следующее неравенство
$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G_{av}^n \rho_\xi) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_{\zeta_n}) \leqslant \frac{H(\zeta_n)}{\varepsilon}.$$

Однако, равенство $h(X,\mu,G) = 0$ означает, что $H(\zeta_n) = o(|F_n|)$, а значит, для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X,\mu,G,\sigma)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\Phi(n,\varepsilon) = o(|F_n|).$$

□

4 Несуществование универсальной системы нулевой энтропии

В этой секции мы доказываем несуществование универсальной системы нулевой энтропии для действий непериодических аменабельных групп. Приведенное ниже доказательство, однако, имеет дело с более общим классом аменабельных групп.

Определение 4. Мы будем говорить, что группа G с оснащением $\sigma = \{F_n\}$ *допускает действия почти полного роста*, если для любой неотрицательной функции $\phi(n) = o(|F_n|)$ существует такая система (X,μ,G), что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(X,\mu,G,\sigma)$ и достаточно малого ε выполнено

$$\Phi(n,\varepsilon) \not\lesssim \phi(n) \text{ и } \Phi(n,\varepsilon) \lesssim |F_n|.$$

Отметим, что в силу теоремы 2 второе условие в определении 4 эквивалентно тому, что метрическая энтропия системы (X,μ,G) равна нулю.

Теорема 3. *Пусть аменабельная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом компакте (X,d). Предположим, что G допускает действия почти полного роста для некоторого фёльнеровского оснащения $\theta = \{W_n\}$. Предположим, что для любой динамической системы (Y,ν,G) нулевой метрической энтропии существует мера μ на X, инвариантная относительно G, такая что*

$$(X,\mu,G) \cong (Y,\nu,G).$$

Тогда топологическая энтропия системы (X,d,G) положительна.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что $h_{top}(X,G) = 0$. Тогда

$$\sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|W_n|} \log \operatorname{spn}(d,W_n,\varepsilon) = 0.$$

Стало быть, для всех $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{|W_n|} \log \operatorname{spn}(d,W_n,\varepsilon) = 0.$$

Ясно, что существует такая функция $\phi(n)$, что $\frac{\phi(n)}{|W_n|} \to 0$ и для всех $\varepsilon > 0$

$$\phi(n) \gtrsim \log \operatorname{spn}(d,W_n,\varepsilon).$$

По предположению, группа G с оснащением θ допускает действия почти полного роста. Значит, существует такое действие $\alpha\colon G \curvearrowright (Y,\nu)$ нулевой энтропии, что для любой $\Phi \in \mathcal{H}(Y,\nu,G,\theta)$ и достаточно малого ε

$$\Phi(n,\varepsilon) \not\lesssim \phi(n). \tag{6}$$

Также по предположению теоремы, данное действие может быть реализовано в топологической системе (X, d, G). То есть, существует такая инвариантная мера μ на X, что $(X, \mu, G) \cong (Y, \nu, G)$. В частности, $\mathcal{H}(Y, \nu, G, \theta) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \theta)$. Отметим, что метрика d на X, очевидно, допустима. Значит,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av} d) \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \theta).$$

Однако,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{av} d) \leqslant \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, G^n_{max} d) \leqslant \log \operatorname{spn}\left(d, W_n, \frac{\varepsilon}{2}\right) \lesssim \phi(n),$$

что противоречит соотношению (6). □

В силу теоремы 3 для доказательства отсутствия универсального топологического действия нулевой энтропии непериодической аменабельной группы G (то есть теоремы 1) нам остается показать, что такая группа допускает действия почти полного роста. Этому посвящена оставшаяся часть работы.

5 Коиндуцированные действия

Для построения действий почти полного роста мы будем использовать конструкцию коиндуцирования.

5.1 Коиндуцированные действия и лемма о расслоении

В данном пункте мы напомним конструкцию коиндуцированного действия. Пусть G — счетная аменабельная группа и пусть $H \leqslant G$. Пусть $H \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ — действие группы H автоморфизмами на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Рассмотрим разложение G на смежные классы по подгруппе H:

$$G = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} g_i H,$$

где g_i — представители смежных классов. Можно считать, что $g_0 = e$. Рассмотрим пространство

$$(X^{G/H}, \mu^{G/H}) = \prod_{i=0}^{\infty} (X_i, \mu_i),$$

где (X_i, μ_i) — изоморфная копия (X, μ), соответствующая элементу g_i. Для $x \in X^{G/H}$ символом x_i, $i \geq 0$, будем обозначать его i−ю координату, $x_i \in X_i$. Для любого $g \in G$ и каждого i существуют единственные $k(i, g) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $h(i, g) \in H$, такие, что $gg_i = g_{k(i,g)} h(i, g)$. Определим действие $\mathrm{CInd}_H^G \alpha$ группы G на пространстве $X^{G/H}$ следующим образом. Пусть $x \in X^{G/H}$, положим

$$g(x)_i = h(i, g^{-1})^{-1}\big(x_{k(i, g^{-1})}\big).$$

Здесь и далее мы отождествляем множество классов смежности с некоторой фиксированной трансверсалью $\{g_i\}$.

Лемма 3. *Пусть H – подгруппа счетной аменабельной группы G и $\tilde{W}_n$ — последовательность Фёльнера в G. Тогда существует последовательность Фёльнера $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ в группе G, такая, что $\left|\tilde{W}_n \triangle W_n\right| = o(|W_n|)$, и W_n представима в виде*

$$W_n = \bigcup S_n^i g_i^{-1},$$

где $S_n^i \subset H$ таковы, что для любого $h \in H$, $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\left|hS_n^i \triangle S_n^i\right| \leqslant \varepsilon \left|S_n^i\right|.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое $h \in H$ и $n \in \mathbb{N}$. Символом $\varepsilon(n,h)$ обозначим величину $|h\tilde{W}_n \triangle \tilde{W}_n| \cdot |\tilde{W}_n|^{-1}$. Ясно, что $\varepsilon(n,h)$ стремится к 0 при любом фиксированном h. Также, множество $\tilde{W}_n$ представляется единственным образом в виде $\bigcup_i S_n^i g_i^{-1}$, где S_n^i есть некоторые конечные подмножества H. Пусть $\tilde{I}(n,h)$ есть множество тех индексов i, для которых $\left|hS_n^i \triangle S_n^i\right| > \varepsilon^{\frac{1}{2}}(n,h)\left|S_n^i\right|$, и пусть $E(n,h) = \cup_{i \in \tilde{I}(n,h)} S_n^i g_i^{-1}$. Левое умножение на h сохраняет каждый правый смежный класс Hg_i^{-1}. Следовательно,

$$|E(n,h)| = \sum_{i \in \tilde{I}(n,h)} \left|S_n^i\right| < \varepsilon(n,h)^{\frac{1}{2}} \left|\tilde{W}_n\right|.$$

Пусть $\tau \colon H \to \mathbb{N}$ — произвольная нумерация элементов группы H. Определим

$$W_n = \tilde{W}_n \setminus \bigcup_{h \colon \varepsilon(n,h) < 2^{-\tau(h)}} E(n,h).$$

Ясно, что последовательность $\{W_n\}$ является искомой. Действительно, имеем

$$\left|\tilde{W}_n \triangle W_n\right| \leqslant \sum_{\varepsilon(n,h) < 2^{-\tau(h)}} |E(n,h)| < \sum_{\varepsilon(n,h) < 2^{-\tau(h)}} \varepsilon(n,h)^{\frac{1}{2}} \left|\tilde{W}_n\right| = o(|\tilde{W}_n|).$$

Последнее соотношение справедливо, например, в силу теоремы Лебега. □

Определение 5. Множество S целых чисел назовём ε–инвариантным для некоторого положительного ε, если $|(S+1) \triangle S| < \varepsilon |S|$.

Замечание. Ясно, что существует такая подпоследовательность n_j, что все множества $S_{n_j}^i$ являются $\frac{1}{j}$–инвариантными.

5.2 Масштабированная энтропия коиндуцированного действия

В этом разделе мы приводим оценки масштабированной энтропии коиндуцированного действия. Мы сводим вопрос существования действий почти полного роста для произвольной непериодической аменабельной группы к случаю группы $\mathbb{Z}$, который будет рассмотрен в разделе 6.

Теорема 4. *Пусть $\sigma = \{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность Фёльнера счётной непериодической аменабельной группы G. Тогда группа G с оснащением σ допускает действия почти полного роста.*

Замечание. Построенные ниже действия группы G почти полного роста являются эргодическими.

Доказательство теоремы 4. Пусть $h \in G$ элемент бесконечного порядка и $H = \langle h \rangle$ — порождённая им подгруппа, а $\{g_i\}$ — трансверсаль к ней, причём $g_0 = e$. Лемма 3 утверждает, что существует такая последовательность Фёльнера $\theta = \{W_n\}$ в группе G, что

$$|F_n \triangle W_n| = o(|F_n|), \tag{7}$$

и $W_n = \bigcup S_n^i g_i^{-1}$, где S_n^i таковы, что для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\left|hS_n^i \triangle S_n^i\right| \leqslant \varepsilon \left|S_n^i\right|.$$

Соотношение (7) гарантирует, что для любого сохраняющего меру действия α группы G выполняется равенство $\mathcal{H}(\alpha, \sigma) = \mathcal{H}(\alpha, \theta)$. Таким образом, достаточно доказать, что группа G с оснащением θ допускает действия почти полного роста.

Пусть $\phi(n)$ — некоторая неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности. Воспользуемся следующей леммой, доказанной в пункте 6.

Лемма 4. *Пусть дана последовательность конечных семейств $\{S_n^i\}_{i=1}^{k_n}$ конечных подмножеств $\mathbb{Z}$, такая, что каждое множество S_n^i является $\frac{1}{n}$–инвариантным. Пусть также $\phi(n)$ — некоторая последовательность положительных чисел, возрастающая к бесконечности. Тогда существует автоморфизм T стандартного вероятностного пространства (X, μ) и последовательность $\{n_j\}$, такие, что для любой порождающей полуметрики ρ, достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее соотношение:*

$$\frac{\left|S_{n_j}^i\right|}{\phi(n_j)} \lessapprox \mathbb{H}_\varepsilon\left(X, \mu, T_{av}^{S_{n_j}^i} \rho\right) \lessapprox \left|S_{n_j}^i\right|, \qquad i = 1, \ldots, k_{n_j}. \tag{8}$$

В частности, автоморфизм T имеет нулевую энтропию, и для любого ε при достаточно большом j

$$\frac{\left|S_{n_j}^i\right|}{\phi(n_j)} < \mathbb{H}_{4\varepsilon}\left(X, \mu, T_{av}^{S_{n_j}^i} \rho\right) < \left|S_{n_j}^i\right|, \; i = 1, \ldots, k_{n_j}. \tag{9}$$

Рассмотрим действие $\alpha = \mathrm{CInd}_H^G T$ группы G, коиндуцированное с подгруппы H. Пусть $\tilde{\rho} \leqslant 1$ — некоторая допустимая метрика на (X, μ). Определим допустимую порождающую полуметрику ρ на $(X, \mu)^{G/H}$ следующим образом:

$$\rho(x, y) = \tilde{\rho}(x_0, y_0), \qquad x, y \in X.$$

Так как G действует на G/H транзитивно, то ρ является порождающей. Отметим, что представители классов смежности были выбраны так, что $g_0 = e$, следовательно элементы H не переставляют нулевую координату $(X, \mu)^{G/H}$. Таким образом, для любых $x, y \in X^{G/H}$

$$\rho(hx, hy) = \tilde{\rho}(hx_0, hy_0).$$

Тогда

$$H_{av}^{S_{n_j}^i} \rho(x, y) = H_{av}^{S_{n_j}^i} \tilde{\rho}(x_0, y_0).$$

Для каждого g_i (выделенного представителя класса смежности) определим полуметрику ρ_i на $(X,\mu)^{G/H}$:

$$\rho_i = g_i H_{av}^{S_{n_j}^i}\rho.$$

Каждая полуметрика ρ_i зависит только от i-ой координаты:

$$\rho_i(x,y) = (H_{av}^{S_{n_j}^i}\rho)(g_i^{-1}x, g_i^{-1}y) = (H_{av}^{S_{n_j}^i}\tilde{\rho})(x_i,y_i), \qquad x,y \in (X,\mu)^{G/H},$$

поэтому можно считать ее полуметрикой на X_i. Усреднение полуметрики ρ под действием W_{n_j} выражается через ρ_i следующим образом:

$$G_{av}^{W_{n_j}}\rho = \frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i}\sum_{s\in S_{n_j}^i} g_i s^{-1}\rho = \frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i} g_i \sum_{s\in S_{n_j}^i} s^{-1}\rho =$$

$$\frac{1}{\left|W_{n_j}\right|}\sum_{g_i}\left|S_{n_j}^i\right| g_i H_{av}^{S_{n_j}^i}\rho = \frac{1}{\sum\limits_i \left|S_{n_j}^i\right|}\sum_{g_i}\left|S_{n_j}^i\right|\rho_i. \quad (10)$$

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная в пункте 7 этой работы.

Лемма 5. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\phi > 1$ фиксированы. Рассмотрим конечное семейство допустимых полуметрческих троек (X_i,μ_i,ρ_i), $i = 1,\ldots,k$. Пусть $\{s_i\}_{i=1}^k$ таковы, что $\phi^{-1}s_i < \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i,\mu_i,\rho_i) < s_i$. Зададим полуметрику ρ на $\prod_{i=1}^k (X_i,\mu_i) = (X,\mu)$ следующим образом:*

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^k s_i}\sum_{i=1}^k s_i\rho_i(x_i,y_i),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_k)$, $y = (y_1,\ldots,y_k)$. Тогда

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X,\mu,\rho) \geqslant \frac{1}{\phi}\varepsilon^3\sum_{i=1}^k \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i,\mu_i,\rho_i) - k - 1.$$

При больших значениях j выполняются неравенства (9). Следовательно, лемма 5 применима для полуметрик ρ_i, весов $s_i = \left|S_{n_j}^i\right|$ и $\phi = \phi(n_j)$. Получим следующую оценку:

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X^{G/H}, \mu^{G/H}, G_{av}^{W_{n_j}}\rho) \geqslant \frac{1}{\phi(n_j)}\varepsilon^3\sum_{i=1}^{k_{n_j}}\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X,\mu,H_{av}^{S_{n_j}^i}\tilde{\rho}) - k_{n_j} - 1 \geqslant \frac{1}{\phi(n_j)^2}\varepsilon^3\left|W_{n_j}\right| - 2k_{n_j}, \quad (11)$$

где k_{n_j} — количество непустых $S_{n_j}^i$. Очевидно, для любой последовательности $\varphi(n)$ растущей к бесконечности существует такая неубывающая $\phi(n)$, растущая к бесконечности, что $\phi^2(n) = o(\varphi(n))$. Отметим, что $k_n = o(|W_n|)$, поэтому последовательность ϕ можно выбрать настолько медленной, что $k_n = o(\phi(n)^{-2}|W_n|)$. Тогда, для действия α построенного по последовательности ϕ и любой $\Phi \in \mathcal{H}(\alpha,\theta)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\Phi(n,\varepsilon) \not\lesssim \frac{|W_n|}{\varphi(n)}.$$

Осталось лишь заметить, что действие, коиндуцированное с действия нулевой энтропии, также имеет нулевую энтропию. $\square$

6 Адическое преобразование на графе упорядоченных пар

6.1 Граф упорядоченных пар

Для построения систем полного роста мы будем использовать конструкцию адического преобразования (автоморфизм Вершика) на графе упорядоченных пар. Этот граф был подробно изучен в работах [12] и [14].

Рассмотрим бесконечный градуированный граф $\Gamma = (V, E)$. Множество вершин V графа Γ есть дизъюнктное объединение множеств $V_n = \{0,1\}^{2^n}$, $n \geq 0$. Множество рёбер E определяется одновременно с раскраской $\mathfrak{c}\colon E \to \{0,1\}$ следующим образом. Пусть $v_n \in V_n$ и $v_{n+1} \in V_{n+1}$. Ребро $e = (v_n, v_{n+1})$ принадлежит E, если слово v_n является началом или концом слова v_{n+1} и помечено символом 0 или 1 соответственно. Если v_n является одновременно началом и концом v_{n+1}, то в графе Γ проводятся два ребра между v_n и v_{n+1}, соответствующие цветам 0 и 1. Вершины v_n и v_{n+1} мы будем назвать началом и концом ребра e соответственно, и обозначать символами $s(e)$ и $r(e)$.

Путь в графе Γ есть такая последовательность рёбер $\{e_i\}$, что $s(e_{i+1}) = r(e_i)$ и $s(e_i) \in V_i$. На множестве X всех бесконечных путей естественным образом вводится цилиндрическая топология. Борелевская мера на пространстве X называется центральной, если при фиксированном хвосте пути все его начала равновероятны, то есть, любые два цилиндрических множества, порождающие конечные пути которых заканчиваются в одной вершине, имеют равную меру.

Определим *адическое преобразование* T на пространстве путей X. Пусть $x = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый бесконечный путь. Найдём наименьшее такое n, что $\mathfrak{c}(e_i) = 0$. Определим путь $T(x) = \{u_i\}$ следующим образом. При $i \geqslant n+1$ выполнено $u_i = e_i$; $\mathfrak{c}(u_n) = 1$, и $\mathfrak{c}(u_i) = 0$ для всех $i < n$ (см. рис. 1). Относительно любой центральной меры μ преобразование T является автоморфизмом пространства (X, μ).

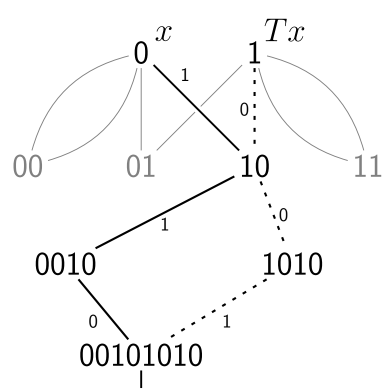

Рис. 1: Адическое преобразование

Зафиксируем некоторую последовательность $\sigma = \{\sigma_n\}$ состоящую из нулей и единиц. Построим соответствующую ей центральную меру μ^σ на пространстве X. Борелевская мера μ на пространстве X однозначно определяется согласованной системой мер μ_n на цилиндрических множествах, соответствующих конечным путям длины n. В терминах μ_n центральность меры μ означает, что для любого n мера μ_n зависит лишь от конца пути. Пусть X_n есть множество всех конечных путей длины n. Определим меру ν_n на V_n следующим образом:

$$\nu_n(v) = \sum_{\substack{x\in X_n,\\ r(x)=v}} \mu_n(x).$$

Согласованная система мер ν_n однозначно определяет центральную меру μ.

Построим последовательность множеств V_n^σ, где $V_n^\sigma \in V_n$. Положим $V_0^\sigma = V_0$. При $n \geqslant 1$ если $\sigma_n = 1$ определим $V_n^\sigma = \{ab\colon a, b \in V_{n-1}^\sigma\}$; если $\sigma_n = 0$ положим $V_n^\sigma = \{aa\colon a \in V_{n-1}^\sigma\}$. Обозначим символом ν_n^σ равномерную меру на множестве $V_n^\sigma \subset V_n$. Построенная по этой системе мера μ^σ определена корректно и является центральной (см. [14]).

В работе [14] доказано, что *относительно стандартного оснащения* группы $\mathbb{Z}$ система (X, μ^σ, T) является стабильной, и последовательность $h_n = 2^{s^\sigma(\log n)}$, где $s^\sigma(t) = \sum_{i<t}\sigma_i$, является масштабирующей последовательностью этой системы. Также, для любой последовательности σ, содержащей бесконечное число единиц преобразование T является эргодическим, его энтропия положительна в том и только том случае, когда в σ есть лишь конечное число нулей. Лемма 4 настоящей работы имеет дело с более сложной системой множеств, по которым производится усреднение. Однако, нам достаточно ограничится оценками ε–энтропии снизу.

Пусть $x = \{e_i\} \in X$ — некоторый бесконечный путь. Символом $\mathfrak{b}_n(x)$ мы будем обозначать его вершину с номером n. А символом $\mathfrak{o}_n(x)$ обозначим величину $\sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{c}(e_i)2^i$. Легко видеть, что при $\mathfrak{o}_n(x) < 2^n - 1$ выполняется равенство $\mathfrak{b}_n(Tx) = \mathfrak{b}_n(x)$ и $\mathfrak{o}_n(Tx) = \mathfrak{o}_n(x) + 1$.

Итак, описание конструкции графа упорядоченных пар и адического преобразования на нем закончено. Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы 4.

6.2 Доказательство леммы 4

Мы будем строить последовательность σ, нули в которой встречаются очень редко. Позиции, на которых они находятся, мы будем определять индуктивно. Отметим, что для любой σ с бесконечным числом нулей метрическая энтропия адического преобразования равна нулю, поэтому правое неравенство (8) выполнено автоматически. Действительно, ведь последовательность, составленная из всех множеств S_n^i, удовлетворяет условию Фёльнера.

Левую часть неравенства (8) достаточно проверять на любой (не обязательно порождающей) полуметрике. Действительно, если оно выполнено для какой-то полуметрики, то выполнено и для любой порождающей. Пусть ρ есть разрезная полуметрика, соответствующая двуэлементному разбиению, различающему пути по первой вершине.

Можно считать, что все множества S_n^i состоят из положительных чисел. Предположим, что уже выбрано p чисел — $q_1, \ldots, q_p$, и числа $n_1, \ldots, n_p$, такие, что левая часть неравенства (8) выполнена при $j = 1, \ldots, p$ для любой σ, имеющей среди первых q_p позиций ровно p нулей $q_1, \ldots, q_p$. На первом шаге положим $p = 0$.

Для всякого $l > n_p$ найдём такое $n = n(l)$, что все множества $\{S_l^i\}_{i=1}^{k_l}$ лежат в интервале $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$. Пусть $N(l)$ достаточно велико (а именно, положим N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство (13)). Пусть $v \in V_N$ и $0 \leqslant k \leqslant 2^N - 1$. Символом v_k обозначим бит, находящийся в слове v в позиции k. Отметим, что равенство $\rho(x, y) = 0$ эквивалентно $\mathfrak{b}_N(x)_{\mathfrak{o}_N(x)} = \mathfrak{b}_N(y)_{\mathfrak{o}_N(y)}$. Таким образом,

$$T_{av}^{S_l^i}\rho(x,y) = \frac{1}{|S_l^i|}\sum_{j\in S_l^i}\rho(T^jx, T^jy) = \frac{1}{|S_l^i|}\left|\{j \in S_l^i\colon \mathfrak{b}_N(T^jx)_{\mathfrak{o}_N(T^jx)} \neq \mathfrak{b}_N(T^jy)_{\mathfrak{o}_N(T^jy)}\}\right|.$$

На множестве $A^{S^i_l} = \{0,1\}^{S^i_l}$ определим меру $\mu^\sigma_{S^i_l}$ следующим образом

$$\mu^\sigma_{S^i_l}(w) = \mu^\sigma(x \in X \colon \mathfrak{b}_N(T^j x)_{\mathfrak{o}_N(T^j x)} = w_j,\ j \in S^i_l).$$

Отображение

$$\Phi \colon x \mapsto \bigl(\mathfrak{b}_N(T^j x)_{\mathfrak{o}_N(T^j x)}\bigr)_{j \in S^i_l}$$

задаёт изоморфизм полуметрических троек $(X, \mu^\sigma, T^{S^i_l}_{av}\rho)$ и $(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l}, \rho^H)$, где ρ^H есть метрика Хэмминга на $A^{S^i_l}$. Заметим, что при $\mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n$

$$\Phi(x) = \bigl(\mathfrak{b}_N(x)_{\mathfrak{o}_N(x)+j}\bigr)_{j \in S^i_l}.$$

В силу центральности меры μ^σ для любого $N > n$ выполнено

$$\mu^\sigma(x \in X \colon \mathfrak{o}_N(x) \geqslant 2^N - 2^n) = 2^{n-N}.$$

Следовательно, при фиксированном l мера $\mu^\sigma_{S^i_l}$ аппроксимируется поточечно при больших N одновременно для всех i мерой

$$\mu^\sigma_{S^i_l,N}(w) = \frac{1}{2^N - 2^n}\mu^\sigma(x \colon \Phi(x) = w,\ \mathfrak{o}_N(x) < 2^N - 2^n) = \\ \frac{1}{2^N - 2^n} \sum_{k=0}^{2^N - 2^n - 1} \nu^\sigma_N(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S^i_l). \quad (12)$$

Выбирая $N(l)$ так, чтобы $\mu^\sigma_{S^i_l,N} < 2\mu^\sigma_{S^i_l}$, получим оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l}, \rho^H) \geqslant \mathbb{H}_{2\varepsilon}(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N}, \rho^H). \quad (13)$$

Мы будем считать, что ещё не выбранное q_{p+1} будет больше N. Тогда, при k отличающихся на 2^{q_p}, слагаемые в выражении (12) совпадают, в силу конструкции меры ν^σ_N. Поэтому, при $n > q_p$

$$\mu^\sigma_{S^i_l,N}(w) = \frac{1}{2^{q_p}} \sum_{k=0}^{2^{q_p}-1} \nu^\sigma_N(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S^i_l).$$

Но ε–энтропия полуметрики относительно выпуклой комбинации мер не меньше, чем ε–энтропия этой полуметрики относительно какой-то из усредняемых мер. Поэтому, достаточно оценить снизу ε–энтропию $(A^{S^i_l}, \mu^\sigma_{S^i_l,N,k}, \rho^H)$ при $k = 0, \ldots, 2^{q_p} - 1$, где

$$\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}(w) = \nu^\sigma_N(v \in V_N \colon v_{k+j} = w_j,\ j \in S^i_l).$$

Относительно $\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}$ все координаты w разбиваются на группы равных, причём разные группы независимы. Действительно, мера ν_N на двоичных словах длины 2^N такова, а $\mu^\sigma_{S^i_l,N,k}$ получается из неё проекцией на пространство, порождённое несколькими выбранными координатами.

При больших l все множества S_l^i являются $\frac{1}{l}$–инвариантными. Рассмотрим интервалы, составляющие некоторое S_l^i. Их количество не больше, чем $\frac{1}{l}\left|S_l^i\right|$. Число групп, пересекающихся с данным интервалом, но не лежащих в нем целиком, не превосходит 2^{q_p+1}, так как длина каждой группы не больше 2^{q_p}. Тогда суммарный размер таких групп не превосходит

$$\frac{2^{q_p+1}}{l}\left|S_l^i\right| < l^{-\frac{1}{2}}\left|S_l^i\right| \tag{14}$$

при достаточно большом l. Рассмотрим $\tilde{\rho}^H$ — метрику Хемминга на координатах, составляющие группы, лежащие целиком в S_l^i. При больших l выполнено неравенство

$$\tilde{\rho}^H(x,y) \leqslant \frac{1}{1-l^{-\frac{1}{2}}}\rho^H(x,y) \leqslant 2\rho^H(x,y) \quad x,y \in A^{S_l^i}.$$

Тогда

$$\mathbb{H}_{2\varepsilon}(A^{S_l^i}, \mu^\sigma_{S_l^i,N,k}, \rho^H) \geqslant \mathbb{H}_{4\varepsilon}(A^{S_l^i}, \mu^\sigma_{S_l^i,N,k}, \tilde{\rho}^H). \tag{15}$$

Правая часть формулы (15) есть 4ε–энтропия двоичного куба размерности хотя бы $\left|S_l^i\right|2^{-p-1}$, что, в свою очередь, не меньше

$$c(\varepsilon)\frac{\left|S_l^i\right|}{2^{p+1}} > \frac{\left|S_l^i\right|}{\phi(l)}. \tag{16}$$

Осталось только выбрать такое $l = n_{p+1}$, удовлетворяющее соотношению (16), и соответствующее ему N. После чего положим $q_{p+1} = N+1$.

7 Доказательство леммы 5

Теперь приступим к доказательству последнего шага в доказательстве основной теоремы, а именно леммы 5. Сначала построим для каждого пространства (X_i,μ_i) специальное разбиение следующим образом. Символом b_i обозначим величину $2^{\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i,\mu_i,\rho_i)}$. Так как полуметрика ρ_i допустима, то её ε^2-энтропия конечна. Рассмотрим соответствующее разбиение пространства X_i. Так как пространство стандартно, измельчим его до разбиения $Y_0,\ldots,Y_r$, для которого $\mu(Y_0) < 2\varepsilon^2$, $\mathrm{diam}_\rho(Y_j) < \varepsilon^2$ при $j>0$, и $\mu(Y_{j_1}) = \mu(Y_{j_2})$ для всех $j_1,j_2>0$.

Для любого измеримого подмножества $Z \subset X_i$, такого, что $\mu(Z) < 4\varepsilon$, в множестве $X_i \setminus Z$ существует 2ε–разделённое множество размера b_i. Рассмотрим $Z_0 = Y_0$ и выберем соответствующее 2ε–разделённое множество $\{p_1,\ldots,p_{b_i}\}$ в разности $X_i\setminus Z_0$. Для каждого p_j найдём содержащее его множество Y_j и обозначим его $a^i_{1,j}$. Таким образом, получим набор $\{a^i_{1,j}\}_{j=1}^{b_i}$ дизъюнктных множеств. Символом A_1^i обозначим объединение этого набора. Заметим, что для любых $x_i \in a^i_{1,j_1}$, $y_i \in a^i_{1,j_2}$ таких, что $j_1 \neq j_2$, расстояние между x_i и y_i в силу неравенства треугольника не меньше, чем $2\varepsilon - 2\varepsilon^2 > \varepsilon$. Если $\mu(A_1^i) < \varepsilon$, выберем $Z_1 = Z_0 \cup A_1^i$ и выделим аналогичным способом множество A_2^i в $X_i \setminus Z_1$, являющееся объединением подмножеств $a^i_{2,j}$, $j=1,\ldots,b_i$. Повторяя данную процедуру пока это возможно, получим следующее разбиение пространства (X_i,μ_i):

$$X_i = \bigcup_{l=0}^{m_i} A_l^i,$$

где $\mu_i(A_0^i) \leqslant 1-\varepsilon$, а каждое множество A_l^i при $l>0$ допускает подразбиение

$$A_l^i = \bigcup_{j=1}^{b_i} a_{l,j}^i,$$

такое, что для любых $x \in a_{l,j_1}^i$ и $y \in a_{l,j_2}^i$ расстояние в полуметрике ρ_i между x и y не меньше ε, и все множества $a_{l,j}^i$, $l=1,\ldots,m_i$, $j=1,\ldots,b_i$, имеют равную меру.

Оценим снизу ε^4–энтропию пространства (X,μ,ρ). Пусть множество $E \subset X$ меры меньше ε^4 выбрано. Будем искать ε^4–разделённое множество в его дополнении. Для каждой точки $x=(x_1,\ldots,x_k) \in X$ определим последовательность $w=w(x) \in \prod_i \{1,\ldots,m_i\}$ из k целых неотрицательных чисел $\{w_r\}_{r=1}^k$ следующим образом:

$$x_r \in A_{w_r}^r \text{ для } r=1,\ldots,k.$$

Зафиксируем такую последовательность w, что

$$\sum_{w_r \neq 0} s_r \geqslant \varepsilon^2 \sum_{i=1}^k s_i. \tag{17}$$

Рассмотрим множество $S_w = \{x \in X \colon w(x)=w\}$. Ясно, что это множество представляется как следующее дизъюнктное объединение

$$S_w = \bigcup_{i_r=1,\ldots,b_r} a_{w_1,i_1}^1 \times a_{w_2,i_2}^2 \times \cdots \times a_{w_k,i_k}^k, \tag{18}$$

где объединение производится по тем индексам i_r для которых $w_r \neq 0$, а в качестве множителя соответствующего $w_r=0$ выступает A_0^r. Отметим, что все множества в объедении имеют равную меру. Множества из объединения в правой части формулы 18 мы будем называть клетками, составляющими S_w. Для точки $x_i \in A_l^r$ обозначим символом $a_l^r(x_i)$ множество $a_{l,j}^r$, содержащее x_i.

Пусть $x,y \in S_w$, тогда

$$\rho(x,y) \geqslant \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^k s_i} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{a_{w_r}^r(x_r) \neq a_{w_r}^r(y_r)\} \geqslant \frac{\varepsilon^3}{\sum\limits_{w_r \neq 0} s_r} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{a_{w_r}^r(x_r) \neq a_{w_r}^r(y_r)\}.$$

Предположим, что в множество E целиком попало менее половины клеток, составляющих S_w. Оценим снизу размер максимального ε^4–разделённого множества в $S_w \setminus E$. Для этого достаточно оценить сверху меру ε–шара на пространстве $\prod_{w_r \neq 0}\{1,\ldots,b_r\}$ с равномерной мерой и метрикой $\tilde{\rho}$, заданной следующим образом:

$$\tilde{\rho}(u,v) = \frac{1}{\sum\limits_{w_r \neq 0} s_r} \sum_{w_r \neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r \neq v_r\}$$

Случайные величины u_r независимы и равномерно распределены на множествах $\{1,\ldots,b_r\}$. Тогда достаточно оценить вероятность

$$\mathbb{P}\{\sum_{w_r\neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r \neq 1\} \leqslant \varepsilon \sum_{w_r\neq 0} s_r\} = \mathbb{P}\{\sum_{w_r\neq 0} s_r \mathbb{1}\{u_r = 1\} \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{w_r\neq 0} s_r\} \leqslant$$

$$\mathbb{P}\{\sum_{w_r\neq 0} \log b_r \mathbb{1}\{u_r = 1\} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\phi} \sum_{w_r\neq 0} s_r\} \leqslant e^{-\frac{(1-\varepsilon)\sum_{w_r\neq 0} s_r}{\phi}} \cdot \mathbb{E}\left(\prod_{w_r\neq 0} e^{\log b_r \mathbb{1}\{u_r=1\}}\right). \quad (19)$$

Последний переход справедлив в силу экспоненциального неравенства Чебышева. Оценим первый множитель.

$$e^{-\frac{(1-\varepsilon)\sum_{w_r\neq 0} s_r}{\phi}} \leqslant e^{-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2\sum_{i=1}^{k} s_i}{\phi}} \leqslant e^{-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2\sum_{i=1}^{k} \log b_i}{\phi}} = \left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right)^{-\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2}{\phi}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right)^{-\frac{\varepsilon^3}{\phi}}. \quad (20)$$

Оценим второй множитель, пользуясь независимостью входящих в него случайных величин:

$$\prod_{w_r\neq 0} \mathbb{E}\left(b_r^{\mathbb{1}\{u_r=1\}}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b_i}{b_i} + \frac{b_i - 1}{b_i}\right) \leqslant 2^k. \quad (21)$$

Итого, искомая вероятность не превосходит $\left(\prod_{i=1}^k b_i\right)^{-\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^k$. Следовательно, размер максимального ε^4–разделённого множества в $S_w \setminus E$ не меньше, чем $\frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^k b_i\right)^{\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^{-k}$. Таким образом,

$$\mathbb{H}_{\varepsilon^4}(X, \mu, \rho) \geqslant \log\left(\left(\prod_{i=1}^{k} b_i\right)^{\frac{\varepsilon^3}{\phi}} 2^{-k-1}\right) = \frac{1}{\phi}\varepsilon^3 \sum_{i=1}^{k} \mathbb{H}_{4\varepsilon}(X_i, \mu_i, \rho_i) - k - 1.$$

Стало быть, если утверждение леммы неверно, то множество E содержит целиком хотя бы половину клеток каждого множества S_w, при w, удовлетворяющей условию 17.

Оценим меру тех $x \in X$, для которых условие 17 не выполнено:

$$\mu\left\{x \in X\colon \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbb{1}\{x_i \in A_0^i\} \geqslant (1-\varepsilon^2) \sum_{i=1}^{k} s_i\right\} \leqslant$$

$$\frac{\mathbb{E}\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbb{1}\{x_i \in A_0^i\}}{(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{k} s_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i \mu_i(A_0^i)}{(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{k} s_i} \leqslant \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (22)$$

Следовательно, те $x \in X$, для которых условие 17 выполнено, составляют меру хотя бы $\frac{\varepsilon}{2}$. Стало быть, $\mu(E) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, что противоречит выбору множества E.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю, Павлу Борисовичу Затицкому, за множество ценных обсуждений и помощь в работе.

Список литературы

[1] T. Downarowicz, J. Serafin, *Universal Systems for Entropy Intervals*, J. Dyn. Diff. Equat. 29, 1411–1422, 2017.

[2] S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel Journal of Mathematics 100, 187–207, 1997.

[3] A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations*, Annales de Institut Henri Poincare 33, 323–338, 1997.

[4] D. Kerr, H. Li, *Ergodic Theory: Independence and Dichotomies*, Springer, 2017.

[5] W. Krieger, *On entropy and generators of measure-preserving transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 149, 453–464, 1970.

[6] F. V. Petrov, P. B. Zatitskiy, *On the subadditivity of a scaling entropy sequence*, J. Math. Sci. (N. Y.), 215:6, 734–737, 2016.

[7] J. Serafin, *Non-existence of a universal zero-entropy system*, Israel Journal of Mathematics 194, no. 1, 349–358, 2013.

[8] O. Shilon, B. Weiss, *Universal minimal topological dynamical systems*, Israel Journal of Mathematics 160, 119–141, 2007.

[9] A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants*, Markov Processes and Related Fields, 16:1, 169–185, 2010.

[10] A. M. Vershik, *Scailing entropy and automorphisms with pure point spectrum*, St. Petersburg Math. J., 23:1, 75–91, 2012.

[11] A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov, *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces*, Central European Journal of Mathematics, 11 (3), 379–400, 2013.

[12] A. M. Vershik, P. B. Zatitskii, *Universal adic approximation, invariant measures and scaled entropy*, Izv. Math., 81:4 , 734–770, 2017.

[13] P. B. Zatitskiy, *Scaling entropy sequence: invariance and examples*, J. Math. Sci. (N. Y.), 209:6, 890–909, 2015.

[14] P. B. Zatitskiy, *On the possible growth rate of a scaling entropy sequence*, J. Math. Sci. (N. Y.), 215:6, 715–733, 2016.