

О строении старшей группы гомологий ядра Джонсона

И. А. Спиридонов

Аннотация

Пусть Σ_g — ориентированная компактная поверхность без края рода g . Действие группы классов отображений Mod_g на нижнем центральном ряде группы $\pi_1(\Sigma_g)$ определяет убывающую *фильтрацию Джонсона*. Первые два члена этой фильтрации — *группа Торелли* \mathcal{I}_g и *ядро Джонсона* \mathcal{K}_g . Группа \mathcal{I}_g является ядром действия Mod_g на $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Группа \mathcal{K}_g может быть охарактеризована, как подгруппа в Mod_g , порожденная скручиваниями Дена вдоль сепарирующих кривых. Группа $U_g = \mathcal{I}_g/\mathcal{K}_g$ является свободной абелевой и хорошо изучена.

Группа \mathcal{K}_g имеет когомологическую размерность $2g - 3$. Рассмотрим набор попарно неготовых и непересекающихся сепарирующих простых замкнутых кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g-3}$ на Σ_g . Соответствующие скручивания Дена $T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_{2g-3}} \in \mathcal{K}_g$ коммутируют между собой, поэтому можно рассмотреть соответствующий абелев цикл $\mathcal{A}(T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_{2g-3}}) \in H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$; такие абелевы циклы будем называть *простейшими*. Обозначим через $\mathcal{A}_g \subseteq H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ подгруппу, порожденную простейшими абелевыми циклами. Задача настоящей работы заключается в полном описании группы \mathcal{A}_g как $\mathbb{Z}[U_g]$ -модуля и нахождении всех соотношений между простейшими абелевыми циклами. Отметим, что на данный момент не известно, является ли строгим вложение $\mathcal{A}_g \subseteq H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$.

1 Введение

Пусть Σ_g — ориентированная компактная поверхность рода g . Напомним, что *группа классов отображений* поверхности Σ_g — это группа $\text{Mod}_g = \text{Mod}(\Sigma_g) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma_g))$, где $\text{Homeo}^+(\Sigma_g)$ — это группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов Σ_g на себя.

Группа Mod_g действует на $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, ядро этого действия обозначается через \mathcal{I}_g и называется *группой Торелли*, для которой существует нерасщепимая короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_g \longrightarrow \text{Mod}_g \longrightarrow \text{SP}_{2g}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

Классическая теорема Дена-Ликориша утверждает, что группа Mod_g порождается скручиваниями Дена вдоль простых замкнутых кривых. Подгруппа $\mathcal{K}_g \subseteq \text{Mod}_g$, порожденная скручиваниями Дена вдоль сепарирующих кривых, называется *ядром Джонсона*, она является нормальной подгруппой в Mod_g . Фундаментальным результатом Джонсона [3] является наличие изоморфизма

$$\mathcal{I}_g/\mathcal{K}_g \cong U_g = \wedge^3 H_1(\Sigma_g)/H_1(\Sigma_g),$$

где $H_1(S_g)$ вложено в $\wedge^3 H_1(\Sigma_g)$ с помощью отображения $x \mapsto x \wedge \Omega$, где $\Omega \in \wedge^2 H_1(\Sigma_g)$ обозначает тензор, обратный к форме пересечений.

Действие группы Mod_1 на $H_1(\Sigma_1, \mathbb{Z})$ осуществляет изоморфизм $\text{Mod}_1 \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, поэтому группы \mathcal{I}_1 и \mathcal{K}_1 тривиальны. Месс [5] доказал, что $\mathcal{I}_2 = \mathcal{K}_2$ является свободной группой со счетным числом образующих.

Представляет интерес задача вычисления групп гомологий $H_*(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ при $g \geq 3$. Димка и Пападима [7] показали, что группа $H_1(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ является конечно порожденной при $g \geq 4$. Морита, Сакасаи и Сузуки [8] явно вычислили рациональную группу

гомологий $H_1(\mathcal{K}_g, \mathbb{Q})$ при $g \geq 6$. Бествина, Букс и Маргалит доказали, что кохомологическая размерность группы \mathcal{K}_g равна $2g - 3$.

Напомним определение *абелева цикла*. Пусть h_1, \dots, h_n — набор попарно коммутирующих элементов группы G . Рассмотрим гомоморфизм $\phi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$, при котором порождающий элемент i -ой группы \mathbb{Z} переходит в h_i . Положим $\mathcal{A}(h_1, \dots, h_n) = \phi_*(\mu_n)$, где через μ_n обозначен стандартный порождающий элемент группы $H_n(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$. Гомологический класс $\mathcal{A}(h_1, \dots, h_n) \in H_n(G, \mathbb{Z})$ называется *абелевым циклом*.

Через T_γ будем обозначать левое скручивание Дена вдоль кривой γ .

Будем называть *мультикривой типа A* или *A -мультикривой* упорядоченный набор из $2g - 3$ попарно негомотопных и непересекающихся сепарирующих кривых на Σ_g . Для каждой A -мультикривой $M = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{2g-3}$ можно рассмотреть абелев цикл $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_{2g-3}}) \in H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$, так как скручивания Дена вдоль непересекающихся кривых коммутируют. Такие абелевы циклы будем называть *простейшими*.

А.А. Гайфуллин [2] построил набор простейших абелевых циклов, свободно порождающих $\mathbb{Z}[U_g]$ -модуль (и, в частности, \mathbb{Z} -модуль) в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$. Таким образом, группа $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ бесконечно порождена.

Обозначим через $\mathcal{A}_g \subseteq H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ подгруппу, порожденную простейшими абелевыми циклами. Задача данной работы заключается в полном описании группы \mathcal{A}_g как $\mathbb{Z}[U_g]$ -модуля и нахождении всех соотношений между простейшими абелевыми циклами.

Рассмотрим произвольную A -мультикривую M . Она разбивает поверхность Σ_g на $g - 2$ сферы с тремя проколами и g проколотых торов, которые мы обозначим через X_1, \dots, X_g . Положим $V_i = H_1(X_i, \mathbb{Z}) \subset H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Обозначим через $\mathbf{V}(M)$ упорядоченный набор подгрупп V_1, \dots, V_g в $H_1(\Sigma_g)$. Заметим, что $\mathbf{V}(M)$ обладает двумя следующими свойствами.

$$(1) \bigoplus_{i=1}^g V_i = H_1(\Sigma_g).$$

(2) Подгруппы V_i и V_j ортогональны относительно формы пересечений при $i \neq j$.

Любой упорядоченный набор подгрупп $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_g)$, удовлетворяющий условиям (1) и (2), будем называть *разбиением* группы $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Для каждого неупорядоченного множества из g подгрупп, удовлетворяющего свойствам (1) и (2), зафиксируем на нем произвольный порядок и обозначим множество получившихся разбиений через \mathcal{V}_g .

Для каждой A -мультикривой M обозначим через $T(M)$ двойственный граф (дерево) к мультикривой M , т.е. вершины дерева соответствуют компонентам связности $\Sigma_g \setminus M$, а ребрами соединены пары граничащих компонент, см. Рис 1. Граф $T(M)$ является деревом и имеет g висячих вершин, а степени остальных вершин равны 3. Висячие вершины этих деревьев занумерованы так же, как и соответствующие подгруппы V_1, \dots, V_g в разбиении $\mathbf{V}(M)$. Множество классов изоморфизма таких деревьев обозначим через \mathcal{T}_g .

Для каждого разбиения $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_g) \in \mathcal{V}_g$ рассмотрим произвольный набор из g попарно непересекающихся сепарирующих кривых, отсекающих от поверхности Σ_g проколотые торы с группами гомологий V_1, \dots, V_g . Для каждого дерева $T \in \mathcal{T}_g$ вышеуказанный набор из g сепарирующих кривых можно дополнить до A -мультикривой $M_{\mathbf{V}, T}$, так чтобы выполнялось условие $T(M_{\mathbf{V}, T}) = T$. Положим $\mathcal{A}_{\mathbf{V}, T} = \mathcal{A}(M_{\mathbf{V}, T})$. Заметим, что класс гомологий $\mathcal{A}(M_{\mathbf{V}, T})$ зависит от выбора g исходных кривых, но не зависит от того, как мы их дополняем до A -мультикривой с двойственным деревом T , так как все получившиеся A -мультикривые лежат в одной \mathcal{K}_g -орбите.

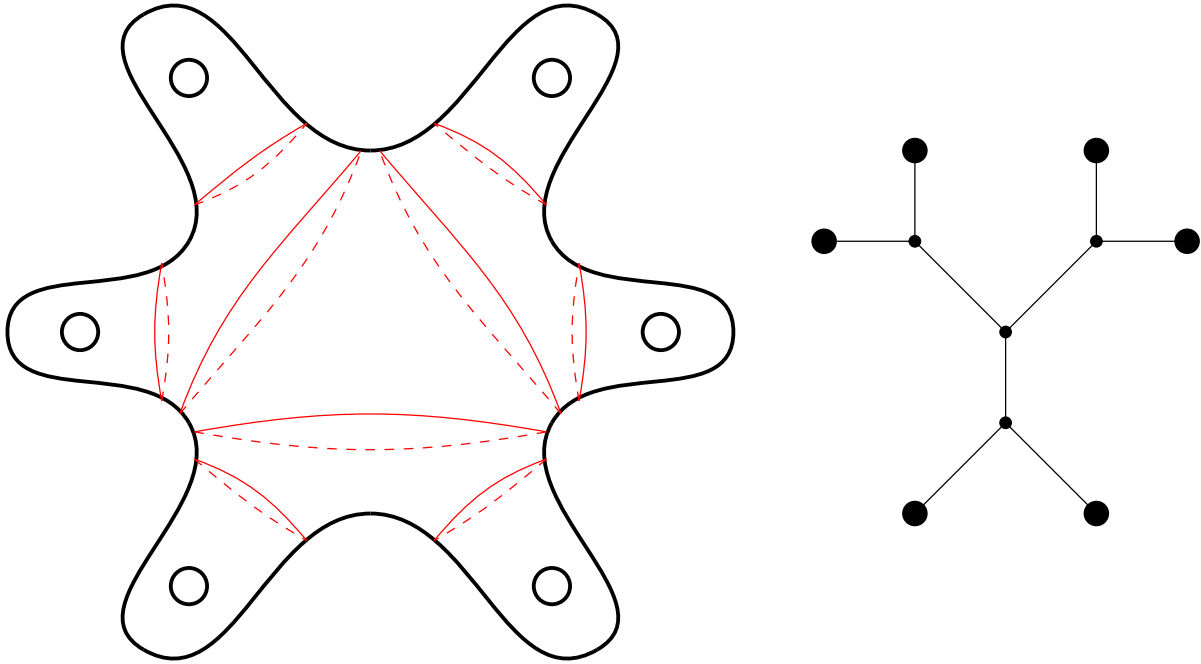


Рис. 1: Двойственное дерево к A -мультикривой.

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее ключевое определение.

Определение 1.1. *Тройка деревьев из \mathcal{T}_g называется циклической, если они отличаются друг от друга перестройкой, изображенной на Рис. 2 (вершины в верхнем и нижнем рядах могут иметь степень 1 или 3).*

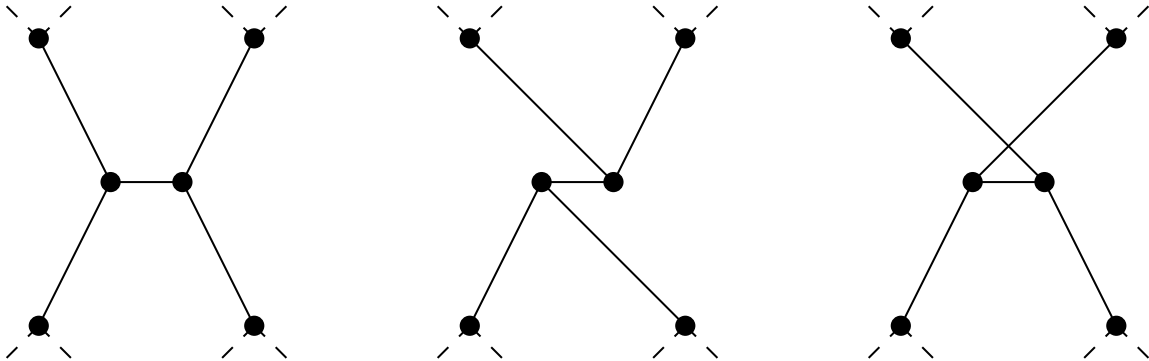


Рис. 2: Циклическая тройка деревьев.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 1.2. *Группа \mathcal{A}_g является $\mathbb{Z}[U_g]$ -модулем с порождающими*

$$\{\mathcal{A}_{V,T} \mid V \in \mathcal{V}_g, T \in \mathcal{T}_g\}$$

и соотношениями

$$\{\mathcal{A}_{V,T_1} + \mathcal{A}_{V,T_2} + \mathcal{A}_{V,T_3} = 0 \mid \{T_1, T_2, T_3\} \text{ — циклическая тройка}\}.$$

Более того, мы докажем, что \mathcal{A}_g является свободным $\mathbb{Z}[U_g]$ -модулем. Чтобы явно выписать систему образующих, нам потребуется несколько обозначений. Будем рассматривать деревья из множества \mathcal{T}_g следующим образом. Висячую вершину с номером g будем считать корнем дерева, расположим ее сверху. Нам будет удобно считать, что от каждой вершины степени 3 одно ребро идет наверх, а два — вниз. Таким образом, двигаясь от корня вниз, можно попасть в любую и висячих вершин с номерами от 1 до $g - 1$. Для каждой вершины v будем называть ее *потомками* те из висячих вершин с номерами от 1 до $g - 1$, до которых можно добраться от v , двигаясь вниз по дереву.

Определение 1.3. Будем называть дерево $T \in \mathcal{T}_g$ *уравновешенным*, если для любой вершины v степени 3 выполнено следующее условие, которое мы будем называть свойством *уравновешенности*.

Пусть v_1 и v_2 обозначают вершины, соединенные ребрами с v и лежащие ниже. Пусть i и j — номера наименьших потомков v . Тогда либо i — потомок v_1 , а j — потомок v_2 , либо наоборот.

Замечание 1.4. Вершина обладает свойством *уравновешенности* тогда и только тогда, когда пути по дереву от нее до двух ее наименьших потомков не имеют общих ребер.

Будем обозначать множество уравновешенных деревьев через $\mathcal{T}_g^b \subseteq \mathcal{T}_g$. Позже мы покажем, что $|\mathcal{T}_g^b| = (g - 2)!$. В данной работе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1.5. Группа \mathcal{A}_g является свободным $\mathbb{Z}[U_g]$ -модулем с порождающими

$$\{\mathcal{A}_{\mathbf{V}, T} \mid \mathbf{V} \in \mathcal{V}_g, T \in \mathcal{T}_g^b\}.$$

В случае $g = 3$ мы имеем $\mathcal{T}_3^b = \mathcal{T}_3$, причем эти множества состоят из одного элемента T . При $g = 3$ для каждого $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_3$ обозначим $\mathcal{A}_{\mathbf{V}, T} = \mathcal{A}_{\mathbf{V}}$.

Следствие 1.6. Группа \mathcal{A}_3 является свободным U_g -модулем с порождающими

$$\{\mathcal{A}_{\mathbf{V}} \mid \mathbf{V} \in \mathcal{V}_3\}.$$

Также, представляет интерес структура группы \mathcal{A}_g как $\mathbb{Z}[\text{Mod}_g/\mathcal{K}_g]$ -модуля. Заметим, что для группы $\text{Mod}_g/\mathcal{K}_g$ имеется нерасщепимая короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_g)/H_1(\Sigma_g) \longrightarrow \text{Mod}_g/\mathcal{K}_g \longrightarrow SP_{2g}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

В случае $g = 3$ структура $\mathbb{Z}[\text{Mod}_3/\mathcal{K}_3]$ -модуля на группе \mathcal{A}_3 получается из действия группы этой группы на множестве \mathcal{V}_3 . Действительно, пусть M — некоторая A -мультикривая на поверхности Σ_3 . Ее стабилизатор в Mod_3 имеет вид

$$\text{Stab}_{\text{Mod}_3} M \cong (\mathbb{Z} \times SL_2(\mathbb{Z}))^{\times 3} \rtimes S_3.$$

Через $\mathcal{K}_3 M$ обозначим \mathcal{K}_3 -орбиту M . Тогда

$$\text{Stab}_{\text{Mod}_3/\mathcal{K}_3} \mathcal{K}_3 M \cong SL_2(\mathbb{Z})^{\times 3} \rtimes S_3.$$

Через $Sign$ обозначим $\mathbb{Z}[SL_2(\mathbb{Z})^{\times 3} \rtimes S_3]$ -модуль, который как абелева группа изоморфен \mathbb{Z} , а группа $SL_2(\mathbb{Z})^{\times 3} \rtimes S_3$ действует на нем умножением на знак перестановки из S_3 .

Следствие 1.7. *Имеется изоморфизм $\mathbb{Z}[\text{Mod}_3/\mathcal{K}_3]$ -модулей*

$$\mathcal{A}_3 \cong \text{Ind}_{SL_2(\mathbb{Z})^{\times 3} \rtimes S_3}^{\text{Mod}_3/\mathcal{K}_3} \text{Sign}.$$

Проблема 1.8. *Описать группу \mathcal{A}_g как $\mathbb{Z}[\text{Mod}_g/\mathcal{K}_g]$ -модуль при $g \geq 4$.*

Автору на данный момент не известно, существуют ли гомологические классы в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$, не лежащие в \mathcal{A}_g .

Проблема 1.9. *Является ли строгим включение $\mathcal{A}_g \subseteq H_{2g-3}(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$?*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. А. Гайфуллину за постановку задачи, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

2 Классификация абелевых циклов

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g-3}$ — набор попарно негомотопных и непересекающихся простых замкнутых сепарирующих кривых на Σ_g , никакая из которых не гомотопна точке. Напомним, что мультикривую $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{2g-3}$ мы будем называть *мультикривой типа A* или *A-мультикривой*. Каждой A-мультикривой M соответствует простейший абелев цикл $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_{2g-3}}) \in H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$.

Замечание 2.1. *Порядок компонент A-мультикривой имеет значение. При перестановке компонент A-мультикривой M абелев цикл $\mathcal{A}(M)$ умножается на знак этой перестановки. Далее в работе компоненты мультикривых типа A всегда рассматриваются упорядоченными, если не указано обратное.*

Если $h \in \mathcal{K}_g$, то $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(h(M))$, так как группа действует тривиально на своих гомологиях. Основная цель данного раздела заключается в том, чтобы дать удобное описание множеству \mathcal{K}_g -орбит изотопических классов мультикривых типа A, таким образом мы опишем (возможно с повторениями) множество всех простейших абелевых циклов.

Нам понадобится определение группы классов отображений поверхностей с проколами и компонентами границы. Пусть $\Sigma_{g,n,b}$ — ориентированная компактная поверхность рода g с n выколотыми точками и b компонентами границы. Группа классов отображений поверхности $\Sigma_{g,n,b}$ — это группа

$$\text{Mod}_{g,n,b} = \text{Mod}(\Sigma_{g,n,b}) = \pi_0(\text{Homeo}^+(\Sigma_{g,n,b})),$$

где $\text{Homeo}^+(\Sigma_{g,n,b})$ — это группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $\Sigma_{g,n,b}$ на себя, тождественных на границе. Для краткости будем обозначать $\Sigma_g = \Sigma_{g,0}$, $\Sigma_{g,n} = \Sigma_{g,n,0}$. Через $\text{PMod}_{g,n,b} \subseteq \text{Mod}_{g,n,b}$ обозначим подгруппу, сохраняющую каждую выколотую точку. Эту подгруппу будем называть *чистой группой классов отображений* поверхности $\Sigma_{g,n,b}$.

Эйлерову характеристику будем обозначать через χ .

Лемма 2.2. *Пусть $M = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{2g-3}$ — мультикривая типа A. Тогда $\Sigma_g \setminus M \cong gS_{1,1} \sqcup (g-2)S_{0,3}$. Иными словами, $\Sigma_g \setminus M$ диффеоморфно дизъюнктному объединению g проколтых торов и $g-2$ сфер без трех точек.*

Доказательство Компоненты M являются сепарирующими кривыми, поэтому $\Sigma_g \setminus M \cong \sqcup_{j=1}^{2g-2} X_j$, где все X_j являются связными поверхностями хотя бы с одним проколом. Кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g-3}$ попарно не гомотопны, поэтому X_j не могут быть сферами меньше чем с тремя проколами. Следовательно, $\chi(X_j) \leq -1$. С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{2g-2} \chi(X_j) = \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

Поэтому $\chi(X_j) = -1$ для всех j , и каждое X_j диффеоморфно либо $S_{0,3}$, либо $S_{1,1}$.

Рассмотрим граф $T(M)$, вершинами которого являются X_j для всех $j = 1, \dots, 2g-2$, причем X_j и X_k соединены ребром тогда и только тогда, когда найдется кривая $\gamma \subset M$, лежащая в замыканиях X_j и X_k . Очевидно, что данный граф связан и содержит $2g-3$ ребра, соответствующих компонентам мультикривой M и, следовательно, является деревом. Граф $T(M)$ будем называть *деревом мультикривой M* .

Заметим, что если X_j диффеоморфно проколотому тору, то соответствующая вершина в $T(M)$ имеет степень 1, а если сфере без трех точек, — то 3. Пусть k — количество вершин степени 1 в $T(M)$. Подсчет суммы степеней вершин графа позволяет найти k , а именно

$$k + 3(2g - 2 - k) = 2(2g - 3),$$

поэтому $k = g$. Следовательно, среди X_j ровно g проколотых торов и $2g-2$ сфер без трех точек. \square

Напомним, что каждая A -мультикривая задает ортогональное (относительно формы пересечений) разбиение $\mathbf{V}(M)$ группы $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ в прямую сумму g подгрупп ранга два.

Набор из g попарно не пересекающихся сепарирующих кривых, разделяющих Σ_g на сферу с g проколами и g проколотых торов будем называть мультикривой типа B или B -мультикривой. Заметим, что каждая B -мультикривая N также задает разбиение $\mathbf{V}(N)$ группы $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.

Для каждого разбиения $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ обозначим через $\mathcal{N}_{\mathbf{V}}$ множество изотопических классов всех таких B -мультикривых N , что $\mathbf{V}(N) = \mathbf{V}$. Группа Торелли \mathcal{I}_g действует на множестве $\mathcal{N}_{\mathbf{V}}$. Рассмотрим стандартное действие группы $U_g = \mathcal{I}_g / \mathcal{K}_g$ на множестве \mathcal{K}_g -орбит изотопических классов B -мультикривых.

Теорема 2.3. *Данное действие корректно определено, свободно и транзитивно.*

Доказательство Прямая проверка показывает, что определение корректно. Чтобы доказать, что данное действие свободно, достаточно проверить, что для любой B -мультикривой $N = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_g$ выполнено $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N) = \text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 2.4. *[4, Предложение 3.20] Следующая последовательность корректно определена и точна.*

$$1 \rightarrow \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle \rightarrow \text{Stab}_{\text{Mod}_g}(N) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_g \setminus N). \quad (1)$$

Кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ сепарирующие, поэтому группа $\langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle$ содержится в \mathcal{K}_g . Поэтому из точности последовательности (1) следует точность последовательностей

$$1 \rightarrow \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle \rightarrow \text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N) \rightarrow \text{PMod}(\Sigma_g \setminus N), \quad (2)$$

$$1 \rightarrow \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle \rightarrow \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N) \rightarrow \text{PMod}(\Sigma_g \setminus N). \quad (3)$$

Обозначим через $\eta : \text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N) \rightarrow \text{PMod}(\Sigma_g \setminus N)$ гомоморфизм из последовательности (2). Заметим, что $\Sigma_g \setminus N \cong \Sigma_{0,g} \sqcup g\Sigma_{1,1}$, поэтому

$$\text{PMod}(\Sigma_g \setminus N) \cong \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \times \text{Mod}(\Sigma_{1,1})^{\times g}. \quad (4)$$

Лемма 2.5. $\eta(\text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)) = \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) = \eta(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N))$.

Доказательство. Обозначим через $p_i : \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \times \text{Mod}(\Sigma_{1,1})^{\times g} \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_{1,1})$ проекцию на i -ый прямой множитель. Пусть $x \in \eta(\text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N))$. Тогда x действует тривиально на гомологиях всех проколотых торов, являющихся связными компонентами $\Sigma_g \setminus N$. Так как $\text{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong SL(2, \mathbb{Z})$, то все проекции $p_i(x)$ тривиальны, поэтому $x \in \text{PMod}(\Sigma_{0,g})$.

Группа $\text{PMod}(\Sigma_{0,g})$ порождена скручиваниями Дена вдоль простых замкнутых кривых (см [4, Теорема 4.11]), причем все эти кривые являются сепарирующими, поэтому соответствующие скручивания Дена (рассматриваемые как элементы Mod_g) содержится в \mathcal{K}_g . Поэтому $\text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \subseteq \eta(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N))$.

Мы доказали, что $\eta(\text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)) \subseteq \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \subseteq \eta(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N))$. Но $\eta(\text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)) \supseteq \eta(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N))$. Следовательно, $\eta(\text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)) = \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) = \eta(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N))$. \square

Вернемся к доказательству теоремы 2.3 Из леммы 2.5 следует точность строк следующей коммутативной диаграммы.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle & \longrightarrow & \text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N) & \xrightarrow{\eta} & \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle & \longrightarrow & \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N) & \xrightarrow{\eta} & \text{PMod}(\Sigma_{0,g}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Из 5-леммы следует, что $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(N) = \text{Stab}_{\mathcal{I}_g}(N)$, поэтому действие свободно.

Для доказательства транзитивности достаточно показать, что для любых B -мультикривых $N, N' \in \mathcal{N}_V$ найдется элемент $h \in \mathcal{I}_g$, такой что $h(N) = N'$. Пусть, как и ранее, через X_1, \dots, X_g обозначены проколотые торы, являющиеся связными компонентами $\Sigma_g \setminus N$, а через X'_1, \dots, X'_g — проколотые торы, являющиеся связными компонентами $\Sigma_g \setminus N'$, где $H_1(X_i) = V_i = H_1(X'_i)$. Очевидно, что найдется $f \in \text{Mod}_g$, такой что $f(N) = N'$, причем $f(X_i) = X'_i$. Пусть $f_i = f|_{X_i}$, а $f_{i*} : V_i \rightarrow V_i$ — индуцированное отображение в первых гомологиях. Так как $\text{Mod}(S_{1,1}) \cong SL(2, \mathbb{Z})$, то существуют такие отображения $t_i : X'_i \rightarrow X'_i$, что индуцированные отображения в гомологиях $t_{i*} : V_i \rightarrow V_i$ удовлетворяют условию $t_{i*} = f_{i*}^{-1}$. Рассмотрим отображение $h = t_1 \circ \dots \circ t_g \circ f$. Заметим, что $h_*|_{V_i} = t_{i*} \circ f_{i*} = id$ для всех i , следовательно $h_* = id$, поэтому $h \in \mathcal{I}_g$. \square

Для каждого разбиения $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ найдется B -мультикривая N , такая что $\mathbf{V} = \mathbf{V}(N)$; выберем произвольную такую мультикривую и обозначим ее через $N_{\mathbf{V}}$.

Для каждой \mathcal{K}_g -орбиты B -мультикривой N рассмотрим такой элемент $h \in \mathcal{I}_g$, который переводит в N выбранную нами в множестве $\mathcal{N}_{\mathbf{V}}$ B -мультикривую $N_{\mathbf{V}(N)}$. Положим $u(N) = \eta(h) \in U_g$. Из Теоремы 2.3 следует, что элемент $u(N)$ существует и корректно определен. Для \mathcal{K}_g -орбиты A -мультикривой M положим $u(M) = u(N)$, где через N обозначена единственная B -мультикривая, содержащаяся в M . Следующие два утверждения являются прямыми следствиями Теоремы 2.3.

Следствие 2.6. Для каждой пары элементов $(\mathbf{V}, u) \in \mathcal{V}_g \times U_g$ существует единственная \mathcal{K}_g -орбита B -мультикривых, такая что для любой мультикривой N из

этой орбиты выполнено $V(N) = V$, $u(N) = u$. Таким образом можно получить любую K_g -орбиту B -мультикривых с точностью до согласованной с действием K_g перестановки компонент, причем единственным образом.

Следствие 2.7. Для каждой тройки элементов $(V, u, T) \in \mathcal{V}_g \times U_g \times \mathcal{T}_g$ существует единственная K_g -орбита A -мультикривых, такая что для любой мультикривой M из этой орбиты выполнено $V(M) = V$, $u(M) = u$, $T(M) = T$. Таким образом можно получить любую K_g -орбиту A -мультикривых с точностью до согласованной с действием K_g перестановки компонент, причем единственным образом.

Абелев цикл, соответствующий K_g -орбите (V, u, T) , обозначим через $\mathcal{A}_{V,u,T}$.

Следствие 2.8. Рассмотрим простейший абелев цикл $\mathcal{A}(M)$ для некоторой A -мультикривой M . Тогда он имеет вид $\mathcal{A}(M) = \pm \mathcal{A}_{V,u,T}$ для некоторых $(V, u, T) \in \mathcal{V}_g \times U_g \times \mathcal{T}_g$.

3 Спектральная последовательность Картана-Лере для комплекса циклов

Напомним некоторые необходимые определения и результаты из [1] и [2]. Обозначим через \mathcal{C} множество классов изотопии ориентированных несепарирующих простых замкнутых кривых на Σ_g . Конечный набор ориентированных простых замкнутых кривых на Σ_g называется *мультикривой*, если эти кривые не гомотопны точке, попарно не пересекаются и попарно не гомотопны (в том числе с обращением ориентации).

Базисным 1-циклом для данного гомологического класса $x \in H_1(\Sigma_g)$ называется формальная линейная комбинация $\gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i$, где n_i — целые положительные числа и $\gamma_i \in \mathcal{C}$, удовлетворяющая следующим условиям.

(1) Можно выбрать представителей изотопических классов $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ так, чтобы они попарно не пересеклись.

(2) Гомологические классы $[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]$ линейно независимы.

(3) $\sum_{i=1}^k n_i [\gamma_i] = x$.

Мультикривая $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ называется *носителем* цикла γ .

Выберем ненулевой гомологический класс $x \in H_1(\Sigma_g)$. Обозначим через $\mathcal{M}(x)$ множество изотопических классов мультикривых M на поверхности Σ_g , удовлетворяющих следующим условиям.

(1) Для каждой кривой $\gamma \in M$ существует базисный 1-цикл, содержащий γ , причем носитель этого цикла содержится в M .

(2) Никакая нетривиальная линейная комбинация гомологических классов кривых из M с неотрицательными коэффициентами не равна нулю.

Для ориентированной мультикривой $M \in \mathcal{M}(x)$ обозначим через $P_M \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ выпуклую оболочку тех базисных 1-циклов, носитель которых содержится в M . Их конечное число, поэтому P_M является выпуклым многогранником. Несложно проверить, что любая грань P_M — это P_N для некоторой мультикривой $N \in \mathcal{M}(x)$, содержащейся в M , а пересечение P_{M_1} и P_{M_2} либо пусто, либо является гранью обоих многогранников. Объединение P_M по всем $M \in \mathcal{M}(x)$ представляет собой регулярный клеточный комплекс \mathcal{B}_g , введенный в [1] и названный *комплексом циклов*.

Обозначим через $\mathcal{M}_0(x) \subset \mathcal{M}(x)$ множество мультикривых, отвечающих клеткам нулевой размерности. Очевидно, что $M \in \mathcal{M}_0(x)$ тогда и только тогда, когда M является носителем базисного 1-цикла для x .

Теорема 3.1. [1] Пусть $g \geq 2$ и $0 \neq x \in H_1(\Sigma_g)$. Тогда \mathcal{B}_g стягиваем.

Группы \mathcal{I}_g и \mathcal{K}_g действуют клеточно и без вращений на комплексе \mathcal{B}_g . Последнее означает, что если элемент $h \in \mathcal{I}_g$ лежит в стабилизаторе клетки P_M , то он оставляет на месте каждую точку P_M .

Напомним несколько стандартных фактов о спектральной последовательности Картана-Лере. Предположим, что дискретная группа G действует клеточно и без вращений на клеточном комплексе X . Тогда существует спектральная последовательность Картана-Лере E_{**}^* , удовлетворяющая следующим условиям.

(1) Лист E^1 может быть представлен в виде

$$E_{pq}^1 \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{X}_p} H_q(\text{Stab}_G(\sigma)), \quad (5)$$

где \mathcal{X}_p обозначает множество, содержащее ровно по одному представителю из каждой орбиты действия группы G на множестве p -клеток.

(2) Дифференциал d_r имеет биградуировку $(-r, r-1)$ для $r = 1, 2, \dots$.

(3) $\bigoplus_{p+q=s} E_{p,q}^\infty$ является присоединенной группой по отношению к некоторой фильтрации к группе эквивариантных гомологий $H_s^G(X)$. В частности, существует естественное вложение $E_{0,s}^\infty \hookrightarrow H_s^G(X)$. Более того, с помощью изоморфизма (5), сквозной гомоморфизм

$$E_{0,s}^1 \twoheadrightarrow E_{0,s}^\infty \hookrightarrow H_s^G(X)$$

можно разложить в прямую сумму гомоморфизмов

$$H_s(\text{Stab}_G(v)) = H_s^{\text{Stab}_G(v)}(v) \hookrightarrow H_s^G, \quad v \in \mathcal{X}_0,$$

индуцированных вложениями $v \subseteq X$ и $\text{Stab}_G(v) \subseteq G$.

Если X стягиваемо, то $H_*^G(X) = H_*(G)$.

Группа \mathcal{K}_g действует на комплексе \mathcal{B}_g без вращений. Последнее следует из более общего результата Иванова [9, Теорема 1.2], который утверждает, что если элемент группы Торелли стабилизирует некоторую мультикривую, то он также стабилизирует каждую ее компоненту.

Обозначим теперь через $E_{*,*}^*$ спектральную последовательность Картана-Лере для действия группы \mathcal{K}_g на стягиваемом комплексе \mathcal{B}_g . Очевидно, что $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(P_M) = \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)$.

Теорема 3.2. [1, Предложение 6.2] Для любой мультикривой $M \in \mathcal{M}(x)$ имеет место неравенство $cd(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)) + \dim(P_M) \leq 2g - 3$.

Из теоремы 3.2 следует, что $E_{p,q}^1 = 0$ при $p+q > 2g-3$. Следовательно, все дифференциалы d^r в группу $E_{0,2g-3}^1$ нулевые, поэтому $E_{0,2g-3}^\infty = E_{0,2g-3}^1$. Используя свойство (3) спектральной последовательности Картана-Лере мы получим следующее утверждение.

Предложение 3.3. [2, Предложение 3.2] Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{M}_0$ — множество мультикривых из попарно различных \mathcal{K}_g -орбит. Тогда включение $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M) \subseteq \mathcal{K}_g$ индуцирует инъективный гомоморфизм

$$\bigoplus_{M \in \mathfrak{M}} H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)) \hookrightarrow H_{2g-3}(\mathcal{K}_g). \quad (6)$$

Для каждого $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ обозначим через $A_{\mathbf{V}}$ подгруппу, порожденную множеством абелевых циклов $\{\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} \mid u \in U_g, T \in \mathcal{T}_g\}$.

Теорема 3.4. *Для различных $V \in \mathcal{V}_g$ подгруппы $A_{\mathbf{V}}$ образуют прямую сумму в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную зависимость

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \lambda_{i,j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{V}_{i,u_j,T_k}} = 0, \quad \lambda_{i,j,k} \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где $I \geq 2$. Достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \lambda_{i,j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{V}_{i,u_j,T_k}} = 0$$

для всех $1 \leq i \leq I$.

Пусть $\mathbf{V}_i = \{V_{i,1}, \dots, V_{i,g}\}$, где $1 \leq i \leq I$, являются различными разбиениями группы $H_1(\Sigma_g)$. Для любого гомологического класса $x \in H_1(\Sigma_g)$ имеются единственные разложения

$$x = x_{i,1} + \dots + x_{i,g}, \quad x_{i,s} \in V_{i,s}, \quad 1 \leq i \leq I.$$

Лемма 3.5. [2, Лемма 4.5] *Найдется класс гомологий $x \in H_1(\Sigma_g)$, такой что*

- (1) $x_{i,s} \neq 0$ для всех $1 \leq i \leq I, 1 \leq s \leq g$,
- (2) множества $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,g}\}$ и $\{x_{j,1}, \dots, x_{j,g}\}$ различны для $1 \leq i < j \leq I$.

Доказательство. Обозначим через $Pr_{i,s} : H_1(\Sigma_g) \rightarrow H_1(\Sigma_g)$ гомоморфизм проекции вдоль $\bigoplus_{q \neq s} V_{i,q}$ на $V_{i,s}$. Так как для любых $1 \leq i < j \leq I$ разбиения V_i и V_j различны, то найдется такое $a_{i,j}$, что $V_{i,a_{i,j}} \neq V_{j,s}$ для всех $s = 1, \dots, g$. Следовательно, все гомоморфизмы $P_{i,j} = Pr_{i,a_{i,j}} - Pr_{j,s} : H_1(\Sigma_g) \rightarrow H_1(\Sigma_g)$ ненулевые.

Ядра всех гомоморфизмов $Pr_{i,s}$ и $P_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq I, 1 \leq s \leq g$, являются подгруппами ранга строго меньшего, чем $2g$, следовательно их объединение W не совпадает с $H_1(\Sigma_g)$. Рассмотрим произвольный гомологический класс $x \in H_1(\Sigma_g) \setminus W$. Тогда $x_{i,s} = Pr_{i,s}(x) \neq 0$, следовательно x удовлетворяет условию (1). Также, $P_{i,j}(x) = Pr_{i,a_{i,j}} - Pr_{j,s} = x_{i,a_{i,j}} - x_{j,s} \neq 0$, следовательно $x_{i,a_{i,j}} \neq x_{j,s}$ для всех $1 \leq i < j \leq I, 1 \leq s \leq g$, поэтому x удовлетворяет условию (2). \square

Вернемся к доказательству Теоремы 3.4. Выберем $x \in H_1(\Sigma_g)$, удовлетворяющий условиям (1) и (2) Леммы 3.5. Пусть $x_{i,s} = n_{i,s} a_{i,s}$, где $a_{i,s} \in H_1(\Sigma_g)$ — примитивный элемент, а $n_{i,s} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Такое представление существует и единственно. Предположим, что для некоторых $1 \leq i < j \leq I$ существует такая перестановка π , что $a_{i,s} = a_{j,\pi(s)}$ для всех $s = 1, \dots, g$. Тогда

$$\sum_{s=1}^g (n_{i,s} - n_{j,\pi(s)}) a_{i,s} = 0.$$

Но элементы $a_{i,1}, \dots, a_{i,g}$ линейно независимы, поэтому $n_{i,s} = n_{j,\pi(s)}$, следовательно $x_{i,s} = x_{j,\pi(s)}$ для всех $s = 1, \dots, g$, что противоречит условию (2) Леммы 3.5. Следовательно, множества $\{a_{i,1}, \dots, a_{i,g}\}$ и $\{a_{j,1}, \dots, a_{j,g}\}$ различны для любых $1 \leq i < j \leq I$.

Рассмотрим набор А-мультикривых M_i , $1 \leq i \leq I$, таких что абелев цикл $\mathcal{A}_{\mathbf{V}_{i,u_i,T_i}}$ ассоциирован с M_i . Обозначим через $X_{i,1}, \dots, X_{i,g}$ проколотые торы, являющиеся

связными компонентами $\Sigma_g \setminus M_i$, причем $H_1(X_{i,s}) = V_{i,s}$. Тогда $a_{i,s} \in H_1(X_{i,s})$. Заметим, что на проколоте торе любой примитивный элемент первых гомологий реализуется простой замкнутой кривой, поэтому на проколотых торах $X_{i,s}$ найдутся простые замкнутые кривые $\alpha_{i,s}$, такие что $[\alpha_{i,s}] = a_{i,s}$. Мультикривые M_i и L_i не пересекаются, поэтому скручивания Дена вдоль компонент M_i содержатся в подгруппе $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L_i)$.

Для любого $1 \leq i \leq I$ кривые $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,g}$ различны, и $\sum_{s=1}^g n_{i,s} \alpha_{i,s}$ является базисным 1-циклом для x . Следовательно, мультикривые $L_i = \alpha_{i,1} \cup \dots \cup \alpha_{i,g}$ содержатся $\mathcal{M}_0(x)$. Так как множества $\{a_{i,1}, \dots, a_{i,g}\}$ и $\{a_{j,1}, \dots, a_{j,g}\}$ различны для любых $1 \leq i < j \leq I$, мультикривые L_1, \dots, L_I лежат в различных \mathcal{K}_g -орбитах. Тогда из Предложения 3.3 следует, что включения $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L_i) \subseteq \mathcal{K}_g$ индуцируют инъективный гомоморфизм

$$\phi : \bigoplus_{i=1}^I H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L_i)) \hookrightarrow H_{2g-3}(\mathcal{K}_g). \quad (8)$$

Имеем $\mathcal{A}_{\mathbf{v}_{i,u_j,T_k}} \in \phi(H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L_i)))$ для всех $1 \leq j \leq J$, $1 \leq k \leq K$. Следовательно, из (8) и (7) следует, что

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \lambda_{i,j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{v}_{i,u_j,T_k}} = 0$$

для всех $1 \leq i \leq I$, что завершает доказательство теоремы 3.4. \square

4 Геодезические представители

В этом разделе мы покажем, как в каждом классе изотопии кривой или арки на поверхности выбрать канонического представителя, так чтобы представители разных классов были в минимальном положении. Конструкция использует гиперболическую метрику.

Рассмотрим поверхность $\Sigma_{g,n}$ (то есть поверхность рода g без края с n проколами), для которой выполняется неравенство $2g + n > 2$. В таком случае Эйлера характеристика $\Sigma_{g,n}$ отрицательна, и поэтому на ней можно ввести полную гиперболическую метрику (так, чтобы выколотые точки были каспами). Тогда универсальную накрывающую $\widetilde{\Sigma_{g,n}}$ поверхности $\Sigma_{g,n}$ можно отождествить с плоскостью Лобачевского Λ^2 . Следовательно, имеем $\Sigma_{g,n} \cong \Lambda^2/\Gamma$, где $\Gamma \cong \pi_1(\Sigma_{g,n})$ — дискретная подгруппа в группе изометрий Λ^2 . Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1. [4, Предложение 1.3] Пусть α — простая замкнутая кривая на $\Sigma_{g,n}$, не стягиваемая на прокол. Тогда в изотопическом классе α существует единственная геодезическая.

Любые две геодезические на гиперболической поверхности находятся в минимальном положении. Действительно, в противном случае они бы образовывали двуугольник, который можно поднять на универсальную накрывающую (это следует из его односвязности), и тогда соответствующие поднятия этих геодезических имели бы хотя бы две общие точки, что невозможно.

Нашей ближайшей целью будет доказательство аналогичного утверждения для арок на $\Sigma_{g,n}$. Под аркой мы имеем в виду не самопересекающийся путь на поверхности, имеющий концы в проколах. Под изотопией арок всегда имеется в виду изотопия

с закреплёнными концами. Арка называется нетривиальной, если она не стягивается в точку (в классе кривых с закреплёнными концами).

Лемма 4.2. Пусть γ — нетривиальная арка на поверхности $\Sigma_{g,n}$. Тогда в изотопическом классе γ существует единственная геодезическая.

Доказательство. Пусть γ соединяет проколы p и q . Выколотые точки не имеют поднятий на Λ^2 , но имеют поднятия на абсолюте. Пусть \tilde{p} — одно из таких поднятий точки p . Пусть $\tilde{\gamma}$ — поднятие арки γ , начинающееся в точке \tilde{p} ; обозначим через \tilde{q} образ прокола q при таком поднятии. Заметим, что $\tilde{p} \neq \tilde{q}$, даже если $p = q$. Действительно, в противном случае путь $\tilde{\gamma}$ стягивался бы в точку на Λ^2 (в классе гомотопии путей с закреплёнными концами), и тогда аналогичным свойством обладала бы арка γ , что противоречит ее нетривиальности. Тогда пусть $\tilde{\gamma}$ изотопен единственной геодезической \tilde{l} с концами в \tilde{p} и \tilde{q} . Тогда арка γ изотопна геодезической $\pi(l)$, где через $\pi : \Lambda^2 \rightarrow \Sigma_{g,n}$ обозначено отображение накрытия. Таким образом, мы нашли геодезического представителя в классе γ .

Легко убедиться, что геодезический представитель единственный. Действительно, если две геодезические арки между проколами p и q изотопны, то их поднятия из точки \tilde{p} заканчиваются в одной и той же точке на абсолюте и являются геодезическими. Следовательно, эти поднятия совпадают. Значит, совпадали и исходные арки. \square

Как было замечено выше, любые две геодезические на гиперболической поверхности находятся в минимальном положении. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что геодезический представитель есть во всех классах изотопии арок и кривых, кроме тех замкнутых кривых, которые стягиваются на прокол. Очевидно, что в таких классах нет геодезических представителей.

5 Комплекс относительных циклов для $\Sigma_{0,2g}$

Следующая конструкция предложена А. А. Гайфуллиным.

Рассмотрим поверхность $\Sigma_{0,2g}$, то есть сферу без $2g$ точек. Нам будет удобнее считать, что это отмеченные, а не выколотые точки. Пусть множество отмеченных точек разбито на два непересекающихся множества $P = \{p_1, \dots, p_g\}$ и $Q = \{q_1, \dots, q_g\}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{C}}$ множество изотопических классов простых ориентированных кривых, начинающихся в одной из точек множества A и заканчивающихся в одной из точек множества B . Такие кривые мы будем называть *дугами*, а наборы непересекающихся дуг — *мультидугами*.

Базисным относительным 1-циклом назовем формальную сумму $\gamma_1 + \dots + \gamma_g$, где $\gamma_i \in \hat{\mathcal{C}}$ различны, удовлетворяющую следующим свойствам.

(1) Можно выбрать представителей изотопических классов $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ так, чтобы они попарно не пересеклись.

(2) В группе сингулярных 0-цепей выполнено равенство $\partial(\sum_{i=1}^g \gamma_i) = \sum_{i=1}^g (q_i - p_i)$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{M}}$ множество изотопических классов мультидуг M , обладающих следующим свойством: для каждой дуги $\gamma \in M$ существует содержащий ее базисный относительный 1-цикл, содержащийся в M .

Для мультидуги $M \in \hat{\mathcal{M}}$ обозначим через $P_M \subset \mathbb{R}^{\hat{\mathcal{C}}}$ выпуклую оболочку тех базисных относительных 1-циклов, которые содержатся в M . Их конечное число, поэтому

P_M является выпуклым многогранником. Несложно проверить, что любая грань P_M — это P_N для некоторой мультидуги $N \in \hat{M}$, содержащейся в M , а пересечение P_{M_1} и P_{M_2} либо пусто, либо является гранью обоих многогранников. Объединение P_M по всем $M \in \hat{M}$ представляет собой регулярный клеточный комплекс $\mathcal{B}_{0,2g}$, который мы будем называть *комплексом относительных циклов* для поверхности $\Sigma_{0,2g}$.

Обозначим через $\hat{M}_0 \subset \hat{M}$ множество мультидуг, соответствующих клеткам нулевой размерности. Очевидно, что $M \in \hat{M}_0$ тогда и только тогда, когда M является базисным относительным 1-циклом.

Нашей дальнейшей целью будет доказательство стягиваемости комплекса $\mathcal{B}_{0,2g}$. Здесь мы следуем идеям [1].

Теорема 5.1. *Комплекс $\mathcal{B}_{0,2g}$ является стягиваемым.*

Нам понадобятся несколько вспомогательных определений и утверждений. Сначала мы определим *вспомогательный комплекс* $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{C}}$ множество, являющееся объединением $\hat{\mathcal{C}}$ и множества изотопических классов простых замкнутых кривых на $\Sigma_{0,2g}$, в том числе два класса тривиальной кривой (с различными ориентациями).

Рассмотрим "мультикривую" $c = c_1 \cup \dots \cup c_n$, где $c_i \in \tilde{\mathcal{C}}$. Компонентами такой мультикривой могут быть как дуги, так и простые замкнутые кривые. Тогда линейная комбинация $\sum k_i c_i$, где $k_i \geq 0$, определяет точку в ортанте $O(c) = [0; \infty)^n \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим дизъюнктное объединение $\bigsqcup O(c)$ по всем таким мультикривым c , отождествляя грани ортанта $O(c)$, где некоторые из k_i равны нулю, с ортантами, соответствующими мультикривым, получающимся из c удалением соответствующих компонент c_i . Получившееся факторпространство обозначим через $\mathcal{C}_{0,2g}$. Каждый элемент $\mathcal{C}_{0,2g}$ является корректно определенной сингулярной 1-цепью, поэтому (сингулярный) дифференциал ∂ определен на $\mathcal{C}_{0,2g}$. Положим $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g} = \partial^{-1}(\sum_{i=1}^g (q_i - p_i))$.

Из определения комплекса относительных циклов следует, что его точки соответствуют 1-цепям $\sum k_i \gamma_i$, где $\gamma_i \in \hat{\mathcal{C}}$ и $k_i > 0$. Аналогично, точки вспомогательного комплекса $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$ соответствуют 1-цепям $\sum k_i \gamma_i$, где $\gamma_i \in \tilde{\mathcal{C}}$ и $k_i > 0$. В обоих случаях должно выполняться равенство $\partial(\sum k_i \gamma_i) = \sum_{i=1}^g (q_i - p_i)$. Отличие вспомогательного комплекса в том, что его базисные 1-циклы могут содержать замкнутые кривые.

Комплекс относительных циклов естественно вкладывается в $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$, так как $\hat{\mathcal{C}} \subset \tilde{\mathcal{C}}$. Обозначим через $\text{Drain} : \tilde{\mathcal{B}}_{0,2g} \rightarrow \mathcal{B}_{0,2g}$ ретракцию, определенную по следующему правилу. Если 1-цепь $c = \sum c_i \gamma_i$ представляет элемент $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$, то, чтобы получить 1-цепь $\text{Drain}(c)$, нужно убрать из суммы $\sum c_i \gamma_i$ все слагаемые, соответствующие замкнутым кривым.

Пусть d и d' — две 1-цепи, представляющие элементы $\mathcal{B}_{0,2g}$. Пусть $t \in [0; 1]$. Согласно лемме 4.2, можно считать, что все дуги из d и d' представлены геодезическими и, следовательно, находятся попарно в минимальном положении. Рассмотрим 1-цепь $c = td + (1-t)d' = \sum c_i \gamma_i$. Данная 1-цепь может не быть простой. Далее мы объясним как по ней построить единственную с точностью до изотопии простую 1-цепь $\text{Surger}(c)$, представляющую элемент $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$.

Пусть, как и ранее, $c = \sum c_i \gamma_i$, где $\gamma_i \in \hat{\mathcal{C}}$, $c_i > 0$ и группе сингулярных 0-цепей выполнено равенство $\partial c = \sum_{i=1}^g (q_i - p_i)$. На данном этапе нам будет удобнее считать, что p_j и q_j это открытые диски. Расширим каждую кривую γ_i до прямоугольника R_i ширины c_i с координатами (x_i, t_i) , где $x_i \in [0; 1]$, так чтобы выполнялись следующие условия.

(1) Каждая дуга γ_i ориентирована в положительном направлении относительно координаты x_i .

(2) Если дуга γ_i начинается в p_j , то кривая $x_i = 0$ строго содержится в ∂p_j . Кривая ∂p_j ориентирована отрицательно относительно координаты t_i .

(3) Если дуга γ_i заканчивается в q_j , то кривая $x_i = 1$ строго содержится в ∂q_j . Кривая ∂q_j ориентирована положительно относительно координаты t_i .

(4) Все кривые вида $t_i = s$ трансверсальны друг другу.

Для любой (необязательно замкнутой) кривой α на $\Sigma_{0,2g}$ определим функцию $\mu_i(\alpha) = \int_{\alpha} dt_i$. Положим $\mu(\alpha) = \sum \mu_i(\alpha)$.

С помощью функции μ построим отображение $\phi : \Sigma_{0,2g} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Для этого зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \Sigma_{0,2g}$, и для каждой точки $x \in \Sigma_{0,2g}$ выберем произвольный путь α_x из x_0 в x . Положим $\phi(x) = \{\mu(\alpha_x)\}$, где $\{r\}$ обозначает смежный класс вещественного числа r в группе \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Лемма 5.2. *Отображение $\phi : \Sigma_{0,2g} \rightarrow S^1$ корректно определено. Гомотопический класс ϕ не зависит от выбора 1-цепи s .*

Доказательство. Очевидно, что $\mu(\alpha_x)$ не зависит от выбора гомотопического класса пути α_x . Поэтому для доказательства корректности достаточно проверить, что $\mu(\partial p_j) \in \mathbb{Z}$ и $\mu(\partial q_j) \in \mathbb{Z}$. Действительно, $\partial c = \sum_{i=1}^g (q_j - p_j)$, поэтому $\mu(\partial p_j) = -1$ и $\mu(\partial q_j) = 1$. Из этих равенств следует, что отображение $\phi^* : H^1(S^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\Sigma_{0,2g}, \mathbb{Z})$ не зависит от выбора 1-цепи s . Следовательно, так как $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$, гомотопический класс ϕ тоже не зависит от выбора s . \square

Заметим, что отображение ϕ гладкое везде, кроме $\Sigma_{0,2g} \setminus \cup R_i$. Это множество состоит из конечного числа компонент связности, на каждой из которых ϕ постоянно. Следовательно, ϕ имеет лишь конечное число критических значений, которые разбивают S^1 на конечное число интервалов. Рассмотрим один из таких интервалов w_k . Прообразом каждой его точки будет гладкое одномерное подмногообразие $\eta_k \in \Sigma_{0,2g}$, край которого содержится в $\partial \Sigma_{0,2g}$. Прообразом интервала w_k будет однопараметрическое семейство таких подмногообразий, изотопных η_k . Через $|w_k|$ обозначим длину интервала w_k (считая длину окружности равной 1).

Лемма 5.3. *1-цепь $\text{Surger}(c) = \sum |w_k| \eta_k$ представляет точку вспомогательного комплекса $\tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$.*

Доказательство. Для начала заметим, что отображение Surger корректно определено, так как в каждом классе изотопии арок мы изначально выбираем канонического представителя. По построению 1-цепь $\text{Surger}(c)$ является простой. Достаточно проверить, что в группе сингулярных 0-цепей выполнено равенство $\partial \text{Surger}(c) = \sum_{j=1}^g (q_j - p_j)$. Это следует из того факта, что $\mu(\partial p_j) = -1$ и $\mu(\partial q_j) = 1$. \square

Зафиксируем произвольный элемент $c \in \mathcal{B}_{0,2g}$. Рассмотрим отображение $H : \mathcal{B}_{0,2g} \times [0; 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{0,2g}$, определенное по формуле

$$H(d, t) = \text{Surger}(tc + (1 - t)d).$$

Оно непрерывно, так как условие на то, что некоторая кривая лежит в носителе $\text{Surger}(c)$ является открытым (дальнейшие рассуждения очевидны).

Доказательство теоремы 5.1. Отображение

$$d \mapsto \text{Drain}(\text{Surger}(tc + (1 - t)d))$$

является строгой деформационной ретракцией комплекса $\mathcal{B}_{0,2g}$ в точку c , следовательно, $\mathcal{B}_{0,2g}$ является стягиваемым. \square

6 Когомологические размерности стабилизаторов

Рассмотрим мультикривую $M = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_g$, где $\delta_1, \dots, \delta_g$ попарно не гомологичны, не пересекаются и гомологически нетривиальны. Если $x = [\delta_1] + \dots + [\delta_g]$ и гомологические классы $[\delta_1], \dots, [\delta_g]$ линейно независимы, то мультикривая M представляет нульмерную клетку в комплексе циклов $\mathcal{B}_g(x)$, стабилизатором которой в \mathcal{K}_g является группа $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)$. Из предложения 2.4 следует, что следующая последовательность корректно определена и точна.

$$0 \rightarrow \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle \rightarrow \text{Stab}_{\text{Mod}_g}(M) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_g \setminus M). \quad (9)$$

Заметим, что $\Sigma_g \setminus M \cong \Sigma_{0,2g}$ и $\mathcal{K}_g \cap \langle T_{\gamma_1}, \dots, T_{\gamma_g} \rangle = \{\text{id}\}$. Поэтому из (9) следует, что имеется вложение $\tau : \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M) \hookrightarrow \text{PMod}_{0,2g}$. Следовательно, группа $G_M = \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)$ действует клеточно на комплексе относительных циклов $\mathcal{B}_{0,2g}$. В данном случае точки p_i и q_i соответствуют двум сторонам кривой δ_i (в произвольном порядке).

Пусть N — мультидуга на поверхности $\Sigma_{0,2g} = \Sigma_g \setminus M$, а P_N — соответствующая ей клетка в $\mathcal{B}_{0,2g}$.

Теорема 6.1. $cd(\text{Stab}_{G_M}(P_N)) + \dim P_N \leq 2g - 3$.

Доказательство. Рассмотрим планарный граф Υ на сфере, вершинами которого являются отмеченные точки поверхности $\Sigma_{0,2g}$ (их количество обозначим через $V = 2g$), а ребрами — дуги, входящие в N (их количество обозначим через E). Количество компонент связности графа Υ обозначим через C , а количество граней (то есть связных компонент $\Sigma_{0,2g} \setminus \Upsilon$) — через F .

Лемма 6.2.

$$\dim P_N = \dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) = E - V + C. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $N = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_E$. Условие $\partial(\sum k_i \gamma_i) = \sum_{j=1}^g (q_j - p_j)$ является неоднородной системой уравнений в \mathbb{R}^E . Размерность пространства ее решений равна размерности пространства решений соответствующей однородной системы $\partial(\sum k_i \delta_i) = 0$. Решением последней системы по определению является пространство $H_1(\Upsilon, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^E$.

Осталось проверить, что пространство решений системы $\partial(\sum k_i \gamma_i) = \sum_{j=1}^g (q_j - p_j)$ пересекается с положительным октантом (заданным системой неравенств $k_i \geq 0$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, E\}$) по подмножеству полной размерности. Действительно, согласно определению комплекса $\mathcal{B}_{0,2g}$, множество решений этой системы не содержится ни в какой гиперплоскости заданной уравнением $k_i = 0$. Это завершает доказательство леммы. \square

Теперь оценим сверху $cd(\text{Stab}_{G_M}(P_N))$. Заметим, что так как имеется вложение $\tau : G_M \hookrightarrow \text{PMod}_{0,2g}$, то из монотонности когомологической размерности следует, что $cd(\text{Stab}_{G_M}(P_N)) \leq cd(\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(P_N))$. Пусть $S_{0,2g} \setminus \Upsilon \cong X_1 \sqcup \dots \sqcup X_F$ — разбиение на связные компоненты. Заметим, что каждая компонента X_i гомеоморфна сфере с некоторым числом проколов, обозначим это число через k_i . Обозначим через PB_n группу крашенных кос из n нитей.

Лемма 6.3. $\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(P_N) \cong (\text{PB}_{k_1-1} \times \mathbb{Z}^{k_1-1}) \times \dots \times (\text{PB}_{k_F-1} \times \mathbb{Z}^{k_F-1})$.

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Факт 6.4. [4, p. 252] $PB_n \cong P\text{Mod}_{0,n+1} \times \mathbb{Z}$.

Обозначим через \overline{X}_i замыкание X_i на сфере. Рассмотрим теперь X_i как поверхность, у которой вместо проколов удалены замкнутые диски. Обозначим через \widetilde{X}_i поверхность, получающуюся из X_i добавлением границ всех удаленных замкнутых дисков.

Заметим, что \widetilde{X}_i гомеоморфно $\Sigma_{0,0,k_i}$, причем

$$\text{Mod}(\widetilde{X}_i) \cong P\text{Mod}_{0,k_i} \times \mathbb{Z}^{k_i} \cong PB_{k_i-1} \times \mathbb{Z}^{k_i-1} \quad (11)$$

(см факт 6.4).

Имеется естественное сюръективное отображение $p_i : \widetilde{X}_i \rightarrow \overline{X}_i$, причем в ограничении на X_i отображение p_i является гомеоморфизмом. Следовательно, p_i индуцирует корректно определенное отображение $\Phi_i : \text{Mod}(\widetilde{X}_i) \rightarrow \text{Stab}_{P\text{Mod}_{0,2g}}(P_N)$.

Поэтому, с учетом изоморфизма (11), достаточно доказать, что очевидное отображение

$$\Phi : \text{Mod}(\widetilde{X}_1) \times \cdots \times \text{Mod}(\widetilde{X}_F) \rightarrow \text{Stab}_{P\text{Mod}_{0,2g}}(P_N)$$

является изоморфизмом. Для этого нам понадобится метод Александера (см [4, Предложение 2.8]).

Докажем сюръективность Φ . Пусть $[\psi] \in \text{Stab}_{P\text{Mod}_{0,2g}}(P_N)$. Тогда $\psi(\delta)$ изотопна δ для любой дуги $\delta \in N$. Все дуги, содержащиеся в N , попарно не гомотопны и не пересекаются (а значит попарно находятся в минимальном положении). Применяя метод Александера получаем, что найдется гомеоморфизм $\phi \in [\psi]$, такой что $\phi|_N = \text{id}$. Гомеоморфизмы $\phi|_{\overline{X}_1}$ сохраняют поточечно границу X_i , поэтому найдутся такие гомеоморфизмы $\tilde{\phi}_i \in \text{Homeo}^+(\widetilde{X}_i)$, что $p_i \circ \tilde{\phi}_i = \phi|_{\overline{X}_1} \circ p_i$. Тогда $\Phi([\tilde{\phi}_1], \dots, [\tilde{\phi}_F]) = [\psi]$.

Докажем инъективность Φ . Пусть $\Phi([\tilde{\psi}_1], \dots, [\tilde{\psi}_F]) = [\text{id}]$. Так как гомеоморфизмы $\tilde{\psi}_1$ поточечно сохраняют границу X_i , то найдутся такие гомеоморфизмы $\psi_i \in \text{Homeo}^+(\overline{X}_i)$, что $p_i \circ \psi_i = \tilde{\psi}_i \circ p_i$.

Рассмотрим соответствующее отображение $\psi \in \text{Homeo}^+(\Sigma_{0,2g})$, такое что $\psi|_{\overline{X}_i} = \psi_i$. По предположению ψ изотопна тождественному отображению. Добавим к N несколько дуг так, чтобы получившаяся мультидуга N' разбивала поверхность на связные компоненты, гомеомерфные дискам. Это можно сделать так, чтобы дуги, содержащиеся в N' были попарно не гомотопны и не пересекались. Так как ψ изотопна тождественному отображению, то $\psi(\gamma)$ изотопна γ для всех дуг $\gamma \in N'$. Покажем, что существует изотопия, тождественная на N , переводящая $\psi(N')$ в N' (напомним, что $\psi(N) = N$). Доказательство проведем по индукции по количеству дуг в $N' \setminus N$. Таким образом, достаточно доказать существование такой изотопии в случае, когда $N' = N \cup \{\gamma\}$.

Приведем $\psi(\gamma)$ в трансверсальное положение с γ . Сначала рассмотрим случай, когда они не пересекаются. В этом случае $\psi(\gamma)$ и γ ограничивают диск на $\Sigma_{0,2g}$, так как изотопны. Этот диск не пересекается с дугами из N , так как $\psi(\gamma)$ и γ не пересекаются N , следовательно, данную изотопию можно сделать тождественной на N . Если же $\psi(\gamma)$ и γ пересекаются, то образуют двуугольник (см [4, Предложение 1.7]), который не пересекается с дугами из N . Следовательно, можно уменьшить количество пересечений $\psi(\gamma)$ и γ , и по индукции свести к случаю, когда они не пересекаются.

Таким образом, существует гомеоморфизм $\phi \in [\psi]$, такой что $\phi(\gamma) = \gamma$ для всех дуг $\gamma \in N'$, причем изотопия между ψ и ϕ неподвижна на N . Тогда $\psi_i = \psi|_{\overline{X}_i}$ изотопна $\phi|_{\overline{X}_i}$. Так как $\phi|_{\overline{X}_i}$ поточечно сохраняет границу X_i , то найдутся такие

гомеоморфизмы $\tilde{\phi}_i \in \text{Homeo}^+(\tilde{X}_i)$, что $p_i \circ \tilde{\phi}_i = \phi|_{\tilde{X}_i} \circ p_i$. Аналогично, изотопию F_i между ψ_i и ϕ_i можно поднять до изотопии \tilde{F}_i между $\tilde{\psi}_i$ и $\tilde{\phi}_i$, так что $p_i \circ \tilde{F}_i = F_i \circ p_i$.

Очевидно, что дуги из $N' \setminus N$ можно поднять до дуг на поверхностях \tilde{X}_i . Гомеоморфизм $\tilde{\phi}_i$ фиксирует дуги из N' , содержащиеся в \tilde{X}_i , причем эти дуги разбивают \tilde{X}_i на связные компоненты, гомеоморфные дискам. Используя метод Александра получаем, что $\tilde{\phi}_i$, а значит и $\tilde{\psi}_i$, представляет тривиальный элемент в $\text{Mod}(\tilde{X}_i)$ для всех i , что завершает доказательство леммы 6.3. \square

Вернемся к доказательству Теоремы 6.1. Нам понадобится следующий факт про группы крашенных кос.

Факт 6.5. [6, Следствие 2] $cd(\text{PB}_n) = n - 1$.

Из Леммы 6.3 и Факта 6.5 следует, что

$$cd(\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(P_N)) = \sum_{i=1}^F (2k_i - 3) = 2\left(\sum_{i=1}^F k_i\right) - 3F. \quad (12)$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^F k_i$ — это число пар $\{ \text{связная компонента } X \text{ поверхности } S_{0,2g} \setminus \Upsilon; \text{ связная компонента } \Theta \text{ графа } \Upsilon, \text{ граничащая с } X \}$. Заметим, что если Θ — связная компонента графа Υ , то количество связных компонент поверхности $S_{0,2g} \setminus \Upsilon$, с которыми она граничит, равно $\dim(H_1(\Theta, \mathbb{R})) + 1$. Пусть $\Theta_1, \dots, \Theta_C$ — связные компоненты графа Υ . Тогда

$$\sum_{i=1}^F k_i = \{(X_i, \Theta_j) \mid X_i \text{ граничит с } \Theta_j\} = \sum_{j=1}^C (\dim(H_1(\Theta, \mathbb{R})) + 1) = \dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) + C, \quad (13)$$

так как $\sum_{j=1}^C \dim(H_1(\Theta, \mathbb{R})) = \dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R}))$. Используя формулы (10), (12) и (13) получаем, что

$$\begin{aligned} cd(\text{Stab}_{G_M}(P_N)) + \dim P_N &\leq cd(\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(P_N)) + \dim P_N = \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^F k_i\right) - 3F + \dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) = 2(\dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) + C) - 3F + \dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) = \\ &= 3\dim(H_1(\Upsilon, \mathbb{R})) + 2C - 3F = 3(E - V + C) + 2C - 3F = \\ &= 2C - 3(V - E + F - C). \end{aligned}$$

Заметим, что $C \leq g$, так каждая связная компонента графа Υ содержит больше одной вершины. Также, $V - E + F - C = 1$, это утверждения об эйлеровой характеристике планарного графа. Следовательно,

$$cd(\text{Stab}_{G_M}(P_N)) + \dim P_N \leq 2C - 3(V - E + F - C) \leq 2g - 3,$$

что завершает доказательство Теоремы 6.1. \square

7 Спектральная последовательность Картана-Лере для комплекса относительных циклов $\mathcal{B}_{0,2g}$

В этом разделе мы будем рассматривать спектральную последовательность Картана-Лере для действия группы $G_M = \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)$ на комплексе $\mathcal{B}_{0,2g}$. Для этого нам понадобится следующая теорема.

Теорема 7.1. *Группа G_M действует на комплексе $\mathcal{B}_{0,2g}$ без вращений.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $M = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_g$. Тогда найдется элемент $f \in G_M$ и мультидуга $N \in \hat{\mathcal{M}}$, такие что f переставляет дуги из N нетривиальным образом. Группа G_M сохраняет наборы точек P и Q , поэтому найдутся $p_i \in P$, $q_j \in Q$ и набор попарно не гомотопных дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_t$, соединяющих p_i и q_j , так что $f(\gamma_k) = \gamma_{\sigma(k)}$ для некоторой нетривиальной перестановки $\sigma \in S_t$.

Переобозначим $f(\gamma_1) = \gamma_2$ и $f(\gamma_2) = \gamma_3$ (возможно, $\gamma_1 = \gamma_3$). Нам будет удобнее рассматривать отмеченные точки вместо выколотых. Через $\gamma_{1,2}$ обозначим кривую, состоящую из дуги γ_1 и дуги γ_2 с обращенной ориентацией. Аналогично, через $\gamma_{2,3}$ обозначим кривую, состоящую из дуги γ_2 и дуги γ_3 с обращенной ориентацией. По построению $f(\gamma_{1,2}) = \gamma_{2,3}$.

Для ориентированной кривой на сфере (с зафиксированной ориентацией) можно канонически зафиксировать понтия области внутри и снаружи этой кривой. Например, внутренностью будем считать ту область, куда направлен нормальный вектор к вектору скорости кривой (так, чтобы базис из касательного и нормального векторов был положительным).

Обозначим через $A_{1,2} \subset P \cup Q$ множество отмеченных точек, содержащихся внутри кривой $\gamma_{1,2}$. Аналогично определим множество $A_{2,3} \subset P \cup Q$. Заметим, что $A_{1,2}$ и $A_{2,3}$ не пусты, так как γ_1 не гомотопно γ_2 и γ_2 не гомотопно γ_3 . Так как $f(\gamma_{1,2}) = \gamma_{2,3}$ и f сохраняет ориентацию и отмеченные точки, то $A_{1,2} = A_{2,3}$.

Если $\gamma_1 = \gamma_3$, то $\gamma_{2,3}$ совпадает с кривой $\gamma_{1,2}$, взятой с противоположной ориентацией. В таком случае $A_{1,2} \cap A_{2,3} = \emptyset$. Следовательно, так как эти множества непустые, $A_{1,2} \neq A_{2,3}$, и мы приходим к противоречию.

Значит, дуги γ_1 , γ_2 и γ_3 попарно не гомотопны. Тогда эти три дуги разделяют сферу на три области, гомеоморфные дискам, причем в каждой из этих областей находится хотя бы одна отмеченная точка. Множества $A_{1,2}$ и $A_{2,3}$ находятся по разные стороны от дуги γ_2 (но могут пересекаться по множеству точек, лежащему между γ_1 и γ_3). Таким образом, $A_{1,2} \neq A_{2,3}$, и мы приходим к противоречию. \square

Пусть $\hat{E}_{*,*}^*$ обозначает спектральную последовательность Картана-Лере для действия группы G_M на комплексе $\mathcal{B}_{0,2g}$. Из теоремы 6.1 следует, что $\hat{E}_{p,q}^1 = 0$ при $p + q > 2g - 3$. Следовательно, все дифференциалы \hat{d}^r в группу $\hat{E}_{0,2g-3}^1$ нулевые, поэтому $\hat{E}_{0,2g-3}^\infty = \hat{E}_{0,2g-3}^1$. Используя свойство (3) спектральной последовательности Картана-Лере мы получаем следующее утверждение.

Предложение 7.2. *Пусть мультикривая $M = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_g$ такова, что ее компоненты попарно не пересекаются, и $[\delta_1], \dots, [\delta_g]$ линейно независимы. Обозначим $G_M = \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(M)$. Рассмотрим $\Sigma_{0,2g} \cong \Sigma_g \setminus M$, пусть двум сторонам кривой δ_i соответствуют отмеченные точки p_i и q_i .*

Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathcal{M}}_0$ — множество мультидуг на $\Sigma_{0,2g}$ из попарно различных G_M -

орбит. Тогда включения $\text{Stab}_{G_M}(N) \subseteq G_M$ индуцируют инъективный гомоморфизм

$$\bigoplus_{N \in \mathfrak{N}} H_{2g-3}(\text{Stab}_{G_M}(N)) \hookrightarrow H_{2g-3}(G_M). \quad (14)$$

Для каждого $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ и $u \in U_g$ обозначим через $A_{\mathbf{V},u}$ подгруппу, порожденную множеством абелевых циклов $\{\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} \mid T \in \mathcal{T}_g\}$.

Теорема 7.3. *Для различных $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ и $u \in U_g$ подгруппы $A_{\mathbf{V},u}$ образуют прямую сумму в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.4 достаточно показать, что для любого $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ и различных $u \in U_g$ подгруппы $A_{\mathbf{V},u}$ образуют прямую сумму в $A_{\mathbf{V}}$. Предположим, что имеется зависимость

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \lambda_{j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} = 0, \quad \lambda_{j,k} \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Достаточно доказать, что

$$\sum_{k=1}^K \lambda_{j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} = 0$$

для всех $1 \leq j \leq J$.

Пусть $\mathbf{V} = \{V_1, \dots, V_g\}$. Выберем ненулевые гомологические классы $0 \neq x_l \in V_l$, положим $x = x_1 + \dots + x_g$. Для каждого j выберем произвольную B -мультикривую N_j из \mathcal{K}_g -орбиты, соответствующей паре $\{\mathbf{V}, u_j\}$. Тогда для любого l класс гомологий x_l можно единственным образом реализовать изотопическим классом простой замкнутой кривой $a_{i,j}$, так чтобы в этом классе можно было выбрать представителя, не пересекающегося с N_j . Обозначим $L_j = a_{1,j} \cup \dots \cup a_{g,j}$.

Предположим, что не все L_j лежат в одной \mathcal{K}_g -орбите. Пусть L'_1, \dots, L'_s – максимальный поднабор мультикривых, состоящих в разных \mathcal{K}_g -орбитах. Тогда имеем $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} \in H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L'_s))$ если $L_j \in \text{Orb}_{\mathcal{K}_g}(L'_s)$ для всех k . Рассмотрим комплекс циклов \mathcal{B}_g для элемента x . Тогда из Предложения 3.3 следует, что включения $\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L'_s) \subseteq \mathcal{K}_g$ индуцируют инъективный гомоморфизм

$$\phi : \bigoplus_{s=1}^S H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L'_s)) \hookrightarrow H_{2g-3}(\mathcal{K}_g). \quad (16)$$

Имеем $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} \in \phi(H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L'_s)))$ если $L_j \in \text{Orb}_{\mathcal{K}_g}(L'_s)$ для всех k . Следовательно, из (16) и (15) следует, что

$$\sum_{\{j \mid L_j \in \text{Orb}_{\mathcal{K}_g}(L'_s)\}} \sum_{k=1}^K \lambda_{j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} = 0$$

для всех s . Следовательно, мы можем считать, что все мультикривые L_j лежат в одной \mathcal{K}_g -орбите. Для простоты обозначим $L = L_1$, $G_L = \text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L)$. Тогда $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k} \in H_{2g-3}(\text{Stab}_{\mathcal{K}_g}(L))$ для всех j и k .

Пусть абелевы циклы $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u_j,T_k}$ порождаются A -мультикривыми $M_{j,k}$. Мы можем считать, что B -мультикривая, содержащаяся в $M_{j,k}$, совпадает с $N_j = N_{j,1} \cup \dots \cup N_{j,g}$ и не зависит от k .

Так как все L_j лежат одной K_g орбите, то найдутся элементы $[f_j] \in \mathcal{K}_g$, такие что $f_j(L_j) = L$. Заменяя $M_{j,k}$ на $f_j(M_{j,k})$ мы можем считать, что $M_{j,k}$ не пересекаются с L .

Обозначим через $T_{j,1}, \dots, T_{j,g}$ проколотые торы, являющиеся связными компонентами $\Sigma_g \setminus N_j$ (так чтобы $N_{j,s} \in \overline{T_{j,s}}$). Выберем на $T_{j,s}$ простые замкнутые кривые $K_{j,s}$, так что алгебраический индекс пересечения $K_{j,s}$ и $a_{1,s}$ равнялся единице. Обозначим $K_j = K_{j,1} \cup \dots \cup K_{j,g}$.

Рассмотрим дуги $K'_{j,s} = K_{j,s} \cap (\Sigma_g \setminus L)$ на поверхности $\Sigma_g \setminus L \cong \Sigma_{0,2g}$. Докажем от противного, что мультидуги $K'_j = K'_{j,1} \cup \dots \cup K'_{j,g}$ лежат в различных G_L -орбитах. Не нарушая общности предположим, что $f(K'_1) = K'_2$, где $f \in G_L$. Тогда $f(K_{1,s}) = K_{2,s}$ для всех s . Заметим, что для всех кривые $N_{1,s}$ одновременно стягиваются на проколы поверхности $\Sigma_g \setminus \{L \cup K_1\}$, следовательно кривые $f(N_{1,s})$ одновременно стягиваются на соответствующие проколы поверхности $f(\Sigma_g \setminus \{L \cup K_1\}) = \Sigma_g \setminus \{L \cup K_2\}$. Но тем же самым свойством обладают кривые $N_{2,s}$. Следовательно, $f(N_{1,s})$ и $N_{2,s}$ изотопны. Поэтому мультикривые $f(N_1)$ и N_2 изотопны, что противоречит тому, что $u_1 \neq u_2$.

Следовательно, мультидуги K'_j лежат в разных G_L -орбитах. Из предположение 7.2, примененного к мультикривой L и мультидугам K'_j , следует, что включения $\text{Stab}_{G_L}(K'_j)$ индуцируют инъективный гомоморфизм

$$\bigoplus_{j=1}^J H_{2g-3}(\text{Stab}_{G_L}(K'_j)) \hookrightarrow H_{2g-3}(G_L). \quad (17)$$

Очевидно, что $\mathcal{A}_{\mathbf{v}, u_j, T_k} \in \text{Stab}_{G_L}(K'_j)$. Следовательно, из (17) и (15) следует, что

$$\sum_{k=1}^K \lambda_{j,k} \mathcal{A}_{\mathbf{v}, u_j, T_k} = 0$$

для всех $1 \leq j \leq J$, что завершает доказательство леммы. \square

8 Абелевы циклы в старших гомологиях группы крашенных кос

В данном разделе мы напомним некоторые стандартные факты о когомологиях группы крашенных кос (см. [6]), а также докажем несколько вспомогательных утверждений о строении старшей группы гомологий $H_{n-1}(\text{PB}_n, \mathbb{Z})$.

Рассмотрим группу крашенных кос PB_n . Ее (ко)гомологии не имеют кручения. Обозначим через $h_{i,j} \in H_1(\text{PB}_g, \mathbb{Z})$ класс гомологий, соответствующий перекручиванию нитей с номерами i и j . Множество гомологических классов $\{h_{i,j} \mid i < j\}$ является базисом в $H_1(\text{PB}_g, \mathbb{Z})$. Двойственный базис в $H^1(\text{PB}_n, \mathbb{Z})$ обозначим через $\{w_{i,j}\}$.

Теорема 8.1. [6, Теорема 1] Кольцо $H^*(\text{PB}_n, \mathbb{Z})$ изоморфно внешнему градуированному кольцу, порожденному $\binom{n}{2}$ элементами $w_{i,j}$ степени 1 для всех $1 \leq i < j \leq n$, удовлетворяющими $\binom{n}{3}$ соотношениям

$$w_{k,l}w_{l,m} + w_{l,m}w_{m,k} + w_{m,k}w_{k,l} = 0 \quad (18)$$

для всех $1 \leq k < l < m \leq n$.

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы 8.1.

Следствие 8.2. [6, Следствие 3] *Элементы*

$$w_{k_1, l_1} w_{k_2, l_2} \cdots w_{k_p, l_p}, \text{ где } k_i < l_i, l_1 < \cdots < l_p, \quad (19)$$

составляют аддитивный базис в кольце $H^*(PB_n, \mathbb{Z})$.

Нас будут интересовать в основном старшие (ко)гомологии группы PB_n , рассмотрим аддитивный базис в $H^{n-1}(PB_n, \mathbb{Z})$ более подробно. Из следствия 8.2 следует, что он состоит из элементов вида $w_{k_1, 2} w_{k_2, 3} \cdots w_{k_{n-1}, n}$, где $1 \leq k_i \leq i$. Обозначим такой элемент через $W_k = W_{k_1, \dots, k_{n-1}}$, где $k = (k_1, \dots, k_{n-1})$. Множество таких наборов k будем обозначать через Δ_n . Элементы двойственного базиса в $H_{n-1}(PB_n, \mathbb{Z})$ будем обозначать через $D_k = D_{k_1, \dots, k_{n-1}}$.

Нам будет удобнее рассматривать группу PB_n как группу чистых классов отображений поверхности $\Sigma_{0, n, 1}$, то есть диска с n проколами a_1, \dots, a_n . Рассмотрим мультикривую M , состоящую из попарно не гомотопных простых замкнутых кривых $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, никакая из которой не стягивается на выколотую точку, рассмотрим соответствующий абелев цикл $\mathcal{A}(M) \in H_{n-1}(PB_n, \mathbb{Z})$. Множество кривых M с такими свойствами обозначим через \mathcal{M}_n .

Замечание 8.3. *Нельзя построить более чем $n - 1$ кривую с указанными свойствами. Среди $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ существует кривая, внутри которой лежат все точки a_1, \dots, a_n . Любая кривая δ_i удовлетворяет одному из следующих трех условий:*

(1) *Внутри δ_i содержатся ровно две точки среди a_1, \dots, a_n .*

(2) *Внутри δ_i можно найти кривую δ_j , такую что только одна точка содержится внутри δ_i и не содержится внутри δ_j .*

(3) *Внутри δ_i можно найти кривые δ_j и δ_k , такие что любая точка, лежащая внутри δ_i , лежит либо внутри δ_j , либо внутри δ_k .*

Доказательство. Посчитаем эйлерову характеристику. Имеем $\chi(\Sigma_{0, n, 1}) = 1 - n$. Если мы разрежем $\Sigma_{0, n, 1}$ по M , то все связные компоненты, кроме, быть может одной, будут гомеоморфны дискам с хотя бы с двумя проколами (то есть будут иметь эйлерову характеристику, не превышающую -1). Одна часть (при наличии кривой, охватывающей все точки) может быть гомеоморфна диску с одним проколом (то есть будут иметь эйлерову характеристику равную 0). Следовательно, будет $n - 1$ компонента, гомеоморфная диску с двумя проколами, и одна компонента, гомеоморфная диску с одним проколом. Это завершает доказательство. \square

Рассмотрим класс когомологий W_k , где $k = (k_1, \dots, k_{n-1})$. Определим матрицу $X_{M, k} \in Mat_{n-1}(\mathbb{Z})$ следующим образом. Элемент с индексами (i, j) равен единице, если выколотые точки a_{k_i} и a_{i+1} лежат внутри кривой δ_j , и нулю в противном случае. Будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ спаривание между когомологиями и гомологиями.

Лемма 8.4. *Пусть $k \in \Delta_n$ и $M \in \mathcal{M}_n$. Тогда $\langle W_k, \mathcal{A}(M) \rangle = \det(X_{k, M})$.*

Доказательство. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^{n-1} = \langle c_1, \dots, c_{n-1} \rangle$ и гомоморфизм $f : \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow PB_n$, заданный на образующих по формуле $c_i \mapsto T_{\delta_i}$. Обозначим через μ_{n-1} образующий элемент группы $H_{n-1}(\mathbb{Z}^{n-1}, \mathbb{Z})$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle W_k, \mathcal{A}(M) \rangle &= \langle W_k, f_*(\mu_{n-1}) \rangle = \langle f^* W_k, \mu_{n-1} \rangle = \langle f^* w_{k_1, 2} \cdots f^* w_{k_{n-1}, n}, \mu_{n-1} \rangle = \\ &= \det(\langle f^* w_{a_i, i+1}, c_j \rangle)_{i, j=1}^{n-1} = \det(\langle w_{a_i, i+1}, f_* c_j \rangle)_{i, j=1}^{n-1} = \det(\langle w_{a_i, i+1}, \delta_j \rangle)_{i, j=1}^{n-1} = \det(X_{k, M}). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\langle w_{k,l}, \delta_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } a_k \text{ и } a_l \text{ лежат внутри кривой } \delta_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому $(\langle w_{k_i, i+1}, \delta_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1} = X_{k,M}$. \square

Следствие 8.5. Пусть $k \in \Delta_n$ и $M \in \mathcal{M}_n$. Тогда $\mathcal{A}(M) = \sum_{k \in \Delta_n} \det(X_{k,M}) D_k$.

Рассмотрим класс гомологий D_k , где $k \in \Delta_n$. Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы построить мультикривую M_k , такую что $\mathcal{A}(M_k) = D_k$. Будем строить $M_k = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n-1}$ по индукции, определяя компоненты в порядке убывания номера. База индукции для пустого множества компонент. Для конструкции нам будут нужны некоторые наборы подмножеств количество которых на i -ом шаге равно $n-i$. Вначале положим $\Gamma_i^n = \{a_i\}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Предположение индукции. Пусть мы уже построили кривые $\gamma_l, \dots, \gamma_{n-1}$ и множества $\Gamma_1^l, \dots, \Gamma_l^l$, так что $\Gamma_1^l \sqcup \dots \sqcup \Gamma_l^l = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $a_i \in \Gamma_i^l$ для всех $i \in \{1, \dots, l\}$. Предположим, что никакие точки из разных множеств не лежат внутри никакой из кривых. Заметим, что для базы предположение индукции выполнено.

Шаг индукции. Положим $\Gamma_{k_{l-1}}^{l-1} = \Gamma_{k_{l-1}}^l \sqcup \Gamma_l^l$ и $\Gamma_i^{l-1} = \Gamma_i^l$ при $i \neq k_{l-1}$, $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Очевидно, что $\Gamma_1^{l-1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{l-1}^{l-1} = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $a_i \in \Gamma_i^{l-1}$ для всех $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Возьмем в качестве γ_{l-1} произвольную кривую множество выколотых точек внутри которой совпадает с $\Gamma_{k_{l-1}}^{l-1}$. Ее можно выбрать так, чтобы она не пересекалась с $\gamma_l, \dots, \gamma_{n-1}$, так как никакие точки из разных множеств не лежат внутри никакой из кривых. Очевидно, что данное условие остается верным.

Итак, мы построили мультикривую M_k . Далее необходимо проверить, что $\mathcal{A}(M_k) = D_k$. Мы сделаем это в два шага.

Лемма 8.6. Пусть $k \in \Delta_n$. Тогда $\det(X_{M_k, k}) = 1$.

Доказательство. Пусть $M_k = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n-1}$. Множество точек, лежащих внутри кривой γ_j , совпадает с $\Gamma_{k_j}^j = \Gamma_{k_j}^{j+1} \sqcup \Gamma_{j+1}^{j+1}$, поэтому a_{k_j} и a_{j+1} лежат внутри γ_j . Множества $\Gamma_1^j, \dots, \Gamma_j^j$ не пересекаются, $a_i \in \Gamma_i^j$ для всех $i \in \{1, \dots, j\}$, поэтому a_{k_i} не содержится внутри γ_j при $i < j$. Следовательно,

$$\langle w_{k_i, i+1}, \gamma_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i < j. \end{cases}$$

Следовательно, матрица $X_{M_k, k}$ является унитарной, и поэтому $\det(X_{M_k, k}) = 1$. \square

Лемма 8.7. Пусть $k, k' \in \Delta_n$, причем $k \neq k'$. Тогда $\det(X_{M_k, k'}) = 0$.

Доказательство. Пусть $M_k = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n-1}$. Пусть $s = \max\{i \mid k_i \neq k'_i\}$. Заметим, что при $j > s$ выполняется $(X_{M_k, k'})_{i,j} = (X_{M_k, k'})_{i,j}$. Рассмотрим s -ый столбец матрицы $X_{M_k, k'}$. Множество точек, лежащих внутри кривой γ_s , совпадает с $\Gamma_{k_s}^s$. При этом $a_{k'_s} \notin \Gamma_{k_s}^s$, так как $k'_s \leq s$ и $k'_s \neq k_s$. Поэтому $(X_{M_k, k'})_{s,s} = 0$. Пусть теперь $i < s$. Тогда $a_{k_i} \in \Gamma_{k_i}^s$ и $a_{i+1} \in \Gamma_{i+1}^s$, причем $\Gamma_{k_i}^s \cap \Gamma_{i+1}^s = \emptyset$, так как $k_i, i+1 \leq s$. Поэтому точки a_{k_i} и a_{i+1} не могут одновременно лежать внутри $\Gamma_{k_s}^s$.

Следовательно, $(X_{M_k, k'})_{i, s} = 0$ при $i \leq s$. Мы получаем, что матрица $X_{M_k, k'}$ имеет следующий вид (выделен s -ый столбец):

$$X_{M_k, k'} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} * & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right).$$

Следовательно, $\det(X_{M_k, k'}) = 0$. \square

Теорема 8.8. Пусть $k \in \Delta_n$. Тогда $\mathcal{A}(M_k) = D_k$.

Доказательство. Теорема является прямым следствием лемм 8.6, 8.7 и следствия 8.5. \square

Следствие 8.9. Абелевы циклы $\mathcal{A}(M_k)$ свободно порождают группу $H_{n-1}(\text{PB}_n, \mathbb{Z})$. Имеет место формула

$$\mathcal{A}(M) = \sum_{k \in \Delta_k} \det(X_{k, M}) \mathcal{A}(M_k). \quad (20)$$

Формула (20) дает нам все соотношения на абелевы циклы вида $\mathcal{A}(M) \in H_{n-1}(\text{PB}_n, \mathbb{Z})$. Но вычисление коэффициентов $\det(X_{k, M})$ представляет сложность, поэтому нашей ближайшей целью будет поиск другой, более простой, равносильной системы соотношений на абелевы циклы $\mathcal{A}(M)$.

Пусть B_1, B_2 и B_3 — три попарно непересекающихся непустых подмножества в $\{a_1, \dots, a_n\}$. Пусть мультикривые $N_1 = \delta_1^1 \cup \dots \cup \delta_n^1$, $N_2 = \delta_1^2 \cup \dots \cup \delta_n^2$ и $N_3 = \delta_1^3 \cup \dots \cup \delta_n^3$ таковы, что:

- (1) Найдется такое s , что $\delta_j^1 = \delta_j^2 = \delta_j^3$ для всех $j \neq s$.
- (2) Найдется такое $t \neq s$, что множество точек, лежащих внутри кривой $\delta_t^1 = \delta_t^2 = \delta_t^3$, совпадает с $B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3$.

(3.1) Множество точек, лежащих внутри кривой δ_s^1 , совпадает с $B_2 \sqcup B_3$.

(3.2) Множество точек, лежащих внутри кривой δ_s^2 , совпадает с $B_3 \sqcup B_1$.

(3.3) Множество точек, лежащих внутри кривой δ_s^3 , совпадает с $B_1 \sqcup B_2$.

Если тройка мультикривых $\{N_1, N_2, N_3\}$ удовлетворяет этим условиям для некоторых B_1, B_2 и B_3 , будем называть ее *циклической* тройкой.

Лемма 8.10. Пусть $\{N_1, N_2, N_3\}$ — циклическая тройка. Тогда

$$\mathcal{A}(N_1) + \mathcal{A}(N_2) + \mathcal{A}(N_3) = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$W_k(\mathcal{A}(N_1) + \mathcal{A}(N_2) + \mathcal{A}(N_3)) = 0$$

для всех наборов $k = (k_1, \dots, k_{n-1})$. Имеем

$$W_k(\mathcal{A}(N_1) + \mathcal{A}(N_2) + \mathcal{A}(N_3)) = \det(X_{k, N_1}) + \det(X_{k, N_2}) + \det(X_{k, N_3}).$$

Матрицы X_{k,N_1} , X_{k,N_2} и X_{k,N_3} отличаются только s -ыми столбцами, поэтому

$$\det(X_{k,N_1}) + \det(X_{k,N_2}) + \det(X_{k,N_3}) = \det(X),$$

где через X обозначена матрица, s -ый столбец которой равен s -му столбцу матрицы $X_{k,N_1} + X_{k,N_2} + X_{k,N_3}$, а остальные элементы равны соответствующим элементам матрицы X_{k,N_1} (или, что равносильно, X_{k,N_2} или X_{k,N_3}).

Из свойства (3) в определении циклической тройки следует, что

$$(X_{k,N_1})_{i,s} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in B_2 \sqcup B_3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$(X_{k,N_2})_{i,s} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in B_1 \sqcup B_3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$(X_{k,N_3})_{i,s} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in B_1 \sqcup B_2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому,

$$X_{i,s} = (X_{k,N_1} + X_{k,N_2} + X_{k,N_3})_{i,s} = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим t из свойства (2) в определении циклической тройки. Согласно этому свойству имеем

$$X_{i,t} = (X_{k,N_1})_{i,t} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, матрица X имеет пропорциональные столбцы, поэтому $\det(X) = 0$, что завершает доказательство. \square

Лемма 8.11. *Набор соотношений (21) порождает все соотношения на абелевы циклы вида $\mathcal{A}(M)$.*

Доказательство. Достаточно выразить $\mathcal{A}(M)$ через абелевы циклы вида $\mathcal{A}(M_k)$, пользуясь соотношениями (21). Будем использовать индукцию. Пусть мультикривые M и M_k уже имеют $n - s - 1$ общих компонент (возможно, нуль) начиная с конца, то есть $M = \delta'_1 \cup \dots \cup \delta'_s \cup \delta_{s+1} \cup \dots \cup \delta_{n-1}$ и $M_k = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_{n-1}$. Мы покажем, как выразить $\mathcal{A}(M)$ через абелевы циклы вида $\mathcal{A}(M^r)$, где мультикривые M^r имеют $n - s$ (то есть на одну больше) общих компонент с некоторыми мультикривыми $\mathcal{A}(M_{k_r})$. Повторяя этот процесс (начиная с нуля совпадений) мы выразим $\mathcal{A}(M)$ через абелевы циклы вида $\mathcal{A}(M_k)$.

Пусть $M = \delta'_1 \cup \dots \cup \delta'_s \cup \delta_{s+1} \cup \dots \cup \delta_{n-1}$ и $M_k = \delta_1 \cup \dots \cup \delta_{n-1}$. Рассмотрим множества $\Gamma_1^{s+1}, \dots, \Gamma_{s+1}^{s+1}$, которые использовались при конструкции M_k . Не нарушая общности (с точностью до знака абелева цикла $\mathcal{A}(M)$) мы можем считать, что δ'_s — это наименьшая (по количеству точек внутри) кривая из тех кривых среди $\delta'_1, \dots, \delta'_s$, которые содержат точку a_{s+1} (и, следовательно, все точки множества Γ_{s+1}^{s+1}). Если δ'_s содержит помимо Γ_{s+1}^{s+1} только одно множество Γ_i^{s+1} , то рассмотрим $k'' = (k''_1, \dots, k''_{n-1})$, такое что $k''_s = i$ и $k''_j = k_j$ для всех $j > s$. Тогда $M_{k''} = \delta''_1 \cup \dots \cup \delta''_{s-1} \cup \delta_s \cup \dots \cup \delta_{n-1}$,

то есть M и $M_{k''}$ имеют $n - s$ совпадающих компонент. Если δ'_s содержит помимо Γ_{s+1}^{s+1} множества $\Gamma_{i_1}^{s+1}, \dots, \Gamma_{i_t}^{s+1}$ и $t > 1$, то мы покажем, как построить циклическую тройку $\{M, M^1, M^2\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) Мультикривые M, M^1 и M^2 отличаются компонентой с номером $p < s$.

Обозначим эти компоненты у M^1 и M^2 через δ_p^1 и δ_p^2 соответственно.

(2) Количество множеств среди $\Gamma_1^{s+1}, \dots, \Gamma_p^s$, содержащихся во внутренности кривой δ_p^j ($j = 1, 2$), строго меньше t .

Если такая циклическая тройка $\{M, M^1, M^2\}$ существует, то по формуле (21) имеем $\mathcal{A}(M) = -\mathcal{A}(M^1) - \mathcal{A}(M^2)$. Повторяя такой процесс $t - 2$ раза (для каждой из новых мультикривых), мы представим $\mathcal{A}(M)$ в виде линейной комбинации абелевых циклов вида $\mathcal{A}(M^r)$, где мультикривые M^r имеют $n - s$ общих компонент с некоторыми мультикривыми вида $\mathcal{A}(M_{k_r})$.

Предъявим конструкцию циклической тройки $\{M, M^1, M^2\}$, удовлетворяющей условиям (1) и (2). Как и ранее, пусть δ'_s содержит помимо Γ_{s+1}^{s+1} множества $\Gamma_{i_1}^{s+1}, \dots, \Gamma_{i_t}^{s+1}$, и $t > 1$. Пусть δ'_p — наибольшая (со количеству проколов внутри) содержащаяся внутри γ_s кривая среди $\delta_1, \dots, \delta_{s-1}$. Она содержит внутри себя множества $\Gamma_{i_1}^{s+1}, \dots, \Gamma_{i_t}^{s+1}$ и не содержит Γ_{s+1}^{s+1} . Так как $t > 1$, то из замечания 8.3 следует, что среди $\delta_1, \dots, \delta_{s-1}$ найдутся две кривые, лежащие внутри δ'_p , и ограничивающие множества точек B_1 и B_2 , так что $B_1 \sqcup B_2 = \Gamma_{i_1}^{s+1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{i_t}^{s+1}$. Положим $B_3 = \Gamma_{s+1}^{s+1}$. Возьмем в качестве δ_p^1 кривую, охватывающую множество точек $B_2 \sqcup B_3$. Аналогично, пусть δ_p^2 охватывает множество точек $B_1 \sqcup B_3$. Остальные компоненты мультикривых M^1 и M^2 определим так, чтобы выполнялось свойство (1). Очевидно, что свойство (2) выполнено, так как $|B_2 \sqcup B_3| < |B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3|$ и $|B_1 \sqcup B_3| < |B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3|$. Это завершает конструкцию и доказательство леммы. \square

9 Соотношения на абелевы циклы

Сейчас мы применим результаты полученные в предыдущем разделе к нахождению всех соотношений на абелевы циклы в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$, ассоциированные с наборами кривых. Согласно теореме 7.3, достаточно для фиксированных $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$ и $u \in U_g$ найти все соотношения внутри подгруппы $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u} \subset H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$.

Выберем A -мультикривые M_T для всех $T \in \mathcal{T}_g$, так что абелев цикл $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T}$ ассоциирован с M_T . Мы можем считать, что B -мультикривые, содержащиеся в M_T , совпадают для всех T . При разрезании про этим B -мультикривым получают g проколотых торов, которые мы обозначим через X_1, \dots, X_g . Выберем ненулевые гомологические классы $0 \neq x_i \in H_1(X_i)$ представленные простыми замкнутыми кривыми α_i . Обозначим $\alpha = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_g$. Положим $G_\alpha = \text{Stab}_{\mathcal{K}}(\alpha)$. Тогда $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} \in H_{2g-3}(G_\alpha)$ для всех $T \in \mathcal{T}_g$. Согласно предложению 3.3, включение $G_\alpha \hookrightarrow \mathcal{K}_g$ индуцирует инъективный гомоморфизм $H_{2g-3}(G_\alpha) \hookrightarrow H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$. Следовательно, достаточно найти все соотношения на элементы $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T}$ (для всех $T \in \mathcal{T}_g$) в группе $H_{2g-3}(G_\alpha)$.

Выберем на поверхностях X_i простые замкнутые кривые β_i , так что алгебраический индекс пересечения α_i и β_i равен единице. Рассмотрим поверхность $\Sigma_g \setminus \alpha \cong \Sigma_{0,2g}$ и обозначим $d_i = \beta_i \cap (\Sigma_g \setminus \alpha)$. Выколотые точки на $\Sigma_{0,2g}$, соответствующие двум сторонам кривой α_i , обозначим через p_i и q_i (порядок не важен). Положим $D = d_1 \cup \dots \cup d_g$. Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} \in \text{Stab}_{G_\alpha}(D)$ для всех $T \in \mathcal{T}_g$. Согласно предложению 7.2, включение $\text{Stab}_{G_\alpha}(D) \hookrightarrow G_\alpha$ индуцирует инъективный гомоморфизм

$H_{2g-3}(\text{Stab}_{G_\alpha}(D)) \hookrightarrow H_{2g-3}(G_\alpha)$. Следовательно, достаточно найти все соотношения на элементы $\mathcal{A}_{\mathbf{v},u,T}$ (для всех $T \in \mathcal{T}_g$) в группе $H_{2g-3}(\text{Stab}_{G_\alpha}(D))$.

Лемма 9.1. *Имеет место изоморфизм $\text{Stab}_{G_\alpha}(D) \cong \text{Mod}_{0,0,g} \cong \text{Mod}_{0,g} \times \mathbb{Z}^g$.*

Доказательство. Напомним (см предложение 2.4), что имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_g} \rangle \rightarrow \text{Stab}_{\text{Mod}_g}(\alpha) \rightarrow \text{Mod}(\Sigma_g \setminus \alpha). \quad (22)$$

Кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ не сепарирующие, поэтому имеются вложения

$$G_\alpha \hookrightarrow \text{Mod}(\Sigma_g \setminus \alpha) \cong \text{Mod}_{0,2g}.$$

$$\text{Stab}_{G_\alpha}(D) \hookrightarrow \text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(D).$$

Обозначим через N малую окрестность $d_1 \cup \dots \cup d_g$, гомеоморфную дизъюнктому объединению d открытых дисков. Нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 9.2. *[1, Теорема 3.18] Пусть $\Sigma' \subset \Sigma$, причем Σ' замкнута в Σ . Предположим, что ни одна связная компонента $\Sigma \setminus \Sigma'$ не гомеоморфна диску менее чем с тремя проколами. Тогда корректно определено вложение $\text{Mod}(\Sigma') \hookrightarrow \text{Mod}(\Sigma)$.*

Рассмотрим $\Sigma' = \Sigma_{0,2g} \setminus N \cong \Sigma_{0,0,g}$. Тогда, согласно предложению 9.2, имеется вложение $\text{Mod}(\Sigma_{0,2g} \setminus N) \hookrightarrow \text{Mod}_{0,2g}$. Очевидно, что данное отображение является сюръекцией на $\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(D)$. Следовательно, $\text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(D) \cong \text{Mod}(\Sigma_{0,2g} \setminus N) \cong \text{Mod}_{0,0,g}$. Осталось заметить, что сквозной гомоморфизм

$$\text{Stab}_{G_\alpha}(D) \hookrightarrow \text{Stab}_{\text{Mod}_{0,2g}}(D) \cong \text{Mod}(\Sigma_{0,2g} \setminus N) \cong \text{Mod}_{0,0,g}$$

является сюръективным, так как группа $\text{Mod}(\Sigma_{0,2g} \setminus N)$ порождается скручиванием Дена вдоль сепарирующих кривых, которые являются образами соответствующих скручиваний Дена в группе \mathcal{K}_g . \square

Заметим, что имеется изоморфизм $\text{Mod}_{0,g} \times \mathbb{Z}^g \cong \text{PB}_{g-1} \times \mathbb{Z}^{g-1}$ (см факт 6.4). Данный изоморфизм достигается при помощи отождествления сферы с g компонентами границы и диска с $g - 1$ компонентой границы. Будем рассматривать M_T как мультикривые на диске с $g - 1$ компонентой границы.

Из леммы 9.1 следует, что достаточно найти все соотношения на элементы $\mathcal{A}_{\mathbf{v},u,T}$ в группе $H_{2g-3}(\text{PB}_{g-1} \times \mathbb{Z}^{g-1}) \cong H_{g-2}(\text{PB}_{g-1}) \otimes H_{g-1}(\mathbb{Z}^{g-1})$. Рассмотрим мультикривую \hat{M}_T , получающуюся из M_T удалением $g - 1$ кривой, которые стягиваются на компоненты границы. Заметим, что данное соответствие осуществляет биекцию между множествами \mathcal{T}_g и \mathcal{M}_{g-1} . Обозначим через T_M прообраз мультикривой M при этой биекции. Заметим, что биекция между \mathcal{T}_g и \mathcal{M}_{g-1} зависит от того, какую именно компоненту границы мы выбрали в качестве границы диска.

Тройку деревьев $\{T_1, T_2, T_3\}$ будем называть *циклической*, если тройка $\{\hat{M}_{T_1}, \hat{M}_{T_2}, \hat{M}_{T_3}\}$ циклическая. Легко видеть, что тройка деревьев $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}_g$ циклическая тогда и только тогда, когда эти деревья отличаются друг от друга перестройкой, показанной на Рис. 2, что согласуется с определением 1.1, приведенном во введении.

Следствие 9.3. *Определение циклической тройки деревьев не зависит от того, какую именно компоненту границы мы выбрали в качестве границы диска.*

Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} = \mathcal{A}(\hat{M}_T) \otimes 1 \in H_{g-2}(\text{PB}_{g-1}) \otimes H_{g-1}(\mathbb{Z}^{g-1})$. Следовательно, подгруппа, порожденная $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T}$, изоморфна подгруппе, порожденной $\mathcal{A}(\hat{M}_T)$. Обозначим через $\mathcal{A}_g \subseteq H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$ подгруппу, порожденную абелевыми циклами ассоциированными с наборами кривых. Из лемм 8.9 и 8.11 следует следующее утверждение.

Теорема 9.4. (1) Группа \mathcal{A}_g свободно порождается абелевыми циклами $\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_{M_k}}$, где $\mathbf{V} \in \mathcal{V}_g$, $u \in U_g$, $k \in \Delta_{g-1}$.

(2) Имеют место соотношения

$$\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_M} = \sum_{k \in \Delta_{g-1}} \det(X_{k,M}) \mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_{M_k}}.$$

(3) Группа \mathcal{A}_g изоморфна абелевой группе с порождающими

$$\{\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} \mid \mathbf{V} \in \mathcal{V}_g, u \in U_g, T \in \mathcal{T}_g\}$$

и соотношениями

$$\{\mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_1} + \mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_2} + \mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T_3} = 0 \mid \{T_1, T_2, T_3\} \text{ — циклическая тройка}\}.$$

Теперь мы готовы завершить доказательства теорем 1.2 и 1.5.

Доказательство теоремы 1.2 Данный результат является прямым следствием теоремы 9.4 (3) и того факта, что действие группы U_g на \mathcal{A}_g имеет вид $v \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{V},u,T} = \mathcal{A}_{\mathbf{V},vu,T}$. \square

Доказательство теоремы 1.5 Чтобы вывести утверждение теоремы 1.5 из теоремы 9.4 (1) достаточно показать, что дерево $T \in \mathcal{T}_g$ уравновешено тогда и только тогда, когда $T = T_{M_k}$ для некоторого $k \in \Delta_{g-1}$. Положим $n = g - 1$ и докажем это утверждение индукцией по n . Таким образом, все деревья мы будем считать корневыми с n висячими вершинами (не считая корня). База индукции для $n = 2$ очевидна.

Пусть $T = T_{M_k}$ для некоторого $k = (k_1, \dots, k_{n-1}) \in \Delta_n$. Тогда висячие вершины с номерами n и k_{n-1} имеют общим соседом некоторую вершину v степени 3. Рассмотрим дерево T' , полученное из T удалением висячих вершин с индексами n и k_{n-1} , и присвоением новой висячей вершине v номера k_{n-1} . Тогда $T' = T_{M_{k'}}$, где $k' = (k_1, \dots, k_{n-2})$. Заметим, что для вершины v дерева T очевидно выполнено свойство уравновешенности, и его наименьший потомок имеет номер k_{n-1} , что согласуется с номером вершины v в дереве T' . По предположению индукции дерево T' является уравновешенным, поэтому все его вершины степени 3 также удовлетворяют свойству уравновешенности. Таким образом, $T \in \mathcal{T}_n^b$.

Докажем в обратную сторону. Пусть $T \in \mathcal{T}_n^b$. Рассмотрим висячую вершину с индексом n , пусть v — смежная с ней вершина. Так как v удовлетворяет свойству уравновешенности, то соединена ребром с некоторой висячей вершиной, обозначим ее номер через k_{n-1} . Рассмотрим дерево T' , полученное из T удалением висячих вершин с индексами n и k_{n-1} , и присвоением новой висячей вершине v номера k_{n-1} . Так наименьший потомок v имел номер k_{n-1} , то $T' \in \mathcal{T}_{n-1}^b$, поэтому по предположению индукции $T' = T_{M_{k'}}$ для некоторого $k' = (k_1, \dots, k_{n-2}) \in \Delta_{n-1}$. Положим $k = (k_1, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}) \in \Delta_n$. Тогда $T = T_{M_k}$. \square

Список литературы

- [1] M. Bestvina, K.-U. Bux, D. Margalit. The dimension of the Torelli group, *J. Amer. Math. Soc.* 23:1 (2010), 61–105, arXiv:0709.0287.
- [2] Alexander A. Gaifullin. On the top homology group of Johnson kernel, arXiv:1903.03864.
- [3] D. Johnson. The structure of the Torelli group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves, *Topology* 24:2 (1985), 113–126.
- [4] B. Farb, D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, 2012.
- [5] G. Mess, The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces, *Topology* 31:4 (1992), 775–790.
- [6] Арнольд В. И., “Кольцо когомологий группы крапешных кос”, *Матем. заметки*, 5 (1969), 227–231
- [7] A. Dimca, S. Papadima, Arithmetic group symmetry and finiteness properties of Torelli groups, *Ann. Math. (2)* 177:2 (2013), 395–423, arXiv:1002.0673.
- [8] S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology spheres, arXiv:1711.07855.
- [9] N.V. Ivanov, Subgroups of Teichmüller modular groups, *Translations of Mathematical Monographs* 115, Amer. Math. Soc., 1992, xii+127 pp.