Некоторые оценки сумм Вейля и их приложения в теории функций

К. Оганесян

Аннотация

В работе получены оценки сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена. Эти оценки используются для решения двух задач теории функций: усиления неравенства Джона-Ниренберга для рядов типа Римана и получения критерия равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^\alpha x$ при натуральном α и $\{c_k\} \in RBVS$. Критерий равномерной сходимости последнего ряда получен также при $\alpha \in (0,2)$ и $c_k \searrow 0$, а при нечетном α результат остается справедливым при замене k^α на любой многочлен степени α по нечетным степеням с рациональными коэффициентами.

1 Введение

В первую очередь нас будут интересовать суммы Вейля, т.е. суммы вида

$$\sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i f(k)},$$

где f — многочлен с действительными коэффициентами.

Вопросы распределения дробных частей значений многочлена (см., например, [1],[2]) и оценки сумм Вейля (см. [3],[4] и [5]), играют важную роль в теории чисел, в частности, в решении проблемы Варинга о представлении натурального числа в виде суммы одинаковых степеней натуральных чисел и для оценки сумм, возникающих в теории дзета-функции Римана. Хорошо известны следующие теоремы, дающие оценки сумм Вейля в точках специального вида.

Теорема A. *(Weil, 1916, [6, T.14, §11]) Пусть* $n \geq 2$, $h(x) = \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$ *и*

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Если $0 < \varepsilon_1 < 1$ *и* $P^{\varepsilon_1} \leq q \leq P^{n-\varepsilon_1}$, *то при любом* $0 < \varepsilon < 1$ *выполняется оценка*

$$\left| \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i h(k)} \right| \leq C(n,\varepsilon,\varepsilon_1) P^{1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2^{n-1}}}.$$

Теорема B. *(Виноградов, 1952, [6, T.17, §14]) Пусть* $n > 2$, $h(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$ *и*

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \le 1.$$

Если $P \le q \le P^{n-1}$, *то справедлива оценка*

$$\left| \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i h(k)} \right| \le e^{3n} P^{1-\frac{1}{9n^2 \ln n}}.$$

Однако в этих теоремах длина суммы P сильно связана со знаменателями рациональных приближений к старшему коэффициенту многочлена h.

В Главе 2 мы получим оценки сумм Вейля в зависимости от того, насколько хорошо старший коэффициент приближается рациональными дробями со знаменателями, меньшими некоторой малой степени числа P. Наиболее хорошие оценки получатся в точках, которые таким образом приближаются достаточно плохо. Такие оценки представляют собой интерес потому, что когда старший коэффициент "близок" к рациональному числу, то суммы Вейля ведут себя в некотором смысле похоже на рациональные суммы, которые изучены достаточно хорошо и с которыми легче работать.

В Главе 3 мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \quad c_k \searrow 0, \tag{1.1}$$

где α — положительное число, и при $\alpha \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ более общие ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin f(k) x, \quad c_k \searrow 0, \tag{1.2}$$

где $f(k)$ — многочлен степени α с рациональными коэффициентами по нечетным степеням k. Нас будут интересовать условия на последовательность, которые были бы необходимыми и достаточными для равномерной сходимости рядов (1.1) и (1.2).

Для случая $\alpha = 1$ такие условия давно известны (см. [7]).

Теорема C. *(Chaundy, Jolliffe, 1916) Если неотрицательная последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *не возрастает, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

В [8] требование монотонности последовательности ослаблено до требования квазимонотонности, то есть существования такого неотрицательного числа γ, что $c_k k^{-\gamma}$ не возрастает, а в [9] критерий распространяется на несколько более общие последовательности. Еще одно обобщение Теоремы C можно найти в [10], где соответствующий критерий доказан для последовательностей из класса $RBVS$, то есть таких, что выполняются условия

$$\sum_{k=l}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \le V c_l \quad \text{и} \quad c_k \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{1.3}$$

для всех l, где V зависит только от последовательности $\{c_k\}$.

Для более широкого класса последовательностей, содержащего все упомянутые выше классы, соответствующий результат получен в [11].

Теорема D. *(Тихонов, 2007) Если неотрицательная последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *принадлежит классу* GM*, то есть, если существует такая константа* A*, зависящая лишь от последовательности* $\{c_k\}$*, что*

$$\sum_{k=l}^{2l-1} |c_k - c_{k+1}| \leq A c_l$$

для всех l*, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Также критерии равномерной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ для последовательностей, удовлетворяющих различным условиям обобщенной монотонности, получены в [12] и [13].

Случаи $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 2$ для рядов (1.1) рассмотрены в [14], где показано, что условие $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (1.1) на отрезке $[0, \pi]$ при $\alpha = \frac{1}{2}$, а при $\alpha = 2$ необходимым и достаточным является условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

Мы покажем, что имеет место

Теорема 1. *Пусть неотрицательная последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *не возрастает. Тогда*

(A) Если $\alpha \in 2\mathbb{N}$*, то ряд* (1.1) *сходится в точке* $\frac{\pi}{2}$ *или в точке* $\frac{2\pi}{3}$ *только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(B) Если $\alpha \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$*, то для равномерной сходимости ряда* (1.2) *на* $\mathbb{R}$ *достаточно, чтобы* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

(C) Если $\alpha \in (0, 2)$*, то для равномерной сходимости ряда* (1.1) *на любом ограниченном подмножестве* $\mathbb{R}$ *достаточно, чтобы* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Теорема 1 представляет собой содержательную часть критерия равномерной сходимости ряда (1.1), который мы сформулируем позднее (в Теореме 2).

Из доказательства Теоремы 1 (B) следует, что при $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ имеет место равномерная сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (c_m - c_{m+1}) \left|\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}\right|$. Это в частности означает, если мы рассматриваем $c_m := m^{-1} \ln^{-1}(m+1)$, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \ln(m+1)} \left|\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}\right|$ сходится равномерно, а значит, для любого $a > 0$ число таких m, что $|\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}| \geq am$, равномерно мало.

Стоит отметить, что в [15] приведена оценка симметричных частичных сумм ряда $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{2\pi i h(k)}}{k}$ для многочлена $h(x)$ с действительными коэффициентами. Этот результат используется для оценки снизу констант Лебега и доказательства следующей теоремы, представляющей интерес в свете данной работы.

Теорема E. *(Осколков, 1986) Пусть* $r \geq 2$, $P_r(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + ... + \alpha_r y^r$ *— многочлен с целыми коэффициентами, принимающий различные целые значения при* $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Тогда* $\{P_r(n)\}$ *не является спектром равномерной сходимости.*

Здесь под спектром равномерной сходимости подразумевается такая последовательность $\mathfrak{K} = \{k_n\}$ попарно различных целых чисел, что для любой непрерывной функции, имеющей нулевые коэффициенты Фурье при $k \notin \mathfrak{K}$, частичные суммы ее ряда Фурье сходятся равномерно.

В [16] была доказана равномерная ограниченность симметричных частичных сумм $\sum_{1\le|k|\le m} \frac{e^{2\pi i h(k)}}{k}$ по $m \in \mathbb{N}$ и $\deg h \le r$ при фиксированном r.

Для формулировки критерия равномерной сходимости ряда (1.1) нам понадобится следующее определение.

Для $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ назовем *дискретной* (α, γ)*-окрестностью нуля* такую последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, что $|x_j| = \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1}(N+j)^{\alpha}}$ при всех $j \in \mathbb{Z}^+$ и некотором $N \in \mathbb{N}$.

Теперь мы можем сформулировать критерий.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *не возрастает. Тогда*

(A) Если $\alpha \in 2\mathbb{N}$, *то ряд* (1.1) *сходится равномерно на множестве, содержащем точку вида* $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ *или* $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, *тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(B) Если $\alpha \in \mathbb{N}\setminus 2\mathbb{N}$, *то ряд* (1.1) *сходится равномерно на множестве, содержащем при некотором* $\gamma \ge 2$ *дискретную* (α, γ)*-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

(C) Если $\alpha \in (0, 2)$, *то ряд* (1.1) *сходится равномерно на ограниченном множестве, содержащем при некотором* $\gamma \ge 2$ *дискретную* (α, γ)*-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Замечание 1. *Пункты (A) и (B) Теорем 1 и 2 остаются справедливыми, если условие монотонности коэффициентовв* $\{c_k\}$ *ослабить до принадлежности классу* $RBVS$ *(см.* (1.3)*).*

Замечание 2. *В частности, при* $\alpha \in (0, 2) \cup \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ *условие* $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ *является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда* (1.1) *на любом множестве, содержащем окрестность нуля.*

Нетрудно будет увидеть, что критерий можно было бы сделать более общим, добавляя в определение дискретной (α, γ)*-окрестности нуля дополнительные параметры. Мы не станем этого делать во избежание чрезмерной громоздкости формулировки Теоремы 2.*

В Главе 4 мы будем рассматривать ряды типа Римана, а именно, ряды

$$F_k := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n^k x)}{n} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n^k x}}{n}.$$

Изучению рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} e(n^k x)/n^s$ положил начало так называемый “пример Римана”. Говорят, (см., например, [17]), что при $k = s = 2$, мнимая часть такого ряда рассматривалась Риманом в качестве непрерывной нигде не дифференцируемой функции. И хотя позже было показано, что эта функция не дифференцируема в иррациональных точках и на некотором семействе рациональных, но при этом дифференцируема в бесконечном числе рациональных точек (см. [18], [17]), оказалось, что пример Римана обладает любопытными и важными свойствами. В частности, является мультифрактальной функцией (см. [19]). В [20] была доказана мультифрактальная структура рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} e(P_k(n)x)/n^s$, где $P_k \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P_k = k$, $1 + k/2 < s < k$. В случае $s = 1$, который мы будем рассматривать, не приходится говорить о локальной ограниченности, а потому методы анализа, упомянутые выше, не работают. Тем не менее, важно понять, насколько такие ряды "ограничены".

Известно, что при любом натуральном k ряд типа Римана принадлежит пространству $BMO = BMO(\mathbb{T})$ (см., например, [21]), т.е. пространству таких 1-периодических функций h, что

$$\|h\|_* := \sup_{I\subset\mathbb{T}} \|h\|_I < \infty, \qquad \|h\|_I = |I|^{-1}\int_I |h - h_I|,$$

где I — отрезок, а h_I — среднее значение h на I. Один из фундаментальных результатов для функций из BMO — неравенство Джона-Ниренберга [22].

Теорема F. *(John, Nirenberg, 1961) Существуют такие константы C_1 и C_2, что для любой функции $h(x) \in BMO$ на любом отрезке $I \subset \mathbb{T}$ выполнено*

$$|\{x \in I : |h(x) - h_I| > \lambda\}| \le C_1|I|e^{-\frac{C_2\lambda}{\|h\|_*}}.$$

Фактически, такое неравенство показывает, как далека функция от того, чтобы быть ограниченной. Для случая $k = 2$ неравенство Джона-Ниренберга было усилено в [21].

Теорема G. *(Chamizo, Córdoba, Ubis, 2018) Существует константа C такая, что для любого отрезка $J \subset I = I_{p/q}$, точки которого имеют своей подходящей дробью дробь p/q, и для любого $\lambda > 0$ выполнено*

$$|\{x \in J : |F_2(x) - (F_2)_J| > \lambda\}| \le C|J|e^{-\lambda\sqrt{2q}}. \tag{1.4}$$

При этом для отрезков $I_{p/q}$ с q кратным 4 этот результат дает точную по порядку оценку. Такая точность обуславливается тем фактом, что квадратичные суммы Гаусса явно вычисляются. Для $k > 2$ ситуация в этом смысле сильно иная, однако мы покажем, что имеет место

Теорема 3. *Существует такая константа C, что при $k \ge 3$ для любого отрезка $J \subset I = I_{p/q}$ и любого $\lambda > 0$*

$$|\{x \in J : |F_k(x) - (F_k)_J| > \lambda\}| \le |J|e^{-\frac{k\lambda}{A(k)}q^{\frac{1}{k}} + Cq^{\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k(k-1)}}\ln q}, \tag{1.5}$$

где

$$A(k) := \sup_{q\ge 2} \max_{(a,q)=1} \left|\sum_{x=0}^{q-1} e\left(\frac{ax^k}{q}\right)\right| q^{\frac{1}{k}-1}.$$

Согласно [23], $A(k) \le 4.709236...$. Стоит отметить, что $A(2) = \sqrt{2}$, а значит, $kA(k)^{-1}q^{\frac{1}{k}} = \sqrt{2q}$ при $k = 2$, т.е. главный член в показателе экспоненты в (1.5) совпадает с показателем в (1.4) при $k = 2$.

При доказательстве Теоремы G существенно использовалось важное свойство степени $k = 2$, а именно, что для всех точек x отрезка $I_{p/q}$ выполнено $|x - p/q| < q^{-k}$ при $k = 2$. Однако при $k > 2$ это неравенство имеет место лишь на множестве малой меры. Таким образом, значение $F_2(x)$ на всем отрезке I в известном смысле достаточно близко к значению $F_2(p/q)$, что уже неверно для $F_k,\ k > 2$. Чтобы получить хорошие оценки при $k > 2$ в точках, недостаточно близких к p/q, мы воспользуемся оценками, доказанными в Главе 2.

2 Оценки сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена

Лемма 2.1. *Пусть $P \in \mathbb{N}$, а число $A \geq 1$. Тогда для любого натурального $k \geq 1$ выполнено*

$$\#\left\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\right\} \leq \frac{kP^k}{A^{1/k}}.$$

Доказательство. Утверждение следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned}\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in &\{1, 2, ..., P\}^k : y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\Big\}\\ &\leq k \cdot \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : y_1 \leq y_2, ..., y_k,\ y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\Big\}\\ &\leq k \cdot \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : 1 \leq y_1 \leq \frac{P}{A^{1/k}}\Big\} = \frac{kP^k}{A^{1/k}}.\end{aligned}$$

□

Приведем здесь утверждение [6, Лемма 13], которым мы в дальнейшем будем пользоваться неоднократно.

Лемма A. *Пусть λ и $x_1, ..., x_k$ — натуральные числа. Обозначим через $\tau_k(\lambda)$ число решений уравнения $x_1 ... x_k = \lambda$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняется оценка*

$$\tau_k(\lambda) \leq C_k(\varepsilon)\lambda^{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

где $C_k(\varepsilon)$ — константа, зависящая только от k и ε.

Для произвольной функции $\psi(y)$ и числа y_1 обозначим через $\underset{y_1}{\Delta}\psi(y) = \psi(y + y_1) - \psi(y)$ конечную разность первого порядка функции $\psi(y)$, а при $k \geq 2$ конечную разность k-го порядка определим индуктивно:

$$\underset{y_1 \cdots y_k}{\Delta}\psi(y) = \underset{y_k}{\Delta}\left(\underset{y_1 \cdots y_{k-1}}{\Delta}\psi(y)\right).$$

Согласно [6, (144)], если $\psi(y)$ — многочлен степени $k \geq 2$, то

$$\underset{y_1 \cdots y_{k-1}}{\Delta}\psi(y) = k!\alpha_k y_1 ... y_{k-1} y + \eta, \tag{2.2}$$

где α_k — старший коэффициент $\psi(y)$, а η зависит лишь от коэффициентов $\psi(y)$ и чисел $y_1, ..., y_{k-1}$. Также по [6, Лемма 12] для любых $K, k \geq 1$ верна оценка

$$\left|\sum_{y=1}^{K} e^{2\pi i h(y)}\right|^{2^k} \leq 2^{2^k} K^{2^k-(k+1)} \sum_{y_1=0}^{K_1-1} ... \sum_{y_k=0}^{K_k-1} \left|\sum_{y=1}^{K_{k+1}} e^{2\pi i \underset{y_1 \dots y_k}{\Delta} h(y)}\right|, \tag{2.3}$$

где $K_1 = K,\ K_{\nu+1} = K_\nu - y_\nu,\ \nu = 1, 2, ..., k$. Теперь, с учетом (2.2) и (2.3), для любого многочлена f степени n со старшим коэффициентом α_n получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{m} e^{if(k)x}\right|^{2^{n-1}} \leq \tag{2.4}$$

$$\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=0}^{m-1} \sum_{y_2=0}^{m-y_1-1} ... \sum_{y_{n-1}=0}^{m-y_1-y_2-...-y_{n-2}-1} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{i \underset{y_1 \dots y_{n-1}}{\Delta} f(y)x}\right|$$

$$= 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=0}^{m-1} \sum_{y_2=0}^{m-y_1-1} ... \sum_{y_{n-1}=0}^{m-y_1-y_2-...-y_{n-2}-1} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{in! y y_1 \dots y_{n-1} \alpha_n x}\right|$$

$$\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \left((n-1)m^{n-1} + \sum_{y_1=1}^{m} \sum_{y_2=1}^{m} ... \sum_{y_{n-1}=1}^{m} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{in! y y_1 \dots y_{n-1} \alpha_n x}\right| \right).$$

Заметим, что для любого числа t и натурального l выполнено

$$\left|\sum_{y=1}^{l} e^{iyt}\right| \leq \left|\sum_{y=1}^{l} \sin yt\right| + \left|\sum_{y=1}^{l} \cos yt\right| = \left|\frac{\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{(2l+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}\right|$$

$$+ \left|\frac{\sin \frac{t}{2} - \sin \frac{(2l+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}\right| = \left|\frac{\sin \frac{lt}{2} \sin \frac{(l+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right| + \left|\frac{\sin \frac{lt}{2} \cos \frac{(l+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right| \leq 2 \left|\frac{\sin \frac{lt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right|. \tag{2.5}$$

Объединяя (2.4) и (2.5), получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{m} e^{if(k)x}\right|^{2^{n-1}} \leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-1}(n-1) \tag{2.6}$$

$$+ 2^{2^{n-1}+1} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=1}^{m} \sum_{y_2=1}^{m} ... \sum_{y_{n-1}=1}^{m} \left|\frac{\sin \frac{(m-y_1-...-y_{n-1}) n! y_1 \dots y_{n-1} \alpha_n x}{2}}{\sin \frac{n! y_1 \dots y_{n-1} \alpha_n x}{2}}\right|.$$

Для фиксированного числа $P \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\mathfrak{P} := (0, P^{\varepsilon-1}] \cup [1 - P^{\varepsilon-1}, 1).$$

Лемма 2.2. *Пусть* $0 < y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \varepsilon \in (0, 1),\ 4 \leq P \in \mathbb{N},\ P \geq p_j \in \mathbb{N},\ j = 1, 2, ..., P^{n-1},\ 3 \leq n \in \mathbb{N}$. *Если нет такой пары взаимно простых натуральных чисел* C *и* $M \leq P^\varepsilon$, *что*

$$\left|y - \frac{C}{M}\right| \leq \frac{1}{P^{1-\varepsilon}},$$

то выполнено

$$\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \{yy_1...y_{n-1}\} \in \mathfrak{P}\Big\}$$
$$\leq 4C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right) P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где $C_m(\gamma)$ из (2.1), а $\{z\}$ обозначает дробную часть числа z. При этом для $p = p_{y_1...y_{n-1}}$ (в подобной записи, для краткости, индекс у p будем опускать) имеем

$$\sum_{y_1=1}^{P} ... \sum_{y_{n-1}=1}^{P} \left|\frac{\sin p\pi yy_1y_2...y_{n-1}}{\sin \pi yy_1y_2...y_{n-1}}\right| \leq GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где G зависит лишь от n и ε.

Замечание 3. *Здесь и далее мы проводим рассуждения с иррациональными (π-иррациональными) числами не потому, что в рациональных (π-рациональных) точках ситуация иная, а лишь из соображений удобства.*

Доказательство. Пусть T — минимальное такое число из $\{1, 2, ..., P^{n-1}\}$, что $\{yT\} \in \mathfrak{P}$ (если такого T нет, то утверждение очевидно). Тогда имеем $T \geq P^{\varepsilon}$. В этом случае для любого $0 \leq k \leq P^{n-1} - T$ среди значений $\{y(k+1)\}$, $\{y(k+2)\}, ..., \{y(k+T)\}$ не более одного лежит в полуинтервале $(0, P^{\varepsilon-1}]$ (иначе бы для некоторых $1 \leq i < j \leq T$ выполнялось $\{y(j-i)\} \in \mathfrak{P}$, что невозможно в силу минимальности T) и не более одного в полуинтервале $[1-P^{\varepsilon-1}, 1)$. Итак, среди значений $\{1, 2, ..., P^{n-1}\}$ не более $2\lceil\frac{P^{n-1}}{T}\rceil \leq \frac{4P^{n-1}}{T} \leq 4P^{n-1-\varepsilon}$ значений k удовлетворяют условию $\{yk\} \in \mathfrak{P}$, а так как при этом для любого k, согласно (2.1),

$$\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} = k\Big\} \leq C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right) k^{\frac{\varepsilon}{2(n-1)}},$$

то

$$\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \{yy_1...y_{n-1}\} \in \mathfrak{P}\Big\}$$
$$\leq 4P^{n-1-\varepsilon}C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right)(P^{n-1})^{\frac{\varepsilon}{2(n-1)}} = 4C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right) P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Отсюда

$$\sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{P} \left|\frac{\sin p\pi yy_1...y_{n-1}}{\sin \pi yy_1...y_{n-1}}\right| = \left(\sum_{\substack{y_1,...,y_{n-1}=1\\ yy_1...y_{n-1}\in\mathfrak{P}}}^{P} + \sum_{\substack{y_1,...,y_{n-1}=1\\ yy_1...y_{n-1}\notin\mathfrak{P}}}^{P}\right) \left|\frac{\sin p\pi yy_1...y_{n-1}}{\sin \pi yy_1...y_{n-1}}\right|$$
$$\leq \max p \cdot 4C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right) P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}} + P^{n-1}\frac{1}{\sin \pi P^{\varepsilon-1}}$$
$$\leq 4C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right) P^{n-\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{P^{n-\varepsilon}}{2} \leq GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где G зависит лишь от n и ε. □

Следствие 2.1. *В условиях Леммы 2.2 для любого действительного приведенного многочлена f степени n выполнено*

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\right| \le D' P^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}},$$

где D' зависит лишь от n и ε.

Доказательство. Из (2.6) и Леммы 2.2 следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\right|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-1}(n-1) + 2^{2^{n-1}+1} P^{2^{n-1}-n} \tag{2.7}$$

$$\left(\sum_{\substack{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}=1\\ \{yy_1\dots y_{n-1}\}\in(P^{\varepsilon-1},1-P^{\varepsilon-1})}}^{P} + \sum_{\substack{y_1,y_2,\dots,y_{n-1}=1\\ \{yy_1\dots y_{n-1}\}\notin(P^{\varepsilon-1},1-P^{\varepsilon-1})}}^{P}\right)\left|\frac{\sin(P-y_1\dots-y_{n-1})\pi yy_1\dots y_{n-1}}{\sin\pi yy_1\dots y_{n-1}}\right|$$

$$\le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-n}\left((n-1)P^{n-1} + 2GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}} + 2P^{n-1}\frac{1}{\sin\pi P^{\varepsilon-1}}\right) \le DP^{2^{n-1}-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где $D>0$ зависит лишь от ε и n. Отсюда и вытекает утверждение при $D' = D^{\frac{1}{2^{n-1}}}$. □

Лемма 2.3. *Пусть $0 < y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\varepsilon \in (0,\frac{1}{6})$, $9 \le P \in \mathbb{N}$, $P \ge p_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,2,\dots,P^{n-1}$, $3 \le n \in \mathbb{N}$. Если есть такая пара взаимно простых натуральных чисел C и $M \le P^{\varepsilon}$, что*

$$\frac{1}{P^{n-\varepsilon}} < \left|y - \frac{C}{M}\right| =: |\beta| \le \frac{1}{P^{1-\varepsilon}},$$

то

$$\#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1}) \in \{1,2,\dots,P\}^{n-1} : \{yy_1\dots y_{n-1}\} \in \mathfrak{P}\Big\}$$
$$\le 6P^{n-\frac{3}{2}} C_{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{n-1}\right) + (n-1)C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) P^{n-1-\frac{n-\varepsilon}{n-1}} |\beta|^{-\frac{1}{n-1}} M^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

а также

$$\sum_{y_1=1}^{P}\dots\sum_{y_{n-1}=1}^{P}\left|\frac{\sin p\pi yy_1y_2\dots y_{n-1}}{\sin\pi yy_1y_2\dots y_{n-1}}\right| \le U(P^{n-\varepsilon} + P^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}|\beta|^{-\frac{1}{n-1}} M^{-\frac{1}{2(n-1)}}),$$

где U зависит лишь от n и ε.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $P^{\varepsilon-n} < y - \frac{C}{M} = \beta \le P^{\varepsilon-1}$. Пусть некоторые взаимно простые C' и M', отличные от C и M, удовлетворяют неравенству

$$\left|y - \frac{C'}{M'}\right| = |\beta'| \le \frac{2}{M'P^{1-\varepsilon}}.$$

Тогда имеем, во-первых,

$$\frac{1}{MM'} \leq \left|y - \frac{C}{M}\right| + \left|y - \frac{C'}{M'}\right| \leq \frac{3}{P^{1-\varepsilon}},$$

откуда

$$M' \geq \frac{P^{1-\varepsilon}}{3M} \geq \frac{P^{1-2\varepsilon}}{3} \geq P^{\varepsilon} \geq M, \tag{2.8}$$

а во-вторых,

$$yMM' = C'M + \beta' M'M = CM' + \beta M'M,$$

откуда $\{\beta' M'M\} = \{\beta M'M\}$. Тогда если $\beta' > 0$, то так как $\beta' M' \leq 2P^{\varepsilon-1}$, то $\beta' M'M \leq 2P^{2\varepsilon-1} < 1$, откуда $\{\beta' M'M\} = \beta' M'M$, а значит, либо $M' \geq \beta^{-1}M^{-1}$, либо $\{\beta' M'M\} = \beta' M'M = \beta M'M$, откуда $\beta' M' \geq \beta' M = \beta M$.

Если же $\beta' < 0$, то $(-\beta' + \beta)M'M \geq 1$, а значит,

$$M' \geq \frac{1 + \beta' M'M}{\beta M} \geq (1 - 2P^{2\varepsilon-1})\beta^{-1}M^{-1} \geq \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}. \tag{2.9}$$

Итак, мы получили, что вне зависимости от знака β' выполнено либо $\beta' M' \geq \beta M$, либо $M' \geq \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$.

Теперь пусть $T_1 < T_2 < ... < T_K$ — все числа k из $\{1, 2, ..., P^{n-1}\}$ такие, что $\{yk\} \in \mathfrak{P}$. Тогда, так как $\{y(T_{i+1} - T_i)\} \in (0, 2P^{\varepsilon-1}] \cup [1 - 2P^{\varepsilon-1}, 1)$, то из рассуждения выше следует, что либо $T_{i+1} - T_i \geq \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$, либо

$$\{y(T_{i+1} - T_i) - (1 - P^{\varepsilon-1})\} \geq \beta M. \tag{2.10}$$

Но так как

$$(\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor + 1)\beta M > P^{\varepsilon-1},$$

то среди чисел $i = 1, 2, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor + 1$ найдется такое, что выполнено $T_{i+1} - T_i \geq \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$. Также заметим, что из (2.10) следует, что среди любых $\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil + 1$ последовательных значений i есть такое, что выполнено $T_{i+1} - T_i \geq \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$.

Заметим, что $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M \leq P^{\varepsilon-1}P^{n-\varepsilon} = P^{n-1}$, а значит,

$$\mathfrak{T} := \left\{M, 2M, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M\right\} \subset \{T_k\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P^{n-1} \geq T_K \geq \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M \\ + \frac{K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor}{\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil + 1}\left(\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil M + \frac{\beta^{-1}M^{-1}}{2}\right) \\ \geq \frac{K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor}{3P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}}\frac{\beta^{-1}M^{-1}}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor \leq 6P^{n-2+\varepsilon}.$$

Тогда, учитывая (2.1) и Лемму 2.1, имеем

$$\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \{yy_1...y_{n-1}\Big\} \in \mathfrak{P}\}$$

$$= \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \{T_k\}\Big\}$$

$$= \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \{T_k\} \setminus \mathfrak{T}\Big\}$$

$$+ \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \mathfrak{T}\Big\}$$

$$\leq 6P^{n-2+\varepsilon} C_{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{n-1}\right)(P^{n-1})^{\frac{2\varepsilon}{n-1}}$$

$$+ \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} :$$

$$y_1...y_{n-1} \in \{M, 2M, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M\}\Big\}$$

$$\leq 6P^{n-\frac{3}{2}} C_{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{n-1}\right)$$

$$+ \ \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} = M\Big\}$$

$$\cdot \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \leq P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\Big\}$$

$$\leq 6P^{n-\frac{3}{2}} C_{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{n-1}\right) + C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) M^{\frac{1}{2(n-1)}} \frac{(n-1)P^{n-1}}{(\beta M P^{n-\varepsilon})^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Отсюда

$$\sum_{y_1=1}^{P} \cdots \sum_{y_{n-1}=1}^{P} \left|\frac{\sin p\pi yy_1y_2...y_{n-1}}{\sin \pi yy_1y_2...y_{n-1}}\right| \leq \max p$$

$$\cdot \left(6P^{n-\frac{3}{2}} C_{n-1}\left(\frac{2\varepsilon}{n-1}\right) + (n-1)C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) P^{n-1-\frac{n-\varepsilon}{n-1}} \beta^{-\frac{1}{n-1}} M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right)$$

$$+ P^{n-1}\frac{1}{\sin \pi P^{\varepsilon-1}} \leq U(P^{n-\varepsilon} + P^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}} \beta^{-\frac{1}{n-1}} M^{-\frac{1}{2(n-1)}}),$$

где U зависит лишь от n и ε. □

Следствие 2.2. *В условиях Леммы 2.3 для любого действительного приведенного многочлена f степени n выполнено*

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k) y}{n!}}\right| \leq D_1'(P^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + P^{1-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}} \beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}}) \qquad (2.11)$$

где D_1' зависит лишь от n и ε.

Доказательство. По Лемме 2.3 и из (2.6) аналогично (2.7) следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k) y}{n!}}\right|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-1}(n-1)+$$
$$+\,2^{2^{n-1}+1} P^{2^{n-1}-n}\left(UP^{n-\varepsilon}+UP^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}+P^{n-1}\frac{1}{\sin\pi P^{\varepsilon-1}}\right)$$
$$\le D_1 P^{2^{n-1}-\varepsilon}+D_1 P^{2^{n-1}-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

откуда, учитывая неравенство $(a+b)^{\frac{1}{n-1}} \le a^{\frac{1}{n-1}}+b^{\frac{1}{n-1}}$, верное для любых положительных a и b, получаем требуемое утверждение с $D_1' = D_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}$.

□

Лемма 2.4. *Пусть $0 < y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$, $8 \le P \in \mathbb{N}$, $P \ge p_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, ..., P^{n-1}$, $3 \le n \in \mathbb{N}$. Если найдется такая пара взаимно простых натуральных чисел C и $M \le P^\varepsilon$, что*

$$\left|y - \frac{C}{M}\right| =: |\beta| \le \frac{1}{P^{n-\varepsilon}},$$

то выполнено неравенство

$$\sum_{y_1=1}^{P} \cdots \sum_{y_{n-1}=1}^{P}\left|\frac{\sin p\pi y y_1 y_2 \dots y_{n-1}}{\sin \pi y y_1 y_2 \dots y_{n-1}}\right| \le \frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}},$$

где B зависит лишь от n. При этом в случае $P^n|\beta| \ge 2$ для любого $\delta > 0$ выполняется

$$\sum_{y_1=1}^{P} \cdots \sum_{y_{n-1}=1}^{P}\left|\frac{\sin p\pi y y_1 y_2 \dots y_{n-1}}{\sin \pi y y_1 y_2 \dots y_{n-1}}\right| \le \frac{P^{n-\varepsilon}}{2} + \frac{A_\delta}{M^{1/2(n-1)}|\beta|^{1/(n-1)-\delta}} P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n},$$

где A_δ зависит лишь от δ и n.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\beta > 0$. Покажем, что минимальное такое $T \in \mathbb{N}$, что $\{yT\} \in \mathfrak{P}$, есть M. Действительно, иначе существует $T < M$ такое, что $yT = Z + \gamma$, где $Z \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \gamma \in \mathfrak{P}$, и тогда

$$\frac{Z}{T} + \frac{\gamma}{T} = y = \frac{C}{M} + \beta,$$

но

$$\frac{1}{P^{2\varepsilon}} \le \frac{1}{M^2} \le \frac{1}{TM} \le \left|\frac{C}{M} - \frac{Z}{T}\right| = \left|\beta - \frac{\gamma}{T}\right| < \frac{2}{P^{1-\varepsilon}}, \tag{2.12}$$

откуда $P^{1-3\varepsilon} < 2$, что невозможно, так как $P^{1-3\varepsilon} \ge \sqrt{P} > 2$. Пусть $T_1 = M < T_2 < T_3 < \dots < T_K$ — все такие натуральные числа, меньшие P^{n-1}, что $\{yT_k\} \in \mathfrak{P}$. Покажем, что $K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor$ и что $T_k = kM$ для всех $k \le K$. Будем доказывать вторую часть утверждения по индукции. База: $k = 1$. Пусть для $k = l < K$ это утверждение доказано, докажем его для $k = l+1$.

Предположим, оно неверно, и $lM < T_{l+1} < (l+1)M$. В силу иррациональности y имеем $\{yT_{l+1}\} \neq \{ylM\} = l\beta$. Остаются два возможных варианта:

1) $l\beta < \{yT_{l+1}\} \leq P^{\varepsilon-1}$. Но тогда $0 < T_{l+1} - lM < M$ и $\{y(T_{l+1} - lM)\} \in (0, P^{\varepsilon-1}]$, что невозможно в силу того, что $T_1 = M$.

2) $\{yT_{l+1}\} \in [1 - P^{\varepsilon-1}, 1)$ или $\{yT_{l+1}\} < l\beta \leq P^{n-1}P^{\varepsilon-n} = P^{\varepsilon-1}$. Тогда $\{y(T_{l+1} - lM)\} \in (1 - 2P^{\varepsilon-1}, 1)$, откуда

$$\{y(T_{l+1} - lM)M\} > 1 - 2MP^{\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{2\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{-2/3} > \frac{1}{2}, \tag{2.13}$$

а с другой стороны

$$\{yM(T_{l+1} - lM)\} \leq (T_{l+1} - lM)M\beta \leq M^2\beta \leq P^{3\varepsilon-n} < P^{-2} \leq \frac{1}{64}. \tag{2.14}$$

Получили противоречие. Осталось показать, что $K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor$. Заметим, что при l, удовлетворяющем $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor + 1 \leq l \leq P^{n-1}$, выполнено

$$\{ylM\} \leq \{yM\}l \leq P^{n-1}\beta M \leq P^{n-1-n+\varepsilon+\varepsilon} = P^{2\varepsilon-1}$$

и

$$\{ylM\} > P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\beta M = P^{\varepsilon-1},$$

то есть $lM \neq T_k$ ни для какого k. Предположим, есть такое натуральное T, что $lM < T < (l+1)M$ для некоторого $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor \leq l \leq P^{n-1}$ и $\{yT\} \in \mathfrak{P}$. Но тогда $\{y(T - lM)\} \geq 1 - 2P^{2\varepsilon-1}$, а значит, снова

$$\{y(T - lM)M\} > 1 - 2MP^{2\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{3\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{-1/2} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{5}, \tag{2.15}$$

а с другой стороны

$$\{yM(T - lM)\} \leq (T - lM)M\beta \leq M^2\beta \leq P^{3\varepsilon-3} < P^{-2} \leq \frac{1}{64}.$$

Противоречие. Итак,

$$K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor \qquad \text{и} \qquad T_k = kM \text{ для всех } k \leq K. \tag{2.16}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{y_1,\ldots,y_{n-1}=1 \\ y_1\cdots y_{n-1} \notin \{T_k\}}}^{P} \left| \frac{\sin p\pi yy_1...y_{n-1}}{\sin \pi yy_1...y_{n-1}} \right| \leq P^{n-1}\frac{1}{\sin \pi P^{\varepsilon-1}} \leq \frac{P^{n-\varepsilon}}{2}. \tag{2.17}$$

Заметим, что с учетом (2.1), имеем для произвольного натурального l

$$\begin{aligned}
\#\Big\{&(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1y_2...y_{n-1} \in \{M, 2M, ..., lM\}\Big\} \\
&\leq \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1y_2...y_{n-1} \leq l\Big\} \\
&\quad \cdot \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1y_2...y_{n-1} = M\Big\} \\
&\qquad \leq C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) M^{\frac{1}{2(n-1)}} \\
&\qquad\quad \cdot \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1y_2...y_{n-1} \leq l\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Теперь, согласно (2.18) и Лемме 2.1, а также воспользовавшись неравенством $\left|\frac{\sin ps}{\sin s}\right| \le p$, верным для любого s, можем оценить

$$\sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\cdots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P}\left|\frac{\sin p\pi y y_1\dots y_{n-1}}{\sin\pi y y_1\dots y_{n-1}}\right| \le \sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\cdots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} p_{y_1\dots y_{n-1}}$$

$$\le \sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\cdots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} P \le PC_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)M^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

$$\cdot\ \#\left\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}\le\frac{P^{n-1}}{M}\right\}$$

$$\le C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\frac{(n-1)P^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}. \quad (2.19)$$

Объединяя оценки (2.17) и (2.19), имеем

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-1}=1}^{P}\left|\frac{\sin P\pi y y_1\dots y_{n-1}}{\sin\pi y y_1\dots y_{n-1}}\right| \le \frac{P^{n-\varepsilon}}{2}+C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\frac{(n-1)P^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}} < \frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}.$$

Рассмотрим теперь случай $P^n\beta\ge 2$. Обозначим

$$F_t := \left\{(y_1,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1\dots y_{n-1}\in\left\{M,2M,\dots,\left\lfloor t(P\beta M)^{-1}\right\rfloor M\right\}\right\}.$$

Заметим, что при $t>P^n\beta$ выполнено

$$\left\lfloor\frac{t}{P\beta M}\right\rfloor M > \frac{P^n\beta}{P\beta M}M = P^{n-1}\ge y_1y_2\dots y_{n-1},$$

а значит, при таких значениях t имеем $F_t = F_{\lfloor P^n\beta\rfloor}$. Для произвольного натурального $t\le P^n\beta$ по Лемме 2.1 получаем

$$\#\left\{(y_1,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1\dots y_{n-1}\le\frac{t}{P\beta M}\right\}\le\frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (2.20)$$

Объединяя оценки (2.18) и (2.20), имеем

$$|F_t|\le C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)M^{\frac{1}{2(n-1)}}\frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$= C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)\frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M^{1/2}}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}}. \quad (2.21)$$

Если $y_1y_2\dots y_{n-1}\in\{T_k\}_{k=1}^{K}\setminus F_t$, то

$$\left|\frac{\sin p\pi y y_1\dots y_{n-1}}{\sin\pi y y_1\dots y_{n-1}}\right|\le\frac{1}{\sin\pi\beta tP^{-1}\beta^{-1}}\le\frac{P}{2t}. \quad (2.22)$$

Тогда, с учетом (2.22), имеем

$$S(P,y) := \sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\cdots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} \left|\frac{\sin p\pi yy_1\dots y_{n-1}}{\sin \pi yy_1\dots y_{n-1}}\right| \le |F_2|\max p + (|F_3|-|F_2|)\frac{P}{2\cdot 2}$$
$$+ (|F_4|-|F_3|)\frac{P}{2\cdot 3} + \dots + (|F_{\lfloor P^n\beta\rfloor+1}|-|F_{\lfloor P^n\beta\rfloor}|)\frac{P}{2\cdot\lfloor P^n\beta\rfloor}.$$

Замечая, что в выражении выше каждый член $|F_i|$ встречается с неотрицательным коэффициентом, получаем с учетом (2.21)

$$S(P,y) \le C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) P(n-1)P^{n-1-\frac{n}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}} \tag{2.23}$$
$$\cdot\left(2^{\frac{1}{n-1}} + \left(3^{\frac{1}{n-1}}-2^{\frac{1}{n-1}}\right)\frac{1}{2} + \dots + \left((\lfloor P^n\beta\rfloor+1)^{\frac{1}{n-1}} - \lfloor P^n\beta\rfloor^{\frac{1}{n-1}}\right)\frac{1}{\lfloor P^n\beta\rfloor}\right).$$

Для любого $a\ge 2$ по теореме Лагранжа для некоторого $\theta\in(0,1)$ имеем

$$(a+1)^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n-1}(a+\theta)^{-\frac{n-2}{n-1}} \le \frac{2}{n-1}a^{-\frac{n-2}{n-1}} \le 1 \le 2^{\frac{1}{n-1}},$$

а значит, из (2.23) следует, что

$$S(P,y) \le C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) P(n-1)P^{n-1-\frac{n}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}2^{\frac{1}{n-1}}\ln(P^n\beta). \tag{2.24}$$

Поскольку для любого $\delta>0$ существует такое число $B_\delta>0$, что $\ln(s+1)\le B_\delta s^\delta$ при $s>0$, то из (2.24) вытекает

$$S(P,y) \le B_\delta C_{n-1}\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)(n-1)P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n}\beta^{\delta-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}2^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= A_\delta P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n}\beta^{\delta-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}, \tag{2.25}$$

где A_δ — константа, зависящая лишь от n. Объединяя оценки (2.17) и (2.25), получаем неравенство из условия леммы для случая $P^n\beta\ge 2$. □

Следствие 2.3. *В условиях Леммы 2.4 для любого действительного приведенного многочлена f степени n имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\right| \le G'\frac{P}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}, \tag{2.26}$$

где G' зависит лишь от n. При этом если $P^n|\beta|\ge 2$, то выполняется

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\right| \le J\left(P^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + \frac{P^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M|\beta|)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\right), \tag{2.27}$$

где J зависит лишь от n.

Доказательство. По Лемме 2.4 и (2.6) имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k) y}{n!}}\right|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-n}\left((n-1)P^{n-1} + 2\left(\frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right)\right),$$

откуда и вытекает (2.26).

Если $P^n|\beta| \ge 2$, то согласно (2.6), по Лемме 2.4

$$\left|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k) y}{n!}}\right|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-1}(n-1) \tag{2.28}$$
$$+ 2^{2^{n-1}+1} P^{2^{n-1}-n}\left(\frac{P^{n-\varepsilon}}{2} + \frac{A_{\frac{1}{2(n-1)}}}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}\beta^{\frac{1}{2(n-1)}}} P^{n-\frac{n}{2(n-1)}}\right).$$

Учитывая неравенство $(a+b)^{\frac{1}{n-1}} \le a^{\frac{1}{n-1}} + b^{\frac{1}{n-1}}$, $a, b > 0$, а также (2.28), получаем (2.27). □

Замечание 4. *Утверждения Лемм 2.3 и 2.4, а также Следствий 2.2 и 2.3 остаются справедливыми для $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ при достаточно большом P.*

Доказательство. В очевидных изменениях нуждаются лишь оценки (2.8), (2.9), (2.12), (2.13), (2.14) и (2.15). □

3 Критерий равномерной сходимости негармонических синус-рядов

3.1 Случай целых степеней

Рассмотрим случай, когда $\alpha = n \in \mathbb{N}$. Имеем две принципиально разные ситуации: когда n четное и когда нечетное. Начнем с четного случая.

Доказательство Теоремы 1 (A). Заметим, что $k^2 \equiv 0 \pmod 4$ при любом четном k и $k^2 \equiv 1 \pmod 4$ при любом k нечетном. Тогда для любых $l < L$

$$\sum_{k=2l+1}^{2L} c_k \sin k^n \frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{L-l} c_{2l+2k-1} \ge \frac{1}{2}\sum_{k=2l+1}^{2L} c_k, \tag{3.1}$$

откуда и вытекает требуемое.

Аналогичные рассуждения можно провести и для точки $\frac{2\pi}{3}$, с учетом того, что $k^2 \equiv 1 \pmod 3$ при любом k, не кратном трем. □

Замечание 5. *Ясно, что можно подобрать и другие точки с таким свойством, однако это не представляется существенным.*

Обратимся теперь к случаю нечетной степени n и ряда (1.2). Этот случай отличается от предыдущего тем, что для любого нечетного l и любой точки вида $x = 2\pi\frac{a}{b} \in 2\pi\mathbb{Q}$ выполнено $\sum_{k=1}^{b} \sin k^l x = 0$, за счет чего не происходит "накопления", наблюдаемого в случае четного l. Мы увидим, что, благодаря этому свойству, и для точек, достаточно близких к 2π-рациональным, соответствующие мнимые части сумм Вейля удается хорошо оценить. Для остальных же точек, эффективные оценки дают результаты Главы 2, и эти оценки остаются справедливыми, если f заменить на произвольный многочлен той же степени.

Доказательство Теоремы 1 (B). Пусть $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$ и $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$. Поскольку мы будем доказывать утверждение для всех $x \in \mathbb{R}$, то можем считать, что многочлен f — приведенный. Без ограничения общности, $x > 0$. Обозначим

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x := \left\{ M \in \mathbb{N} : \exists C_M \in \mathbb{N} \text{ такое, что } (C, M) = 1 \text{ и } \left| \frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_M}{M} \right| \le \frac{1}{M^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \right\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{M}$ есть конечная или бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{M_i\}_{i\ge1}$, в которой для любого $i \ge 1$ выполнено

$$2M_{i+1} \ge M_i^4. \tag{3.2}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{M_i M_{i+1}} \le \left| \frac{C_{M_i}}{M_i} - \frac{C_{M_{i+1}}}{M_{i+1}} \right| \le \left| \frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_{M_i}}{M_i} \right| + \left| \frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_{M_{i+1}}}{M_{i+1}} \right| \\ \le \frac{1}{M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{1}{M_{i+1}^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \le \frac{2}{M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}},\end{aligned}$$

откуда

$$2M_{i+1} \ge M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}-1} \ge M_i^{\frac{1-1/6}{1/6}-1} = M_i^4.$$

Будем называть натуральное число m *неудобным*, если существует такая пара взаимно простых натуральных чисел C и M, что $M \le m^\varepsilon$ и

$$\left| \frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M} \right| \le \frac{1}{m^{n-\varepsilon}}.$$

Иначе, если существует такая пара взаимно простых натуральных чисел C и M, что $M \le m^\varepsilon$ и

$$\left| \frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M} \right| \le \frac{1}{m^{1-\varepsilon}},$$

будем называть число m *почти удобным*. В остальных же случаях m будем называть *удобным*.

Для произвольных натуральных $l < L$, применяя преобразование Абеля, имеем

$$\begin{aligned}\left| \sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x \right| \le c_l l + c_{L+1} L + \left| \sum_{m=l}^{L} (c_m - c_{m+1}) S_m(x) \right| \\ \le 2 \sup_{k\ge l} \{c_k k\} + \sum_{m=l}^{L} (c_m - c_{m+1}) |S_m(x)|,\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $S_m(x) := \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m e^{if(k)x} = \sum_{k=1}^m \sin f(k)x$.

Далее будем считать, что $l \geq 9$, чтобы применять оценки из Главы 2. С помощью Следствий 2.1 и 2.2, мы оценим $S_m(x)$ для удобных и почти удобных m, учитывая, что в этих случаях $\sin \frac{n! y_1 \dots y_{n-1} x}{2}$ "редко" принимает близкие к нулю значения. Для этих значений m мы нигде не используем нечетность f и тот факт, что коэффициенты f рациональные.

Итак, если m удобное, из Следствия 2.1 получаем

$$\sum_{\substack{m\geq l\\ \text{удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq D' \sum_{m\geq l} (c_m - c_{m+1}) m^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}} \leq D' c_l l^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}}$$

$$+ 2D' \sum_{m\geq l} c_m m^{-\frac{\varepsilon}{2^n}} \leq D' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \left(1 + 2\sum_{m\geq l} m^{-1-\frac{\varepsilon}{2^n}}\right)$$

$$\leq D' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \left(1 + \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}\right) \leq D' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \frac{2^{n+2}}{\varepsilon} = D'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\}. \tag{3.4}$$

Заметим, что за каждым почти удобным числом m "закреплено" натуральное число $M = M(m) \leq m^\varepsilon$, $M \in \mathfrak{M}$, причем все числа m, за которыми закреплено данное M, должны удовлетворять условию

$$\left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\right|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} =: \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \leq m \leq \beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{3.5}$$

Для почти удобных m с учетом (3.5) и Следствия 2.2, имеем

$$\sum_{\substack{m\geq l\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq \sum_{M\in\mathfrak{M}} \sum_{\substack{m\geq l,\ M=M(m)\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)|$$

$$\leq D_1' \sum_{m\geq l} (c_m - c_{m+1}) m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$

$$+ D_1' \beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}} \sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}} \sum_{\substack{m\geq l\\ m=\lceil \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \rceil}}^{\lfloor \beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}} \rfloor} (c_m - c_{m+1}) m^{1-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}.$$

Первую сумму оценим как в (3.4), получим

$$\sum_{\substack{m\geq l\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq D'' \frac{D_1'}{D'} \sup_{k\geq l}\{c_k k\}$$

$$+ 2D_1' \beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}} \sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}} \sum_{\substack{m\geq l\\ m=\lceil \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \rceil}}^{\lfloor \beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}} \rfloor} c_m m^{-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}} \leq D'' \frac{D_1'}{D'} \sup_{k\geq l}\{c_k k\}$$

$$+ 2D_1' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}} \sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}} \frac{2^{n-1}(n-1)}{n-\varepsilon} (\lceil \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \rceil)^{-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}$$

$$\leq D_1'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\}, \tag{3.6}$$

где D_1'' зависит лишь от n и ε, в силу (3.2).

Перейдем теперь к неудобным числам m. В этом случае x приближается π-рациональными дробями "слишком хорошо", поэтому разность между S_m, взятым в точке x, и S_m, взятым в близкой π-рациональной точке, будет контролируемо небольшой. При некоторых m мы этим воспользуемся, и это будет тот единственный случай, когда нам важно, что мы оцениваем только мнимую часть соответствующей суммы Вейля, что функция f нечетна и что коэффициенты f рациональные. Для остальных m будем проводить оценки, согласно одному из двух неравенств из Леммы 2.4, и эти оценки останутся справедливыми для всей суммы Вейля и для любого многочлена.

За каждым неудобным числом m также закреплено число $M \le m^{\varepsilon},\ M \in \mathfrak{M}$. Фиксированное $M \in \mathfrak{M}$ закреплено за всеми натуральными числами m такими, что $\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} = \beta_M^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} = \left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\right|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \ge m \ge M^{\frac{1}{\varepsilon}}$, где $C = C_M$, и только за ними. Обозначим $m_1 = \lceil M^{\frac{1}{\varepsilon}} \rceil,\ m_2 = \left\lfloor \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \right\rfloor$ (при фиксированном M). Пусть K — такое натуральное число, что

$$\frac{1}{K^n \ln(2M)} \le \beta \le \frac{1}{(K-1)^n \ln(2M)}. \tag{3.7}$$

Мы разделим отрезок $m_1 \le m \le m_2$ на три отрезка: $m_1 \le m \le K-1,\ K \le m \le \lfloor 2K\ln(2M) \rfloor$ и $\lfloor 2K\ln(2M) \rfloor + 1 \le m \le m_2$. Для m, принадлежащего второму или третьему из этих отрезков, будем оценивать $S_m(x)$ с помощью первого и второго неравенств, соответственно, из Следствия 2.3. И только на отрезке $m_1 \le m \le K-1$ для оценки $S_m(x)$ нам понадобятся свойства многочлена f и тот факт, что мы имеем дело с синусами, а не с косинусами.

Пусть $Q \in \mathbb{N}$ — минимальное такое число, что $Qf \in \mathbb{Z}[x]$. Заметим, что для любого нечетного l, если числа k_1 и k_2 таковы, что $k_1 \equiv -k_2 \pmod{QMn!}$, то $\sin\left(k_1^l \frac{2\pi C}{QMn!}\right) + \sin\left(k_2^l \frac{2\pi C}{QMn!}\right) = 0$. Значит, для любого $g \in \mathbb{Z}$ выполнено $\sum_{k=g+1}^{g+QMn!} \sin\left(f(k)\frac{2\pi C}{Mn!}\right) = 0$, откуда

$$\begin{aligned}|S_m(x)| &\le \left|S_m\left(\frac{2\pi C}{Mn!}\right)\right| + \left|S_m(x) - S_m\left(\frac{2\pi C}{Mn!}\right)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m} \sin\left(f(k)\frac{2\pi C}{Mn!}\right)\right| \\ &+ \frac{2\pi}{n!}\sum_{k=1}^{m}|f(k)|\beta \le \left\{\frac{m}{QMn!}\right\}QMn! + 2C_f\beta\sum_{k=1}^{m}k^n \\ &\le QMn! + C_f m^{n+1}\beta \le Qm^{\varepsilon}n! + C_f m^{n+1}\beta, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где C_f — сумма модулей коэффициентов многочлена f. Из (3.7) и (3.8) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| &\le Qn!\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{\varepsilon} + C_f\beta\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{n+1} \\ &\le Qn!c_{m_1}m_1^{\varepsilon} + Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1}c_m\varepsilon(m-\theta_m)^{\varepsilon-1} \\ &+ \frac{C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{n+1}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\theta_m \in (0,1)$, по теореме Лагранжа. Учитывая, что для любого $z \geq 2$ выполнено $(z-1)^{\varepsilon-1} \leq 2z^{\varepsilon-1}$, из (3.9) следует

$$\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq Qn!\sup_{k\geq l}\{c_k k\}m_1^{\varepsilon-1} + 2\varepsilon Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1} c_m m^{\varepsilon-1}$$

$$+ C_f\frac{c_{m_1}m_1}{\ln(2M)} + C_f\frac{n+1}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1+1}^{K-1} c_m m^n \leq \sup_{k\geq l}\{c_k k\}$$

$$\cdot\left(Qn!m_1^{\varepsilon-1} + 2\varepsilon Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1} m^{\varepsilon-2} + \frac{C_f}{\ln(2M)} + \frac{(n+1)C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1+1}^{K-1} m^{n-1}\right)$$

$$\leq \sup_{k\geq l}\{c_k k\}\left(Qn!\left(m_1^{\varepsilon-1} + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}m_1^{\varepsilon-1}\right) + \frac{C_f}{\ln(2M)} + \frac{(n+1)C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\frac{K^n}{n}\right), \tag{3.10}$$

откуда в силу того, что $m_1^{\varepsilon} \geq M$, и того, что $\frac{(n+1)K^n}{n(K-1)^n} \leq 2^{n+1}$, окончательно имеем

$$\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq A\sup_{k\geq l}\{c_k k\}\left(M^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\ln(2M)}\right), \tag{3.11}$$

где $A > 0$ зависит только от n, ε и многочлена f.

При $2K\ln(2M) \leq m \leq m_2$ имеем

$$m^n\beta \geq (2K\ln(2M))^n(K^n\ln(2M))^{-1} = 2^n\ln^{n-1}(2M) \geq 2(2\ln 2)^{n-1} \geq 2,$$

а значит, с учетом (2.27), имеем

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)|$$
$$\leq J\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m - c_{m+1})\left(m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + \frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M\beta)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\right). \tag{3.12}$$

Оценим сначала

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m - c_{m+1})m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$

$$\leq \frac{c_{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1)}{(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1)^{\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}} + 2\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2} c_m m^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$

$$\leq \sup_{k\geq l}\{c_k k\}\left(m_1^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + 2\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2} m^{-1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}\right)$$

$$\leq \sup_{k\geq l}\{c_k k\}\left(M^{-\frac{1}{2^{n-1}}} + \frac{2^n}{\varepsilon}m_1^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}\right) \leq \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}\sup_{k\geq l}\{c_k k\}M^{-\frac{1}{2^{n-1}}}. \tag{3.13}$$

Далее, в силу (3.7), имеем

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})\frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M\beta)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le \sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})\frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}(\ln(2M))^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}c_{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1)$$
$$+2\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}c_m m^{-\frac{n}{2^n(n-1)}}K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}$$
$$\le\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\}\left(1+2K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}m^{-1-\frac{n}{2^n(n-1)}}\right)$$
$$\le\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\}\left(1+2K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}\left(\frac{2^n(n-1)}{n}\right)(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor)^{-\frac{n}{2^n(n-1)}}\right)$$
$$\le H\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\},\qquad(3.14)$$

где $H>0$ зависит лишь от n. Итак, из (3.12), (3.13) и (3.14) получаем

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le H'\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\},\qquad(3.15)$$

где $H'>0$ также зависит только от n и f.

При $K\le m\le 2K\ln(2M)$, согласно (2.26),

$$\sum_{m=K}^{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le G'\sum_{m=K}^{\lfloor 2K\ln(3M)\rfloor}(c_m-c_{m+1})\frac{m}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le\frac{G'}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\left(c_K K+\sum_{m=K+1}^{\lfloor 2K\ln(3M)\rfloor}c_m\right)\le\frac{G'}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\}\left(1+2\ln\frac{2K\ln(3M)}{K+1}\right)$$
$$\le 3G'\frac{\ln\ln(3M)}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\sup_{k\ge l}\{c_k k\}.\qquad(3.16)$$

Собирая вместе оценки (3.11), (3.15) и (3.16), получаем

$$\sum_{m=m_1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le A\sup_{k\ge l}\{c_k k\}\left(M^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\frac{1}{\ln(2M)}\right)$$
$$+\left(H'\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}+3G'\frac{\ln\ln(3M)}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\right)\sup_{k\ge l}\{c_k k\}\le A'\frac{\sup_{k\ge l}\{c_k k\}}{\ln(2M)},\qquad(3.17)$$

где $A' > 0$ зависит лишь от ε, n и f. А значит, учитывая, что $M \in \mathfrak{M}$ и (3.2), окончательно имеем

$$\sum_{\substack{m\geq l\\ \text{неудобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \leq \sum_{i\geq 1} A' \frac{\sup_{k\geq l}\{c_k k\}}{\ln(2M_i)} \leq A' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \left(\frac{1}{\ln 2} + \sum_{i\geq 2}\frac{1}{\ln M_i}\right)$$

$$\leq A' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\sum_{i\geq 2}\frac{1}{3^{i-2}}\right) \leq \frac{3}{\ln 2} A' \sup_{k\geq l}\{c_k k\}. \tag{3.18}$$

Итак, объединяя оценки (3.3), (3.18), (3.4) и (3.6), получаем

$$\left|\sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x\right| \leq 2\sup_{k\geq l}\{c_k k\} + \frac{3}{\ln 2}A' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} + D'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} + D_1'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\}$$
$$\leq A'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\},$$

где $A'' > 0$ зависит лишь от ε, n и f. Таким образом, утверждение доказано для $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Q}$.

Наконец, если $x \in \pi\mathbb{Q}$ найдем такое $x' \notin \pi\mathbb{Q}$, что $|x - x'| \leq L^{-n-1}c_1^{-1}\sup_{k\geq l}\{c_k k\}$, тогда

$$\left|\sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x\right| \leq \left|\sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x'\right| + \left|\sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x - \sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x'\right|$$
$$\leq A'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} + C_f \sum_{m=l}^{L} c_m m^n |x - x'|$$
$$\leq A'' \sup_{k\geq l}\{c_k k\} + C_f L^{-n-1}\sup_{k\geq l}\{c_k k\}\sum_{m=l}^{L} m^n \leq (A'' + C_f)\sup_{k\geq l}\{c_k k\}, \tag{3.19}$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

3.2 Случай степени из интервала (1,2)

Специфика этого случая состоит в том, что при $\alpha \in (1,2)$ разности $(k+1)^\alpha - k^\alpha$ возрастают, и возрастают достаточно медленно. Идея доказательства заключается в следующем: выделить блоки таких k, что разности $(k+1)^\alpha x - k^\alpha x$, взятые по модулю 2π, лежат близко к 0 или 2π. Тогда "шаги" между $k^\alpha x$ и $(k+1)^\alpha x$ в таких блоках достаточно малы, и суммы вида $\sum_{k=k_1}^{k_1+s} \sin k^\alpha x$ в них можно оценить с помощью Леммы 3.1. Для остальных же k сумма вида $\sum_{k=k_1}^{k_1+s} \sin k^\alpha x$ мало отличается от суммы $\sum_{k=0}^{s} \sin(x_0 + k\gamma) = \frac{\cos\left(x_0 - \frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(x_0 + (2k+1)\frac{\gamma}{2}\right)}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$, где γ отделено от 0 и 2π, а значит, $\sin\frac{\gamma}{2}$ отделено от нуля. Основная трудность состоит в выборе длин таких блоков: они не должны быть слишком маленькими, чтобы обеспечить нужную оценку всей суммы, но при этом не должны быть и большими, иначе слова "мало отличается" потеряют всякий смысл, так как внутри длинного блока разности $(k+1)^\alpha x - k^\alpha x$ успеют сильно измениться.

Доказательство Теоремы 1 (C) для случая $\alpha \in (1,2)$. Пусть выполнено условие $kc_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Покажем, что ряд (1.1) сходится равномерно на множестве $|x| \le X < \infty$. Без ограничения общности будем далее считать, что $x > 0$ (случай $x = 0$ очевиден). Зафиксируем некоторое число δ из интервала $(0, \frac{2-\alpha}{3})$. Положим натуральное число $l_0 \ge 2$ таким, чтобы выполнялись условия

$$\left(\frac{\pi}{\alpha(\alpha-1)} - 1\right) l_0^2 \ge \pi, \qquad l_0^{1-\frac{\alpha}{2}} > 4\sqrt{\pi}\ln^2 l_0, \qquad l_0^{\frac{2-\alpha}{3}-\delta} > 4\ln^2 l_0. \tag{3.20}$$

Тогда для любого $l \ge l_0$ все эти условия также выполнены.

Рассмотрим

$$\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x,$$

где $l \ge l_0$, а $x \in (0, X]$ — фиксированная точка. Обозначим $m := \lceil x^{-\frac{1}{\alpha}} \rceil$, тогда

$$\left|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| \le \left|\sum_{k=l}^{m-1} c_k \sin k^\alpha x\right| + \left|\sum_{k=m}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| =: |S_1| + |S_2|. \tag{3.21}$$

Если $m = 1$, то $S_1 = 0$. Иначе $2 \le m \le x^{-\frac{1}{\alpha}} + 1 \le 2x^{-\frac{1}{\alpha}}$, и мы имеем

$$|S_1| \le \sum_{k=l}^{m-1} c_k k^\alpha x \le \sup_{k\ge l}\{kc_k\} \sum_{k=1}^{m-1} k^{\alpha-1} x \le \sup_{k\ge l}\{kc_k\} x \int\limits_1^{2x^{-\frac{1}{\alpha}}} y^{\alpha-1} dy \le \frac{2^\alpha}{\alpha} \sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.22}$$

Далее обозначим

$$\Delta_k^1 := k^\alpha x - (k-1)^\alpha x, \qquad \Delta_k^2 := \Delta_k^1 - \Delta_{k-1}^1, \qquad \tilde\Delta_k^1 := \Delta_k^1 \mod 2\pi,$$

так что $\tilde\Delta_k^1 \in [0, 2\pi)$. Заметим, что Δ_k^2 убывает по k. Действительно, по теореме Лагранжа

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta_k^2}{x}\right)'_k &= \alpha(k^{\alpha-1} - 2(k-1)^{\alpha-1} + (k-2)^{\alpha-1}) \\ &= \alpha(\alpha-1)((k-1+\theta_1)^{\alpha-2} - (k-2+\theta_2)^{\alpha-2}) < 0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Также заметим, что

$$\Delta_k^2 = \alpha x((k-1+\theta_3)^{\alpha-1} - (k-2+\theta_4)^{\alpha-1}) \le 2\alpha(\alpha-1)x(k-2)^{\alpha-2}, \tag{3.24}$$

где $\theta_3, \theta_4 \in (0,1)$, и что

$$\begin{aligned}\Delta_k^2 &\ge \frac{1}{2}(\Delta_{k+1}^2 + \Delta_k^2) = \frac{1}{2}(\Delta_{k+1}^1 - \Delta_{k-1}^1) = \frac{1}{2}\alpha x((k+\theta_5)^{\alpha-1} - (k-2+\theta_6)^{\alpha-1}) \\ &\ge \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x(k+1)^{\alpha-2},\end{aligned} \tag{3.25}$$

где снова $\theta_5, \theta_6 \in (0,1)$.

Пусть $K_1 := \Big\{k : \tilde{\Delta}^1_{k+1} \in [0, m^{-\delta}] \cup [2\pi - m^{-\delta}, 2\pi]\Big\}$, а $K_2 := \Big\{k : \tilde{\Delta}^1_{k+1} \in [m^{-\delta}, 2\pi - m^{-\delta}]\Big\}$. Тогда имеем

$$|S_2| \le \Bigg|\sum_{\substack{k=m\\ k\in K_1}}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Bigg| + \Bigg|\sum_{\substack{k=m\\ k\in K_2}}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Bigg| =: |S_2'| + |S_2''|. \tag{3.26}$$

Сначала оценим S_2'. Согласно (3.23) и (3.24), при $k \ge m+2$ выполнено $\Delta^2_k \le 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}$. Значит, можно выбрать такое $p = p(m)$, что

$$p := \min\Big\{p' > 1 : |\Delta^1_{m+p'} - \Delta^1_{m+1} - 2\pi| \le 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}\Big\}.$$

Заметим, что тогда

$$2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}p \ge 2\pi - 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2},$$

откуда

$$p \ge -1 + \frac{2\pi}{2\alpha(\alpha-1)x} m^{2-\alpha} \ge m^{2-\alpha}x^{-1}, \tag{3.27}$$

в силу первого условия из (3.20).

Так как Δ^1_k возрастает по k, (см., например, (3.25)), и так как p мы выбрали минимальным, то $0 < \Delta^1_{m+p-1} - \Delta^1_{m+1} < 2\pi$, и значит, среди $\tilde{\Delta}^1_{m+1},\ \tilde{\Delta}^1_{m+2}, ...,$ $\tilde{\Delta}^1_{m+p}$ встречается не более трех блоков подряд идущих $\tilde{\Delta}^1_i$, т.е. блоков из $\tilde{\Delta}^1_{i_1}, \tilde{\Delta}^1_{i_1+1}, ..., \tilde{\Delta}^1_{i_1+i_2}$, значения в которых возрастают и лежат в одном из отрезков $[0, m^{-\delta}]$ или $[2\pi - m^{-\delta}, 2\pi]$. Остановимся на случае отрезка $[0, m^{-\delta}]$, второй случай разбирается аналогично. Пусть наш блок — это $\tilde{\Delta}^1_{s+1},\ \tilde{\Delta}^1_{s+2}, ..., \tilde{\Delta}^1_{s+v}$. Без ограничения общности можем считать, что $s^\alpha x \in [\pi u, \pi(u+1)) =: I_u$ для некоторого четного u. Пусть t таково, что

$$s^\alpha x + \sum_{i=0}^{t} \tilde{\Delta}^1_{s+i} \in I_u, \qquad s^\alpha x + \sum_{i=0}^{t+1} \tilde{\Delta}^1_{s+i} \notin I_u.$$

Тогда должно выполняться по крайней мере

$$\pi \ge (t-1)\Delta^2_{s+2} + (t-2)\Delta^2_{s+3} + ... + 1 \cdot \Delta^2_{s+t}. \tag{3.28}$$

Из (3.25) и (3.28) тогда имеем

$$\pi \ge \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x \left((t-1)(s+3)^{\alpha-2} + (t-2)(s+4)^{\alpha-2} + ... + 1 \cdot (s+t+1)^{\alpha-2}\right). \tag{3.29}$$

Заметим, что функция $\kappa(y) = y(a-y)^{-c} + (b-y)(a-b+y)^{-c}$ не возрастает при $c > 0,\ a \ge b \ge 2y > 0$. Действительно,

$$\kappa'(y) = (a-y)^{-c} - y(-c)(a-y)^{-c-1} - (a-b+y)^{-c} + (b-y)(-c)(a-b+y)^{-c-1} < 0,$$

так как $a-y \geq a-b+y$ и $y \leq b-y$. Значит, при $c=2-\alpha,\ b=t,\ a=s+t+2$ и $y=t-i,\ i=1,2,...,\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor$, имеем

$$(t-i)(s+2+i)^{\alpha-2}+i(s+t+2-i)^{\alpha-2} \geq 2\frac{t}{2}\left(s+2+\frac{t}{2}\right)^{\alpha-2},$$

откуда, с учетом (3.29),

$$\pi \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x(t-1)\frac{t}{2}\left(s+2+\frac{t}{2}\right)^{\alpha-2} \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x(t-1)\frac{t-1}{2}\left(s+2+\frac{t-1}{2}\right)^{\alpha-2}. \tag{3.30}$$

Если $t-1 \geq 2(s+2)$, то из (3.30) имеем

$$\pi \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x\frac{(t-1)^{\alpha}}{2} \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{4}(t-1)^{\alpha}m^{-\alpha},$$

откуда $t-1 \leq \left(\frac{4\pi}{\alpha(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} m \leq \frac{4\pi}{\alpha-1}m \leq \frac{4\pi}{\alpha-1}(s+2)$. А тогда из (3.30) получаем

$$\pi \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x\frac{(t-1)^2}{2}\left(\frac{4\pi}{\alpha-1}+1\right)^{\alpha-2}(s+2)^{\alpha-2} > \frac{(\alpha-1)^2}{20\pi}(t-1)^2(s+2)^{\alpha-2}x,$$

а значит,

$$t < \frac{8}{\alpha-1}(s+2)^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+1 \leq \frac{27}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.31}$$

Обозначим $t_0 := t$, а t_i при $i \geq 1$ определим следующим образом: $s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{t_i}\tilde{\Delta}^1_{s+j} \in I_{u+i},\ s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{t_i+1}\tilde{\Delta}^1_{s+j} \notin I_{u+i}$. При этом обозначим R — минимальное четное число, для которого выполнено $s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{v}\tilde{\Delta}^1_{s+j} < \pi(u+R+2)$. Тогда, рассуждая аналогично выводу (3.31), получим

$$t_1 < \frac{54}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

Также имеем

$$\sum_{k=s}^{s+v}c_k\sin k^{\alpha}x = \sum_{k=s}^{s+t_0}c_k\sin k^{\alpha}x + \sum_{i=0}^{\frac{R}{2}-1}\sum_{k=s+t_{2i}+1}^{s+t_{2i+2}}c_k\sin k^{\alpha}x + \sum_{k=s+t_R}^{s+v}c_k\sin k^{\alpha}x. \tag{3.33}$$

Заметим, что, учитывая (3.31), имеем

$$\sum_{k=s}^{s+t_0}c_k\sin k^{\alpha}x \leq tc_s < \frac{27}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}c_s \leq \sup_{k\geq l}\{kc_k\}\frac{27}{\alpha-1}s^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.34}$$

Лемма 3.1. *Пусть точки $y_1,...,y_k$ таковы, что $0<y_1 \leq y_2-y_1 \leq y_3-y_2 \leq ... \leq y_k-y_{k-1},\ y_k \leq 2\pi$ и пусть номер q таков, что $y_q \leq \pi,\ y_{q+1} > \pi$ и $y_{q+1}-y_q = a < \pi$. Тогда $\sum_{i=1}^{k}\sin y_i \geq -\sin\frac{a}{2}$.*

Доказательство. Пусть μ таково, что $\sin y_\mu \geq \sin y_i$ при всех i, а ν таково, что $\sin y_\nu \leq \sin y_i$ при всех i. Заметим, что тогда

$$y_1, ..., y_{\mu-1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \, y_{\mu+1}, ..., y_q \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$
$$y_{q+1}, ..., y_{\nu-1} \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \; y_{\nu+1}, ..., y_k \in \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right].$$

Тогда при $1 \leq i \leq \mu - 1$ имеем $y_{i+1} - y_i \leq a$, а значит,

$$\sin y_i \geq \max\Big\{\sin(y_\mu - a(M-i)), \; 0\Big\}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} \sin y_i \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu - aj).$$

Аналогично, так как при $\mu + 1 \leq i \leq q$ так же $y_{i+1} - y_i \leq a$, то

$$\sum_{i=\mu+1}^{q} \sin y_i \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu + aj).$$

Далее, так как при $q + 1 \leq i \leq k - 1$ выполняется $y_{i+1} - y_i \geq a$, то

$$\sum_{i=q+1}^{\nu-1} \sin y_i \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu - aj)$$

и

$$\sum_{i=\nu+1}^{k} \sin y_i \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu + aj).$$

То есть

$$\sum_{i=1}^{q} \sin y_i \geq \sum_{j=-\lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil + 1}^{\lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu + aj)$$
$$= \frac{\cos\left(y_\mu - \lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil a + \frac{a}{2}\right) - \cos\left(y_\mu + \lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil a - \frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} \geq \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

В то же время

$$\sum_{i=q+1}^{k} \sin y_i \geq \sum_{j=-\lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil + 1}^{\lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu + aj)$$
$$= \frac{\cos\left(y_\nu - \lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil a + \frac{a}{2}\right) - \cos\left(y_\nu + \lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil a - \frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} \geq \frac{-1}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Отсюда
$$\sum_{i=1}^{k}\sin y_i \geq \frac{\cos\frac{a}{2}-1}{\sin\frac{a}{2}} \geq \frac{\cos^2\frac{a}{2}-1}{\sin\frac{a}{2}} = -\sin\frac{a}{2}.$$

□

Следствие 3.1. *Пусть точки $y_1, ..., y_k$ как в Лемме 3.1, а последовательность $\{a_j\}$ монотонно не возрастает. Тогда $\sum_{i=1}^{k} a_i \sin y_i \geq -a_{q+1}\sin\frac{a}{2}$.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sin y_i = \sum_{i=1}^{q} a_i \sin y_i + \sum_{i=q+1}^{k} a_i \sin y_i$$
$$\geq a_{q+1}\sum_{i=1}^{q}\sin y_i + a_{q+1}\sum_{i=q+1}^{k}\sin y_i \geq -a_{q+1}\sin\frac{a}{2}.$$

по Лемме 3.1. □

По Следствию 3.1 для любого $0 \leq i \leq \frac{R}{2}-1$ имеем

$$\sum_{k=s+t_{2i}+1}^{s+t_{2i+2}} c_k \sin k^\alpha x \leq \frac{m^{-\delta}}{2} c_{s+t_{2i+1}+1}, \tag{3.35}$$

$$\sum_{k=s+t_R}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x \leq \frac{m^{-\delta}}{2} c_{s+t_{R+1}+1}. \tag{3.36}$$

Итак, из (3.33) и (3.34), (3.35) и (3.36), получаем

$$\sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x \leq \left(\frac{R}{2}+1\right)\frac{m^{-\delta}}{2} c_s + \sup_{k\geq l}\{kc_k\}\frac{27}{\alpha-1}s^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.37}$$

Заметим, что v должно удовлетворять неравенству

$$\Delta^1_{s+v} - \Delta^1_{s+1} \leq m^{-\delta}, \tag{3.38}$$

а по теореме Лагранжа, для некоторых $\theta_7,\ \theta_8 \in (0,1)$, левую часть (3.38) можно записать в виде

$$\alpha x((s+v-1+\theta_7)^{\alpha-1} - (s+\theta_8)^{\alpha-1}) \geq \alpha x((s+v-1)^{\alpha-1} - (s+1)^{\alpha-1}),$$

то есть должно выполняться

$$(s+v-1)^{\alpha-1} \leq m^{-\delta}x^{-1} + (s+1)^{\alpha-1},$$

откуда

$$\left(1+\frac{v-2}{s+1}\right)^{\alpha-1} \leq m^{-\delta}x^{-1}(s+1)^{1-\alpha} + 1. \tag{3.39}$$

По неравенству Бернулли левая часть (3.39) не меньше $1 + (\alpha - 1)\frac{v-2}{s+1}$, откуда получаем

$$(\alpha - 1)\frac{v-2}{s+1} \leq m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{1-\alpha},$$

а значит,

$$v \leq \frac{1}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha} + 2 \leq \frac{1 + 2X(\alpha-1)}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha}. \tag{3.40}$$

Тогда из (3.23), (3.24) и (3.40) следует, что

$$\begin{aligned} R &\leq \frac{1}{2\pi}\Delta^2_{s+2} v \leq \frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi} s^{\alpha-2} x \frac{1+2X(\alpha-1)}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha} \\ &\leq \frac{2 \cdot 2^{2-\alpha} \cdot (1+2X)}{\pi} m^{-\delta} \leq (2+4X) m^{-\delta}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Из (3.37) и (3.41) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x &\leq (2+4X) m^{-\delta} \frac{m^{-\delta}}{2} c_s + \sup_{k \geq l}\{k c_k\} \frac{27}{\alpha - 1} s^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{k \geq l}\{k c_k\} \left((1+2X) m^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\sum_{k=m}^{m+p} c_k \sin k^\alpha x \leq 3 \sup_{k \geq l}\{k c_k\} \left((1+2X) m^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} m^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right),$$

откуда, учитывая (3.27),

$$\begin{aligned} S_2' &\leq 3 \sup_{k \geq l}\{k c_k\} \sum_{i=0}^{\infty} \left((1+2X) w_i^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq 3 \sup_{k \geq l}\{k c_k\} \left((1+2X) \frac{m^{-2\delta}}{2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \tag{3.42}$$

где $w_0 := m$, а $w_{i+1} := w_i + w_i^{2-\alpha} x^{-1} \geq w_i + 1$ при $i \geq 0$, а значит,

$$w_i \underset{i \to \infty}{\to} \infty. \tag{3.43}$$

Вспомним, что $m \geq l \geq l_0 \geq 2$, и рассмотрим функцию

$$F(m) := \int\limits_m^\infty \frac{dy}{y \ln^2 y} = \frac{1}{\ln m}.$$

Согласно (3.43),

$$F(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{dy}{y \ln^2 y} =: \sum_{j=0}^{\infty} W_j. \tag{3.44}$$

Пусть для $j = 0, ..., J$ и только для этих значений выполнено $x^{-1} > w_j^{\alpha-1}$, тогда при $j = 0, ..., J-1$ выполнено $w_{j+1} \geq 2w_j$, а значит,

$$\sum_{i=0}^{J} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \leq m^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i\alpha}{2}} \leq \frac{1}{1-2^{-\frac{\alpha}{2}}} \leq 4. \tag{3.45}$$

При этом при $j > J$ выполнено $x^{-1} \leq w_j^{\alpha-1}$, а тогда, пользуясь неравенством $\ln(1+y) \geq y/2$, верном при $y \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} W_j = \frac{1}{\ln w_j} - \frac{1}{\ln\left(w_j + w_j^{2-\alpha} x^{-1}\right)} &= \frac{\ln\left(1 + w_j^{1-\alpha} x^{-1}\right)}{\ln w_j \ln\left(w_j + w_j^{2-\alpha} x^{-1}\right)} \\ &\geq \frac{w_j^{1-\alpha} x^{-1}}{2 \ln w_j \ln(2w_j)} \geq w_j^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Здесь мы воспользовались двойным неравенством

$$w_j^{1-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \geq w_j^{1-\frac{\alpha}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \geq 4 \ln^2 w_j,$$

верным, так как $w_j \geq m \geq l_0$, по второму условию из (3.20). Таким образом, из (3.44) и (3.46), получаем

$$\sum_{i=J+1}^{\infty} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=J+1}^{\infty} W_j \leq F(m) \leq \frac{1}{\ln 2}. \tag{3.47}$$

Объединяя оценки (3.45) и (3.47), получим из (3.42)

$$S_2' \leq 3 \sup_{k \geq l}\{kc_k\} \left(\frac{1+2X}{2\delta} + \frac{27}{\alpha-1}\left(4 + \frac{1}{\ln 2}\right)\right). \tag{3.48}$$

Записывая вместо (3.33)

$$\sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x = \sum_{k=s}^{s+t_1} c_k \sin k^\alpha x + \sum_{i=2}^{\frac{R}{2}-1} \sum_{k=s+t_{2i-1}+1}^{s+t_{2i+1}} c_k \sin k^\alpha x + \sum_{k=s+t_R}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x$$

и рассуждая абсолютно аналогично, с помощью (3.32), получаем

$$S_2' \geq -3 \sup_{k \geq l}\{kc_k\} \left(\frac{1+2X}{2\delta} + \frac{54}{\alpha-1}\left(4 + \frac{1}{\ln 2}\right)\right). \tag{3.49}$$

Объединяя (3.48) и (3.49), окончательно имеем

$$|S_2'| \leq C(\alpha, X) \sup_{k \geq l}\{kc_k\}. \tag{3.50}$$

Теперь рассмотрим S_2''. Пусть $m' = m'(m) \geq m$ — первый номер такой, что $m' \in K_2$. Положим $Q = Q(m) := \lceil m^{\frac{2-\alpha}{3}} \rceil$. Заметим, что при $k \in K_2$ выполнено

$$\frac{m^{-\delta}}{2} \leq \frac{\tilde{\Delta}_{k+1}^1}{2} \leq \pi - \frac{m^{-\delta}}{2}. \tag{3.51}$$

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=m'}^{m'+Q-1} c_k \sin k^\alpha x = \sum_{q=0}^{Q-1} (c_{m'+q} - c_{m'+q+1}) \sum_{k=m'}^{m'+q} \sin k^\alpha x + c_{m'+Q} \sum_{k=m'}^{m'+Q-1} \sin k^\alpha x. \tag{3.52}$$

При этом

$$(m'+q)^\alpha x \underset{\text{mod } 2\pi}{=} (m')^\alpha x + \sum_{t=1}^{q} \tilde{\Delta}^1_{m'+t},$$

а тогда из (3.23) и (3.24)

$$\left|(m'+t)^\alpha - (m')^\alpha - \tilde{\Delta}^1_{m+1} t\right| \leq \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2_{m'+2} \leq t(t-1)\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}. \tag{3.53}$$

А так как для произвольных $g, h \in \mathbb{R}$ выполнено $|\sin(g+h) - \sin g| \leq |h|$, то из (3.53) следует, что при $q \leq Q-1$

$$\left|\sum_{k=m'}^{m'+q} \sin k^\alpha x - \sum_{t=0}^{q} \sin\left((m')^\alpha x + \tilde{\Delta}^1_{m+1} t\right)\right| \leq \frac{Q(Q+1)(2Q+1)}{6} \alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}$$
$$\leq Q^3 \alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2} \leq (2m^{\frac{2-\alpha}{3}})^3 \alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2} = 2^{2-\alpha}\alpha(\alpha-1)x \leq 4X. \tag{3.54}$$

При этом, учитывая (3.51),

$$\left|\sum_{t=0}^{q} \sin\left((m')^\alpha x + \tilde{\Delta}^1_{m+1} t\right)\right| = \left|\frac{\cos\left((m')^\alpha x - \frac{\tilde{\Delta}^1_{m+1}}{2}\right) - \cos\left((m')^\alpha x + \frac{\tilde{\Delta}^1_{m+1}(2q+1)}{2}\right)}{2\sin\frac{\tilde{\Delta}^1_{m+1}}{2}}\right|$$
$$\leq \frac{2}{2\frac{2}{\pi}\frac{m^{-\delta}}{2}} = \pi m^\delta. \tag{3.55}$$

Из (3.54) и (3.55) имеем

$$\left|\sum_{k=m'}^{m'+q} \sin k^\alpha x\right| \leq \pi m^\delta + 4X \leq (\pi + 4X)m^\delta, \tag{3.56}$$

а из (3.56) и (3.52) следует, что

$$\left|\sum_{k=m'}^{m'+Q-1} c_k \sin k^\alpha x\right| \leq c_{m'}(\pi+4X)m^\delta \leq c_m(\pi+4X)m^\delta \leq \sup_{k\geq l}\{kc_k\}(\pi+4X)m^{\delta-1}. \tag{3.57}$$

Пусть $Q' = Q'(m) \geq Q(m)$ — наименьшее число такое, что $m' + Q' \in K_2$. Положим $m_0 := m,\ m_{i+1} := m'(m_i) + Q'(m_i)$ при всех $i \geq 0$. Так как

$$Q' \geq Q \geq m^{\frac{2-\alpha}{3}},$$

то

$$m_{i+1} \geq m_i + m_i^{\frac{2-\alpha}{3}} \tag{3.58}$$

Заметим, что в сумме, стоящей в левой части (3.57) могут встречаться блоки таких k, что $k \in K_1$, и значения $\tilde{\Delta}^1_{k+1}$ в этом блоке возрастают и лежат в одном из отрезков $[0, m^{-\delta}]$, $[2\pi - m^{-\delta}, 2\pi]$. Сумму по каждому из таких блоков оценим как в (3.37) при оценке соответствующего блока в S_2'. Тогда из (3.50), (3.57) и (3.58), а также, вспоминая, что $\delta < \frac{2-\alpha}{3} < 1$, имеем

$$\begin{aligned} |S_2''| &\leq C(\alpha, X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} + (\pi + 4X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} \sum_{i=0}^{\infty} c_{m_i} m_i^{\delta-1} \\ &\leq C(\alpha, X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} + (\pi + 4X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} \sum_{i=0}^{\infty} z_i^{\delta-1}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

где $z_0 := m$, $z_{i+1} := z_i + z_i^{\frac{2-\alpha}{3}} \geq z_i + 1$ для любого i, а значит, $z_i \underset{i\to\infty}{\to} \infty$, следовательно,

$$F(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dy}{y \ln^2 y} =: \sum_{j=0}^{\infty} Z_j. \tag{3.60}$$

Положим для удобства $\frac{2-\alpha}{3} =: \gamma > \delta$. Пользуясь неравенством $\ln(1+y) \geq y/2$, справедливым при $y \leq 1$, имеем

$$Z_j = \frac{1}{\ln z_j} - \frac{1}{\ln\left(z_j + z_j^{\gamma}\right)} = \frac{\ln\left(1 + z_j^{\gamma-1}\right)}{\ln z_j \ln\left(z_j + z_j^{\gamma}\right)} \geq \frac{z_j^{\gamma-1}}{2 \ln z_j \ln(2z_j)} > z_j^{\delta-1}, \tag{3.61}$$

так как последнее неравенство следует из неравенства

$$z_j^{\gamma-\delta} > 4 \ln^2 z_j,$$

которое выполнено, поскольку $z_j \geq l_0$, и по третьему условию из (3.20). А тогда из (3.59), (3.60) и (3.61) вытекает

$$\begin{aligned} |S_2''| &\leq C(\alpha, X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} + (\pi + 4x) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = C(\alpha, X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} \\ &+ (\pi + 4X) \sup_{k\geq l}\{kc_k\} F(m) \leq \sup_{k\geq n}\{kc_k\} \left(C(\alpha, X) + \frac{\pi + 4X}{\ln 2} \right). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Окончательно, объединяя (3.21), (3.22), (3.26), (3.50) и (3.62), получаем

$$\left| \sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^{\alpha} x \right| \leq \sup_{k\geq l}\{kc_k\} \left(\frac{2^{\alpha}}{\alpha} + 2C(\alpha, X) + \frac{\pi + 4X}{\ln 2} \right),$$

откуда и вытекает, что при выполнении условия $kc_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, наш ряд сходится равномерно. □

3.3 Случай степени из интервала (0,1)

Доказательство Теоремы 1 (C) для случая $\alpha \in (0,1)$. Пусть выполнено условие $kc_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Покажем, что ряд (1.1) сходится равномерно на множестве $|x| \le X < \infty$. Без ограничения общности далее будем считать, что $x > 0$ (случай $x = 0$ очевиден). Возьмем $D \ge 3$ — нечетное число, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\pi X^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} D^{\frac{1}{\alpha}-1} \ge 12\alpha; \quad \left(1+\frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \le \frac{4}{3}$$
$$\left(1-\frac{3}{2\alpha}\frac{1}{D}\right)^{\alpha-1} \le \frac{4}{3}; \quad \left(1+\frac{3}{2D}\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \le 2, \tag{3.63}$$

и положим $E := D + 1$. Рассмотрим в произвольной точке $x \in (0, X]$ сумму $\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x$. Если $x \le \pi L^{-\alpha}$, имеем

$$0 \le \sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x \le x \sum_{k=l}^{L} c_k k^\alpha \le x \sup_{k\ge l}\{kc_k\} \sum_{k=l}^{L} k^{\alpha-1} \le \pi \sup_{k\ge l}\{kc_k\} L^{-\alpha}\frac{(2L)^\alpha}{\alpha}$$
$$=: C_1 \sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.64}$$

Если же $x \ge \pi l^{-\alpha}$ и $L^\alpha x - l^\alpha x \le 6\pi$, то имеем $L^\alpha - l^\alpha \le 6\pi/x \le 6l^\alpha$, откуда $L \le 7^{1/\alpha} l$, а значит,

$$\left|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| \le \sum_{k=l}^{L} c_k \le c_l(L-l+1) < 7^{1/\alpha} l c_l \le 7^{1/\alpha} \sup_{k\ge l}\{kc_k\}$$
$$=: C_2(\alpha) \sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.65}$$

Остался лишь случай, когда $x \ge \pi l^{-\alpha}$ и $L^\alpha x - l^\alpha x > 6\pi$.

Пусть нечетные числа d_1, d_2 и четные числа e_1, e_2 таковы, что

$$\pi(e_1-2) < xl^\alpha \le \pi e_1, \quad \pi(d_1-2) < xl^\alpha \le \pi d_1,$$
$$\pi e_2 \le xL^\alpha < \pi(e_2+2), \quad \pi d_2 \le xL^\alpha \le \pi(d_2+2).$$

Заметим, что для любых $\gamma > 0$ и $d \ge 3$ выполнено

$$F(\gamma,d) = F(\gamma,d,\alpha) := \frac{\lfloor(\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \lfloor(\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}{\lfloor(\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + 1} \le \frac{2\left((\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}} - (\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{(\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}}$$
$$\le \frac{2\left((\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}} - (\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{(\gamma(d-2))^{\frac{1}{\alpha}}} = 2\left(\left(\frac{d}{d-2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \le 2\left(3^{\frac{1}{\alpha}}-1\right) =: C.$$

Тогда имеем

$$\left|\sum_{k=l}^{\lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x\right| \le c_l \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d_1-2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} 1$$
$$\le c_l(\lfloor(\pi x^{-1}(d_1-2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1)F(\pi x^{-1},d_1) \le lc_l F(\pi x^{-1},d_1) \le C\sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.66}$$

Аналогично

$$\left|\sum_{k=l}^{\lfloor(\pi x^{-1}e_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x\right| \le C\sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.67}$$

Далее

$$\left|\sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| \le c_{\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1} \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(e_2+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} 1$$
$$\le c_{\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}(\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1)F(\pi x^{-1}, e_2+2) \le C\sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.68}$$

Аналогично

$$\left|\sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| \le C\sup_{k\ge l}\{kc_k\}. \tag{3.69}$$

Теперь рассмотрим сумму

$$S(d) := \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} \sin k^\alpha x = \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1/2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} + \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+1/2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}$$
$$+ \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+3/2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} + \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+3/2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} \sin k^\alpha x =: S_1(d)+S_2(d)+S_3(d)+S_4(d),$$

где $d \ge D$ — нечетное число.

Сначала покажем, что сумма $S_2(d)+S_3(d)$ не может быть слишком велика, так как большую часть слагаемых, входящих в суммы $S_2(d)$ и $S_3(d)$, можно разбить на пары, так что сумма значений в парах будет близка к нулю и неположительна. Пусть в s-й паре значения k будут $\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}\rfloor + s$ и $\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}\rfloor - 1 - s$, где

$$s = 0,1,...,\min\left\{\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor,\right.$$
$$\left.\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - 1\right\}. \tag{3.70}$$

Заметим, что ровно одна пара состоит из слагаемых $S_2(d)$, а каждая из остальных пар состоит из одного слагаемого $S_2(d)$ и одного слагаемого $S_3(d)$. Сумма слагаемых в s-й паре равна

$$\sin(\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^\alpha x + \sin(\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-1-s)^\alpha x$$
$$= 2\sin((\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^\alpha) + (\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-1-s)^\alpha)\frac{x}{2}$$
$$\cos((\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^\alpha) - (\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-1-s)^\alpha)\frac{x}{2}. \tag{3.71}$$

Согласно (3.70), аргумент каждого косинуса в (3.71) лежит на отрезке $[0, \pi/2]$, а значит, все косинусы неотрицательны. Покажем теперь, что аргументы всех синусов в (3.71) лежат в полуинтервале $[\pi d, \pi(d+1))$, из чего будет следовать неположительность этих синусов. В силу выпуклости вверх функции $\chi(y) = y^\alpha$ ($\chi''(y) = \alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2} < 0$ при $y > 0$) на $\mathbb{R}^+$, аргумент синуса не превосходит

$$2\left(\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \frac{1}{2}\right)^\alpha \frac{x}{2} < \pi(d+1).$$

В то же время, имеем

$$\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}} + 1$$
$$< (\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2}, \tag{3.72}$$

так как по теореме Лагранжа, найдется $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ такая, что

$$(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\left((d+2)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(d+\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}\left(d+\frac{3}{2}+\theta\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$
$$\geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}\left(d+\frac{3}{2}+\theta\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}D^{\frac{1}{\alpha}-1} \geq 6 > \frac{3}{2}$$

по первому условию из (3.63). Значит, из (3.72),

$$s \leq (\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2},$$

а тогда

$$\frac{s+\frac{1}{2}}{(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}} < \left(\frac{d+2}{d+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \leq \frac{4}{3\alpha(d+1)}, \tag{3.73}$$

так как функция $t(y) = (1+y)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 - 4y/3\alpha$ обращается в нуль при $y = 0$, а $t'(y) = ((1+y)^{\frac{1}{\alpha}-1} - 4/3)/\alpha \leq 0$ при $y \leq 1/D$ согласно второму из условий (3.63). Также

$$\frac{3}{(2\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{2}{(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}(d+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{1}{6\alpha(d+1)}, \tag{3.74}$$

учитывая первое из условий (3.63) и то, что $d \geq D$. А тогда, из (3.73) и (3.74), аргумент каждого синуса в правой части (3.71) не меньше чем

$$\begin{aligned}\left((\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{3}{2}+\max\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)^{\alpha}\frac{x}{2}\\ +\left((\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{3}{2}-\max\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)^{\alpha}\frac{x}{2}\\ \geq\left(1-\frac{3}{2(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}}+\frac{4}{3\alpha(d+1)}\right)^{\alpha}\frac{\pi(d+1)}{2}\\ +\left(1-\frac{3}{2(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}}-\frac{4}{3\alpha(d+1)}\right)^{\alpha}\frac{\pi(d+1)}{2}\\ \geq\left(\left(1-\frac{1}{6\alpha(d+1)}+\frac{4}{3\alpha(d+1)}\right)^{\alpha}+\left(1-\frac{1}{6\alpha(d+1)}-\frac{4}{3\alpha(d+1)}\right)^{\alpha}\right)\frac{\pi(d+1)}{2}\\ \geq\left(1+\left(1-\frac{3}{2\alpha(d+1)}\right)^{\alpha}\right)\frac{\pi(d+1)}{2}.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Покажем, что последнее выражение не меньше чем πd. Для этого достаточно показать, что в точке $y=(d+1)^{-1}$ неотрицательна функция

$$g(y)=1+\left(1-\frac{3}{2\alpha}y\right)^{\alpha}-2+2y=\left(1-\frac{3}{2\alpha}y\right)^{\alpha}-1+2y.$$

Заметим, что $g(0)=0$, а

$$g'(y)=-\frac{3}{2}\left(1-\frac{3}{2\alpha}y\right)^{\alpha-1}+2\geq 0$$

при $y\leq 1/D$ по третьему условию из (3.63). Таким образом, из (3.75) и сделанного замечания следует, что аргумент каждого синуса в правой части (3.71) не меньше чем πd. При этом, нетрудно заметить, что каждый из этих аргументов также не больше чем $(\pi+1)d$, а значит, все синусы в правой части (3.71), неположительны, откуда следует неположительность всей суммы по выбранным нами парам. Если без пары осталось некоторое слагаемое из $S_2(d)$, оценим его сверху нулем.

Оценим количество слагаемых из $S_3(d)$, которые могли остаться без пары. Если такие есть, то поскольку у нас есть ровно одна пара, состоящая из слагаемых $S_2(d)$, а все остальные пары содержат по одному слагаемому из $S_2(d)$ и $S_3(d)$, то слагаемых из $S_3(d)$, оставшихся без пары, ровно

$$\begin{aligned}\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\right)\\ -\left(\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-2\right)\\ \leq\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}-2(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}+4\\ \leq\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+4.\end{aligned}\tag{3.76}$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа для функции $w(y) = y^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$w(y+1) - 2w\left(y + \frac{1}{2}\right) + w(y) = w'\left(y + \frac{1}{2} + \theta_1\right) - w'(y + \theta_2)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \theta_1 - \theta_2\right) w''(y + \theta_0),$$

где $\theta_1,\ \theta_2 \in [0, \frac{1}{2}],\ \theta_0 \in [0, 1]$. Отсюда

$$w(y+1) - 2w\left(y + \frac{1}{2}\right) + w(y) \leq \sup_{[y+\frac{1}{2}, y+\frac{3}{2}]} w''(z)$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \max\left\{ \left(d + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}, \left(d + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \right\} \leq \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) d^{1/\alpha - 2}$$

согласно четвертому из условий (3.63), откуда и следует справедливость оценки (3.76).

Из вышесказанного следует, что

$$S_2(d) + S_3(d) \leq \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2} (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 4. \tag{3.77}$$

Покажем теперь, что сумма $S_1(d)$ мало отличается от $S_2(d)$, а $S_4(d)$ — от $S_3(d)$. Каждому

$$s = 1, 2, ..., \lfloor (\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor - \left\lfloor \left(\pi x^{-1}\left(d + \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor =: s_{max} \tag{3.78}$$

поставим в соответствие одно из

$$k_s = \left\lfloor \left(\pi x^{-1}\left(d + \frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\rfloor - \lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + 1, ..., \lfloor (\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha} \rfloor - \lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor \tag{3.79}$$

так, что

$$k_s := \min\left\{ k \in \mathbb{N} : (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + k)^\alpha \geq \pi x^{-1}(2d+1) - (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + s)^\alpha \right\}. \tag{3.80}$$

Тогда, так как

$$\pi d \leq (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + s)^\alpha x \leq \pi\left(d + \frac{1}{2}\right) \leq (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + k_s)^\alpha x \leq \pi(d+1),$$

и

$$\pi\left(d + \frac{1}{2}\right) - (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + s)^\alpha x \leq (\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + k_s)^\alpha x - \pi\left(d + \frac{1}{2}\right),$$

то

$$\sin(\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + s)^\alpha x \leq \sin(\lfloor (\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor + k_s)^\alpha x. \tag{3.81}$$

Заметим, что

$$(\pi x^{-1}(2d+1)-((\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}-1+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}+2 \le (\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}-1, \quad (3.82)$$

так как

$$(\pi x^{-1}(2d+1)-\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}-(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}+3-(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}=3-(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\le 0$$

в силу $d \ge D \ge 3$. Тогда из (3.82) следует

$$(\pi x^{-1}(2d+1)-(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1\le\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor,$$

а значит, что для каждого s из (3.78) найдется k_s, удовлетворяющее (3.79) и (3.80).

Покажем также, что $k_{s_1}\neq k_{s_2}$ при $s_1\neq s_2$. Так как k_s не возрастает с возрастанием s, то достаточно показать, что $k_s>k_{s+1}$. Действительно, из (3.80) видим, что

$$k_s\ge(\pi x^{-1}(2d+1)-(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor>k_s-1,$$

а значит, достаточно показать справедливость

$$(\pi x^{-1}(2d+1)-(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor > (\pi x^{-1}(2d+1)-(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s+1)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1. \quad (3.83)$$

Обозначим для краткости $a=\pi x^{-1}(2d+1)$, $b=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor$ и рассмотрим функцию

$$h_{a,b}(s)=(a-(b+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда по теореме Лагранжа $h_{a,b}(s)-h_{a,b}(s+1)=-h'_{a,b}(s_0)$, где $s_0\in(1,s_{max})$. При этом

$$h'_{a,b}(s)=-(a-(b+s)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}(b+s)^{\alpha-1},$$

то есть $|h'_{a,b}|$ убывает по $b+s$, а следовательно, учитывая, что $b+s\le\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ согласно (3.78), на интервале $(1,s_{max})$ имеем

$$|h'_{a,b}(s)|>\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha-1}=1.$$

Отсюда $h_{a,b}(s)-h_{a,b}(s+1)>1$, а значит, (3.83) выполнено.

Итак, каждому s, удовлетворяющему (3.78), мы инъективно сопоставили k_s, удовлетворяющее (3.79) и (3.80), так, что для каждого s имеет место (3.81), то есть каждое слагаемое $S_1(d)$ оценивается сверху соответствующим слагаемым из $S_2(d)$. Число слагаемых в $S_2(d)$, не участвующих в этой оценке, есть

$$\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\right)$$
$$\le(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}+(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}-2\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}+2$$
$$\le\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+2$$

аналогично оценке (3.76). Таким образом,

$$S_1(d) \le S_2(d) + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2. \tag{3.84}$$

Проводя совершенно аналогичные рассуждения для $S_3(d)$ и $S_4(d)$, получим для $d \ge D$

$$\begin{aligned} S_4(d) \le S_3(d) + \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(d+1)^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2 \\ \le S_3(d) + \frac{4}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2 \end{aligned} \tag{3.85}$$

с учетом четвертого из условий (3.63).

Итак, собирая вместе оценки (3.66), (3.69), (3.77), (3.84) и (3.85), имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x \le 2C \sup_{k\ge l}\{kc_k\} + \sum_{\substack{d \ge d_1 \\ d \text{ нечетно}}}^{D-2} \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x \\
&+ \sum_{\substack{d \ge D \\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1} d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x + \le 2C \sup_{k\ge l}\{kc_k\} \\
&+ c_{\lfloor(\pi x^{-1} d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}\left(\lfloor(\pi x^{-1} D)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \lfloor(\pi x^{-1} d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\right) + \sum_{\substack{d \ge D \\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} S(d) \\
&\le 2C \sup_{k\ge l}\{kc_k\} + 2\sup_{k\ge l}\{kc_k\}\left(\left(\frac{D}{d_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \\
&+ 2 \sum_{\substack{d \ge D \\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}\left(S_2(d) + S_3(d) + \frac{3}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\right) \\
&\le 2C \sup_{k\ge l}\{kc_k\} + 2\sup_{k\ge l}\{kc_k\}(D^{\frac{1}{\alpha}} - 1) + 2 \sum_{\substack{d \ge D \\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} \\
&\qquad \cdot \left(\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 4 + \frac{3}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\right) \\
&\le 2C \sup_{k\ge l}\{kc_k\} + 2\sup_{k\ge l}\{kc_k\}(D^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \\
&\qquad + 2\sup_{k\ge l}\{kc_k\} \sum_{d \ge d_1} \frac{5}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) d^{-2} + \frac{6}{(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}} d^{-\frac{1}{\alpha}} \\
&\le \sup_{k\ge l}\{kc_k\}\left(2C + 2(D^{\frac{1}{\alpha}} - 1) + \frac{10}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) D^{-1} + \frac{6}{(\pi X^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) D^{1-\frac{1}{\alpha}}\right) \\
&\le \sup_{k\ge l}\{kc_k\}\left(2C + 2(D^{\frac{1}{\alpha}} - 1) + \left(\frac{10}{\alpha} + 2X^2\right)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right) =: C_3 \sup_{k\ge l}\{kc_k\}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Проводя совершенно аналогичные рассуждения с $e_1,\ e_2$ и E вместо $d_1,\ d_2$ и D и оценивая $S(e)$ снизу, с учетом (3.67) и (3.68), получим

$$\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x \geq -C_4 \sup_{k\geq l}\{kc_k\}. \tag{3.87}$$

В итоге, объединяя оценки (3.64), (3.65), (3.86) и (3.87), имеем

$$\left|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| \leq \max\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\} \sup_{k\geq l}\{kc_k\} =: C_5 \sup_{k\geq l}\{kc_k\}.$$

□

3.4 Доказательство Теоремы 2

Доказательство Теоремы 2. Пункт (A) Теоремы 2 очевидным образом вытекает из Теоремы 1 (A).

В силу Теоремы 1 (B), (C) для доказательства соответствующих пунктов Теоремы 2 достаточно показать, что условие $c_k k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ является необходимым для равномерной сходимости ряда (1.1) на множестве, содержащем при некотором $\gamma \geq 2$ дискретную (α, γ)-окрестность нуля, при любом $\alpha > 0$. Пусть ряд (1.1) сходится равномерно на некотором множестве X, содержащем дискретную (α, γ)-окрестность нуля, и пусть $2 \leq \gamma, N$ — числа, фигурирующие в определении такой окрестности. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдется $l_0 = l_0(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ l_0 \geq N$ такое, что при любом $L > l \geq l_0$ и любом $x \in X$ будет выполнено $\left|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\right| < \varepsilon$. Тогда возьмем любое $l \geq l_0$ и положим $x_0 = \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha}$ (либо x_0, либо $-x_0$ содержится в X), получим

$$\varepsilon > \left|\sum_{k=l+1}^{2l} c_k \sin k^\alpha x_0\right| = \left|\sum_{k=l+1}^{2l} c_k \sin k^\alpha \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha}\right|.$$

Заметим, что аргумент каждого из синусов здесь не превосходит $\frac{\pi}{2}$, а значит, имеем

$$\varepsilon > \frac{2}{\pi} \sum_{k=l+1}^{2l} c_k k^\alpha \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha} \geq 2\gamma^{-\alpha-1} \sum_{k=l+1}^{2l} c_k \geq 2\gamma^{-\alpha-1} l c_{2l} = \gamma^{-\alpha-1} c_{2l} 2l, \tag{3.88}$$

то есть $c_{2l} 2l \leq \gamma^{\alpha+1}\varepsilon$. При этом

$$c_{2l+1}(2l+1) \leq c_{2l} 4l \leq 2\gamma^{\alpha+1}\varepsilon, \tag{3.89}$$

откуда и следует необходимость условия. □

Доказательство Замечания 1. Оценки из доказательства Теоремы 1 (B) остаются с точностью до констант верными при замене разностей вида $c_m - c_{m+1}$

на их модули. Действительно, это вытекает из соотношений

$$\sum_{k=l}^{L}|c_k-c_{k+1}|k^{\xi}=l^{\xi}\sum_{k=l}^{L}|c_k-c_{k+1}|+\sum_{k=l}^{L}\left((k+1)^{\xi}-k^{\xi}\right)\sum_{j=l}^{L}|c_k-c_{k+1}|$$
$$\leq Vc_l l^{\xi}+VC(\xi)\sum_{k=l}^{L}c_k k^{\xi-1}, \tag{3.90}$$

где $\xi>0$, V из (1.3), и

$$c_k\leq c_m+\sum_{l=m}^{k-1}|c_l-c_{l+1}|\leq (V+1)c_m \tag{3.91}$$

при $k>m$. Из неравенства (3.90) следует справедливость (3.4), (3.6), (3.9), (3.10), (3.13), (3.14) и (3.16) с соответствующими изменениями, а из (3.91) — справедливость (3.1), (3.19), (3.88) и (3.89). □

4 Усиление неравенства Джона-Ниренберга для рядов типа Римана

Предложение 1. *Пусть $1<k\in\mathbb{N}, x\in[0,1)\setminus\mathbb{Q}$ и $\{p_j/q_j\}$ — подходящие дроби числа x. Тогда для любого $\tau\geq 2$ при $q_i^{\tau}\leq m<q_{i+1}^{\tau}$ выполнено равенство*

$$\sum_{m\leq n<q_{i+1}^{\tau}}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n}e(l^k x)=\frac{\xi_{p_i/q_i}}{kq_i}\ln^{+}\frac{q_iq_{i+1}}{m^k}+O\left(q_i^{-\frac{1}{2^{k+1}}}+q_i^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\ln q_i\right),$$

где $\xi_{p/q}:=\sum_{t=0}^{q-1}e\left(t^k\frac{p}{q}\right)$ и $\ln^{+}y=\max\{\ln y,0\}$.

Доказательство. Пусть $\tau\geq 2$, а $\varepsilon\in(0,\frac{1}{3})$ таково, что $\max\{(1-2\varepsilon)^{-1},(2\varepsilon)^{-1}\}\leq\tau<\varepsilon^{-1}$ (например, можно положить $\varepsilon:=(2\tau)^{-1}$). Предположим, что для некоторого n в промежутке $q_i^{\tau}\leq n<q_{i+1}^{\tau}$ существуют такие взаимно простые числа C и $M\leq n^{\varepsilon}$, что

$$\left|k!x-\frac{C}{M}\right|\leq n^{\varepsilon-1}. \tag{4.1}$$

Тогда выполняется

$$|\beta|:=\left|x-\frac{C}{Mk!}\right|\leq\frac{n^{\varepsilon-1}}{k!}<\frac{1}{2(Mk!)^2},$$

так как $n^{\varepsilon-1}=n^{3\varepsilon-1-2\varepsilon}\leq n^{3\varepsilon-1}M^{-2}<\frac{1}{2M^2k!}$ при достаточно большом q_i. Тогда по [24, Теорема 19] $C/Mk!=p_j/q_j$ — подходящая дробь числа x, причем $M\leq q_j\leq Mk!$. Значит, согласно [24, Теорема 13] выполнено

$$\frac{1}{2Mk!q_{j+1}}\leq\frac{1}{2q_jq_{j+1}}<|\beta|\leq\frac{n^{\varepsilon-1}}{k!},$$

откуда при достаточно большом q_i

$$q_{j+1}^{\tau} > q_{j+1} \geq \left(\frac{n^{1-\varepsilon}}{2M}\right)^{\tau} \geq \left(\frac{n^{1-2\varepsilon}}{2}\right)^{\tau} \geq n > n^{1-\tau\varepsilon}\left(\frac{q_j}{k!}\right)^{\tau} > q_j^{\tau},$$

и следовательно, $i = j$.

Положим $N := \lfloor|\beta|^{-\frac{1}{k}}\rfloor$. Тогда если для $n \in [m, q_{i+1}^{\tau})$ выполнено $|\beta| \leq n^{-k}$, то $n \leq N$, и мы имеем

$$\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x) - \frac{\xi_{p_i/q_i}}{q_i}\sum_{l=1}^{n} e(l^k\beta)\right| \leq \sum_{l=1}^{n-1}\left|e(l^k\beta) - e((l+1)^k\beta)\right|\left|\sum_{t=1}^{l} e\left(\frac{p_i}{q_i}t^k\right) - \frac{l\xi_{p_i/q_i}}{q_i}\right|$$
$$+\left|e(n^k\beta)\right|\left|\sum_{t=1}^{n} e\left(\frac{p_i}{q_i}t^k\right) - \frac{n\xi_{p_i/q_i}}{q_i}\right| \leq q_i\sum_{l=1}^{n-1} 4\pi k(l+1)^{k-1}|\beta| + q_i$$
$$< 8q_i \leq 8n^{\frac{1}{\tau}} \leq 8n^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

При этом

$$\sum_{m\leq n\leq N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=1}^{n} e(l^k\beta) = \sum_{m\leq n\leq N}\frac{e(n^k\beta)}{n} + O(1) = \int_{m}^{N}\frac{e(y^k\beta)}{y}dy + O(1), \tag{4.3}$$

поскольку при $m \leq y \leq N, c \in [0,1]$ выполнено

$$\left|\frac{e((y-c)^k\beta)}{y-c} - \frac{e(y^k\beta)}{y}\right| \leq \frac{2\pi k y^{k-1}|\beta|}{y} + \frac{c}{y(y-c)} < \frac{3\pi k}{y^2}.$$

Интеграл в (4.3) равен $(\mathrm{Ei}(2\pi i|\beta|N^k) - \mathrm{Ei}(2\pi i|\beta|m^k))/k$ при $\beta > 0$, иначе — сопряженному выражению. Учитывая, что при $y > 0$ выполнено $\mathrm{Ei}(iy) = \min\{0, \ln y\} + O(1)$, а также, что $2\pi|\beta|N^k > 1$, получаем

$$\int_{m}^{N}\frac{e(y^k\beta)}{y}dy = \frac{1}{k}\ln^{+}|\beta|^{-1}m^{-k} + O(1) = \frac{1}{k}\ln^{+}\frac{q_{i+1}q_i}{m^k} + O(1). \tag{4.4}$$

Здесь мы воспользовались неравенствами $(2q_iq_{i+1})^{-1} < |\beta| < (q_iq_{i+1})^{-1}$, последнее из которых верно по [24, Теорема 9].

Далее, (4.1) может быть также выполнено для $n \in [m, q_{i+1}^{\tau})$ из следующих промежутков: $|\beta|^{-\frac{1}{k}} < n \leq |\beta|^{-\frac{1}{k-\delta}}$, $|\beta|^{-\frac{1}{k-\delta}} < n \leq |\beta|^{-1}$, $|\beta|^{-1} < n \leq |\beta|^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}$, где $\delta := k(1 - \ln|\beta|/\ln M)^{-1}$. Обозначим эти промежутки, соответственно, P_1, P_2 и P_3. Тогда для $n \in P_2$ по Следствию 2.2 и Замечанию 4 (в силу неравенства

$$n^{\delta} = M^{\frac{k\ln n}{\ln M - \ln|\beta|}} \geq M^{\frac{k\ln n}{\ln n^{\varepsilon} + \ln n^{k-\delta}}} > M^{\frac{1}{2(k-1)}},$$

мы отбросим первый член в (2.11)), имеем

$$\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x)\right| = O\left(n^{1-\frac{k-\delta}{2^{k-1}(k-1)}} |\beta|^{-\frac{1}{2^{k-1}(k-1)}} M^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\right).$$

Значит,

$$\sum_{n\in P_2} \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x)\right| = O\left(M^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\right) = O\left(q_i^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\right). \tag{4.5}$$

Аналогично применяя Следствие 2.2 и Замечание 4 к $n \in P_3$, получаем

$$\sum_{n\in P_3} \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x)\right| = O\left(q_i^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\right). \tag{4.6}$$

И наконец, согласно (2.26) и Замечанию 4, а также с учетом неравенств $(2q_iq_{i+1})^{-1} < |\beta| < (q_iq_{i+1})^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n\in P_1} \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x)\right| &\le C\ln\frac{(2q_iq_{i+1})^{\frac{1}{k-\delta}}}{(q_iq_{i+1})^{\frac{1}{k}}} M^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \le C'\ln(q_iq_{i+1})^{\delta} M^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\\ &\le C'\ln(q_iq_{i+1})^{\frac{k\ln M}{\ln M-\ln|\beta|}} M^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \le C'kM^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\ln M = O\left(q_i^{-\frac{1}{2^k(k-1)}}\ln q_i\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Итак, остались только $n \in [m, q_{i+1}^{\tau})$, не удовлетворяющие (4.1), — обозначим множество таких n через U. Для них воспользуемся Следствием 2.1 и получим

$$\sum_{n\in U} \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{l=1}^{n} e(l^k x)\right| = O\left((q_i^{\tau})^{-\frac{\varepsilon}{2^k}}\right) = O\left(q_i^{-\frac{1}{2^{k+1}}}\right). \tag{4.8}$$

Объединяя (4.2) – (4.8), получим утверждение предложения. □

Далее из соображений удобства будем опускать индекс у F_k:

$$F(x) := F_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n^k x)}{n}.$$

Доказательство Теоремы 3. Докажем сначала утверждение теоремы для $J = I$.

Пусть $F^-(x) = \sum_{n<q^\tau} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{l=1}^n e(l^k x)$, $F^+(x) = F(x) - F^-(x)$. Тогда для некоторой точки $x' \in I$

$$\begin{aligned}|F^-(x) - F_I^-| \le & \left| \sum_{q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}} \le n < q^\tau} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{l=1}^n e(l^k x) \right| \\ & + \left| \sum_{q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}} \le n < q^\tau} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{l=1}^n e(l^k x') \right| + 2\pi k |I| \sum_{n < q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}}} n^{k-2} \cdot n \\ & \le 2 \max_{y \in I} \left| \sum_{q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}} \le n < q^\tau} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{l=1}^n e(l^k y) \right| + O\left(q^{-2} (q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}})^k\right). \quad (4.9)\end{aligned}$$

Согласно [6, Замечание к Теореме 4], при $\varepsilon_1 := \tau^{-1}$ для $q^{\frac{1}{k-\tau^{-1}}} \le n \le q^\tau$ и $y \in I$

$$\left| \sum_{l=1}^n e(l^k y) \right| \le n^{1-\frac{\varepsilon_1}{2^k}} = n^{1-\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}},$$

откуда получаем

$$|F^-(x) - F_I^-| = O\left(q^{-\tau\varepsilon 2^{-k+1}}\right) = O\left(q^{-2^{-k}}\right). \quad (4.10)$$

Аналогично доказательству [21, Theorem 3.2],

$$\begin{aligned}F_I^+ &= O\left(q_i^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + q_i^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q_i + \sum_{q_j \ge q} |I|^{-1} \int_I q_j^{-\frac{1}{k}}(y) \ln a_{j+1}(y) dy\right) \\ &= O\left(q^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + q^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right).\end{aligned}$$

Таким образом, согласно Предложению 1,

$$F(x) - F_I = \frac{1}{k} \sum_{q_j \ge q} \frac{\xi_{p_j/q_j}}{q_j} \ln^+ \frac{q_{j+1}}{q_j} + O\left(q^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + q^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right). \quad (4.11)$$

При этом, с учетом [23, Theorem 1],

$$\left| \frac{\xi_{p_j/q_j}}{q_j} \right| \le A(k) q_j^{-\frac{1}{k}}. \quad (4.12)$$

Теперь будем следовать доказательству [21, Theorem 3.2], но с некоторыми изменениями. Для $b = (b_1, b_2, ..., b_d) \in \mathbb{N}^d$, где $d > 2$ мы подберем позже, если $p/q = [0; a_1, ..., a_{j_0}]$, то через I_b обозначим $I_{p'/q'}$, соответствующий $p'/q' = [0; a_1, ..., a_{j_0}, b_1, ..., b_d]$. Тогда $I = \cup_b I_b$. Учитывая, что $q_{j+1}/q_j \le a_{j+1} + 1$, получаем из (4.11) и (4.12)

$$\frac{|F(x)-F_I|k}{A(k)} \le \sum_{l=1}^{d} q_{j_0+l-1}^{-\frac{1}{k}} \ln b_l + \sum_{n=1}^{\infty} q_{j_0+d+n-1}^{-\frac{1}{k}} \ln a_{j_0+d+n} + O\left(q^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + q^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right). \tag{4.13}$$

Аналогично доказательству [21, Theorem 3.2], множество точек $x \in I_b$ таких, что $a_{j_0+d+n}(x) \le Cn^2 e^{\lambda k A(k)^{-1} q^{\frac{1}{k}}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, отличается по мере от $|I_b|$ на $O(|I_b| e^{-\lambda k A(k)^{-1} q^{\frac{1}{k}}})$ с учетом [21, (4.6)]. Поэтому далее будем считать, что эти неравенства выполнены, а значит, вторая сумма в (4.13) есть $O(\lambda (q/q_{j_0+d})^{\frac{1}{k}})$. Снова

$$|\{x \in I : |F(x) - F_I| > \lambda\}| \le |I| \sum_{b \in \mathfrak{B}_\lambda} (b_1 ... b_d)^{-2}, \tag{4.14}$$

где $\mathfrak{B}_\lambda$ есть множество тех b, для которых

$$\frac{A(k)}{k} \sum_{l=1}^{d} q_{j_0+l-1}^{-\frac{1}{k}} \ln b_l + C\lambda \left(\frac{q}{q_{j_0+d}}\right)^{\frac{1}{k}} + Cq^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + Cq^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q > \lambda \tag{4.15}$$

при некоторой постоянной C. Выберем d так, чтобы выполнялось $2^{d/2k-1} > C$. Тогда второе слагаемое в (4.15) не превосходит $\lambda/2$. Ясно, что при $k > 2$ мы можем считать, что $\lambda \left(q^{-\frac{1}{2^{k+1}}} + q^{-\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right)$ больше некоторой фиксированной константы. Тогда третье и четвертое слагаемые в (4.15) суммарно не превосходят $\lambda/4$. Значит, найдется такой номер l_0, $1 \le l_0 \le d$, что

$$\ln b_{l_0} \ge \frac{\lambda}{4d} \frac{k}{A(k)} q^{\frac{1}{k}},$$

откуда

$$\frac{q_{j_0+d}}{q} \ge b_{l_0} \ge e^{\frac{k\lambda}{4dA(k)} q^{\frac{1}{k}}} \ge \left(\frac{k\lambda}{4dA(k)} q^{\frac{1}{k}}\right)^k.$$

Тогда если $k > 2$, то (4.15) приобретает вид

$$\frac{A(k)}{k} \sum_{l=1}^{d} \left(\frac{q}{q_{j_0+l-1}}\right)^{\frac{1}{k}} \ln b_l > \lambda q^{\frac{1}{k}} - 3Cq^{\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q.$$

Поскольку $q/q_{j_0+l-1} < 1$ при $l > 1$, то можем воспользоваться [21, Lemma 4.3] и получим, согласно (4.14),

$$|\{x \in I : |F(x) - F_I| > \lambda\}| \le |I| \left(e^{\lambda q^{\frac{1}{k}} - 3Cq^{\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q}\right)^{-\frac{k}{A(k)}} \le |I| e^{-\frac{k\lambda}{A(k)} q^{\frac{1}{k}} + C' q^{\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q}. \tag{4.16}$$

Перейдем теперь к произвольному отрезку $J \subset I$. Для такого отрезка доказательство фактически повторяет доказательство [21, Proposition 3.5] (сохраним его обозначения с заменой I на J) с некоторыми оговорками. Во-первых, [21, (4.11)] принимает вид

$$
\begin{aligned}
&|\{x \in J : |F(x) - F_J| > \lambda\}| \\
&\qquad = O\left(\sum_{b=c}^{d-1} |J^b| \min\left\{1, e^{kA(k)^{-1}(|F_{J^b} - F_J| - \lambda)q^{\frac{1}{k}} + C' q^{\frac{1}{k} - \frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q}\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Во-вторых, оценка (4.10) остается верна при замене отрезка I на содержащийся в нем отрезок, а потому, с учетом Предложения 1,

$$
\begin{aligned}
F_{J^b} - F_J = F^+_{J^b} - F^+_J + O\left(q^{\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right) = \frac{\xi_{p/q}}{kq}(\ln b - (\ln a_{j_0+1}(x))_J) \\
+ O\left(\sum_{q_j > q} \frac{1}{|J|} \int\limits_J q_j^{-\frac{1}{k}}(y) \ln a_{j+1}(y) dy\right) + O\left(\sum_{q_j > q} \frac{1}{|J^b|} \int\limits_{J^b} q_j^{-\frac{1}{k}}(y) \ln a_{j+1}(y) dy\right) \\
+ O\left(q^{\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right) = \frac{\xi_{p/q}}{kq}(\ln b - (\ln a_{j_0+1}(x))_J) + O\left(q^{\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right).
\end{aligned}
$$

Применяя результат [23, Theorem 1] и тот факт, что $(\ln(a_{j_0+1}/c))_J = O(1)$, имеем

$$
|F_{J^b} - F_J| \le \frac{A(k) q^{-\frac{1}{k}}}{k} \ln \frac{b}{c} + O\left(q^{\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right),
$$

то есть в нашем случае $\mathfrak{B}$ будет иметь несколько иной вид:

$$
\mathfrak{B} = \left\{b \in [c, d-1] \cap \mathbb{Z} : \ln(b/c) \le \lambda q^{\frac{1}{k}} k A(k)^{-1} - C q^{\frac{1}{2^k(k-1)}} \ln q\right\}.
$$

Оставшаяся часть доказательства идентична.

$\square$

Список литературы

[1] Виноградов И. М., *Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена*, Изв. Акад. наук СССР. 21(4) (1927), 567–578.

[2] Пустыльников Л. Д., *Распределение дробных частей значений многочлена, суммы Вейля и эргодическая теория*, УМН. 48(4) (1993), 131–166.

[3] Chowla S., Davenport H., *On Weyl's inequality and Waring's problem for cubes*, Acta Arithm. 6 (1961), 505–521.

[4] Heath-Brown D. R., *Bounds for the cubic Weyl sum*, J. Math. Sci. 171(6) (2010), 813–823.

[5] Wooley T. D., *Mean value estimates for odd cubic Weyl sums*, Bull. London Math. Soc. 47(6) (2015), 946–957.

[6] Коробов Н. М., *Тригонометрические суммы и их приложения*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1989.

[7] Chaundy T. W., Jolliffe A. E., *The uniform convergence of a certain class of trigonometric series*, Proc. London Math. Soc. 15 (1916), 214–216.

[8] Nurcombe J. R., *On the uniform convergence of sine series with quasimonotone coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 166(2) (1992), 577–581.

[9] Stechkin S. B., *Trigonometric series with monotone type coefficients*, Proc. Steklov Inst. Math. Approximation Theory. Asymptotical Expansions Suppl. 1 (2001) 214–224.

[10] Leindler L., *On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series*, Anal. Math. 27(4) (2001), 279–285.

[11] Tikhonov S., *Trigonometric series with general monotone coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 721–731.

[12] Tikhonov S., *Best approximation and moduli of smoothness: computation and equivalence theorems*, J. Approx. theory 153 (2008), 19–39.

[13] Dyachenko M., Mukanov A., Tikhonov S., *Uniform convergence of trigonometric series with general monotone coefficients*, Canadian J. Math. 71(6) (2019), 1445–1463.

[14] Kęska S., *On the uniform convergence of sine series with square root*, Hindawi J. Func. Sp. (2019).

[15] Осколков К. И., *О спектрах равномерной сходимости*, Докл. АН СССР 1(288) (1986), 54–58

[16] Архипов Г. И., Осколков К. И., *Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях*, Матем. сб. 134(176)(2(10)) (1987), 147–157

[17] Gerver J., *The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of* π, Amer. J. Math. 92 (1970), 33–55.

[18] Hardy G.H., *Weierstrass's non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 301–325.

[19] Jaffard S., *The spectrum of singularities of Riemann's function*, Rev. Mat. Iberoam. 12 (1996), 441–460.

[20] Chamizo F., Ubis A., *Multifractal behavior of polynomial Fourier series*, Adv. Math., 250 (2014), 1–34, 2014.

[21] Chamizo F., Córdoba A., Ubis A., *Fourier series in BMO with number theoretical implications*, Math. Ann., 376 (2020), 457–473.

[22] John F., Nirenberg L., *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 415–426.

[23] Banks W., Shparlinski I., *On Gauss sums and the evaluation of Stechkin's constant*, Math. of Comp., 85 (10.1090/mcom3056) (2013).

[24] Хинчин А. Я., *Цепные дроби*, УРСС, Москва, 2004.