Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных уравнений типа Шрёдингера

Дородный М. А.

Оглавление

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [3, 2, 19]. Один из методов изучения задач усреднения в $\mathbb{R}^d$ — это спектральный метод, основанный на теории Флоке–Блоха. См., например, [3, глава 4], [19, глава 2], [1, 27, 10].

0.1. Класс операторов. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решётки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используется обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные ДО второго порядка следующего вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \bigl(f^\varepsilon(\mathbf{x})^* a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j f^\varepsilon(\mathbf{x}) + f^\varepsilon(\mathbf{x})^* D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* f^\varepsilon(\mathbf{x}) \bigr) \\ + f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{0.2}$$

где $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(m\times m)$-матрица-функция, $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная вместе со своей обратной $(n \times n)$-матрица-функция. Далее, $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. Потенциал $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — обобщённая матрица-функция, порождённая некоторой матричнозначной мерой. Наконец, $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная $(n \times n)$-матрица-функция. Делаются предположения, гарантирующие сильную эллиптичность оператора. На параметр λ накладывается ограничение, обеспечивающее положительную определённость оператора (0.2).

Целесообразно сначала изучить более узкий класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.3}$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.4}$$

отвечающий случаю $f = \mathbf{1}_n$.

0.2. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач в $\mathbb{R}^d$. В работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [4, 5, 6, 7] был развит теоретико-операторный подход к эллиптическим задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Будем для определённости говорить о более простых операторах (0.4), (0.3) и обсудим сначала результаты для оператора (0.3). В [4] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$ по операторной L_2-норме, где $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0. Была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.5}$$

В работах [5, 6] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а в [7] найдена аппроксимация той же резольвенты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются корректоры.

Теоретико-операторный подход применялся к параболическим задачам в работах [28, 29, 30, 11, 13]. В [28, 29] получена следующая оценка

$$\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad s > 0. \tag{0.6}$$

Аппроксимация оператора $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ получена в [11], а аппроксимация экспоненты по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ найдена в [30]. Ещё более точные аппроксимации экспоненты и резольвенты при учёте первого и второго корректоров найдены в работе [13]. В [4, 5, 6, 7, 28, 29, 30, 11, 13] аналогичные результаты получены и для более общего оператора (0.1).

Оценки погрешности типа (0.5), (0.6) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [18, 20, 21]. См. также обзор [22].

В присутствии членов младшего порядка эллиптическая задача усреднения изучалась в работах [9, 31]. Там была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1} - (\widehat{\mathcal{B}}^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

а также найдена аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. Здесь $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами (см. (11.3)). В [9] предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной, но коэффициенты оператора считались достаточно гладкими. В [31] эти оценки доказаны при широких предположениях. В работе [33] была найдена более точная аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Параболические задачи с оператором $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ (а также с $\mathcal{B}_\varepsilon$) изучались в работе [24].

0.3. Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. Иначе обстоит дело с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа, которым посвящена статья [8]. Остановимся опять на результатах для оператора (0.3). В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau \in \mathbb{R}$. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (с подходящим r) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [8] были получены оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.8}$$

В работе [25] (см. также [26]) был получен результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.9}$$

С помощью интерполяции можно получить оценку разности экспонент из (0.7) по $(H^r \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{r/3})$ (при $0 \leqslant r \leqslant 3$), оценку разности операторных косинусов из (0.8) по $(H^r \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{r/2})$ (при $0 \leqslant r \leqslant 2$), а также оценку разности операторов из (0.9) по $(H^r \to L_2)$–норме с погрешностью $O(\varepsilon^{(r+1)/2})$ (при $-1 \leqslant r \leqslant 1$). Кроме того, в [25, 26] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора по $(H^2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном τ.

В работах [35, 17] (см. также [34, 16]) была подтверждена точность оценок (0.7)–(0.9) относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия на оператор, позволяющие усилить результат и получить оценки

$$\begin{aligned} \|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon, \\ \|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon, \\ \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon. \end{aligned} \tag{0.10}$$

0.4. План работы. Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена изучению оператора $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, вторая — $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$. (В первой части нам удобно обозначать переменную "время" буквой τ, во второй — буквой s.) Изучаются также более общие оператор-функции от операторов (0.1), (0.2). Основные результаты описаны во введениях к соответствующим частям. Первая часть опубликована в [15], вторая в [14]; автор приносит извинения за то, что текст работы написан на двух языках.

0.5. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot\,,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведёт к смешениям. Через $I = I_\mathfrak{H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ и $\operatorname{Ker} A$ обозначаются область определения и ядро A, соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. Если P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^\perp$.

Символы $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают стандартные скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Для $(m\times n)$-матрицы a символ a^{T} означает транспонированную матрицу, a^* — эрмитово сопряжённую матрицу. Далее, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$.

Классы L_p функций со значениями в $\mathbb{C}^n$, заданных в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, обозначаются через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ порядка s с индексом суммирования p обозначаются $W_p^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $p = 2$ используем обозначения $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $W_p^s(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие обозначения и для пространств векторнозначных и матричнозначных функций.

Через C, c, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

Часть I

Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results

§1. Introduction

1.1. Main results of the part. The present part is devoted to error estimates for the operator exponential $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$; a special attention is paid to the dependence of the estimates on time. We show that, in the general case, the factor $(1+|\tau|)$ in (0.7) cannot be replaced by $(1+|\tau|^\alpha)$ with $\alpha<1$. On the other hand, we prove that estimate (0.10) (which holds under some additional assumptions) can be improved:

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

This result allows us to obtain qualified estimates for large time $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ with $\alpha<2$. Analogs of these results are obtained also for the more general operator (0.1). It turns out that it is convenient to study the operator $f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$ (the operator exponential sandwiched between rapidly oscillating factors).

The results given in the operator terms are applied to study the behavior of the solution $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, of the problem

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{1.1}$$

A more general problem with the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ is also studied.

1.2. Method. The results are obtained with the help of the operator-theoretic approach. The scaling transformation reduces investigation of the difference of exponentials under the norm sign in (0.7) to studying the difference $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0}$, where $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Next, with the help of the unitary Gelfand transformation, the operator $\widehat{\mathcal{A}}$ expands into the direct integral of the operators $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ depending on the quasimomentum $\mathbf{k}$ and acting in the space $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. According to [4], we distinguish the one-dimensional parameter $t=|\mathbf{k}|$ and consider the family $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ as a quadratic operator pencil with respect to the parameter t. Here, a good deal of constructions can be done in the framework of an abstract operator-theoretic setting. In the abstract scheme, the operator family $A(t)$ acting in some Hilbert space $\mathfrak{H}$ and admitting a factorization of the form $A(t) = X(t)^* X(t)$, where $X(t) = X_0 + tX_1$, is considered.

1.3. The plan of the first part. The part consists of three chapters. Chapter 1 (§§2–4) contains necessary abstract operator-theoretic material. In Chapter 2 (§§5–8) periodic DOs acting in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ are studied. Chapter 3 (§§9–11) is devoted to homogenization problems for nonstationary Schrödinger-type equations. In §9 the main results of the paper in operator terms are obtained. Next, in §10 these results are applied to homogenization of the Cauchy problem (1.1) and a more general problem with the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$. §11 is devoted to applications of the general results to particular equations.

Chapter 1. Abstract operator-theoretic scheme

§2. Quadratic operator pencils

2.1. The operators $X(t)$ and $A(t)$. Let $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{H}_*$ be complex separable Hilbert spaces. Suppose that $X_0 : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ is a densely defined and closed operator, and $X_1\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ is a bounded operator. On the domain $\operatorname{Dom} X_0$, we introduce the operator $X(t) := X_0 + tX_1$, $t\in\mathbb{R}$. Consider the family of selfadjoint (and nonnegative) operators $A(t) := X(t)^*X(t)$ in $\mathfrak{H}$.

The operator $A(t)$ is generated by the closed quadratic form $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Denote $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0) = \operatorname{Ker} X_0$, $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$. We impose the following condition.

Condition 2.1. *The point $\lambda_0 = 0$ is an isolated point in the spectrum of $A(0)$, and $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty$.*

Denote by d^0 *the distance from the point $\lambda_0 = 0$ to the rest of the spectrum of $A(0)$*. Let P and P_* be the orthogonal projections of $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{N}$ and of $\mathfrak{H}_*$ onto $\mathfrak{N}_*$, respectively. Denote by $F(t; [a,b])$ the spectral projection of $A(t)$ for the interval $[a,b]$, and put $\mathfrak{F}(t; [a,b]) := F(t; [a,b])\mathfrak{H}$. *We fix a number $\delta > 0$ such that $8\delta < d^0$*. We write $F(t)$ in place of $F(t; [0,\delta])$ and $\mathfrak{F}(t)$ in place of $\mathfrak{F}(t; [0,\delta])$. Next, we choose a number $t^0 > 0$ such that

$$t^0 \leqslant \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1}. \tag{2.1}$$

According to [4, Chapter 1, Proposition 1.2], $F(t; [0,\delta]) = F(t; [0, 3\delta])$ and $\operatorname{rank} F(t; [0,\delta]) = n$ for $|t| \leqslant t^0$.

2.2. The operators Z, R, S, Z_2, and R_2. Now we introduce some operators appearing in the analytic perturbation theory considerations; see [4, Chapter 1, §1] and [5, §1].

Let $\omega \in \mathfrak{N}$, and let $\psi = \psi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ be a (weak) solution of the equation $X_0^*(X_0\psi + X_1\omega) = 0$. We define a bounded operator $Z \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ by the relation $Zu = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Next, we define the operator $R := X_0 Z + X_1 \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$. Another representation for R is given by $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. According to [4, Chapter 1, Section 1.3], the operator $S := R^*R \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ is called *the spectral germ* of the operator family $A(t)$ at $t = 0$. The germ can be represented as $S = PX_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. The spectral germ is said to be *non-degenerate* if $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

We need to introduce the operators Z_2 and R_2 defined in [12, §1]. Let $\omega \in \mathfrak{N}$, and let $\phi = \phi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ be a (weak) solution of the equation

$$X_0^*(X_0\phi + X_1 Z\omega) = -P^\perp X_1^* R\omega.$$

The right-hand side of this equation belongs to $\mathfrak{N}^\perp = \operatorname{Ran} X_0^*$, so the solvability condition is fulfilled. We define an operator $Z_2 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ by the relation $Z_2 u = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Finally, let $R_2 := X_0 Z_2 + X_1 Z \colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{H}_*$.

2.3. The analytic branches of eigenvalues and eigenvectors of $A(t)$. According to the general analytic perturbation theory (see [23]), for $|t| \leqslant t^0$ there exist real-analytic functions $\lambda_l(t)$ (the branches of eigenvalues) and real-analytic $\mathfrak{H}$-valued functions $\varphi_l(t)$ (the branches of eigenvectors) such that $A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, and the set $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, forms *an orthonormal basis* in $\mathfrak{F}(t)$. Moreover, for $|t| \leqslant t_*$, where $0 < t_* \leqslant t^0$ is *sufficiently small*, we have the following convergent power series expansions:

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \nu_l t^4 + \dots, \qquad \gamma_l \geqslant 0,\ \mu_l, \nu_l \in \mathbb{R}, \qquad l = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + t^2 \psi_l^{(2)} + \dots, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

We agree to use the numeration such that $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \dots \leqslant \gamma_n$. The elements $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, form an orthonormal basis in $\mathfrak{N}$. In [4, Chapter 1, §1] and [5, §1] it was checked that $\widetilde{\omega}_l := \psi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}$,

$$S\omega_l = \gamma_l \omega_l, \qquad l = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

$$(\widetilde{\omega}_j, \omega_k) + (\omega_j, \widetilde{\omega}_k) = 0, \qquad j, k = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Thus, *the numbers γ_l and the elements ω_l defined by (2.2) and (2.3) are eigenvalues and eigenvectors of the germ S*. We have $P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l)\omega_l$ and $SP = \sum_{l=1}^n \gamma_l (\cdot, \omega_l)\omega_l$.

2.4. Threshold approximations. The following statements were obtained in [4, Chapter 1, Theorems 4.1 and 4.3] and [5, Theorem 4.1]. In what follows, we agree to denote by β_j various absolute constants (which can be controlled explicitly) assuming that $\beta_j \geqslant 1$.

Theorem 2.2 ([4]). *Under the assumptions of Subsection 2.1, for $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\begin{aligned} \|F(t) - P\| &\leqslant C_1|t|, & C_1 &= \beta_1 \delta^{-1/2}\|X_1\|, \\ \|A(t)F(t) - t^2 SP\| &\leqslant C_2|t|^3, & C_2 &= \beta_2 \delta^{-1/2}\|X_1\|^3. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Theorem 2.3 ([5]). *Under the assumptions of Subsection 2.1, for $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Xi(t), \qquad \|\Xi(t)\| \leqslant C_3 t^4, \qquad C_3 = \beta_3 \delta^{-1}\|X_1\|^4.$$

The operator K is represented as $K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*$, where K_0 takes $\mathfrak{N}$ to $\mathfrak{N}^\perp$ and $\mathfrak{N}^\perp$ to $\mathfrak{N}$, while $N = N_0 + N_*$ takes $\mathfrak{N}$ to itself and $\mathfrak{N}^\perp$ to $\{0\}$. In terms of the power series coefficients, the operators K_0, N_0, N_* are given by $K_0 = \sum_{l=1}^n \gamma_l \left((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l\right)$,

$$N_0 = \sum_{l=1}^n \mu_l(\cdot, \omega_l)\omega_l, \qquad N_* = \sum_{l=1}^n \gamma_l \left((\cdot, \widetilde{\omega}_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)\widetilde{\omega}_l\right). \tag{2.7}$$

In the invariant terms, we have $K_0 = ZSP + SPZ^*$ and $N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z$.

Remark 1. 1°. If $Z = 0$, then $K_0 = 0$, $N = 0$, and $K = 0$. 2°. In the basis $\{\omega_l\}_{l=1}^n$ the operators N, N_0, N_* (restricted to the subspace $\mathfrak{N}$) are represented by matrices of size $n \times n$. The operator N_0 is diagonal: $(N_0\omega_j, \omega_k) = \mu_j \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$. The matrix entries of N_* are given by $(N_*\omega_j, \omega_k) = \gamma_k(\omega_j, \widetilde{\omega}_k) + \gamma_j(\widetilde{\omega}_j, \omega_k) = (\gamma_j - \gamma_k)(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)$, $j, k = 1, \dots, n$. So, the diagonal elements of N_* are equal to zero. Moreover, $(N_*\omega_j, \omega_k) = 0$ if $\gamma_j = \gamma_k$. 3°. If $n = 1$, then $N_* = 0$ and $N = N_0$.

2.5. The nondegeneracy condition. Below we impose the following additional condition.

Condition 2.4. *There exists a constant $c_* > 0$ such that $A(t) \geqslant c_* t^2 I$ for $|t| \leqslant t^0$.*

From Condition 2.4 it follows that $\lambda_l(t) \geqslant c_* t^2$, $l = 1, \dots, n$, for $|t| \leqslant t^0$. By (2.2), this implies $\gamma_l \geqslant c_* > 0$, $l = 1, \dots, n$, i.e., the spectral germ is nondegenerate:

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{2.8}$$

2.6. The clusters of eigenvalues of $A(t)$. The content of this subsection is borrowed from [35, Section 2] and concerns the case where $n \geqslant 2$.

Suppose that Condition 2.4 is satisfied. Now, it is convenient to change the notation tracing the multiplicities of the eigenvalues of the operator S. Let p be the number of different eigenvalues of the germ S. We enumerate these eigenvalues in the increasing order and denote them by γ_j°, $j = 1, \dots, p$. Let $k_1, \dots, k_p$ be their multiplicities (obviously, $k_1 + \ldots + k_p = n$). Denote $\mathfrak{N}_j := \operatorname{Ker}(S - \gamma_j^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Then $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. Let P_j be the orthogonal projection of $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{N}_j$. Then $P = \sum_{j=1}^p P_j$, and $P_j P_l = 0$ for $j \neq l$.

Remark 2. By Remark 1, we have $P_j N_* P_j = 0$ and $P_l N_0 P_j = 0$ for $l \neq j$. Hence, the operators N_0 and N_* admit the invariant representions:

$$N_0 = \sum_{j=1}^p P_j N P_j, \qquad N_* = \sum_{1 \leqslant l, j \leqslant p;\, j \neq l} P_l N P_j. \tag{2.9}$$

We divide the first n eigenvalues of the operator $A(t)$ in p clusters for $|t| \leqslant t^0$; the j-th cluster consists of the eigenvalues $\lambda_l(t)$, $l = i, \dots, i + k_j - 1$, where $i = i(j) = k_1 + \dots + k_{j-1} + 1$.

For each pair of indices (j,l), $1 \leqslant j, l \leqslant p$, $j \neq l$, denote $c^\circ_{jl} := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma^\circ_l - \gamma^\circ_j|\}$. Clearly, there exists a number $i_0 = i_0(j,l)$, where $j \leqslant i_0 \leqslant l-1$ if $j < l$ and $l \leqslant i_0 \leqslant j-1$ if $l < j$, such that $\gamma^\circ_{i_0+1} - \gamma^\circ_{i_0} \geqslant c^\circ_{jl}$. It means that on the interval between γ°_j and γ°_l there is a gap in the spectrum of S of length at least c°_{jl}. If such i_0 is not unique, we agree to take the minimal possible i_0 (for definiteness). Next, we choose a number $t^{00}_{jl} \leqslant t^0$ such that $t^{00}_{jl} \leqslant (4C_2)^{-1} c^\circ_{jl} = (4\beta_2)^{-1}\delta^{1/2}\|X_1\|^{-3} c^\circ_{jl}$. Let $\Delta^{(1)}_{jl} := [\gamma^\circ_1 - c^\circ_{jl}/4, \gamma^\circ_{i_0} + c^\circ_{jl}/4]$ and $\Delta^{(2)}_{jl} := [\gamma^\circ_{i_0+1} - c^\circ_{jl}/4, \gamma^\circ_p + c^\circ_{jl}/4]$. The distance between the segments $\Delta^{(1)}_{jl}$ and $\Delta^{(2)}_{jl}$ is at least $c^\circ_{jl}/2$. As was shown in [35, Section 2], for $|t| \leqslant t^{00}_{jl}$ the operator $A(t)$ has exactly $k_1 + \ldots + k_{i_0}$ eigenvalues (counted with multiplicities) in the segment $t^2 \Delta^{(1)}_{jl}$ and exactly $k_{i_0+1} + \ldots + k_p$ eigenvalues in the segment $t^2\Delta^{(2)}_{jl}$.

2.7. The coefficients ν_l, $l = 1, \dots, n$. We need to establish a relationship between the coefficients ν_l, $l = 1, \dots, n$, and some eigenvalue problem.

In [12, (1.34), (1.37)], it was checked that $\psi^{(2)}_l - Z\widetilde{\omega}_l - Z_2\omega_l =: \widetilde{\omega}^{(2)}_l \in \mathfrak{N}$, $l = 1, \dots, n$,

$$(\widetilde{\omega}^{(2)}_l, \omega_k) + (Z\omega_l, Z\omega_k) + (\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) + (\omega_l, \widetilde{\omega}^{(2)}_k) = 0, \qquad l,k = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

Next, by [12, (2.47), the formula below (2.46)], we have

$$(N_1\omega_l, \omega_k) - \mu_l(\widetilde{\omega}_l, \omega_k) - \mu_k(\omega_l, \widetilde{\omega}_k) - \gamma_l(\widetilde{\omega}^{(2)}_l, \omega_k) - \gamma_k(\omega_l, \widetilde{\omega}^{(2)}_k) - (S\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) = \nu_l \delta_{lk}, \qquad l,k = 1, \dots, n, \tag{2.11}$$

where $N_1 := N^0_1 - Z^*ZSP - SPZ^*Z$, $N^0_1 := Z_2^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z_2 + R_2^* R_2 P$.

Let γ°_q be the q-th eigenvalue of problem (2.4) of multiplicity k_q (i.e. $\gamma^\circ_q = \gamma_i = \ldots = \gamma_{i+k_q-1}$ for $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Consider the eigenvalue problem (see Remark 1)

$$P_q N \omega_l = \mu_l \omega_l, \qquad l = i, \dots, i + k_q - 1. \tag{2.12}$$

Assume that μ_l, $l = i, \dots, i + k_q - 1$, are enumerated in the increasing order. Let $p'(q)$ be the number of different eigenvalues of problem (2.12) and denote by $k_{1,q}, \dots, k_{p'(q),q}$ their multiplicities (of course, $k_{1,q} + \ldots + k_{p'(q),q} = k_q$). We also change the notation and denote by $\mu^\circ_{j,q}$, $j = 1, \dots, p'(q)$, the different eigenvalues of problem (2.12), enumerating them in the increasing order. Denote $\mathfrak{N}_{j,q} := \operatorname{Ker}(P_q N|_{\mathfrak{N}_q} - \mu^\circ_{j,q} I_{\mathfrak{N}_q})$, $j = 1, \dots, p'(q)$. Then $\mathfrak{N}_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} \oplus \mathfrak{N}_{j,q}$. Let $P_{j,q}$ be the orthogonal projection of $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{N}_{j,q}$. Then $P_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} P_{j,q}$ and $P_{j,q}P_{r,q} = 0$ for $j \neq r$.

Let $\mu^\circ_{q',q}$ be the q'-th eigenvalue of problem (2.12) of multiplicity $k_{q',q}$, i.e., $\mu^\circ_{q',q} = \mu_{i'} = \ldots = \mu_{i'+k_{q',q}-1}$, where $i' = i'(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$. Using (2.5), (2.10) and taking into account that $\gamma_l = \gamma_k = \gamma^\circ_q$, $\mu_l = \mu_k = \mu^\circ_{q',q}$, $l,k = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1$, from (2.11) we deduce

$$(N_1\omega_l, \omega_k) + \gamma_l(Z\omega_l, Z\omega_k) + \gamma_l(\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) - (S\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) = \nu_l\delta_{lk}, \qquad l,k = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1. \tag{2.13}$$

Next, by virtue of Remark 1, we have

$$\gamma_l(\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) - (S\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) = \sum_{l'=1}^{n} (\gamma_l - \gamma_{l'})(\widetilde{\omega}_l, \omega_{l'})(\omega_{l'}, \widetilde{\omega}_k)$$
$$= \sum_{\substack{l' \in \{1,\dots,n\} \\ l' \neq i, \dots, i+k_q-1}} \frac{(N\omega_l, \omega_{l'})(\omega_{l'}, N\omega_k)}{\gamma^\circ_q - \gamma_{l'}} = \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,p\} \\ j \neq q}} \frac{(P_j N\omega_l, N\omega_k)}{\gamma^\circ_q - \gamma^\circ_j} =: \mathfrak{n}^{(q',q)}_0[\omega_l, \omega_k],$$
$$l,k = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1.$$

Relations (2.13) can be treated as the eigenvalue problem for the operator $\mathcal{N}^{(q',q)}$:

$$\mathcal{N}^{(q',q)}\omega_l = \nu_l \omega_l, \qquad l = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1, \tag{2.14}$$

where $\mathcal{N}^{(q',q)} := P_{q',q}\left(N_1^0 - \frac{1}{2}Z^*ZSP - \frac{1}{2}SPZ^*Z\right)\big|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + \mathcal{N}_0^{(q',q)}$ and $\mathcal{N}_0^{(q',q)}$ is the operator acting in $\mathfrak{N}_{q',q}$ and generated by the form $\mathfrak{n}_0^{(q',q)}[\cdot,\cdot]$.

Remark 3. Let $N_0 = 0$. By (2.7), this condition is equivalent to the relations $\mu_l = 0$ for all $l = 1, \dots, n$. In this case, we have $\mathfrak{N}_{1,q} = \mathfrak{N}_q$, $q = 1, \dots, p$. Then we shall write $\mathcal{N}^{(q)}$ instead of $\mathcal{N}^{(1,q)}$. Suppose, in addition, that $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1, \dots, p\}$. By (2.14), this assumption means that $\nu_j \neq 0$ for some $j \in \{1, \dots, n\}$.

§3. Approximation of the operator $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P$

3.1. Approximation of the operator $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P$. Let $\varepsilon > 0$. We study the behavior of the operator $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}$ for small ε. We shall multiply this operator by the "smoothing factor" $\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}P$, where $s > 0$. (The term is explained by the fact that in applications to DOs this factor turns into the smoothing operator.) Our goal is to find an approximation of the smoothed operator exponential with an error of order $O(\varepsilon)$ for minimal possible s.

We rely on the following statements proved in [8, Theorem 2.1] and [35, Corollaries 3.3, 3.5].

Theorem 3.1 ([8]). *For $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant 2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3. \tag{3.1}$$

Theorem 3.2 ([35]). *Suppose that $N = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant 2C_1|t| + C_4|\tau|t^4, \tag{3.2}$$

where $C_4 = \beta_4\delta^{-1}\|X_1\|^4$.

Theorem 3.3 ([35]). *Suppose that $N_0 = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^{00}$ we have*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant C_5|t| + C_6|\tau|t^4.$$

Here t^{00} is subject to the restriction

$$t^{00} \leqslant (4\beta_2)^{-1}\delta^{1/2}\|X_1\|^{-3}c^\circ, \tag{3.3}$$

$$c^\circ := \min_{(j,l)\in\mathcal{Z}} c^\circ_{jl}, \quad \mathcal{Z} := \{(j,l)\colon 1 \leqslant j,l \leqslant p, j \neq l, P_jNP_l \neq 0\}. \tag{3.4}$$

The constants C_5, C_6 are given by

$$C_5 = \beta_5\delta^{-1/2}(\|X_1\| + n^2\|X_1\|^3(c^\circ)^{-1}), \quad C_6 = \beta_6\delta^{-1}(\|X_1\|^4 + n^2\|X_1\|^8(c^\circ)^{-2}).$$

Now, we apply the formulated results and we start with Theorem 3.1. Let $|t| \leqslant t^0$. By (3.1) (with τ replaced by $\varepsilon^{-2}\tau$),

$$\begin{aligned}\big\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}& \\ \leqslant (2C_1|t| + C_2\varepsilon^{-2}|\tau||t|^3)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} &\leqslant (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon.\end{aligned}$$

We arrive at the following result which has been proved before in [8, Theorem 2.6].

Theorem 3.4 ([8])**.** *For $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P \right\| \varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon.$$

The constants C_1, C_2 are majorated by polynomials of the variables $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$.

Theorem 3.2 allows us to improve the result of Theorem 3.4 in the case where $N = 0$.

Theorem 3.5. *Suppose that $N = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P \right\| \varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_1 + C_4'|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{3.5}$$

The constants C_1, C_4' are majorated by polynomials of the variables $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$.

Proof. Note that for $|t| \geqslant \varepsilon^{1/2}/|\tau|^{1/4}$ we have $\frac{\varepsilon^2}{t^2+\varepsilon^2} \leqslant \frac{\varepsilon|\tau|^{1/2}}{1+\varepsilon|\tau|^{1/2}} \leqslant \varepsilon|\tau|^{1/2}$, whence the left-hand side of (3.5) does not exceed $2|\tau|^{1/2}\varepsilon$.

Using (3.2) with τ replaced by $\varepsilon^{-2}\tau$, for $|t| < \varepsilon^{1/2}/|\tau|^{1/4}$ we obtain

$$\begin{aligned} \left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P \right\| \varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} &\leqslant \left(2C_1|t| + C_4\varepsilon^{-2}|\tau|t^4\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \\ &\leqslant C_1\varepsilon + C_4|\tau|t^2 \leqslant C_1\varepsilon + C_4|\tau|^{1/2}\varepsilon. \end{aligned}$$

The required estimate (3.5) follows with the constant $C_4' = \max\{2, C_4\}$. $\square$

Similarly, using Theorem 3.3, one can deduce the following result.

Theorem 3.6. *Suppose that $N_0 = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$ and $|t| \leqslant t^{00}$ we have*

$$\left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P \right\| \varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_5 + C_6'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Here t^{00} is subject to (3.3), the constants C_5, C_6' are majorated by polynomials of the variables $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$, n, $(c^\circ)^{-1}$.

Remark 4. Theorems 3.5 and 3.6 improve the results of Theorems 4.2 and 4.3 from [35] with respect to dependence of the estimates on τ.

3.2. Sharpness of the results with respect to the smoothing factor.

Now, we show that the obtained results are sharp with respect to the smoothing factor. The following theorem proved in [35, Theorem 4.4] confirms the sharpness of Theorem 3.4.

Theorem 3.7 ([35])**.** *Suppose that $N_0 \neq 0$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 3$. Then there does not exist a constant $C(\tau) > 0$ such that the estimate*

$$\left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P \right\| \varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{3.6}$$

holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.

Next, we confirm the sharpness of Theorems 3.5, 3.6.

Theorem 3.8. *Suppose that $N_0 = 0$ and $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1, \dots, p\}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 2$. Then there does not exist a constant $C(\tau) > 0$ such that estimate (3.6) holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.*

Proof. We start with preliminary remarks. Since $F(t)^\perp P = (P - F(t))P$, from (2.6) it follows that
$$\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}F(t)^\perp P\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1|t|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1\varepsilon, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{3.7}$$
Next, for $|t| \leqslant t^0$ we have
$$e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}F(t) = \sum_{l=1}^{n} e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_l(t)}(\cdot, \varphi_l(t))\varphi_l(t). \tag{3.8}$$
From the convergence of the power series expansions (2.3) it follows that
$$\|\varphi_l(t) - \omega_l\| \leqslant c_1|t|, \qquad |t| \leqslant t_*, \quad l = 1, \dots, n. \tag{3.9}$$

It suffices to assume that $1 \leqslant s < 2$. Let us fix $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. We prove by contradiction. Suppose that for some $1 \leqslant s < 2$ there exists a constant $C(\tau) > 0$ such that (3.6) is valid for all sufficiently small $|t|$ and ε. By (3.7)–(3.9), this assumption is equivalent to the existence of a positive constant $\widetilde{C}(\tau)$ such that the estimate
$$\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_l(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_l}\right)(\cdot, \omega_l)\omega_l\right\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{3.10}$$
is valid for all sufficiently small $|t|$ and ε.

By Remark 3, the conditions $N_0 = 0$ and $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1, \dots, p\}$ mean that in the expansions (2.2) $\mu_l = 0$ for all $l = 1, \dots, n$ and $\nu_j \neq 0$ at least for one j. Then $\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \nu_j t^4 + O(|t|^5)$. Assume that t_* is sufficiently small so that
$$\frac{1}{2}|\nu_j|t^4 \leqslant |\lambda_j(t) - \gamma_j t^2| \leqslant \frac{3}{2}|\nu_j|t^4, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{3.11}$$

Apply the operator under the norm sign in (3.10) to ω_j. Then
$$\left|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_j(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_j}\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{3.12}$$
for all sufficiently small $|t|$ and ε. The left-hand side of (3.12) can be written as
$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t) - \gamma_j t^2)\right)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}.$$

Now, assuming that ε is sufficiently small so that $\varepsilon \leqslant \pi^{-1/2}|\nu_j\tau|^{1/2}t_*^2$, we put $t = t(\varepsilon) = \pi^{1/4}|\nu_j\tau|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} = c\varepsilon^{1/2}$. Then $t(\varepsilon) \leqslant t_*$ and, by (3.11),
$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t(\varepsilon)) - \gamma_j t(\varepsilon)^2)\right)\right| \geqslant \sqrt{2},$$
whence (3.12) implies $\sqrt{2}\varepsilon^s(c^2\varepsilon+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon$. It follows that the function $\varepsilon^{s/2-1}(c^2+\varepsilon)^{-s/2}$ is uniformly bounded for small ε. But this is not true if $s < 2$. This contradiction completes the proof. ∎

3.3. Sharpness of the results with respect to time. Now, we prove the following statement confirming the sharpness of Theorem 3.4 with respect to dependence of the estimate on time.

Theorem 3.9. *Suppose that $N_0 \neq 0$. Let $s \geqslant 3$. Then there does not exist a positive function $C(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (3.6) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and all sufficiently small $|t|$ and $\varepsilon > 0$.*

Proof. We prove by contradiction. Suppose that there exists a positive function $C(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ and (3.6) is valid for all sufficiently small $|t|$ and ε. By (3.7)–(3.9), this assumption is equivalent to the existence of a positive function $\widetilde{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (3.10) holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.

The condition $N_0 \neq 0$ means that $\mu_j \neq 0$ at least for one j. Then $\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \mu_j t^3 + O(t^4)$. Assume that t_* is sufficiently small so that

$$\frac{1}{2}|\mu_j||t|^3 \leqslant |\lambda_j(t) - \gamma_j t^2| \leqslant \frac{3}{2}|\mu_j||t|^3, \qquad |t| \leqslant t_*. \tag{3.13}$$

Applying the operator under the norm sign in (3.10) to ω_j, we obtain

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t) - \gamma_j t^2)\right)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{3.14}$$

for all sufficiently small $|t|$ and ε.

Let $\tau \neq 0$, and let $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\flat|\tau|^{1/2}$, where $\varepsilon_\flat = (2\pi)^{-1/2}|\mu_j|^{1/2}t_*^{3/2}$. We put

$$t_\flat = t_\flat(\varepsilon,\tau) = c_\flat|\tau|^{-1/3}\varepsilon^{2/3}, \quad c_\flat = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3}|\mu_j|^{-1/3}. \tag{3.15}$$

Then $t_\flat \leqslant t_*/2$ and, by (3.13), $\left|\frac{\tau}{2\varepsilon^2}(\lambda_j(t_\flat) - \gamma_j t_\flat^2)\right| \leqslant \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}$. Applying the estimate $|\sin y| \geqslant \frac{2}{\pi}|y|$ for $|y| \leqslant \pi/2$ and using the lower estimate (3.13), we obtain

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t_\flat) - \gamma_j t_\flat^2)\right)\right| \geqslant \frac{|\tau|}{\pi\varepsilon^2}\left|\lambda_j(t_\flat) - \gamma_j t_\flat^2\right| \geqslant \frac{|\tau||\mu_j|}{2\pi\varepsilon^2}t_\flat^3 = \frac{1}{8}.$$

Together with (3.14), this yields $\frac{1}{4}\varepsilon^s(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon$ for all sufficiently small ε. By (3.15), this implies

$$\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon|\tau|)^{s/3-1}}{(c_\flat^2 + (\varepsilon|\tau|)^{2/3})^{s/2}} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|} \tag{3.16}$$

for all sufficiently small $\varepsilon > 0$. But estimate (3.16) is not true for large $|\tau|$ and $\varepsilon = |\tau|^{-1}$ since $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$. This contradiction completes the proof. $\square$

The following statement confirms the sharpness of Theorems 3.5, 3.6.

Theorem 3.10. *Suppose that $N_0 = 0$ and $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1,\dots,p\}$. Let $s \geqslant 2$. Then there does not exist a positive function $C(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ and estimate (3.6) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and all sufficiently small $|t|$ and $\varepsilon > 0$.*

Proof. By Remark 3, the conditions $N_0 = 0$ and $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1,\dots,p\}$ mean that $\mu_l = 0$ for all $l = 1,\dots,n$ and $\nu_j \neq 0$ at least for one j. Then for sufficiently small t_* relations (3.11) hold.

We prove by contradiction. Suppose the opposite. Then, similarly to the proof of Theorem 3.9, we conclude that there exists a positive function $\widetilde{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau|^{1/2}=0$ and (3.14) holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.

Let $\tau\neq 0$, and let $\varepsilon\leqslant\varepsilon_\dagger|\tau|^{1/2}$, where $\varepsilon_\dagger=\frac{1}{2}\pi^{-1/2}|\nu_j|^{1/2}t_*^2$. We put

$$t_\dagger=t_\dagger(\varepsilon,\tau)=c_\dagger|\tau|^{-1/4}\varepsilon^{1/2},\quad c_\dagger=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4}|\nu_j|^{-1/4}. \tag{3.17}$$

Then $t_\dagger\leqslant t_*/2$ and, by (3.11), $\left|\frac{\tau}{2\varepsilon^2}(\lambda_j(t_\dagger)-\gamma_j t_\dagger^2)\right|\leqslant\frac{3\pi}{16}<\frac{\pi}{4}$. Applying the estimate $|\sin y|\geqslant\frac{2}{\pi}|y|$ for $|y|\leqslant\pi/2$ and using the lower estimate (3.11), we obtain

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t_\dagger)-\gamma_j t_\dagger^2)\right)\right|\geqslant\frac{|\tau|}{\pi\varepsilon^2}\left|\lambda_j(t_\dagger)-\gamma_j t_\dagger^2\right|\geqslant\frac{|\tau||\nu_j|}{2\pi\varepsilon^2}t_\dagger^4=\frac{1}{8}.$$

Combining this with (3.14), we have $\frac{1}{4}\varepsilon^s(t_\dagger^2+\varepsilon^2)^{-s/2}\leqslant\widetilde{C}(\tau)\varepsilon$ for all sufficiently small ε. By (3.17), this is equivalent to

$$\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon|\tau|^{1/2})^{s/2-1}}{(c_\dagger^2+\varepsilon|\tau|^{1/2})^{s/2}}\leqslant\frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}} \tag{3.18}$$

for all sufficiently small $\varepsilon>0$. But estimate (3.18) is not true for large $|\tau|$ and $\varepsilon=|\tau|^{-1/2}$ since $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau|^{1/2}=0$. This contradiction completes the proof. □

§4. Approximation of the sandwiched operator exponential

4.1. The operator family $A(t)=M^*\widehat{A}(t)M$**.** Let $\widehat{\mathfrak{H}}$ be yet another separable Hilbert space. Let $\widehat{X}(t)=\widehat{X}_0+t\widehat{X}_1\colon\widehat{\mathfrak{H}}\to\mathfrak{H}_*$ be a family of operators of the same form as $X(t)$, and suppose that $\widehat{X}(t)$ satisfies the assumptions of Subsection 2.1. Let $M\colon\mathfrak{H}\to\widehat{\mathfrak{H}}$ be an isomorphism. Suppose that $M\operatorname{Dom}X_0=\operatorname{Dom}\widehat{X}_0$, $X(t)=\widehat{X}(t)M$, and then also $X_0=\widehat{X}_0M$, $X_1=\widehat{X}_1M$. In $\widehat{\mathfrak{H}}$, we consider the family of selfadjoint operators $\widehat{A}(t)=\widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Then, obviously,

$$A(t)=M^*\widehat{A}(t)M. \tag{4.1}$$

In what follows, all the objects corresponding to the family $\widehat{A}(t)$ are marked by the sign "$\widehat{\ }$". Note that $\widehat{\mathfrak{N}}=M\mathfrak{N}$ and $\widehat{\mathfrak{N}}_*=\mathfrak{N}_*$.

In $\widehat{\mathfrak{H}}$ we consider the positive definite operator $Q:=(MM^*)^{-1}$. Let $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ be the block of Q in the subspace $\widehat{\mathfrak{N}}$, i.e. $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}=\widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Obviously, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ is an isomorphism in $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Condition 2.4 implies that for $\widehat{A}(t)$ we have $\widehat{A}(t)\geqslant\widehat{c}_*t^2I$, $\widehat{c}_*=c_*\|M\|^{-2}$, $|t|\leqslant t^0$.

According to [29, Proposition 1.2], the orthogonal projection P of $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{N}$ and the orthogonal projection $\widehat{P}$ of $\widehat{\mathfrak{H}}$ onto $\widehat{\mathfrak{N}}$ satisfy the following relation

$$P=M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{4.2}$$

Let $\widehat{S}\colon\widehat{\mathfrak{N}}\to\widehat{\mathfrak{N}}$ be the spectral germ of $\widehat{A}(t)$ at $t=0$, and let S be the germ of $A(t)$. The following identity was obtained in [4, Chapter 1, Subsection 1.5]:

$$S=PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.3}$$

4.2. The operators $\widehat{Z}_Q$ and $\widehat{N}_Q$. For the operator family $\widehat{A}(t)$ we introduce the operator $\widehat{Z}_Q$ acting in $\widehat{\mathfrak{H}}$ and taking an element $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ to the solution $\widehat{\psi}_Q$ of the problem $\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0$, $Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}$, where $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. According to [5, §6], the operator Z for $A(t)$ and the operator $\widehat{Z}_Q$ introduced above satisfy

$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{4.4}$$

Next, we put $\widehat{N}_Q := \widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$. According to [5, §6], the operator N for $A(t)$ and the operator $\widehat{N}_Q$ satisfy

$$\widehat{N}_Q = \widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}. \tag{4.5}$$

Since $N = N_0 + N_*$, we have $\widehat{N}_Q = \widehat{N}_{0,Q} + \widehat{N}_{*,Q}$, where

$$\widehat{N}_{0,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_0M^{-1}\widehat{P}, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_*M^{-1}\widehat{P}. \tag{4.6}$$

The following lemma was proved in [35, Lemma 5.1].

Lemma 4.1 ([35]). *The relation $N = 0$ is equivalent to the relation $\widehat{N}_Q = 0$. The relation $N_0 = 0$ is equivalent to the relation $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.*

4.3. The operators $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$, and $\widehat{N}_{1,Q}^0$. Let $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ and let $\widehat{\phi}_Q = \widehat{\phi}_Q(\widehat{u}) \in \operatorname{Dom}\widehat{X}_0$ be a (weak) solution of the equation

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q\widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega} + Q(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega}, \qquad Q\widehat{\phi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

where $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Clearly, the right-hand side of this equation belongs to $\widehat{\mathfrak{N}}^\perp = \operatorname{Ran}\widehat{X}_0^*$, thereby the solvability condition is satisfied. We define an operator $\widehat{Z}_{2,Q} \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ by the formula $\widehat{Z}_{2,Q}\widehat{u} = \widehat{\phi}_Q(\widehat{u})$.

Now, we introduce an operator $\widehat{R}_{2,Q} \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{H}_*$ by $\widehat{R}_{2,Q} = \widehat{X}_0\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$. Finally, we define the operator $\widehat{N}_{1,Q}^0$:

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{Z}_{2,Q}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{R}_{2,Q}^*\widehat{R}_{2,Q}\widehat{P}.$$

According to [12, Section 6.3], $\widehat{Z}_{2,Q} = MZ_2M^{-1}\widehat{P}$, $R_2 = \widehat{R}_{2,Q}M|_{\mathfrak{N}}$, $\widehat{R}_{2,Q} = R_2M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}}$,

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_1^0M^{-1}\widehat{P}. \tag{4.7}$$

4.4. Relations between the operators and the coefficients of the power series expansions. Now, we describe the relations between the coefficients of the power series expansions (2.2), (2.3) and the operators $\widehat{S}$ and $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. (See [5, Sections 1.6, 1.7].) Denote $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Then relations (2.4) and (4.2), (4.3) show that

$$\widehat{S}\zeta_l = \gamma_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{4.8}$$

The set $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ forms a basis in $\widehat{\mathfrak{N}}$ orthonormal with the weight $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$: $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_j) = \delta_{lj}$, $l, j = 1, \dots, n$.

The operators $\widehat{N}_{0,Q}$ and $\widehat{N}_{*,Q}$ can be described in terms of the coefficients of the expansions (2.2) and (2.3); cf. (2.7). We put $\widetilde{\zeta}_l := M\widetilde{\omega}_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Then

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{k=1}^n \mu_k(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k, \quad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{k=1}^n \gamma_k\left((\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k + (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k\right). \tag{4.9}$$

Now, we return to the notation of Section 2.6. Recall that the different eigenvalues of the germ S are denoted by γ_q°, $q = 1, \ldots, p$, and the corresponding eigenspaces by $\mathfrak{N}_q$. The set of the vectors ω_l, $l = i, \ldots, i + k_q - 1$, where $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$, forms an orthonormal basis in $\mathfrak{N}_q$. Then the same numbers γ_q°, $q = 1, \ldots, p$, are the different eigenvalues of the problem (4.8) and $M\mathfrak{N}_q =: \widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ are the corresponding eigenspaces. The vectors $\zeta_l = M\omega_l$, $l = i, \ldots, i+k_q-1$, form a basis in $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ (orthonormal with the weight $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$). By $\mathcal{P}_q$ we denote the "skew" projection of $\widehat{\mathfrak{H}}$ onto $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ that is orthogonal with respect to the inner product $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\cdot, \cdot)$, i.e. $\mathcal{P}_q = \sum_{l=i}^{i+k_q-1} (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l)\zeta_l$. It is easily seen that $\mathcal{P}_q = MP_qM^{-1}\widehat{P}$. Using (2.9), (4.5), and (4.6), it is easy to check that

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{P}_j^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{1\leqslant l,j\leqslant p;\, j\neq l} \mathcal{P}_l^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j. \tag{4.10}$$

Next, we find a relationship between the eigenvalues and eigenvectors of problem (2.12) and the operator $\widehat{N}_Q$. Let γ_q° be the q-th eigenvalue of problem (4.8) of multiplicity k_q. Then from (2.12), (4.5) and the obvious identity $MP_q = \widehat{P}_{q,Q}MP_q$, where $\widehat{P}_{q,Q}$ is the orthogonal projection of $\widehat{\mathfrak{H}}$ onto $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$, it is seen that

$$\widehat{P}_{q,Q}\widehat{N}_Q\zeta_l = \mu_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}\zeta_l, \qquad l = i(q), \ldots, i(q) + k_q - 1, \tag{4.11}$$

where $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} = \widehat{P}_{q,Q}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}$. Recall that the different eigenvalues of problem (2.12) are denoted by $\mu_{q',q}^\circ$, $q' = 1, \ldots, p'(q)$, and the corresponding eigenspaces by $\mathfrak{N}_{q',q}$. Then the same numbers $\mu_{q',q}^\circ$, $q' = 1, \ldots, p'(q)$, are different eigenvalues of problem (4.11), and $M\mathfrak{N}_{q',q} =: \widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}$ are the corresponding eigenspaces.

Finally, we connect the eigenvalues and eigenvectors of problem (2.14) and the operator

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)} = \widehat{P}_{q',q,Q}\left(\widehat{N}_{1,Q}^0 - Y_Q - Y_Q^*\right)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}} + \widehat{\mathcal{N}}_{0,Q}^{(q',q)},$$

where $Y_Q := \frac{1}{2}\widehat{Z}_Q^* Q \widehat{Z}_Q Q^{-1}\widehat{S}\widehat{P}$ and $\widehat{\mathcal{N}}_{0,Q}^{(q',q)}$ is the operator in $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}$ generated by the form

$$\widehat{\mathfrak{n}}_{0,Q}^{(q',q)}[\cdot,\cdot] = \sum_{j\in\{1,\ldots,p\};\, j\neq q} \frac{(\widehat{P}_{j,Q}(MM^*)\widehat{P}_{j,Q}\widehat{N}_Q\cdot, \widehat{N}_Q\cdot)}{\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ},$$

and $\widehat{P}_{q',q,Q}$ is the orthogonal projection onto $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}$. From (2.14), (4.3)–(4.5), (4.7), and the identities $MP_j = \widehat{P}_{j,Q}MP_j$, $\widehat{P}_{j,Q}M(I - P_j) = 0$, $j = 1, \ldots, p$, $MP_{q',q} = \widehat{P}_{q',q,Q}MP_{q',q}$, it is seen that

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}\zeta_l = \nu_l Q_{q',q,Q}\zeta_l, \qquad l = i', \ldots, i' + k_{q',q} - 1. \tag{4.12}$$

Here $i' = i'(q', q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$ and $Q_{q',q,Q} = \widehat{P}_{q',q,Q}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}}$.

Remark 5. Let $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. By (4.9), this condition is equivalent to the relations $\mu_l = 0$ for all $l = 1, \ldots, n$. In this case, we have $\mathfrak{N}_{1,q} = \mathfrak{N}_q$, $q = 1, \ldots, p$. Then we shall write $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}$ instead of $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(1,q)}$.

Remark 6. Let $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)} \neq 0$ for some q and q'. Then, by (4.12), $\nu_l \neq 0$ for some $l = i'(q', q), \ldots, i'(q', q) + k_{q',q} - 1$. From (2.14) it directly follows that $\mathcal{N}^{(q',q)} \neq 0$.

4.5. Approximation of the sandwiched operator exponential. In this subsection we find approximation for the operator exponential $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}$ of the family (4.1) in terms of the germ $\widehat{S}$ of $\widehat{A}(t)$ and the isomorphism M. It is convenient to border the exponential by appropriate factors.

Denote $M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$. The following estimates were proved in [35, Lemma 5.3]:

$$\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\|, \quad (4.13)$$

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|. \quad (4.14)$$

Theorems 3.4, 3.5, 3.6, Lemma 4.1, and inequality (4.13) directly imply the following results.

Theorem 4.2 ([8])**.** *Under the assumptions of Subsection 4.1 for $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon.$$

Theorem 4.3. *Suppose that the assumptions of Subsection 4.1 are satisfied. Suppose that $\widehat{N}_Q = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, and $|t| \leqslant t^0$ we have*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_1 + C_4'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Theorem 4.4. *Suppose that the assumptions of Subsection 4.1 and Condition 2.4 are satisfied. Suppose that $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Then for $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, and $|t| \leqslant t^{00}$ we have*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_5 + C_6'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Theorem 4.2 was proved in [8, Theorem 3.2].

Remark 7. Theorems 4.3 and 4.4 improve the results of Theorems 5.8, 5.9 from [35] with respect to τ.

4.6. The sharpness of the results. Theorems 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, Lemma 4.1, Remark 6, and inequality (4.14) directly imply the following statements.

Theorem 4.5 ([35])**.** *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 3$. Then there does not exist a constant $C(\tau) > 0$ such the estimate*

$$\big\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\big\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \quad (4.15)$$

holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.

Theorem 4.6. *Let $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1, \dots, p\}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 2$. Then there does not exist a constant $C(\tau) > 0$ such that estimate (4.15) holds for all sufficiently small $|t|$ and ε.*

Theorem 4.7. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Let $s \geqslant 3$. Then there does not exist a positive function $C(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (4.15) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and for all sufficiently small $|t|$ and $\varepsilon > 0$.*

Theorem 4.8. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ for some $q \in \{1, \dots, p\}$. Let $s \geqslant 2$. Then there does not exist a positive function $C(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ and estimate* (4.15) *holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and for all sufficiently small $|t|$ and $\varepsilon > 0$.*

Theorem 4.5 was proved in [35, Theorem 5.10].

Chapter 2. Periodic differential operators in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

§5. The class of periodic differential operators

5.1. Preliminaries: lattices and the Gelfand transformation. Let Γ be a lattice in $\mathbb{R}^d$ generated by the basis $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, i.e., $\Gamma = \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{a}_j,\ n_j \in \mathbb{Z}\right\}$, and let Ω be the elementary cell of this lattice: $\Omega := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi_j < 1\right\}$. The basis $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ dual to $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ is defined by the relations $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{lj}$. This basis generates the *lattice* $\widetilde{\Gamma}$ *dual to* Γ. Denote by $\widetilde{\Omega}$ the central *Brillouin zone* of $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \colon |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\right\}. \tag{5.1}$$

Denote $|\Omega| = \operatorname{meas}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{meas}\widetilde{\Omega}$. Note that $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Let r_0 be the radius of the ball *inscribed* in $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. We have $2r_0 = \min|\mathbf{b}|$, $0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}$.

With the lattice Γ, we associate the discrete Fourier transformation $\{\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}\} \mapsto \mathbf{u}$: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b},\mathbf{x}\rangle}$, which is a unitary mapping of $l_2(\widetilde{\Gamma};\mathbb{C}^n)$ onto $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. *By $\widetilde{H}^\sigma(\Omega;\mathbb{C}^n)$ we denote the subspace of functions from $H^\sigma(\Omega;\mathbb{C}^n)$ whose Γ-periodic extension to $\mathbb{R}^d$ belongs to $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.* We have

$$\int_\Omega |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \qquad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.2}$$

and convergence of the series in the right-hand side of (5.2) is equivalent to the inclusion $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. From (5.1) and (5.2) it follows that

$$\int_\Omega |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \geqslant \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{5.3}$$

Initially, the Gelfand transformation $\mathscr{U}$ is defined on the functions from the Schwartz class $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ by the formula

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathscr{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},$$

and extends by continuity up to a unitary mapping: $\mathscr{U} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}$.

5.2. Factorized second order operators $\mathcal{A}$. Let $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, where b_l are constant $(m \times n)$-matrices (in general, with complex entries). *It is assumed that $m \geqslant n$.* Consider the symbol $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. *Suppose that* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. This condition is equivalent to the inequalities

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \tag{5.4}$$

with some positive constants α_0, α_1. Let $f(\mathbf{x})$ be a Γ-periodic $(n\times n)$-matrix-valued function and $h(\mathbf{x})$ be a Γ-periodic $(m\times m)$-matrix-valued function such that

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{5.5}$$

Consider the closed operator $\mathcal{X}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ given by $\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f$ on the domain $\operatorname{Dom}\mathcal{X} = \left\{\mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\right\}$. The selfadjoint operator $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ is generated by the closed quadratic form $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Formally, we have

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \tag{5.6}$$

where $g(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Using the Fourier transformation, and (5.4), (5.5), it is easily seen that $\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$.

5.3. The operators $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. We put

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \qquad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m) \tag{5.7}$$

and consider the closed operator $\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ depending on the parameter $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ and given by $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f$ on the domain $\operatorname{Dom}\mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{\mathbf{u}\in\mathfrak{H}\colon f\mathbf{u}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\right\} =: \mathfrak{d}$. The selfadjoint operator $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ is generated by the quadratic form $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u}\in\mathfrak{d}$. Using the Fourier series expansion for $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ and conditions (5.4), (5.5), it is easy to check that

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in\mathfrak{d}. \tag{5.8}$$

From (5.3) and the lower estimate (5.8) it follows that

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \qquad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ c_* = \alpha_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{5.9}$$

We put $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker}\mathcal{X}(0)$. Relations (5.8) with $\mathbf{k}=0$ show that

$$\mathfrak{N} = \left\{\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} = \mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\right\}, \qquad \dim\mathfrak{N} = n. \tag{5.10}$$

Let $E_j(\mathbf{k})$, $j\in\mathbb{N}$, be the consecutive eigenvalues of the operator $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (the band functions): $E_1(\mathbf{k}) \leqslant E_2(\mathbf{k}) \leqslant \ldots \leqslant E_j(\mathbf{k}) \leqslant \ldots$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$. The band functions $E_j(\mathbf{k})$ are continuous and $\widetilde{\Gamma}$-periodic. From (5.9) it follows that $E_j(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2$, $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, $j = 1,\ldots,n$. In [4, Chapter 2, Subsection 2.2] it was shown that $E_{n+1}(\mathbf{k}) \geqslant c_* r_0^2$ and $E_{n+1}(0) \geqslant 4c_* r_0^2$.

5.4. The direct integral for the operator $\mathcal{A}$. Under the Gelfand transformation $\mathscr{U}$ the operator $\mathcal{A}$ expands in the direct integral of the operators $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathscr{U}\mathcal{A}\mathscr{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus\mathcal{A}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{5.11}$$

This means the following. If $\mathbf{v}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$, then $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\mathfrak{d}$ for a.e. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ and

$$\mathfrak{a}[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot),\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)]\,d\mathbf{k}. \tag{5.12}$$

Conversely, if $\tilde{\mathbf{v}}\in\mathcal{K}$ satisfies $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\mathfrak{d}$ for a.e. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ and the integral in (5.12) is finite, then $\mathbf{v}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$ and (5.12) is valid.

5.5. Incorporation of the operators $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ in the abstract scheme. For $d > 1$, the operators $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ depend on the multidimensional parameter $\mathbf{k}$. According to [4, Chapter 2], we introduce the one-dimensional parameter $t = |\mathbf{k}|$. We shall apply the method described in Chapter 1. Now, all constructions will depend on the additional parameter $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ and we need to make our estimates uniform with respect to $\boldsymbol{\theta}$. The spaces $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{H}_*$ are defined by (5.7). We put $X(t) = X(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. Then $X(t;\boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, where $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, and $X_1(\boldsymbol{\theta})$ is the bounded operator of multiplication by the matrix $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Next, we put $A(t) = A(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. The kernel $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0$ is described by (5.10). As was shown in [4, Chapter 2, §3], the distance d^0 from the point $\lambda_0 = 0$ to the rest of the spectrum of the operator $\mathcal{A}(0)$ satisfies $d^0 \geqslant 4c_* r_0^2$. The condition $n \leqslant n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$ is also fulfilled. Moreover, either $n_* = n$ (if $m = n$), or $n_* = \infty$ (if $m > n$).

In Subsection 2.1, it was required to fix a number $\delta \in (0, d^0/8)$. Since $d^0 \geqslant 4c_* r_0^2$, we choose

$$\delta = \frac{1}{4} c_* r_0^2 = \frac{1}{4} \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2. \tag{5.13}$$

Note that by (5.4) and (5.5) we have

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|h\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}, \qquad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5.14}$$

We put (see (2.1))

$$t^0 = \delta^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|h\|_{L_\infty}^{-1} \|f\|_{L_\infty}^{-1} = \frac{r_0}{2} \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \left(\|h\|_{L_\infty} \|h^{-1}\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \right)^{-1}. \tag{5.15}$$

Note that $t^0 \leqslant r_0/2$. Thus, the ball $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ lies inside $\widetilde{\Omega}$. It is important that c_*, δ, t^0 (see (5.9), (5.13), (5.15)) do not depend on $\boldsymbol{\theta}$. By (5.9), Condition 2.4 is fulfilled. The germ $S(\boldsymbol{\theta})$ of the operator $A(t;\boldsymbol{\theta})$ is nondegenerate uniformly in $\boldsymbol{\theta}$: we have $S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}$ (cf. (2.8)).

§6. The effective characteristics of the operator $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$

6.1. The operator $A(t;\boldsymbol{\theta})$ in the case where $f = \mathbf{1}_n$. The operator $A(t;\boldsymbol{\theta})$ in the case where $f = \mathbf{1}_n$ plays a special role. In this case we agree to mark all the associated objects by hat "$\widehat{\ }$". Then for the operator

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tag{6.1}$$

the family $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ is denoted by $\widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta})$. The kernel (5.10) takes the form

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \colon \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \right\}, \tag{6.2}$$

i.e., $\widehat{\mathfrak{N}}$ consists of constant vector-valued functions. The orthogonal projection $\widehat{P}$ of the space $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ onto the subspace (6.2) is the operator of averaging over the cell:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{6.3}$$

According to [4, Chapter 3, §1], the spectral germ $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ of the family $\widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta})$ is represented as $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, where g^0 is the so-called *effective matrix*. The constant $(m \times m)$-matrix g^0 is defined as follows. Let $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ be a Γ-periodic $(n \times m)$-matrix-valued function satisfying the equation

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{6.4}$$

The effective matrix g^0 can be described in terms of the matrix $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{6.5}$$

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{6.6}$$

It turns out that the matrix g^0 is positive definite. Consider the symbol

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.7}$$

Expression (6.7) is the symbol of the DO

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{6.8}$$

acting in $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ and called the *effective operator* for the operator $\widehat{\mathcal{A}}$.

Let $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ be the operator family in $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ corresponding to operator (6.8). Then $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ is given by $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ with periodic boundary conditions. Taking into account (6.3) and (6.7), we have

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{6.9}$$

6.2. Properties of the effective matrix. The following properties of g^0 were checked in [4, Chapter 3, Theorem 1.5].

Proposition 6.1 ([4]). *The effective matrix satisfies the following estimates*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{6.10}$$

where $\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *and* $\underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}\right)^{-1}$. *If $m = n$, then $g^0 = \underline{g}$.*

For specific DOs, estimates (6.10) are known as the Voight-Reuss bracketing. Now, we distinguish the cases where one of the inequalities in (6.10) becomes an identity. The following statements were obtained in [4, Chapter 3, Propositions 1.6, 1.7].

Proposition 6.2 ([4]). *The identity $g^0 = \overline{g}$ is equivalent to the relations*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{6.11}$$

where $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, are the columns of the matrix $g(\mathbf{x})$.

Proposition 6.3 ([4]). *The identity $g^0 = \underline{g}$ is equivalent to the representations*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \tag{6.12}$$

where $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, are the columns of the matrix $g(\mathbf{x})^{-1}$.

§7. The operator $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Application of the scheme of §4

7.1. The operator $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. We apply the scheme of §4 to study the operator $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^* \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) f$. Now, $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$, the role of $A(t)$ is played by $A(t; \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, the role of $\widehat{A}(t)$ is played by $\widehat{A}(t; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. The isomorphism M is the operator of multiplication by the matrix-valued function $f(\mathbf{x})$. The operator Q is the operator of multiplication by the matrix-valued function $Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. The block of Q in the subspace $\widehat{\mathfrak{N}}$ (see (6.2)) is the operator of multiplication by the constant matrix $\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}$. Next, M_0 is the operator of multiplication by the constant matrix

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{7.1}$$

Note that $|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}$, $|f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we define the operator

$$\mathcal{A}^0 := f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{7.2}$$

Let $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ be the corresponding family of operators in $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Then $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0$. By (6.2) and (6.9),

$$f_0 \widehat{S}(\mathbf{k}) f_0 \widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{7.3}$$

7.2. The analytic branches of eigenvalues and eigenvectors. According to (4.3), the spectral germ $S(\boldsymbol{\theta})$ of the operator $A(t;\boldsymbol{\theta})$ acting in the subspace $\mathfrak{N}$ (see (5.10)) is represented as $S(\boldsymbol{\theta}) = Pf^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) f|_{\mathfrak{N}}$, where P is the orthogonal projection of $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ onto $\mathfrak{N}$.

The analytic (in t) branches of the eigenvalues $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ and the eigenvectors $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$ of the operator $A(t;\boldsymbol{\theta})$ admit the power series expansions of the form (2.2), (2.3) with the coefficients depending on $\boldsymbol{\theta}$:

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \qquad l = 1,\dots,n, \tag{7.4}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1,\dots,n. \tag{7.5}$$

The vectors $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ form an orthonormal basis in the subspace $\mathfrak{N}$, and the vectors $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, form a basis in $\widehat{\mathfrak{N}}$ (see (6.2)) orthonormal with the weight $\overline{Q}$. The numbers $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ and the elements $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ are eigenvalues and eigenvectors of the spectral germ $S(\boldsymbol{\theta})$. According to (4.8),

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n. \tag{7.6}$$

7.3. The operator $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$. We need to describe the operator $\widehat{N}_Q$ which now depends on $\boldsymbol{\theta}$ (see Subsection 4.2). Let $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ be a Γ-periodic solution of the problem

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_Q(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega Q(\mathbf{x})\Lambda_Q(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Clearly, $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) - (\overline{Q})^{-1}(\overline{Q\Lambda})$. As shown in [6, §5], the operator $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ takes the form

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_Q(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \tag{7.7}$$

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda_Q(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Some sufficient conditions where $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ were distinguished in [6, §§4,5].

Proposition 7.1 ([6]). *Suppose that at least one of the following conditions is fulfilled:*

1°. $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} f(\mathbf{x})$, *where* $g(\mathbf{x})$ *is a symmetric matrix with real entries.*

2°. *Relations* (6.11) *are satisfied, i.e.* $g^0 = \overline{g}$.

3°. *Relations* (6.12) *are satisfied, i.e.* $g^0 = \underline{g}$ *(if* $m = n$*, this is the case) and* $f = \mathbf{1}_n$.

Then $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *for any* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Recall (see Subsection 4.2) that $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$. By (4.9),

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

We have $(\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$.

In [6, Proposition 5.2] the following proposition was proved.

Proposition 7.2 ([6]). *Suppose that the matrices* $b(\boldsymbol{\theta})$*,* $g(\mathbf{x})$*, and* $Q(\mathbf{x})$ *have real entries. Suppose that in the expansions* (7.5) *the "embryos"* $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$*,* $l = 1, \dots, n$*, can be chosen so that the vectors* $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ *are real. Then in* (7.4) *we have* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$*,* $l = 1, \dots, n$*, i.e.,* $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *for any* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

In the "real" case under consideration, $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ and $\overline{Q}$ are symmetric matrices with real entries. Clearly, if the eigenvalue $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ of the generalized spectral problem (7.6) is simple, then the vector $\zeta_j(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j(\boldsymbol{\theta})$ is defined uniquely up to a phase factor, so we can always choose it to be real. We arrive at the following corollary.

Corollary 7.3. *Suppose that the matrices* $b(\boldsymbol{\theta})$*,* $g(\mathbf{x})$*, and* $Q(\mathbf{x})$ *have real entries and the spectrum of the generalized spectral problem* (7.6) *is simple. Then* $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *for any* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

However, as is seen from [35, Example 8.7], [17, Subsection 14.3], in the "real" case it is not always possible to choose the vectors $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$ to be real. It may happen that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ at some isolated points $\boldsymbol{\theta}$.

7.4. The operators $\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}^0_{1,Q}(\boldsymbol{\theta})$. We need to describe the operators $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$, $\widehat{N}^0_{1,Q}$ (which in the abstract terms are defined in Subsection 4.3). Let $\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})$ be a Γ-periodic solution of the problem

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_Q(\mathbf{x})) = -b_l^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x})(\overline{Q})^{-1} b_l^* g^0,$$
$$\int_\Omega Q(\mathbf{x})\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

We put $\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})\theta_l$. In [13, Subsection 8.4], it was shown that

$$\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \qquad \widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x}))b(\boldsymbol{\theta}).$$

Finally, in [13, Subsection 8.5] the following representation was obtained:

$$\widehat{N}^0_{1,Q}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P},$$
$$L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\right) d\mathbf{x}$$
$$+ |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}.$$

7.5. Multiplicities of the eigenvalues of the germ. Considerations of this subsection concern the case where $n \geqslant 2$. Now, we return to the notation of Subsection 2.6. In general, the number $p(\boldsymbol{\theta})$ of different eigenvalues $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ of $S(\boldsymbol{\theta})$ (or of problem (7.6)) and their multiplicities $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ depend on the parameter $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. For a fixed $\boldsymbol{\theta}$ denote by $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ the eigenspace of the germ $S(\boldsymbol{\theta})$ corresponding to the eigenvalue $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Then $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$ is the eigenspace of problem (7.6) corresponding to the same eigenvalue $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. We introduce the notation $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ for the "skew" projection of $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ onto the subspace $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ is orthogonal with respect to the inner product with the weight $\overline{Q}$. By (4.10),

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \quad \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{1 \leqslant l,j \leqslant p(\boldsymbol{\theta});\, j \neq l} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \tag{7.8}$$

7.6. The coefficients $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. According to (2.12), the numbers $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ and the elements $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i(q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1$, where $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \ldots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$, are eigenvalues and eigenvectors of the operator $P_q(\boldsymbol{\theta}) N(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$. Then, by (4.11), we have

$$\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \mu_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = i(q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1, \tag{7.9}$$

where $\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ is the orthogonal projection onto $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$.

The number $p'(q,\boldsymbol{\theta})$ of different eigenvalues $\mu_{1,q}^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mu_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ of the operator $P_q(\boldsymbol{\theta}) N(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$ and their multiplicities $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p'(\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ depend on the parameter $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. For a fixed $\boldsymbol{\theta}$ we denote by $\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ the eigenspace corresponding to the eigenvalue $\mu_{q',q}^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Then $f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ is the eigenspace of problem (7.9) corresponding to the same eigenvalue $\mu_{q',q}^\circ(\boldsymbol{\theta})$.

Finally, according to (4.12), the numbers $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$ and the elements $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i'(q',q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) + k_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) - 1$, where $i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) = i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}) + \ldots + k_{q'-1,q}(\boldsymbol{\theta})$, are the eigenvalues and the eigenvectors of the following generalized spectral problem:

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = i'(q',q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1,$$

where

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta}) &:= \widehat{P}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) - Y_Q(\boldsymbol{\theta}) - Y_Q(\boldsymbol{\theta})^* \right)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta})} \\ &\quad + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})\} \\ j \neq q}} \left(\gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}) \right)^{-1} \widehat{P}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta})}, \end{aligned}$$

$Y_Q(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{2} \widehat{Z}_Q^*(\boldsymbol{\theta}) Q \widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) Q^{-1} \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}$ and $\widehat{P}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ is the orthogonal projection onto $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q,Q}(\boldsymbol{\theta})$.

Note that in the case where $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ we have $\widehat{\mathfrak{N}}_{1,q,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Then we shall write $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ instead of $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(1,q)}(\boldsymbol{\theta})$.

§8. Approximations for the sandwiched operator $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}$

8.1. The general case. Consider the operator $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Under the Gelfand transformation, the operator $\mathcal{H}_0$ expands in the direct integral of the operators $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ acting in $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ and given by $|\mathbf{D}+\mathbf{k}|^2$ with periodic boundary conditions. Denote

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{8.1}$$

Obviously,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\widehat{P} = \varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}\widehat{P}, \qquad s>0. \tag{8.2}$$

Note that for $|\mathbf{k}|>t^0$ we have

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (t^0)^{-s}\varepsilon^s, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}|>t^0. \tag{8.3}$$

Next, using the Fourier series decomposition, we see that

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^s(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant r_0^{-s}\varepsilon^s, \quad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{8.4}$$

Denote

$$J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau) := fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}. \tag{8.5}$$

We shall apply theorems of Subsection 4.5 to the operator $A(t;\boldsymbol{\theta})=\mathcal{A}(\mathbf{k})$. In doing so, we may trace the dependence of the constants in estimates on the problem data. Note that c_*, δ, and t^0 do not depend on $\boldsymbol{\theta}$ (see (5.9), (5.13), (5.15)). According to (5.14) the norm $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ can be replaced by $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$. Hence, the constants in Theorems 4.2 and 4.3 (applied to the operator $\mathcal{A}(\mathbf{k})$) will be independent of $\boldsymbol{\theta}$. They depend only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, and r_0.

Applying Theorem 4.2 and taking (7.3), (8.2)–(8.4) into account, we arrive at the following statement proved before in [8, Theorem 8.1].

Theorem 8.1 ([8]). *For $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, and $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ we have*

$$\|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon,$$

where $\mathcal{C}_1$ depends only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, and r_0.

8.2. Improvement of the general result. Now, we apply Theorem 4.3 assuming that $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ for any $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Taking (7.3) and (8.2)–(8.4) into account, we obtain the following result.

Theorem 8.2. *Let $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ be the operator defined by (7.7). Suppose that $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ for any $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Then for $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, and $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ we have*

$$\|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon,$$

where $\mathcal{C}_2$ depends only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, and r_0.

Now, we reject the assumptions of Theorem 8.2, but we assume instead that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})=0$ for any $\boldsymbol{\theta}$. We would like to apply Theorem 4.4. However, there is an additional difficulty: the multiplicities of the eigenvalues of the operator $S(\boldsymbol{\theta})$ may change at some points $\boldsymbol{\theta}$ (they are also the eigenvalues of the generalized spectral problem (7.6)). Near such points the distance between some pair of different eigenvalues tends to zero and we are not able to choose the parameters c°_{jl}, t^{00}_{jl} to be independent on $\boldsymbol{\theta}$. Therefore, we are forced to impose additional conditions. We have to take care only about those eigenvalues for which the corresponding term in the second formula in (7.8) is not zero. Now, it is more convenient to use the initial enumeration of the eigenvalues $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_n(\boldsymbol{\theta})$ of $S(\boldsymbol{\theta})$ (each eigenvalue is repeated according to its multiplicity); we agree to enumerate them in the nondecreasing order: $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})\leqslant\gamma_2(\boldsymbol{\theta})\leqslant\dots\leqslant\gamma_n(\boldsymbol{\theta})$. For each $\boldsymbol{\theta}$, let $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ be the "skew" projection (orthogonal with the weight $\overline{Q}$) of $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ onto the eigenspace of problem (7.6) corresponding to the eigenvalue $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$. Clearly, for each $\boldsymbol{\theta}$ the operator $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ coincides with one of the projections $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ introduced in Subsection 7.5 (but the number j may depend on $\boldsymbol{\theta}$).

Condition 8.3. 1°. *$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.* 2°. *For any pair of indices (k,r), $1 \leqslant k,r \leqslant n$, $k \neq r$, such that $\gamma_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, we have $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

Condition 8.3(2°) can be reformulated: we assume that for the "blocks" $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ of the operator $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ that are not identically zero, the corresponding branches of the eigenvalues $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ and $\gamma_r(\boldsymbol{\theta})$ do not intersect.

Obviously, Condition 8.3 is ensured by the following more restrictive condition.

Condition 8.4. 1°. *$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.* 2°. *The number p of different eigenvalues of the generalized spectral problem (7.6) does not depend on $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

Under Condition 8.4, denote the different eigenvalues of the germ enumerated in the increasing order by $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_p^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Then their multiplicities $k_1, \dots, k_p$ do not depend on $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Remark 8. 1°. Assumption 2° of Condition 8.4 is a fortiori satisfied, if the spectrum of problem (7.6) is simple for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. From Corollary 7.3 it follows that Condition 8.4 is satisfied if the matrices $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$, and $Q(\mathbf{x})$ have real entries, and the spectrum of problem (7.6) is simple for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

So, suppose that Condition 8.3 is satisfied and put

$$\mathcal{K} \coloneqq \{(k,r) \colon 1 \leqslant k,r \leqslant n,\ k \neq r,\ (\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0\}.$$

Denote $c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})|\}$, $(k,r) \in \mathcal{K}$.

Since $S(\boldsymbol{\theta})$ depends on $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ continuously, then $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ are continuous on $\mathbb{S}^{d-1}$. By Condition 8.3(2°), for $(k,r) \in \mathcal{K}$ we have $|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, whence $c^\circ_{kr} \coloneqq \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) > 0$ for $(k,r) \in \mathcal{K}$. We put

$$c^\circ \coloneqq \min_{(k,r)\in\mathcal{K}} c^\circ_{kr}. \tag{8.6}$$

Clearly, the number (8.6) is a realization of (3.4) chosen independently of $\boldsymbol{\theta}$. Under Condition 8.3, the number t^{00} subject to (3.3) also can be chosen independently of $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Taking (5.13) and (5.14) into account, we put

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} c^\circ.$$

(The condition $t^{00} \leqslant t^0$ is valid automatically, since $c^\circ \leqslant \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty}$.)

Applying Theorem 4.4, we deduce the following result.

Theorem 8.5. *Suppose that Condition 8.3 (or more restrictive Condition 8.4) is satisfied. Then for $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, and $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ we have*

$$\|J(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3 (1 + |\tau|^{1/2}) \varepsilon,$$

where the constant $\mathcal{C}_3$ depends only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, and also on n and the number c°.

8.3. The sharpness of the results. Application of Theorems 4.5, 4.6 allows us to confirm that the results of Theorems 8.1, 8.2, and 8.5 are sharp with respect to the smoothing operator.

Theorem 8.6 ([35])**.** *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 3$. Then there does not exist a constant $\mathcal{C}(\tau) > 0$ such that the estimate*

$$\big\| \big(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \big) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{8.7}$$

holds for almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$.

Theorem 8.7. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ and some $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 2$. Then there does not exist a constant $\mathcal{C}(\tau) > 0$ such that estimate (8.7) holds for almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

Theorem 8.6 was proved in [35, Theorem 11.7]. Theorem 8.7 is proved with the help of Theorem 4.6 in a similar way as [35, Theorem 11.7].

Application of Theorem 4.7 allows us to confirm that the result of Theorem 8.1 is sharp with respect to time.

Theorem 8.8. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Let $s \geqslant 3$. Then there does not exist a positive function $\mathcal{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (8.7) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$, almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, and sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

Proof. We prove by contradiction. Suppose that for some $s \geqslant 3$ there exists a function $\mathcal{C}(\tau) > 0$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (8.7) holds for almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$. By (8.2), (8.4), it follows that there exists a function $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ and the estimate

$$\big\| \big(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \big) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{8.8}$$

holds for almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$.

By (4.2), we have $f^{-1}\widehat{P} = P f^* \overline{Q}$, where P is the orthogonal projection of $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ onto the subspace $\mathfrak{N}$ (see (5.10)). Then the operator under the norm sign in (8.8) can be written as $f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} P f^* \overline{Q} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \widehat{P}$.

Then, using the inequality

$$\big\| F(\mathbf{k}) - P \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_1 |\mathbf{k}|, \qquad |\mathbf{k}| \leqslant t^0, \tag{8.9}$$

(see (2.6)), we conclude that there exists a function $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \check{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ and the estimate

$$\big\| f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} F(\mathbf{k}) f^* \overline{Q} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{8.10}$$

holds for almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ in the ball $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$.

For fixed τ and ε, the operator under the norm sign in (8.10) is continuous with respect to $\mathbf{k}$ in the ball $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ (see [35, Lemma 11.8]). Hence, estimate (8.10) holds for all $\mathbf{k}$ in this ball, in particular, for $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$ if $t \leqslant t^0$. Applying inequality (8.9) and the identity $P f^* \overline{Q} = f^{-1}\widehat{P}$ once again, we obtain the estimate

$$\big\| \big(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)} f_0^{-1} \big) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon \tag{8.11}$$

for all $t \leqslant t^0$ and sufficiently small $\varepsilon > 0$, where $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$ and $\lim_{\tau\to\infty} \check{\mathcal{C}}'(\tau)/|\tau| = 0$.

In the abstract terms, estimate (8.11) corresponds to (4.15). Since it is assumed that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, applying Theorem 4.7, we arrive at a contradiction. $\square$

Similarly, application of Theorem 4.8 allows us to confirm the sharpness of Theorems 8.2, 8.5.

Theorem 8.9. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ and some $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Let $s \geqslant 2$. Then there does not exist a positive function $\mathcal{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ and estimate (8.7) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$, almost every $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, and sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

Chapter 3. Homogenization for the Schrödinger-type equations

§9. Homogenization of the sandwiched operator $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$

If $\psi(\mathbf{x})$ is a Γ-periodic measurable function in $\mathbb{R}^d$, we denote $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. *Our main object* is the operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ acting in $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ and formally given by

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{9.1}$$

The precise definition is given in terms of the corresponding quadratic form (cf. Subsection 5.2).

Let T_ε be *the unitary scaling transformation* in $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ defined by $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Then $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon$. Hence,

$$e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} = T_\varepsilon^* e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} T_\varepsilon. \tag{9.2}$$

Applying the scaling transformation to the resolvent of $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, we obtain

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} = T_\varepsilon(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} T_\varepsilon^*. \tag{9.3}$$

Finally, if $\psi(\mathbf{x})$ is a Γ-periodic function, then $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi] T_\varepsilon$.

Let $\mathcal{A}^0$ be defined by (7.2). Using the relations of the form (9.2) (for the operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\mathcal{A}^0$) and (9.3), we obtain

$$\begin{aligned}&\bigl(f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\bigr)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} \\ &\qquad = T_\varepsilon^* \bigl(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\bigr)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{9.4}$$

Next, the operator $\mathcal{R}(\varepsilon)$ expands in the direct integral of the operators (8.1): $\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathscr{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}\right)\mathscr{U}$. Recall also notation (8.5). By decomposition (5.11) for $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^0$, we have

$$\begin{aligned}&\bigl\|\bigl(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\bigr)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{9.5}$$

From Theorem 8.1 and identities (9.4), (9.5) we deduce the following result proved before in [8, Theorem 12.4].

Theorem 9.1 ([8]). *Let $\mathcal{A}_\varepsilon$ and $\mathcal{A}^0$ be the operators defined by (9.1) and (7.2), respectively. Then for $0 \leqslant s \leqslant 3$, and $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ we have*

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3},$$

where $\mathfrak{C}_1(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/3}\mathscr{C}_1^{s/3}$. The constant $\mathscr{C}_1$ depends only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, and r_0.

This result can be improved under some additional assumptions.

Theorem 9.2. *Suppose that the assumptions of Theorem 9.1 are satisfied. Suppose that the operator $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ defined by (7.7) is equal to zero: $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$; or suppose that Condition 8.3 (or more restrictive Condition 8.4) is satisfied. Then for $0 \leqslant s \leqslant 2$, and $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ we have*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2(s) (1 + |\tau|^{1/2})^{s/2} \varepsilon^{s/2}, \tag{9.6}$$

where $\mathfrak{C}_2(s) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2} \mathscr{C}_2^{s/2}$. If $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, then the constant $\mathscr{C}_2$ depends only on α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, and r_0. Under Condition 8.3 the constant $\mathscr{C}_2$ depends on the same parameters and also on n and the number c°.

Proof. Applying Theorem 8.2 (or Theorem 8.5) and using (9.4), (9.5), we obtain

$$\| (f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathscr{C}_2 (1 + |\tau|^{1/2}) \varepsilon. \tag{9.7}$$

Obviously,

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{9.8}$$

Interpolating between (9.8) and (9.7), for $0 \leqslant s \leqslant 2$ we obtain

$$\begin{aligned} &\| (f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \leqslant 2^{1-s/2} \mathscr{C}_2^{s/2} (1 + |\tau|^{1/2})^{s/2} \varepsilon^{s/2}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

The operator $(\mathcal{H}_0 + I)^{s/2}$ is an isometric isomorphism of $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ onto $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Therefore, (9.9) is equivalent to (9.6). $\square$

Theorem 9.2 improve the results of Theorems 13.8 and 13.10 from [35] with respect to dependence of the estimates on τ.

Application of Theorems 8.6 and 8.7 allows us to confirm that the results of Theorems 9.1 and 9.2 are sharp with respect to the type of the operator norm.

Theorem 9.3 ([35])**.** *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 3$. Then there does not exist a constant $\mathcal{C}(\tau) > 0$ such that the estimate*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon \tag{9.10}$$

holds for all sufficiently small $\varepsilon > 0$.

Theorem 9.4. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ and some $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Let $\tau \neq 0$ and $0 \leqslant s < 2$. Then there does not exist a constant $\mathcal{C}(\tau) > 0$ such that estimate (9.10) holds for all sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

Theorem 9.3 was proved in [35, Theorem 13.12].

Application of Theorem 8.8 allows us to confirm that the result of Theorem 9.1 is sharp with respect to dependence of the estimates on time.

Theorem 9.5. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Let $s \geqslant 3$. Then there does not exist a positive function $\mathcal{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ and estimate (9.10) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and all sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

Similarly, application of Theorem 8.9 allows us to confirm that the result of Theorem 9.2 is sharp.

Theorem 9.6. *Suppose that $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ and $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ for some $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ and some $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Let $s \geqslant 2$. Then there does not exist a positive function $\mathcal{C}(\tau)$ such that $\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ and estimate (9.10) holds for all $\tau \in \mathbb{R}$ and all sufficiently small $\varepsilon > 0$.*

§10. Homogenization of the Cauchy problem

Let $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, be the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{10.1}$$

where $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. The solution can be represented as

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau.$$

Let $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, be the solution of the homogenized problem

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ f_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{10.2}$$

Then

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau.$$

The following result is deduced from Theorem 9.1 (it has been proved before in [8, Theorem 14.5]).

Theorem 10.1 ([8]). *Let $\mathbf{u}_\varepsilon$ be the solution of problem (10.1), and let $\mathbf{u}_0$ be the solution of problem (10.2).*

1°. *If $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, where $0\leqslant s\leqslant 3$, then for $\tau\in\mathbb{R}$ and $\varepsilon>0$ we have*

$$\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(s)\varepsilon^{s/3}(1+|\tau|)^{s/3}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Under the additional assumption that $\mathbf{F}\in L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, where $p\in[1,\infty]$, for $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, and $0<\alpha<s(s+3/p')^{-1}$ we have

$$\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^{s/3}\mathfrak{C}_1(s)\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

The constant $\mathfrak{C}_1(s)$ is defined in Theorem 9.1. Here $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

2°. *If $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ and $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, then*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \tau\in\mathbb{R}.$$

Under the additional assumption that $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, for $0<\alpha<1$ we have $\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to 0$, as $\varepsilon\to 0$.

The result of Theorem 10.1 can be refined under some additional assumptions. Application of Theorem 9.2 yields the following result.

Theorem 10.2. *Suppose that the assumptions of Theorem 10.1 are satisfied. Let $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ be the operator defined by (7.7). Suppose that $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ or Condition 8.3 (or more restrictive Condition 8.4) is satisfied.*

1°. *If $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, where $0 \leqslant s \leqslant 2$, then for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ we have*

$$\begin{aligned} &\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \leqslant \mathfrak{C}_2(s)\varepsilon^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^s(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

Under the additional assumption that $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, where $p \in [1,\infty]$, for $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, and $0 < \alpha < 2s(s+4/p')^{-1}$ we have

$$\begin{aligned} &\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \leqslant 2^{s/2}\mathfrak{C}_2(s)\varepsilon^{s(1-\alpha/2)/2}\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

The constant $\mathfrak{C}_2(s)$ is defined in Theorem 9.2. Here $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$.

2°. *If $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ and $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, for $0 < \alpha < 2$ we have $\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to 0$, as $\varepsilon \to 0$.*

§11. Applications of the general results

11.1. The Schrödinger-type equation with the operator $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla$. Consider the scalar elliptic operator

$$\widehat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} \tag{11.1}$$

acting in $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, which is a particular case of the operator (6.1). In this case $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.

The effective matrix g^0 is defined in the standard way. Let $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ be a (weak) Γ-periodic solution of the problem

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \qquad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{11.2}$$

Here $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$ is the standard orthonormal basis in $\mathbb{R}^d$. The matrix $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ is the matrix with the columns $\widetilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1,\dots,d$. Then $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Now $f = \mathbf{1}_n$, $Q = \mathbf{1}_n$, and $f_0 = \mathbf{1}_n$. If $g(\mathbf{x})$ is a symmetric matrix with real entries, then, by Proposition 7.1(1°), $\widehat{N}_{\mathbf{1}_n}(\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. If $g(\mathbf{x})$ is a Hermitian matrix with complex entries, then, in general, $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ is not zero. Since $n = 1$, then $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ is the operator of multiplication by $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$, where $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ is the coefficient in the expansion for the first eigenvalue $\widehat{\lambda}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots$ of the operator $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. A calculation (see [6, Subsection 10.3]) shows that

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = -i\sum_{j,l,r=1}^d (a_{jlr} - a_{jlr}^*)\theta_j\theta_l\theta_r,$$

$$a_{jlr} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})^* \left\langle g(\mathbf{x})(\nabla\psi_l(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_l), \mathbf{e}_r\right\rangle\,d\mathbf{x}, \qquad j,l,r = 1,\dots,d.$$

An example of the operator (11.1) with $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ can be found in [6, Subsection 10.4].

Next, let $\phi_{jl}(\mathbf{x})$ be a Γ-periodic solution of the problem

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\phi_{jl}(\mathbf{x}) - \psi_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_l) = g^0_{lj} - \widetilde{g}_{lj}(\mathbf{x}), \qquad \int_\Omega \phi_{jl}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{11.3}$$

The operator $\widehat{\mathcal{N}}^{(1,1)}_{\mathbf{1}_n}(\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{\mathcal{N}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\theta})$ is the operator of multiplication by $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. A calculation (see [13, Subsection 14.5]) shows that

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{N}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = &\sum_{p,q,l,r=1}^{d} (\alpha_{pqlr} - (\overline{\psi_p^*\psi_q})g^0_{lr})\theta_p\theta_q\theta_l\theta_r, \qquad (11.4)\\
\alpha_{pqlr} = {}&|\Omega|^{-1}\int_\Omega (\widetilde{g}_{lp}(\mathbf{x})\phi_{qr}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}_{rq}(\mathbf{x})\phi_{pl}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\\
&+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \langle g(\mathbf{x})(\nabla\phi_{qr}(\mathbf{x}) - \psi_q(\mathbf{x})\mathbf{e}_r), \nabla\phi_{pl}(\mathbf{x}) - \psi_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_l\rangle\, d\mathbf{x},\\
&p,q,l,r = 1,\dots,d.
\end{aligned}$$

Lemma 11.1. *Let $d = 1$ and $\widehat{\mathcal{A}} = -\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}$. If $g \neq \mathrm{const}$, then $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) \neq 0$.*

Proof. The problem (11.2) now takes the form $\frac{d}{dx}g(x)(\frac{d}{dx}\psi_1(x)+1) = 0$, $\overline{\psi_1} = 0$. Then $\frac{d}{dx}\psi_1(x) = \underline{g}(g(x))^{-1}-1$. Since $g(x) \neq \mathrm{const}$, then $\underline{g}(g(x))^{-1}-1 \not\equiv 0$, whence $\psi_1 \not\equiv 0$. Next, $\widetilde{g}(x) = \underline{g} = g^0$ and equation (11.3) takes the form $\frac{d}{dx}g(x)(\frac{d}{dx}\phi_{11}(x)-\psi_1(x)) = 0$, $\overline{\phi_{11}} = 0$. Then $\frac{d}{dx}\phi_{11}(x)-\psi_1(x) = 0$. It is easy to check that α_{1111} in (11.4) is equal to zero: $\alpha_{1111} = 0$. Since $\overline{\psi_1^2}g^0 \neq 0$, then $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) \neq 0$. $\square$

Consider the Cauchy problem (10.1) with the operator $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$. We can apply Theorem 10.1 in the general case and Theorem 10.2 in the "real" case. These results are sharp with respect to smoothness of the initial data and with respect to dependence of the estimates on time.

11.2. The nonstationary Schrödinger equation with a singular potential. (See [4, Chapter 6, Subsection 1.1].) In the space $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, we consider the operator $\mathcal{H} = \mathbf{D}^*\breve{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + V(\mathbf{x})$, where a symmetric $(d\times d)$-matrix-valued function $\breve{g}(\mathbf{x})$ with *real entries* and a *real-valued* potential $V(\mathbf{x})$ are Γ-periodic and satisfy

$$\begin{gathered}
\breve{g}(\mathbf{x}) > 0, \quad \breve{g}, \breve{g}^{-1} \in L_\infty;\\
V \in L_q(\Omega), \qquad q > d/2 \ \text{ for } \ d \geqslant 2, \quad q = 1 \ \text{ for } \ d = 1.
\end{gathered}$$

Adding an appropriate constant to $V(\mathbf{x})$, we may assume that *the point $\lambda = 0$ is the bottom of the spectrum of $\mathcal{H}$*. Then $\mathcal{H}$ can be written in the factorized form:

$$\mathcal{H} = \omega^{-1}\mathbf{D}^*\omega^2\breve{g}\mathbf{D}\omega^{-1}, \tag{11.5}$$

where $\omega(\mathbf{x})$ is a positive Γ-periodic solution of the equation $\mathbf{D}^*\breve{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$, $\int_\Omega \omega^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} = |\Omega|$. Therefore, the operator (11.5) is a particular case of the operator (5.6). In this case $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, $g = \omega^2\breve{g}$, $f = \omega^{-1}$.

Let g^0 be the effective matrix for the operator (11.1) (with $g = \omega^2\breve{g}$). Now $Q(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$, and, by the normalization condition for ω, we have $\overline{Q} = 1$ and $f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = 1$. Therefore, the operator (7.2) takes the form $\mathcal{H}^0 = \mathbf{D}^*g^0\mathbf{D}$.

Now we consider the operator

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^*(\omega^\varepsilon)^2\check{g}^\varepsilon\mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}. \tag{11.6}$$

In the initial form, the operator (11.6) can be written as $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathbf{D}^*\check{g}^\varepsilon\mathbf{D} + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon$. Note that this expression contains a large factor ε^{-2} at the rapidly oscillating potential V^ε.

Let us consider the Cauchy problem (10.1) with the operator (11.6). By Proposition 7.1(1°), $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. We can apply Theorem 10.2. This result is sharp with respect to smoothness of the initial data and with respect to dependence of the estimates on time.

Remark 9. It is also possible to consider the Cauchy problem for the magnetic Schrödinger equation with a small magnetic potential, using an appropriate factorization for the magnetic Schrödinger operator; see [35, Subsection 15.4]. In this case, we do not have improvement of the general results.

11.3. The nonstationary two-dimensional Pauli equation. (See [6, Chapter 4, §12, Subsection 12.3].) Let *the magnetic potential* $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$ be a Γ-periodic real vector-valued function in $\mathbb{R}^2$ such that $\mathbf{A} \in L_p(\Omega; \mathbb{C}^2)$, $p > 2$. By the gauge transformation, we may assume that $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, $\int_\Omega \mathbf{A}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$. Under these conditions there exists a (unique) Γ-periodic real-valued function φ such that $\nabla\varphi = \{A_2, -A_1\}$, $\int_\Omega \varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$.

In $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, we consider the Pauli operator

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} P_+ &= \omega_-\partial_+\omega_+^2\partial_-\omega_-, \\ P_- &= \omega_+\partial_-\omega_-^2\partial_+\omega_+, \end{aligned} \tag{11.7}$$

where $\omega_\pm(\mathbf{x}) = e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}$ and $\partial_\pm = D_1 \pm iD_2$. If the potential $\mathbf{A}$ is sufficiently smooth, then the blocks $P_\pm$ of the operator (11.7) are of the form $P_\pm = (\mathbf{D} - \mathbf{A})^2 \pm B$, where $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ is the strength of the magnetic field.

The operator (11.7) can be written as $\mathcal{P} = f_\times b_\times(\mathbf{D}) g_\times b_\times(\mathbf{D}) f_\times$, where

$$b_\times(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad f_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+^2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

The operator $\mathcal{P}$ is of the form (5.6) with $m = n = d = 2$, $b(\mathbf{D}) = b_\times(\mathbf{D})$, $f(\mathbf{x}) = f_\times(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}) = g_\times(\mathbf{x})$.

Since $m = n$, the effective matrix is equal to $g_\times^0 = \underline{g_\times} = \operatorname{diag}\{g_+^0, g_-^0\}$, $g_\pm^0 = \underline{\omega_\pm^2}$. The matrix $Q_\times = f_\times^{-2} = g_\times^{-1}$ plays the role of Q. Then $\overline{Q_\times} = \operatorname{diag}\{(g_+^0)^{-1}, (g_-^0)^{-1}\}$. The role of f_0 is played by $f_{\times,0} = \operatorname{diag}\{(g_+^0)^{1/2}, (g_-^0)^{1/2}\}$. The operator (7.2) now takes the form

$$\mathcal{P}_\times^0 = f_{\times,0} b_\times(\mathbf{D}) g_\times^0 b_\times(\mathbf{D}) f_{\times,0} = \begin{pmatrix} -\gamma\Delta & 0 \\ 0 & -\gamma\Delta \end{pmatrix}.$$

Here $\gamma = g_+^0 g_-^0 = |\Omega|^2 \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2}$.

Now, we describe the operator $\widehat{N}_{Q,\times}(\boldsymbol{\theta})$ that plays the role of $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ for $\mathcal{P}$. Let $w_\pm(\mathbf{x})$ be the Γ-periodic solutions of the problems $\partial_\mp w_\pm(\mathbf{x}) = g_\pm^0\omega_\mp^2(\mathbf{x}) - 1$, $\int_\Omega w_\pm(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$. Then $\widehat{N}_{Q,\times}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{diag}\{\widehat{N}_{Q,-}(\boldsymbol{\theta}), \widehat{N}_{Q,+}(\boldsymbol{\theta})\}$, $\widehat{N}_{Q,\pm}(\boldsymbol{\theta}) = -2\gamma\left(\theta_1 \operatorname{Re}\overline{\omega_\mp^2 w_\pm} \pm \theta_2 \operatorname{Im}\overline{\omega_\mp^2 w_\pm}\right)$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$. An example of the operator $\mathcal{P}$ with $\widehat{N}_{Q,\times}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0$ can be found in [35, Example 16.2]. Now, we consider the operator

$$\mathcal{P}_\varepsilon = f_\times^\varepsilon b_\times(\mathbf{D}) g_\times^\varepsilon b_\times(\mathbf{D}) f_\times^\varepsilon = \begin{pmatrix} P_{-,\varepsilon} & 0 \\ 0 & P_{+,\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{11.8}$$

where $P_{+,\varepsilon} = \omega_-^\varepsilon \partial_+ (\omega_+^\varepsilon)^2 \partial_- \omega_-^\varepsilon$ and $P_{-,\varepsilon} = \omega_+^\varepsilon \partial_- (\omega_-^\varepsilon)^2 \partial_+ \omega_+^\varepsilon$. If the potential $\mathbf{A}$ is sufficiently smooth, then the blocks of the operator (11.8) are of the form $P_{\pm,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\mathbf{A}^\varepsilon)^2 \pm \varepsilon^{-2} B^\varepsilon$.

Let us consider the Cauchy problem (10.1) with the operator (11.8). We can apply Theorem 10.1. In general, this result is sharp with respect to smoothness of the initial data and with respect to dependence of the estimates on time.

Acknowledgements

The author is grateful to T. A. Suslina for helpful discussions and advices.

Funding

Supported by Young Russian Mathematics award and Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement №075-15-2019-1619.

Часть II

Усреднение периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка

Введение

0.1. Основные результаты второй части. Во второй части работы мы проводим аналогичные [8, 35] рассмотрения для экспоненты от оператора (0.4), включающего младшие члены. Мы доказываем оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon \tag{0.1}$$

и подтверждаем её точность в следующем смысле: указываем условие на оператор, при котором оценка $\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(s)\varepsilon$ заведомо неверна, если $r<3$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях (которые формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра) мы усиливаем результат и доказываем оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|s|)\varepsilon.$$

Аналоги этих результатов получены и для более общего оператора (0.2). При этом оказывается, что удобно изучать оператор $f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$ (операторную экспоненту, окаймлённую быстро осциллирующими множителями).

Результаты, полученные в операторных терминах, применяются затем к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $s\in\mathbb{R}$, следующей задачи

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s) + \mathbf{F}(\mathbf{x},s), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{0.2}$$

а также более общей задачи с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$. Мы применяем общие результаты к конкретным уравнениям математической физики, в частности, к нестационарному магнитному уравнению Шрёдингера и двумерному уравнению Паули с сингулярными быстро осциллирующими потенциалами.

0.2. Метод. Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Пусть $\mathcal{H}_0=-\Delta$. Ясно, что оценка (0.1) равносильна неравенству

$$\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0+I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon. \tag{0.3}$$

Далее, масштабное преобразование сводит оценку (0.3) к неравенству

$$\|(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)})\varepsilon^3(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2 I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|s|)\varepsilon.$$

Здесь $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ вида

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \varepsilon\sum_{j=1}^d \big(a_j(\mathbf{x})D_j + D_j(a_j(\mathbf{x}))^*\big) + \varepsilon^2(\mathcal{Q}(\mathbf{x})+\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})).$$

Аналогично определяется оператор $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ с эффективными коэффициентами. Затем с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$, действующим в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задаётся выражением

$$b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\sum_{j=1}^d \big(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j(\mathbf{x})^*\big) \\ + \varepsilon^2(\mathcal{Q}(\mathbf{x})+\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}))$$

при периодических граничных условиях. Следуя [4], мы выделяем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$ и рассматриваем семейство $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ как квадратичный пучок по отношению к параметрам t и ε.

При этом значительную часть построений удаётся провести в рамках абстрактной теории операторов. В абстрактной схеме изучается действующее в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ операторное семейство

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda \varepsilon^2 Q_0.$$

Предполагается, что оператор $A(t)$ допускает факторизацию вида $A(t) = X(t)^* X(t)$, где $X(t) = X_0 + tX_1$. Основное условие состоит в том, что точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением конечной кратности n для оператора $A(0)$. Обозначим $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. На операторы $Y(t) = Y_0 + tY_1$, Y_2, Q накладываются некоторые условия подчинённости старшей части.

Следуя [31, 32], мы вводим одномерный параметр $\tau = (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ и изучаем семейство операторов $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ методами аналитической теории возмущений относительно параметра τ. У возмущённого оператора $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ при $|\tau| \leqslant \tau^0$ на промежутке $[0, \delta]$ имеется ровно n собственных значений с учётом кратностей (числа δ и τ^0 контролируются явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные векторы аналитичны по τ. Коэффициенты степенных разложений для них мы называем пороговыми характеристиками оператора на краю спектра. Выделяется оператор конечного ранга (так называемый *спектральный росток*), действующий в пространстве $\mathfrak{N}$. Спектральный росток несёт информацию о пороговых характеристиках старшего порядка. В терминах спектрального ростка удаётся получить аппроксимации для операторной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}$. Применение абстрактных результатов приводит к искомым оценкам для дифференциальных операторов.

Для доказательства точности оценки (0.1) мы рассматриваем операторный пучок $\mathfrak{B}(\varkappa) := \mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ при $t = c\varkappa^2$, $\varepsilon = \varkappa^3$ и пользуемся методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра $\varkappa$.

0.3. Структура второй части. Вторая часть работы состоит из трёх глав. В главе 1 (§§1–4) содержится необходимый абстрактный теоретико-операторный материал. В главе 2 (§§5–10) изучаются периодические ДО, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Глава 3 (§§11–14) посвящена задачам усреднения для нестационарного уравнения типа Шрёдингера. В §11 получены основные результаты работы в операторных терминах. Затем в §12 эти результаты применяются к усреднению для задачи Коши (0.2), а также более общей задачи с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$. В §§13–14 рассмотрены приложения к конкретным операторам математической физики.

Глава 1. Абстрактная теоретико-операторная схема

§1. Квадратичные двупараметрические операторные семейства

Мы изучаем семейство операторов $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$, зависящих от двух параметров ε и t, считая что $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$. В этом параграфе мы кратко описываем результаты, полученные в [31, 32].

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определённый и замкнутый оператор, а $X_1\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введём замкнутый на $\operatorname{Dom} X_0$ оператор

$$X(t) := X_0 + tX_1\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*.$$

Рассмотрим семейство самосопряжённых операторов $A(t) := X(t)^*X(t)$ в $\mathfrak{H}$. Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Введём обозначения $A_0 := A(0)$, $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$, $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$.

Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 1.1. *Точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 и $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty$.*

Обозначим через d^0 *расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0*. Через P и P_* обозначаются ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$, соответственно.

1.2. Операторы $Y(t)$ и Y_2. Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — ещё одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. Пусть Y_1 — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$. Положим $Y(t) := Y_0 + tY_1$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. Мы накладываем следующее условие.

Условие 1.2. *Для некоторого $c_1 > 0$ выполнено*

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Из (1.1) при $t = 0$ следует, что $\mathfrak{N} \subset \operatorname{Ker} Y_0$.

Пусть $Y_2\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый линейный оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предполагается выполненным

Условие 1.3. *Для любого $\nu > 0$ существует такое число $C(\nu) > 0$, что*

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

1.3. Форма $\mathfrak{q}$. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана плотно определённая эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u,v]$, причём $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} \mathfrak{q}$. На форму $\mathfrak{q}$ накладывается следующее условие.

Условие 1.4. *Найдутся постоянные $0 < \kappa \leqslant 1$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$, такие, что*

$$\begin{gathered}|\mathfrak{q}[u,v]| \leqslant \left(c_2\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|u\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} \left(c_2\|X(t)v\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|v\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}, \\ \mathfrak{q}[u,u] \geqslant -(1-\kappa)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0,\ t \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{1.3}$$

1.4. Оператор $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} &+ 2\varepsilon \operatorname{Re}(Y(t)u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &+ \varepsilon^2\mathfrak{q}[u,u] + \lambda\varepsilon^2(Q_0u,u)_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $Q_0\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определённый оператор. *На параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ накладывается ограничение*:

$$\begin{aligned}&\lambda > \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geqslant 0, \\ &\lambda > \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0,\end{aligned} \tag{1.5}$$

где c_0 — постоянная из условия 1.4, а $c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu)$ при $\nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}$.

Используя (1.1), (1.2), (1.3), можно проверить (см. [32, п. 1.4]) справедливость следующих оценок:

$$\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \leqslant (2+c_1^2+c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1)+c_3+|\lambda|\|Q_0\|)\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}},$$
$$\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \beta\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0,$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\beta = \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, && \text{если } \lambda \geqslant 0,\\ &\beta = \lambda\|Q_0\| - c_0 - c_4, && \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u]$ замкнута и положительно определена.

Самосопряжённый оператор в пространстве $\mathfrak{H}$*, порождённый формой* (1.4), обозначим через $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda\varepsilon^2 Q_0. \tag{1.7}$$

Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем форме $\mathfrak{q}$.

1.5. Введение параметра τ. Семейство $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ аналитически зависит от параметров t и ε. Если $t = 0$ и $\varepsilon = 0$, то $\mathfrak{B}(0,0) = A_0$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n. Мы хотим использовать аппарат аналитической теории возмущений. Однако, если $n > 1$, то аналитическая теория возмущений не работает, поскольку мы имеем дело с многомерным параметром и кратным собственным значением. Чтобы преодолеть эту трудность, мы, следуя [31], вводим *одномерный параметр*

$$\tau = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$$

и дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Оператор $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ будем обозначать через $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$. Соответствующая квадратичная форма запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\tau;\vartheta)[u,u] = {}& \|(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + 2\tau\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_0u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\ &+ 2\tau^2\vartheta_1\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_1u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \tau^2\vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[u,u] + \lambda(Q_0u,u)_{\mathfrak{H}}\right), \quad u \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned}$$

Отвечающий ей оператор формально можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\tau;\vartheta) = {}& (X_0^* + \tau\vartheta_1 X_1^*)(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1) + \tau\vartheta_2(Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2)\\ &+ \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Мы изучаем оператор $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$, как квадратичный пучок по одномерному параметру τ, средствами аналитической теории возмущений. В то же время мы должны следить за равномерностью оценок по параметру ϑ, принимая во внимание, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$. В записи (1.8) можно считать, что $\tau \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $F(\tau;\vartheta;\sigma)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$ для интервала $[0,\sigma]$ и положим $\mathfrak{F}(\tau;\vartheta;\sigma) := F(\tau;\vartheta;\sigma)\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$ и выберем $\tau^0 > 0$, такое что

$$\tau^0 \leqslant \delta^{1/2}\left((2+c_1^2+c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)^{-1/2}. \tag{1.9}$$

В [31, предложение 1.5] установлено следующее утверждение.

Предложение 1.5 (см. [31]). *При* $|\tau| \leqslant \tau^0$ *выполнено*

$$F(\tau;\vartheta;\delta) = F(\tau;\vartheta;3\delta), \quad \operatorname{rank} F(\tau;\vartheta;\delta) = n.$$

Мы часто будем писать $F(\tau;\vartheta)$ вместо $F(\tau;\vartheta;\delta)$ и $\mathfrak{F}(\tau;\vartheta)$ вместо $\mathfrak{F}(\tau;\vartheta;\delta)$.

На протяжении главы 1 мы будем следить за зависимостью оценочных постоянных от следующего множества "данных"

$$\begin{gathered} \delta,\ \delta^{-1/2},\ \kappa^{1/2},\ \kappa^{-1/2},\ \|X_1\|,\ \|Y_1\|, \\ c_1,\ C(1)^{1/2},\ c_2^{1/2},\ c_3^{1/2},\ |\lambda|\|Q_0\|,\ \tau^0. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Важно, что оценочные постоянные (возможно, после завышения) зависят от этих величин полиномиально, причём коэффициенты соответствующих многочленов — некоторые положительные абсолютные постоянные.

1.6. Операторы Z и $\widetilde{Z}$. Введём операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\phi = \phi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ — (слабое) решение уравнения $X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0$. Введём оператор $Z\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ по формуле $Zu = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Аналогично, рассмотрим уравнение на $\psi \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$: $X_0^*X_0\psi + Y_0^*Y_2\omega = 0$. Введём оператор $\widetilde{Z}\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулой $\widetilde{Z}u = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Справедливы оценки

$$\|X_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\|, \tag{1.11}$$

$$\|Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|, \tag{1.12}$$

$$\|X_0\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1 C(1)^{1/2}, \tag{1.13}$$

$$\|\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant c_1(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}. \tag{1.14}$$

1.7. Операторы R и S. Определим оператор

$$R := X_0 Z + X_1\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*. \tag{1.15}$$

Оператор R также может быть определён формулой $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. Следуя [4, гл. 1, п. 1.3], назовём оператор $S := R^*R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также представление

$$S = PX_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}, \tag{1.16}$$

откуда вытекает оценка

$$\|S\| \leqslant \|X_1\|^2. \tag{1.17}$$

1.8. Ветви собственных значений и собственных векторов оператора $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$. Спектральный росток оператора $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [23]), при $|\tau| \leqslant \tau^0$ существуют вещественно-аналитические (по τ) функции $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta) = \lambda_l(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau^0, \quad l = 1,\dots,n,$$

причём $\varphi_l(\tau;\vartheta)$, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(\tau;\vartheta)$. Для достаточно малого $\tau_*(\vartheta)\leqslant\tau^0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l(\tau;\vartheta)=\gamma_l(\vartheta)\tau^2+\mu_l(\vartheta)\tau^3+\dots,\qquad \gamma_l(\vartheta)>0,\ |\tau|\leqslant\tau_*(\vartheta), \tag{1.18}$$

$$\varphi_l(\tau;\vartheta)=\omega_l(\vartheta)+\tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta)+\dots,\qquad |\tau|\leqslant\tau_*(\vartheta). \tag{1.19}$$

Векторы $\omega_l(\vartheta)$, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Следуя [31], введём оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\vartheta)&=\vartheta_1^2 S-\vartheta_1\vartheta_2(X_0Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}-\vartheta_1\vartheta_2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0Z)|_{\mathfrak{N}}\\ &-\vartheta_2^2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+\vartheta_1\vartheta_2P(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}}+\vartheta_2^2(Q_{\mathfrak{N}}+\lambda Q_{0\mathfrak{N}}), \end{aligned} \tag{1.20}$$

который называется *спектральным ростком семейства* $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)$ *при* $\tau=0$. Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряжённый оператор, порождённый квадратичной формой $\mathfrak{q}[\omega,\omega]$, $\omega\in\mathfrak{N}$, а $Q_{0\mathfrak{N}}:=PQ_0|_{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [31, предложение 1.6], числа $\gamma_l(\vartheta)$ и векторы $\omega_l(\vartheta)$ являются собственными для $\mathcal{S}(\vartheta)$:

$$\mathcal{S}(\vartheta)\omega_l(\vartheta)=\gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta),\quad l=1,\dots,n. \tag{1.21}$$

Имеют место представления

$$P=\sum_{l=1}^n(\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta))\omega_l(\vartheta),\quad \mathcal{S}(\vartheta)P=\sum_{l=1}^n\gamma_l(\vartheta)(\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta))\omega_l(\vartheta). \tag{1.22}$$

Оценим норму оператора $\mathcal{S}(\vartheta)$, используя (1.11), (1.13), (1.17), (1.2) при $t=0$ и $\nu=1$, а также (1.3) при $t=0$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(\vartheta)\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}}&\leqslant\|X_1\|^2+2c_1C(1)^{1/2}\|X_1\|+c_1^2C(1)\\ &+2C(1)^{1/2}\|Y_1\|+c_3+|\lambda|\|Q_0\|=:C_{\mathcal{S}}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

В заключение этого пункта введём оператор

$$\begin{aligned} L(t,\varepsilon)&:=\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)=t^2S-t\varepsilon\big((X_0Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+(X_0\widetilde{Z})^*(X_0Z)|_{\mathfrak{N}}\big)\\ &+t\varepsilon P(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}}+\varepsilon^2\big(-(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}}+Q_{\mathfrak{N}}+\lambda Q_{0\mathfrak{N}}\big). \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.9. Пороговые аппроксимации. Спектральный проектор $F(\tau;\vartheta)$ и оператор $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$ являются вещественно аналитическими оператор-функциями при $|\tau|\leqslant\tau^0$. Имеем

$$F(\tau;\vartheta)=\sum_{l=1}^n(\,\cdot\,,\varphi_l(\tau;\vartheta))\varphi_l(\tau;\vartheta),$$

$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)=\sum_{l=1}^n\lambda_l(\tau;\vartheta)(\,\cdot\,,\varphi_l(\tau;\vartheta))\varphi_l(\tau;\vartheta).$$

С учётом (1.18)–(1.22) отсюда следуют степенные разложения

$$F(\tau;\vartheta)=P+\tau F_1(\vartheta)+\dots,\quad \mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)=\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P+\tau^3\mathcal{K}(\vartheta)+\dots,$$

сходящиеся при $|\tau|\leqslant\tau_*(\vartheta)$. Однако, нам нужны не разложения, а лишь аппроксимации (с одним или несколькими первыми членами), но с оценками погрешности на контролируемом промежутке $|\tau|\leqslant\tau^0$.

Следующее утверждение было получено в [31, теорема 2.2].

Теорема 1.6 (см. [31]). *Справедливы оценки*

$$F(\tau;\vartheta) - P = \Phi(\tau;\vartheta), \qquad \|\Phi(\tau;\vartheta)\| \leqslant C_1|\tau|, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0; \tag{1.25}$$

$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) - \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P = \Psi(\tau;\vartheta), \qquad \|\Psi(\tau;\vartheta)\| \leqslant C_2|\tau|^3, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{1.26}$$

Нам понадобится также более точная аппроксимация (см. [32, теорема 3.3]).

Теорема 1.7 (см. [32]). *Справедливы представление*

$$\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + \Psi_2(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau^0, \tag{1.27}$$

и оценка

$$\|\Psi_2(\tau;\vartheta)\| \leqslant C_3\tau^4, \quad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{1.28}$$

Оператор $K(\vartheta)$ определён ниже соотношениями (1.29)–(1.34).

Как показано в [32, п. 3.4],

$$K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta), \tag{1.29}$$

где $K_0(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$ и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$, а $N(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в себя и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений имеем

$$K_0(\vartheta) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\big((\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta))(\vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta)) \\ + (\,\cdot\,,\vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta))\omega_l(\vartheta)\big),$$

$$N(\vartheta) = \sum_{l=1}^{n}\mu_l(\vartheta)(\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta))\omega_l(\vartheta) + \sum_{l=1}^{n}\gamma_l(\vartheta)\big((\,\cdot\,,\widetilde{\omega}_l(\vartheta))\omega_l(\vartheta) + (\,\cdot\,,\omega_l(\vartheta))\widetilde{\omega}_l(\vartheta)\big),$$

где $\widetilde{\omega}_l(\vartheta) = P\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$. В инвариантных терминах справедливы представления

$$\begin{gathered} K_0(\vartheta) = \vartheta_1\big(Z\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)PZ^*\big) + \vartheta_2\big(\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)P\widetilde{Z}^*\big), \\ N(\vartheta) = \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2\vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1\vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}, \end{gathered} \tag{1.30}$$

где

$$N_{11} = (X_1 Z)^* RP + (RP)^* X_1 Z, \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} N_{12} = (X_1\widetilde{Z})^* RP + (RP)^* X_1\widetilde{Z} + (X_1 Z)^* X_0\widetilde{Z} + (X_0\widetilde{Z})^* X_1 Z \\ + (Y_2 Z)^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 Z + (Y_2 Z)^* Y_1 P + (Y_1 P)^* Y_2 Z \\ + (Y_2 P)^* Y_1 Z + (Y_1 Z)^* Y_2 P, \end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} N_{21} = (X_0\widetilde{Z})^* X_1\widetilde{Z} + (X_1\widetilde{Z})^* X_0\widetilde{Z} + (Y_2 Z)^* Y_0\widetilde{Z} \\ + (Y_0\widetilde{Z})^* Y_2 Z + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_1 P \\ + (Y_1 P)^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_1\widetilde{Z})^* Y_2 P + (Y_2 P)^* Y_1\widetilde{Z} \\ + Z^* QP + PQZ + \lambda(Z^* Q_0 P + PQ_0 Z), \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} N_{22} = (Y_0\widetilde{Z})^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_0\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^* QP + PQ\widetilde{Z} \\ + \lambda(\widetilde{Z}^* Q_0 P + PQ_0\widetilde{Z}). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Поясним, что в (1.33) под формальной записью $Z^*QP + PQZ$ подразумевается ограниченный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой $\mathfrak{q}[Pu, Zu] + \mathfrak{q}[Zu, Pu]$, $u \in \mathfrak{H}$. Аналогично в (1.34) под $\widetilde{Z}^*QP + PQ\widetilde{Z}$ понимается оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой $\mathfrak{q}[Pu, \widetilde{Z}u] + \mathfrak{q}[\widetilde{Z}u, Pu]$, $u \in \mathfrak{H}$. В [32, п. 3.5] были установлены оценки $\|N_{11}\| \leqslant C_{1,1}$, $\|N_{12}\| \leqslant C_{1,2}$, $\|N_{2,1}\| \leqslant C_{2,1}$, $\|N_{22}\| \leqslant C_{2,2}$. В дальнейшем главную роль будет играть оператор N_{11}.

Замечание 1.8. *Постоянные C_1, C_2, C_3, $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{2,1}$, $C_{2,2}$ полиномиально зависят от величин* (1.10)*. Это прослежено в* [31, 32]*. Соответствующие многочлены имеют абсолютные положительные коэффициенты.*

§2. Пороговые аппроксимации для операторной экспоненты

2.1. Приближение для экспоненты $e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P$. Положим

$$E(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P - e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P. \tag{2.1}$$

Имеем

$$E(\tau;\vartheta;s) = E_1(\tau;\vartheta;s) + E_2(\tau;\vartheta;s), \tag{2.2}$$

$$E_1(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)^\perp P - F(\tau;\vartheta)^\perp e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P,$$

$$E_2(\tau;\vartheta;s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)P - F(\tau;\vartheta)e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P. \tag{2.3}$$

Поскольку $F(\tau;\vartheta)^\perp P = (P - F(\tau;\vartheta))P$, то из (1.25) вытекает оценка

$$\|E_1(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant 2C_1|\tau|, \quad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{2.4}$$

Перейдём к рассмотрению оператора (2.3), который запишем как

$$\begin{aligned} E_2(\tau;\vartheta;s) &= e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}\Sigma(\tau;\vartheta;s),\\ \Sigma(\tau;\vartheta;s) &:= F(\tau;\vartheta)P - e^{is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Видно, что $\Sigma(\tau;\vartheta;0) = 0$ и производная $\Sigma'(\tau;\vartheta;s) := \frac{d\Sigma}{ds}(\tau;\vartheta;s)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\Sigma'(\tau;\vartheta;s)\\ &\quad = -ie^{is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\big(\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) - \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P\big)e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Поскольку $\Sigma(\tau;\vartheta;s) = \int_0^s \Sigma'(\tau;\vartheta;\widetilde{s})\, d\widetilde{s}$, из (1.26) и (2.6) следует оценка

$$\|\Sigma(\tau;\vartheta;s)\| \leqslant C_2|s||\tau|^3, \quad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{2.7}$$

Соотношения (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) и (2.7) влекут следующий результат.

Теорема 2.1. *При $s \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$\|e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P - e^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P}P\| \leqslant 2C_1|\tau| + C_2|s||\tau|^3, \quad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{2.8}$$

Мы проведём более кропотливые рассмотрения, которые позволят нам усилить результат при дополнительных предположениях. В силу (1.27)и (2.6)

$$\Sigma(\tau;\vartheta;s) = -i\int\limits_0^s e^{i\widetilde{s}\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\big(\tau^3K(\vartheta)+\Psi_2(\tau;\vartheta)\big)e^{-i\widetilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\widetilde{s}. \tag{2.9}$$

Учитывая (1.29), (1.30), а также соотношения $Z^*P=0$ и $\widetilde{Z}^*P=0$, запишем оператор (2.9) в виде

$$\Sigma(\tau;\vartheta;s) = \widetilde{\Sigma}(\tau;\vartheta;s)+\widehat{\Sigma}(\tau;\vartheta;s), \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}(\tau;\vartheta;s) = -i\int\limits_0^s e^{i\widetilde{s}\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)\big(\tau^3\vartheta_1 Z\mathcal{S}(\vartheta)\\ +\tau^3\vartheta_2\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)+\Psi_2(\tau;\vartheta)\big)e^{-i\widetilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\widetilde{s},\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\widehat{\Sigma}(\tau;\vartheta;s) = -i\tau^3\int\limits_0^s e^{i\widetilde{s}\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)N(\vartheta)e^{-i\widetilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\widetilde{s}.$$

Поскольку $PZ=0$ и $P\widetilde{Z}=0$, то

$$F(\tau;\vartheta)Z\mathcal{S}(\vartheta)P = (F(\tau;\vartheta)-P)Z\mathcal{S}(\vartheta)P,$$
$$F(\tau;\vartheta)\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P = (F(\tau;\vartheta)-P)\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P.$$

Тогда из (1.12), (1.14), (1.23), (1.25), (1.28) следует оценка для оператора (2.11):

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\Sigma}(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant C_4|s|\tau^4,\quad |\tau|\leqslant\tau^0,\\ &C_4=\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\big(\|X_1\|+c_1C(1)^{1/2}\big)C_1C_{\mathcal{S}}+C_3.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Теперь из (2.5) и (2.10) вытекает представление

$$E_2(\tau;\vartheta;s)=\widetilde{E}_2(\tau;\vartheta;s)+\widehat{E}_2(\tau;\vartheta;s), \tag{2.13}$$

где $\widetilde{E}_2(\tau;\vartheta;s)=e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}\widetilde{\Sigma}(\tau;\vartheta;s)$, $\widehat{E}_2(\tau;\vartheta;s)=e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}\widehat{\Sigma}(\tau;\vartheta;s)$. В силу (2.12)

$$\|\widetilde{E}_2(\tau;\vartheta;s)\|\leqslant C_4|s|\tau^4,\quad |\tau|\leqslant\tau^0. \tag{2.14}$$

Соотношения (2.1), (2.2), (2.4), (2.13), (2.14) приводят к следующей теореме.

Теорема 2.2. *При $s\in\mathbb{R}$ и $|\tau|\leqslant\tau^0$ справедливо представление*

$$e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P-e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P=E_1(\tau;\vartheta;s)+\widetilde{E}_2(\tau;\vartheta;s)+\widehat{E}_2(\tau;\vartheta;s),$$

где первые два слагаемых допускают оценки (2.4) и (2.14) соответственно. Третий член допускает представление

$$\widehat{E}_2(\tau;\vartheta;s)=-i\tau^3e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}\int\limits_0^s e^{i\widetilde{s}\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}F(\tau;\vartheta)N(\vartheta)e^{-i\widetilde{s}\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}P\,d\widetilde{s},$$

где оператор $N(\vartheta)$ определён в (1.30)–(1.34).

2.2. Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ в общем случае. Исследуем поведение оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(\tau,\vartheta)}$ при малом ε. Домножим этот оператор на "сглаживающий множитель" $\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2}P$, где $r>0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к ДО такое домножение переходит в сглаживание.) Наша цель — получить аппроксимацию сглаженного оператора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$ при минимально возможном r.

Пусть $|\tau|\leqslant\tau^0$. Применим теорему 2.1. В силу (2.8) (с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$)

$$\begin{aligned}\Big\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\Big\|&\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\\ &\leqslant (2C_1|\tau|+C_2\varepsilon^{-2}|s||\tau|^3)\varepsilon^3|\tau|^{-3}\leqslant(2C_1+C_2|s|)\varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь пришлось взять $r=3$. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 2.3. *При $s\in\mathbb{R}$ и $|\tau|\leqslant\tau^0$ справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\Big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\leqslant(2C_1+C_2|s|)\varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1, C_2 контролируются через многочлены от величин (1.10).

2.3. Улучшение аппроксимации оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ при дополнительных предположениях. Теорема 2.2 позволяет усилить результат теоремы 2.3 в случае, когда $N_{11}=0$.

Теорема 2.4. *Пусть оператор N_{11}, определённый в (1.31), равен нулю: $N_{11}=0$. Тогда при $s\in\mathbb{R}$ и $|\tau|\leqslant\tau^0$ справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\Big\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant(2C_1'+C_6|s|)\varepsilon. \tag{2.15}$$

Постоянные C_1', C_6 контролируются через многочлены от величин (1.10).

Доказательство. Заметим, что при $|t|\geqslant\sqrt{\varepsilon}$ выполнено $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\leqslant\varepsilon$. Поэтому левая часть в (2.15) не превосходит 2ε. Таким образом, достаточно считать, что $|t|<\sqrt{\varepsilon}$. При условии $N_{11}=0$ выполнено $\tau^3N(\vartheta)=t^2\varepsilon N_{12}+t\varepsilon^2N_{21}+\varepsilon^3N_{22}$. Воспользуемся теоремой 2.2 с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$. Тогда при $|t|<\sqrt{\varepsilon}$ получаем оценку

$$\begin{aligned}\Big\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\Big\|&\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\leqslant\big(2C_1|\tau|+C_4\varepsilon^{-2}|s|\tau^4+C_5\varepsilon^{-2}|s|(t^2\varepsilon+|t|\varepsilon^2+\varepsilon^3)\big)\,\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\leqslant(2C_1+C_6|s|)\,\varepsilon\end{aligned}$$

где $C_5=\max\{C_{1,2},C_{2,1},C_{2,2}\}$, $C_6=2C_4+\frac{5}{2}C_5$. Отсюда вытекает (2.15) при $C_1'=\max\{1,C_1\}$. $\square$

§3. Подтверждение точности результата

3.1. Параметр $\varkappa$. Рассмотрим операторный пучок (1.7) при наличии связи между параметрами $t=c\varepsilon^{2/3}$, $c>0$. Введём параметр $\varkappa=\varepsilon^{1/3}$. Оператор $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$ будем обозначать $\mathfrak{B}(\varkappa)$. Формальная структура оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ такова:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\varkappa)=X_0^*X_0+c\varkappa^2(X_0^*X_1+X_1^*X_0)+c^2\varkappa^4X_1^*X_1+\varkappa^3(Y_2^*Y_0+Y_0^*Y_2)\\ +c\varkappa^5(Y_2^*Y_1+Y_1^*Y_2)+\varkappa^6(Q+\lambda Q_0).\end{aligned}$$

Заметим, что согласно своему определению параметр $\varkappa$ неотрицателен, но оператор $\mathfrak{B}(\varkappa)$ можно рассматривать при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, что и подразумевается ниже. Выберем число $\varkappa_0 = \varkappa_0(c) > 0$, так что

$$\sqrt{c^2\varkappa_0^4 + \varkappa_0^6} < \tau^0.$$

Тогда согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_l(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa) = \lambda_l(\varkappa)\varphi_l(\varkappa), \quad |\varkappa| \leqslant \varkappa_0, \quad l = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

причём $\varphi_l(\varkappa)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $F(\varkappa)\mathfrak{H}$. Здесь мы обозначили через $F(\varkappa)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ для интервала $[0, \delta]$. Для достаточно малого $\varkappa_* = \varkappa_*(c) \leqslant \varkappa_0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l(\varkappa) = \lambda_l^{(2)}\varkappa^2 + \lambda_l^{(3)}\varkappa^3 + \lambda_l^{(4)}\varkappa^4 + \lambda_l^{(5)}\varkappa^5 + \lambda_l^{(6)}\varkappa^6 + \dots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \tag{3.2}$$

$$\varphi_l(\varkappa) = \omega_l + \varkappa\varphi_l^{(1)} + \varkappa^2\varphi_l^{(2)} + \varkappa^3\varphi_l^{(3)} + \varkappa^4\varphi_l^{(4)} + \varkappa^5\varphi_l^{(5)} + \dots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*. \tag{3.3}$$

Векторы ω_l, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Запишем (3.1) как тождество для форм:

$$\begin{aligned}
&(X_0\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\varkappa^2\big((X_0\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\
&\quad + c^2\varkappa^4(X_1\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + \varkappa^3\big((Y_0\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) \\
&\quad + c\varkappa^5\big((Y_1\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_1\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) + \varkappa^6\big(\mathfrak{q}[\varphi_l(\varkappa), \zeta] + \lambda(Q_0\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}\big) \\
&\quad = \lambda_l(\varkappa)(\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \forall \zeta \in \operatorname{Dom} X_0.
\end{aligned}$$

Подставим сюда ряды (3.2), (3.3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$. Имеем:

$$\varkappa^0: \qquad (X_0\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0, \tag{3.4}$$

$$\varkappa^1: \qquad (X_0\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{3.5}$$

Равенство (3.4) обеспечено включением $\omega_l \in \mathfrak{N}$. Подставляя $\zeta = \varphi_l^{(1)}$ в равенство (3.5), получаем, что $\varphi_l^{(1)} \in \mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} c_{lk}^{(1)}\omega_k, \quad l = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

Далее, учитывая $X_0\omega_l = X_0\varphi_l^{(1)} = 0$ и $Y_0\omega_l = 0$, имеем

$$\varkappa^2: \qquad \begin{aligned}(X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} &= \lambda_l^{(2)}(\omega_l,\zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\zeta \in \operatorname{Dom} X_0,\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\varkappa^3: \qquad \begin{aligned}&(X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\omega_l, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad = \lambda_l^{(2)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(3)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ в (3.7), (3.8), получаем, что $\lambda_l^{(2)} = \lambda_l^{(3)} = 0$. В терминах операторов Z и $\widetilde{Z}$ решения уравнений (3.7), (3.8) можно записать в виде

$$\varphi_l^{(2)} = cZ\omega_l + \widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \qquad \widetilde{\varphi}_l^{(2)} \in \mathfrak{N}, \tag{3.9}$$

$$\varphi_l^{(3)} = cZ\varphi_l^{(1)} + \widetilde{Z}\omega_l + \widetilde{\varphi}_l^{(3)}, \qquad \widetilde{\varphi}_l^{(3)} \in \mathfrak{N}. \tag{3.10}$$

Приравнивая коэффициенты при $\varkappa^4$, получаем

$$\varkappa^4: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\big((X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &\quad + c^2(X_1\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

С учётом (1.15) и (3.9) при $\zeta \in \mathfrak{N}$ соотношение (3.11) принимает вид

$$c^2(R\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}.$$

В силу (1.16) это означает, что

$$c^2(S\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{3.12}$$

то есть числа $\lambda_l^{(4)}$ и векторы ω_l являются собственными для оператора c^2S:

$$c^2S\omega_l = \lambda_l^{(4)}\omega_l, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

(В дальнейшем для определённости будем считать, что $\lambda_l^{(4)}$ занумерованы в порядке неубывания.) Если все собственные числа оператора S простые, то из (3.13) определяются (с точностью до фазового множителя) векторы ω_l.

Замечание 3.1. *Нам также будет удобно пользоваться другими обозначениями, отслеживая кратности собственных значений. Обозначим количество различных собственных значений оператора c^2S через p и обозначим их кратности через $k_1, \ldots, k_p$ (разумеется, $k_1 + \ldots + k_p = n$). Переобозначим различные собственные значения через $\lambda_j^{\circ,(4)}$, $j = 1, \ldots, p$. Тогда*

$$\lambda_1^{\circ,(4)} := \lambda_1^{(4)} = \ldots = \lambda_{k_1}^{(4)} < \lambda_2^{\circ,(4)} := \lambda_{k_1+1}^{(4)} = \ldots = \lambda_{k_1+k_2}^{(4)} < \ldots$$
$$\ldots < \lambda_p^{\circ,(4)} := \lambda_{n-k_p+1}^{(4)} = \ldots = \lambda_n^{(4)}.$$

Введём следующие обозначения: $\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(c^2S - \lambda_j^{\circ,(4)}I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \ldots, p$. Тогда $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. Пусть P_j — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_j$. Тогда $P = \sum_{j=1}^p P_j$, $P_jP_l = 0$ при $j \neq l$.

Равенство коэффициентов при $\varkappa^5$ даёт

$$\varkappa^5: \quad \begin{aligned} &(X_0\varphi_l^{(5)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\big((X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}\big) \\ &\quad + c^2(X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(2)}, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\qquad + c\big((Y_1\omega_l, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\omega_l, Y_1\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big) = \lambda_l^{(5)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta \in \mathfrak{N}$. Воспользуемся формулами (3.9), (3.10), определениями операторов R и S, а также тождествами

$$(X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \tag{3.14}$$

$$(Y_0Z\omega_l, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = -(X_0Z\omega_l, X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \tag{3.15}$$

следующими из определений операторов Z и $\widetilde{Z}$. Получаем

$$c^2(S\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(5)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \tag{3.16}$$

где

$$T := -(X_0 Z)^*(X_0\widetilde{Z}) - (X_0\widetilde{Z})^* X_0 Z + Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2. \tag{3.17}$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ и используя (3.13), находим

$$\lambda_l^{(5)} = c(T\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Далее, подставим (3.6) в (3.16). Перебирая $\zeta = \omega_k$, $k = 1, \ldots, n$, получаем

$$(\lambda_l^{(4)} - \lambda_k^{(4)}) c_{lk}^{(1)} = c(T\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}}, \quad l, k = 1, \ldots, n,\ l \neq k. \tag{3.19}$$

Отсюда определяются коэффициенты $c_{lk}^{(1)}$ с индексами $\{(l,k)\colon \lambda_l^{(4)} \neq \lambda_k^{(4)}\}$.

Пусть $\lambda_q^{\circ,(4)}$ — собственное число задачи (3.13) кратности k_q (то есть $\lambda_i^{(4)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Из (3.19) вытекают соотношения

$$(T\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0, \quad l, k = i, \ldots, i + k_q - 1,\ l \neq k. \tag{3.20}$$

Равенства (3.18) с $l = i, \ldots, i+k_q-1$ и (3.20) можно трактовать как задачу на собственные числа

$$c\mathscr{Y}^{(q)}\omega_l = \lambda_l^{(5)}\omega_l, \quad l = i, \ldots, i + k_q - 1, \tag{3.21}$$

для самосопряжённого оператора $\mathscr{Y}^{(q)} := P_q T\big|_{\mathfrak{N}_q}$. Если все собственные числа задачи (3.21) простые, то тогда векторы ω_l, $l = i, \ldots, i + k_q - 1$, определяются с точностью до фазового множителя.

Замечание 3.2. *Введём также и другие обозначения по аналогии с замечанием 3.1. Будем считать, что $\lambda_l^{(5)}$, где $l = i, \ldots, i+k_q-1$, занумерованы в порядке неубывания. Обозначим количество различных собственных значений оператора $c\mathscr{Y}^{(q)}$ через $p'(q)$ и обозначим их кратности через $k_{1,q}, \ldots, k_{p'(q),q}$ (разумеется, $k_{1,q} + \ldots + k_{p'(q),q} = k_q$). Переобозначим различные собственные значения через $\lambda_{j,q}^{\circ,(5)}$, где $j = 1, \ldots, p'(q)$. Тогда*

$$\lambda_{1,q}^{\circ,(5)} := \lambda_i^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_{1,q}-1}^{(5)} < \lambda_{2,q}^{\circ,(5)} := \lambda_{i+k_{1,q}}^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_{1,q}+k_{2,q}-1}^{(5)} < \ldots$$
$$\ldots < \lambda_{p'(q),q}^{\circ,(5)} := \lambda_{i+k_q-k_{p'(q),q}}^{(5)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(5)}.$$

Введём следующие обозначения:

$$\mathfrak{N}_{j,q} = \operatorname{Ker}(c\mathscr{Y}^{(q)} - \lambda_{j,q}^{\circ,(5)} I_{\mathfrak{N}_q}), \quad \textit{где} \quad j = 1, \ldots, p'(q).$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} \oplus \mathfrak{N}_{j,q}.$$

Пусть $P_{j,q}$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{j,q}$. Тогда

$$P_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} P_{j,q}$$

и

$$P_{j,q} P_{l,q} = 0 \quad \textit{при} \quad j \neq l.$$

Замечание 3.3. *Отметим, что $\lambda_l^{(4)} \sim c^2$, $\lambda_l^{(5)} \sim c$, где $l = 1, \ldots, n$.*

Далее, рассмотрим соотношение $(\varphi_l(\varkappa),\varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}}=\delta_{lk}$. Подставляя в него ряды (3.3) и приравнивая коэффициенты при степенях $\varkappa$, получаем равенства:

$$\begin{aligned}
&\varkappa^0: &&(\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}}=\delta_{lk},\\
&\varkappa^1: &&(\omega_l,\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}}+(\varphi_l^{(1)},\omega_k)_{\mathfrak{H}}=0, &&(3.22)\\
&\varkappa^2: &&(\omega_l,\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}}+(\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}}+(\varphi_l^{(2)},\omega_k)_{\mathfrak{H}}=0. &&(3.23)
\end{aligned}$$

Из (3.9) и (3.23) следуют равенства

$$(\omega_l,\widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}}+(\varphi_l^{(1)},\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}}+(\widetilde{\varphi}_l^{(2)},\omega_k)_{\mathfrak{H}}=0. \tag{3.24}$$

Далее нам будет удобно воспользоваться соотношением $(\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa),\varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}}=\lambda_l(\varkappa)\delta_{lk}$. Равенство коэффициентов при $\varkappa^6$ даёт

$$\varkappa^6:\quad \begin{aligned}
&(X_0\varphi_l^{(2)},X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_0\varphi_l^{(3)},X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_0\varphi_l^{(4)},X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\\
&+c\big((X_0\varphi_l^{(4)},X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}+(X_0\varphi_l^{(3)},X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_0\varphi_l^{(2)},X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\\
&+(X_1\omega_l,X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_1\varphi_l^{(1)},X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_1\varphi_l^{(2)},X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\big)\\
&+c^2\big((X_1\varphi_l^{(2)},X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}+(X_1\varphi_l^{(1)},X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*}+(X_1\omega_l,X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\big)\\
&\quad+(Y_0\varphi_l^{(3)},Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}+(Y_0\varphi_l^{(2)},Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}+(Y_2\varphi_l^{(1)},Y_0\varphi_k^{(2)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&\qquad+(Y_2\omega_l,Y_0\varphi_k^{(3)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}+c\big((Y_1\omega_l,Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}+(Y_1\varphi_l^{(1)},Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&\quad+(Y_2\omega_l,Y_1\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}+(Y_2\varphi_l^{(1)},Y_1\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\big)\\
&\qquad+\mathfrak{q}[\omega_l,\omega_k]+\lambda(Q_0\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}}=\lambda_l^{(6)}\delta_{lk}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

В силу (3.9) и определений операторов R и S имеем

$$\begin{aligned}
c(X_0\varphi_l^{(2)},X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}&+c^2(X_1\omega_l,X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}+c(X_1\varphi_l^{(2)},X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}\\
&+c^2(X_1\varphi_l^{(2)},X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}=c^2(R\omega_l,X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}+c^2(X_1\varphi_l^{(2)},R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}\\
&=c^3(Z^*X_1^*RP\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}}+c^3((RP)^*X_1Z\omega_l,\omega_k)_{\mathfrak{H}}\\
&\qquad+c^2(S\omega_l,\widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}}+c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)},\omega_k)_{\mathfrak{H}}.
\end{aligned}$$

Далее, из (3.9) и тождества $(X_1\omega_l,X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}=-(X_0Z\omega_l,X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора Z) следует, что

$$\begin{aligned}
(X_0\varphi_l^{(2)},X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*}&+c(X_1\omega_l,X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*}\\
&+(X_0\varphi_l^{(4)},X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}+c(X_0\varphi_l^{(4)},X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}=0.
\end{aligned}$$

Затем воспользуемся (3.8) при $\zeta=\varphi_k^{(3)}$:

$$(X_0\varphi_l^{(3)},X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*}+c(X_1\varphi_l^{(1)},X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*}+(Y_2\omega_l,Y_0\varphi_k^{(3)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}=0.$$

Наконец, в силу (3.9), (3.10), (3.14), (3.15) и тождества $(Y_0\widetilde{Z}\omega_l,Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}=-(X_0\widetilde{Z}\omega_l,X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора $\widetilde{Z}$),

$$c(X_0\varphi_l^{(3)},X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*}+c^2(X_1\varphi_l^{(1)},X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*}+(Y_0\varphi_l^{(3)},Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$$

$$+ (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$$
$$= c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - c\big((X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0Z\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\varphi_l^{(1)}, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}$$
$$+(X_0Z\omega_l, X_0\widetilde{Z}\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\widetilde{Z}\varphi_l^{(1)}, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}\big) - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}.$$

В итоге, с учётом (1.31) и (3.17) равенство (3.25) принимает следующий вид:

$$\varkappa^6 : \quad \begin{aligned} &c^3(N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c^2(S\omega_l, \widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &+ c(T\varphi_l^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Пусть $\lambda_q^{\circ,(4)}$ — собственное число задачи (3.13) кратности k_q (то есть $\lambda_i^{(4)} = \ldots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$). Пусть $l, k = i, \ldots, i + k_q - 1$. Используя (3.6), (3.13) и (3.24), получаем

$$\begin{aligned} &c^2(S\omega_l, \widetilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\widetilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &= c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - \lambda_q^{\circ,(4)}(\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} = \sum_{r'=1}^{n}(\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{lr'}^{(1)}\overline{c_{kr'}^{(1)}}, \\ &\qquad l, k = i, \ldots, i + k_q - 1. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Далее, в силу (3.6), (3.18) и (3.19) имеем

$$\begin{aligned} &c(T\varphi_l^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = c\sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}(T\omega_{r'}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}\big((\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{r'k}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)}\delta_{r'k}\big), \quad l, k = i, \ldots, i + k_q - 1. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Аналогично, используя (3.6), (3.18) и (3.19), получаем

$$\begin{aligned} &c(T\omega_l, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} = c\sum_{r'=1}^{n} \overline{c_{kr'}^{(1)}}(T\omega_l, \omega_{r'})_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{r'=1}^{n} \overline{c_{kr'}^{(1)}}\big((\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)})c_{lr'}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)}\delta_{lr'}\big), \quad l, k = i, \ldots, i + k_q - 1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Таким образом, учитывая (3.18), (3.19), (3.27)–(3.29), а также равенство $c_{lk}^{(1)} = -\overline{c_{kl}^{(1)}}$ (следующее из (3.22)), мы можем записать (3.26) для $l, k = i, \ldots, i + k_q - 1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &c^3(N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c_{lk}^{(1)}(\lambda_k^{(5)} - \lambda_l^{(5)}) + \breve{\mathfrak{h}}^{(q)}[\omega_l, \omega_k] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l, X_0\widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+\mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}, \quad l, k = i, \ldots, i + k_q - 1, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где

$$\breve{\mathfrak{h}}^{(q)}[\omega_l, \omega_k] := \sum_{r'=1}^{n} c_{lr'}^{(1)}(\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)})c_{r'k}^{(1)}$$

$$= c^2 \sum_{\substack{r' \in \{1,\dots,n\} \\ r' \neq i,\dots,i+k_q-1}} \frac{1}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)}} (T\omega_l, \omega_{r'})_{\mathfrak{H}} (\omega_{r'}, T\omega_k)_{\mathfrak{H}}$$

$$= \sum_{q' \in \{1,\dots,p\}:\ q' \neq q} \frac{c^2}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{q'}^{\circ,(4)}} (P_{q'} T\omega_l, T\omega_k)_{\mathfrak{H}}.$$

Отметим, что форма $\check{\mathfrak{y}}^{(q)}$ не зависит от c в силу замечания 3.3.

Пусть $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$ — $k_{q',q}$-кратное собственное значение задачи (3.21): $\lambda_j^{(5)} = \ldots = \lambda_{j+k_{q',q}-1}^{(5)}$, где $j = j(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$. Равенства (3.30), где $l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют следующую систему:

$$c^3 (N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + \check{\mathfrak{y}}^{(q)}[\omega_l, \omega_k] - (X_0 \widetilde{Z}\omega_l, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda (Q_0 \omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)} \delta_{lk}, \qquad l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1.$$

Эти уравнения можно трактовать как задачу на собственные числа:

$$\mathscr{Y}^{(q',q)}(c)\omega_l = \lambda_l^{(6)} \omega_l, \qquad l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \tag{3.31}$$

для самосопряжённого оператора $\mathscr{Y}^{(q',q)}(c) := c^3 P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + \Upsilon^{(q',q)}$, где $\Upsilon^{(q',q)} := P_{q',q} \check{Y}^{(q)}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + P_{q',q}\big(-(X_0\widetilde{Z})^* X_0 \widetilde{Z} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\big)\big|_{\mathfrak{N}_{q',q}}$, а $\check{Y}^{(q)}$ — оператор, отвечающий форме $\check{\mathfrak{y}}^{(q)}$.

Замечание 3.4. *Векторы ω_l, $l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, вообще говоря, зависят от c. Если при каком-то значении параметра c у задачи (3.31) имеется кратное собственное значение, то (3.31) недостаточно для определения базиса в соответствующем собственном подпространстве.*

Выпишем получившееся выражение для $\lambda_l^{(6)}$:

$$c^3 (N_{11}\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} + \check{\mathfrak{y}}^{(q)}[\omega_l, \omega_l] - (X_0 \widetilde{Z}\omega_l, X_0 \widetilde{Z}\omega_l)_{\mathfrak{H}_*} \\ + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_l] + \lambda (Q_0 \omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}, \quad l = 1, \dots, n. \tag{3.32}$$

Здесь q — номер, такой что $\lambda_q^{\circ,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

Проведём аналогичные рассмотрения для оператора $L(\varkappa)$, который получается из (1.24) при $t = c\varkappa^2$, $\varepsilon = \varkappa^3$:

$$L(\varkappa) = c^2 \varkappa^4 S - c\varkappa^5 \big((X_0 Z)^* (X_0 \widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + (X_0 \widetilde{Z})^* (X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} \big) \\ + c\varkappa^5 P (Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \varkappa^6 \big(- (X_0 \widetilde{Z})^* (X_0 \widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \big).$$

Согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$L(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa) = \lambda_l^0(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa), \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_0, \quad l = 1, \dots, n,$$

причём $\varphi_l^0(\varkappa)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Для достаточно малого $\varkappa_* \leqslant \varkappa_0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l^0(\varkappa) = \lambda_l^{0,(4)} \varkappa^4 + \lambda_l^{0,(5)} \varkappa^5 + \lambda_l^{0,(6)} \varkappa^6 + \ldots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \tag{3.33}$$

$$\varphi_l^0(\varkappa) = \omega_l^0 + \varkappa \varphi_l^{0,(1)} + \varkappa^2 \varphi_l^{0,(2)} + \ldots, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*. \tag{3.34}$$

Векторы ω_l^0, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{0,(r)} = \sum_{k=1}^{n} c_{lk}^{0,(r)} \omega_k^0, \quad \text{где} \quad l=1,\dots,n.$$

Аналоги уравнений (3.12), (3.16), (3.26) для $L(\varkappa)$ выглядят следующим образом:

$$\varkappa^4: \qquad c^2(S\omega_l^0,\zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(4)}(\omega_l^0,\zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta\in\mathfrak{N}, \tag{3.35}$$

$$\varkappa^5: \qquad \begin{aligned} &c^2(S\varphi_l^{0,(1)},\zeta)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l^0,\zeta)_{\mathfrak{H}} \\ &\qquad = \lambda_l^{0,(5)}(\omega_l^0,\zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{0,(4)}(\varphi_l^{0,(1)},\zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta\in\mathfrak{N}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\varkappa^6: \qquad \begin{aligned} &c^2(S\omega_l^0,\varphi_k^{0,(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(1)},\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(2)},\omega_k^0)_{\mathfrak{H}} \\ &\quad + c(T\varphi_l^{0,(1)},\omega_k^0)_{\mathfrak{H}} + c(T\omega_l^0,\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} - (X_0\widetilde{Z}\omega_l^0, X_0\widetilde{Z}\omega_k^0)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\qquad + \mathfrak{q}[\omega_l^0,\omega_k^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0,\omega_k^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}\delta_{lk}. \end{aligned}$$

Равенства (3.35), (3.36) совпадают с (3.12), (3.16), поэтому аналоги уравнений (3.13) и (3.21) для $L(\varkappa)$ выглядят так же и мы можем выбрать $\lambda_l^{0,(4)} = \lambda_l^{(4)}$, $\lambda_l^{0,(5)} = \lambda_l^{(5)}$, $l=1,\dots,n$. Если $\lambda_l^{(4)}$ — простое собственное число задачи (3.13), то можно положить $\omega_l^0 = \omega_l$. Далее, если среди собственных чисел задачи (3.13) есть собственное число $\lambda_q^{\circ,(4)}$ кратности $k_q > 1$, но $\lambda_l^{(5)}$ — простое собственное значение задачи (3.21), тогда мы также можем выбрать $\omega_l^0 = \omega_l$. Но, если среди собственных чисел задачи (3.21) есть $k_{q',q}$-кратное ($k_{q',q} > 1$) собственное число $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, то в общем случае нельзя положить $\omega_l^0 = \omega_l$, $l = j,\dots,j+k_{q',q}-1$, где $j = j(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q}$. Аналог уравнения (3.31) для $L(\varkappa)$ выглядит следующим образом:

$$\Upsilon^{(q',q)}\omega_l^0 = \lambda_l^{0,(6)}\omega_l^0, \quad l = j,\dots,j+k_{q',q}-1. \tag{3.37}$$

Отметим также, что если у задачи (3.37) имеется кратное собственное значение, то (3.37) недостаточно для определения базиса в соответствующем собственном подпространстве.

В заключение выпишем выражение для $\lambda_l^{0,(6)}$:

$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{y}}^{(q)}[\omega_l^0,\omega_l^0] - (X_0\widetilde{Z}\omega_l^0, X_0\widetilde{Z}\omega_l^0)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l^0,\omega_l^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0,\omega_l^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}, \\ l=1,\dots,n, \end{aligned} \tag{3.38}$$

где q — номер, такой что $\lambda_q^{\circ,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

3.2. Теорема о подтверждении точности. Сейчас мы докажем, что результат теоремы 2.3 является точным.

Теорема 3.5. *Пусть* $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} \neq 0$ *для некоторых* $q\in\{1,\dots,p\}$, $q'\in\{1,\dots,p'(q)\}$. *Пусть* $s\neq 0$ *и* $0 \leqslant r < 3$. *Тогда не существует такой константы* $C(s) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\| e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P \right\| \varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C(s)\varepsilon \tag{3.39}$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ *и* ε.

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leqslant r < 3$. Начнём с предварительного замечания. Поскольку $F(t,\varepsilon)^\perp P = (P - F(t,\varepsilon))P$, то из (1.25) вытекает оценка

$$\left\| e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}F(t,\varepsilon)^\perp P \right\| \varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1\varepsilon, \qquad |\tau| \leqslant \tau^0. \tag{3.40}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $s \neq 0$ и $2 \leqslant r < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (3.39) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу оценки (3.40) это предположение равносильно существованию постоянной $\widetilde{C}(s)$, такой что

$$\left\| \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)} F(t,\varepsilon) - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P} P\right) P \right\| \varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{C}(s)\varepsilon \tag{3.41}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Положим $t = c\varepsilon^{2/3}$, где константу $c > 0$ выберем позже.

При $|\varkappa| \leqslant \varkappa_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (3.2), (3.3), (3.33), (3.34). При $|\varkappa| \leqslant \varkappa_0$ имеем:

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(\varkappa)} F(\varkappa) = \sum_{k=1}^{n} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k(\varkappa)} (\,\cdot\,, \varphi_k(\varkappa))\varphi_k(\varkappa), \tag{3.42}$$

$$e^{-is\varepsilon^{-2}L(\varkappa)P} P = \sum_{k=1}^{n} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k^0(\varkappa)} (\,\cdot\,, \varphi_k^0(\varkappa))\varphi_k^0(\varkappa). \tag{3.43}$$

Из сходимости рядов (3.3), (3.34) следует, что

$$\|\varphi_k(\varkappa) - \omega_k\| \leqslant c_1|\varkappa|, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \qquad k = 1,\dots,n, \tag{3.44}$$

$$\|\varphi_k^0(\varkappa) - \omega_k^0\| \leqslant c_1|\varkappa|, \qquad |\varkappa| \leqslant \varkappa_*, \qquad k = 1,\dots,n. \tag{3.45}$$

В силу (3.41)–(3.45) существует постоянная $\widehat{C}(s)$, такая что

$$\begin{split} \left\| \sum_{j'=1}^{n} \Big(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)} (\,\cdot\,, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda^0_{j'}(\varkappa)} (\,\cdot\,, \omega^0_{j'})\omega^0_{j'} \Big) \right\| \varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \\ \leqslant \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2, \end{split} \tag{3.46}$$

при всех достаточно малых $\varkappa$. Рассмотрим блок оператора под знаком нормы в (3.46) в подпространстве $\mathfrak{N}_{q',q}$. Справедлива оценка

$$\begin{split} \left\| \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \Big(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)} (\,\cdot\,, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda^0_{j'}(\varkappa)} (\,\cdot\,, \omega^0_{j'})\omega^0_{j'} \Big) \right\| \varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \\ \leqslant \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2, \end{split} \tag{3.47}$$

при всех достаточно малых $\varkappa$, где $j = k_1 + \ldots + k_{q-1} + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q} + 1$. Используя сходящиеся степенные ряды (3.2) и (3.33), мы можем записать

$$\begin{split} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda^{\circ,(5)}_{q',q})} e^{-is(\lambda^{(6)}_{j'} + O(\varkappa))}, \\ j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1, \end{split} \tag{3.48}$$

$$\begin{split} e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda^0_{j'}(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda^{\circ,(5)}_{q',q})} e^{-is(\lambda^{0,(6)}_{j'} + O(\varkappa))}, \\ j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1. \end{split} \tag{3.49}$$

Очевидно,

$$\left| e^{-is(\lambda^{(6)}_{j'} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda^{(6)}_{j'}} \right| = O(\varkappa), \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1, \tag{3.50}$$

$$\left| e^{-is(\lambda^{0,(6)}_{j'} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda^{0(6)}_{j'}} \right| = O(\varkappa), \qquad j' = j,\dots,j+k_{q',q}-1. \tag{3.51}$$

Из (3.47)–(3.51) следует, что справедлива оценка

$$\Big\|\sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1}\Big(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'}-e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0\Big)\Big\|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \\ \leqslant \check{C}(s)\varepsilon,\quad t=c\varepsilon^{2/3}, \tag{3.52}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon=\varkappa^3$.

Предположим, что $\dim\mathfrak{N}_{q',q}=1$. Тогда $\omega_j=\omega_j^0$ и из (3.52) следует, что

$$\Big|e^{-is\lambda_j^{(6)}}-e^{-is\lambda_j^{0,(6)}}\Big|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant\check{C}(s)\varepsilon,\qquad t=c\varepsilon^{2/3}, \tag{3.53}$$

при всех достаточно малых ε. Левая часть неравенства (3.53) может быть записана как $2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)}-\lambda_j^{0,(6)})\right)\right|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2}$. Пользуясь формулами (3.32) и (3.38), получаем равенство $\lambda_j^{(6)}-\lambda_j^{0,(6)}=c^3(N_{11}\omega_j,\omega_j)$. Выберем $c=\pi^{1/3}|s(N_{11}\omega_j,\omega_j)|^{-1/3}$. Тогда

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)}-\lambda_j^{0,(6)})\right)\right|=2.$$

Отсюда и из (3.53) следует, что функция $\varepsilon^{r/3-1}(c^2+\varepsilon^{2/3})^{-r/2}$ равномерно ограничена при малых ε. Но это неверно, если $r<3$. Мы приходим к противоречию.

Теперь пусть $\dim\mathfrak{N}_{q',q}>1$. В силу (3.31), (3.37) выражение под знаком нормы в (3.52) допускает инвариантную запись:

$$\sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1}\Big(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'})\omega_{j'}-e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\,\cdot\,,\omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0\Big) \\ =e^{-is(c^3P_{q',q}N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q'q}}+\Upsilon^{(q',q)})}-e^{-is\Upsilon^{(q',q)}}. \tag{3.54}$$

Будем считать, что параметр c большой. Положим $\upsilon=c^{-3}$ и рассмотрим операторный пучок $P_{q',q}N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q'q}}+\upsilon\Upsilon^{(q',q)}$. Согласно общей аналитической теории возмущений при достаточно малом υ существуют вещественно-аналитические функции $\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{N}_{q',q}$-значные функции $\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)$ (ветви собственных векторов), такие что $P_{q',q}(N_{11}+\upsilon\Upsilon^{(q',q)})\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)=\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon)\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$, причём $\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Для достаточно малого υ_* справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(\upsilon)=\chi_{j'}+\widetilde{\lambda}_{j'}^{(1,6)}\upsilon+\dots,\qquad |\upsilon|\leqslant\upsilon_*, \tag{3.55}$$

$$\widetilde{\omega}_{j'}(\upsilon)=\varpi_{j'}+\upsilon\widetilde{\omega}_{j'}^{(1)}+\dots,\qquad |\upsilon|\leqslant\upsilon_*. \tag{3.56}$$

Здесь $\chi_{j'}$ и $\varpi_{j'}$ — собственные числа и собственные векторы оператора $P_{q',q}N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}}$:

$$P_{q',q}N_{11}\varpi_{j'}=\chi_{j'}\varpi_{j'},\quad j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1. \tag{3.57}$$

Векторы $\varpi_{j'}$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$.

Далее, пусть $\widetilde{\omega}_{j'}^0$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$, — ортонормированные собственные векторы оператора $\Upsilon^{(q',q)}$: $\Upsilon^{(q',q)}\widetilde{\omega}_{j'}^0=\lambda_{j'}^{0,(6)}\widetilde{\omega}_{j'}^0$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$. Векторы $\widetilde{\omega}_{j'}^0$, $j'=j,\dots,j+k_{q',q}-1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & e^{-is(c^3 P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q'q}} + \Upsilon^{(q',q)})} - e^{-is\Upsilon^{(q',q)}} \\ & \quad = \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \Big(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}(c)} (\,\cdot\,, \widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3})) \widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} (\,\cdot\,, \widetilde{\omega}_{j'}^0) \widetilde{\omega}_{j'}^0 \Big), \end{aligned} \tag{3.58}$$

где $\lambda_{j'}^{(6)}(c) = c^3 \widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(c^{-3})$.

По условию $P_{q',q} N_{11} P_{q',q} \neq 0$. Тогда в силу (3.57) найдётся номер l такой, что $\chi_l \neq 0$. Применим оператор (3.58) к элементу $\widetilde{\omega}_l(c^{-3})$:

$$\begin{aligned} & e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} \widetilde{\omega}_l(c^{-3}) - \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} (\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}_{j'}^0) \widetilde{\omega}_{j'}^0 \\ & \qquad = \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \Big(e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} \Big) (\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}_{j'}^0) \widetilde{\omega}_{j'}^0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Из (3.56) следует оценка

$$\big\| \widetilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - \varpi_{j'} \big\| = O\left(\frac{1}{c^3} \right), \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \tag{3.60}$$

при больших c. Ясно, что найдётся номер k такой, что $(\varpi_l, \widetilde{\omega}_k^0) \neq 0$, а значит, в силу (3.60) $(\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}_k^0) \neq 0$ при достаточно больших c. Очевидно,

$$\Big| e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_k^{0,(6)}} \Big| = 2 \Big| \sin\left(\frac{1}{2} s \Big(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)} \Big) \right) \Big|.$$

Воспользуемся рядами (3.55). Имеем при больших c:

$$\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)} = c^3 \chi_l + \widetilde{\lambda}_l^{(1,6)} - \lambda_k^{0,(6)} + O\left(\frac{1}{c^3} \right).$$

Выберем c так, чтобы число $s(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)})$ попало в $\frac{\pi}{2}$-окрестность одной из точек множества $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Тогда $2 \left| \sin\left(\frac{1}{2} s(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)}) \right) \right| \geqslant \sqrt{2}$.

Таким образом, из (3.52), (3.54), (3.58) и (3.59) следует, что справедлива оценка

$$\Big| e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_k^{0,(6)}} \Big| \big| (\widetilde{\omega}_l(c^{-3}), \widetilde{\omega}_k^0) \big| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \check{C}(s) \varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3}, \tag{3.61}$$

при всех достаточно малых ε, причём модули в левой части (3.61) не равны нулю. Поэтому функция $\varepsilon^{r/3-1}(c^2 + \varepsilon^{2/3})^{-r/2}$ равномерно ограничена при малых ε, что неверно, если $r < 3$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

§4. Пороговые аппроксимации в случае семейства $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta) = M^* \widehat{\mathfrak{B}}(\tau; \vartheta) M$

4.1. Операторное семейство $A(t) = M^* \widehat{A}(t) M$. Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим ещё одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причём для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. При этом пространство $\mathfrak{H}_*$ остаётся прежним. Пусть $M\colon \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что

$$M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \ X(t) = \widehat{X}(t)M, \tag{4.1}$$

а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введём семейство самосопряжённых операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно, $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$. Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком "$\widehat{\ }$". Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определённый оператор

$$\mathfrak{Q} := (MM^*)^{-1}\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{4.2}$$

Пусть $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора $\mathfrak{Q}$ в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, то есть $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}\mathfrak{Q}|_{\widehat{\mathfrak{N}}}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$. Очевидно, $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [29, предложение 1.2], ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{4.3}$$

Пусть $\widehat{S}\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [4, гл. 1, п. 1.5] установлено тождество

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.4}$$

4.2. Операторное семейство $\mathfrak{B}(\tau;\vartheta) = M^*\widehat{\mathfrak{B}}(\tau;\vartheta)M$. Пусть $\widehat{Y}(t) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — семейство операторов того же вида, что и $Y(t)$, причём для $\widehat{Y}(t)$ выполнены предположения п. 1.2. Пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ при этом остаётся прежним. Положим $Y(t) = \widehat{Y}(t)M$, $M \operatorname{Dom} Y_0 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$, а тогда и $Y_0 = \widehat{Y}_0 M$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$. Поскольку $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$ и выполнено (4.1), то справедливо $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. В силу наших предположений $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ удовлетворяют условию 1.2 с некоторой константой $\widehat{c}_1$:

$$\|\widehat{Y}(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \widehat{c}_1 \|\widehat{X}(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для $Y(t)$ условие 1.2 выполнено с той же константой $c_1 = \widehat{c}_1$:

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, пусть $\widehat{Y}_2\colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — оператор, удовлетворяющий требованиям п. 1.2. Положим $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $M \operatorname{Dom} Y_2 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$. Поскольку $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$ и выполнено (4.1), то $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Пусть условие 1.3 для $\widehat{Y}_2$ выполнено с некоторой константой $\widehat{C}(\nu) > 0$. Тогда

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \ t \in \mathbb{R},$$

для любого $\nu > 0$ с константой $C(\nu) = \widehat{C}(\nu)\|M\|^2 > 0$.

Далее, пусть $\widehat{\mathfrak{q}}[u,v]$ — форма, заданная на пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$, для которой выполнено условие 1.4 с постоянными $\widehat{\kappa}$, $\widehat{c}_0$, $\widehat{c}_2$, $\widehat{c}_3$. Введём в рассмотрение форму $\mathfrak{q}[u,v] = \widehat{\mathfrak{q}}[Mu, Mv]$, $M \operatorname{Dom} \mathfrak{q} = \operatorname{Dom} \widehat{\mathfrak{q}}$. Условие 1.4 для формы $\mathfrak{q}$ выполнено с константами

$$\begin{gathered} c_0 = \|M\|^2 \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 \geqslant 0, \quad c_0 = \|M^{-1}\|^{-2}\widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 < 0, \\ \kappa = \widehat{\kappa}, \qquad c_2 = \widehat{c}_2, \quad c_3 = \|M\|^2 \widehat{c}_3. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Постоянную c_4 можно выбрать следующим образом:

$$c_4 = \|M\|^2 \widehat{c}_4, \tag{4.6}$$

где $\widehat{c}_4 = 4\widehat{\kappa}^{-1}\widehat{c}_1^2 \widehat{C}(\nu)$ при $\nu = \widehat{\kappa}^2(16\widehat{c}_1^2)^{-1}$.

Пусть $\widehat{Q}_0$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Тогда $Q_0 = M^*\widehat{Q}_0 M$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим операторные пучки вида

$$\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^*\widehat{Y}_2) + \varepsilon^2\widehat{Q} + \lambda\varepsilon^2\widehat{Q}_0, \tag{4.7}$$
$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda\varepsilon^2 Q_0.$$

Они связаны соотношением

$$\mathfrak{B}(t,\varepsilon) = M^*\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)M. \tag{4.8}$$

Параметр λ выберем так, чтобы выполнялось условие (1.5) для пучка $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. В силу (4.5), (4.6) и связи $Q_0 = M^*\widehat{Q}_0 M$, получаем, что условие (1.5) выполнено и для пучка $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$.

Отметим, что для оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$ соотношения (1.6) имеют вид

$$\widehat{\beta} = \lambda\|\widehat{Q}_0^{-1}\|^{-1} - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, \qquad \text{если } \lambda \geqslant 0,$$
$$\widehat{\beta} = \lambda\|\widehat{Q}_0\| - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, \qquad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } \widehat{c}_0 + \widehat{c}_4 < 0.$$

Тогда из (4.5), (4.6) вытекает оценка

$$\beta \leqslant \|M\|^2\widehat{\beta}, \qquad \text{если } \lambda \geqslant 0,$$
$$\beta \leqslant \|M^{-1}\|^{-2}\widehat{\beta}, \qquad \text{если } \lambda < 0.$$

В [24, лемма 1.7] были установлены следующие равенства:

$$\widehat{X}_0\widehat{Z}M|_{\mathfrak{N}} = X_0 Z|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}M|_{\mathfrak{N}} = X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.9}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta)\colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon)$, а $\mathcal{S}(\vartheta)$ — росток семейства $\mathfrak{B}(t,\varepsilon)$. Из (1.20), (4.4), (4.9) и равенств $PM^* = PM^*\widehat{P}$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $Q = M^*\widehat{Q}M$, $Q_0 = M^*\widehat{Q}_0 M$ следует тождество

$$\mathcal{S}(\vartheta) = PM^*\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta)M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.10}$$

4.3. Операторы $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$ и $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t)$ введём оператор $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$, действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ решение $\widehat{\phi}_{\mathfrak{Q}}$ задачи $\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_{\mathfrak{Q}} + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0$, $\mathfrak{Q}\widehat{\phi}_{\mathfrak{Q}} \perp \widehat{\mathfrak{N}}$, где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [5, лемма 6.1], оператор Z для семейства $A(t)$ и введённый оператор $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}$ связаны соотношением $\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}} = MZM^{-1}\widehat{P}$. Введём оператор

$$\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}} := \widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{\mathfrak{Q}}. \tag{4.11}$$

Согласно [5, лемма 6.2], оператор N_{11} для семейства $A(t)$ и введённый оператор (4.11) связаны соотношением

$$\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_{11}M^{-1}\widehat{P}. \tag{4.12}$$

Справедлива следующая лемма, доказанная в [35, лемма 5.1].

Лемма 4.1 (см. [35])**.** *Пусть оператор N_{11} определён в (1.31), а оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$ определён в (4.11). Тогда условие $N_{11} = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}} = 0$.*

4.4. Аппроксимация окаймлённой операторной экспоненты. В этом пункте мы находим аппроксимацию для операторной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}$ семейства вида (4.8) в терминах оператора $\widehat{L}(t,\varepsilon)$, отвечающего семейству (4.7), и изоморфизма M. При этом оказывается удобным окаймить экспоненту подходящими множителями. Положим

$$M_0 := (\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{H}}})^{-1/2}. \tag{4.13}$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 3.1 из [8].

Предложение 4.2. *Справедливо равенство*

$$Me^{-is\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P} PM^* = M_0 e^{-is\tau^2 M_0 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0} M_0 \widehat{P}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)U(s), \quad U(0) = PM^*\phi. \tag{4.15}$$

Очевидно, $U(s) = e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P}PM^*\phi$ — решение этой задачи. Используя (4.10) и принимая во внимание равенство $PM^* = M^{-1}M_0^2\widehat{P}$ (которое следует из (4.3) и (4.13)), получаем, что задача (4.15) эквивалентна следующей задаче:

$$i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2 M^{-1}M_0^2 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0^2 (M^*)^{-1} U(s), \quad U(0) = M^{-1}M_0^2\widehat{P}\phi.$$

Сделаем замену $\widehat{U}(s) = M_0^{-1}MU(s)$. Учитывая (4.2) и (4.13), получаем, что $\widehat{U}(s)$ является решением задачи

$$i\frac{d}{ds}\widehat{U}(s) = \tau^2 M_0 \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M_0 \widehat{U}(s), \quad \widehat{U}(0) = M_0\widehat{P}\phi.$$

Её решение: $\widehat{U}(s) = e^{-is\tau^2 M_0\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta)M_0}M_0\widehat{P}\phi$. Из равенства $M_0\widehat{U}(s) = MU(s)$ следует (4.14). $\square$

Введём обозначение

$$J(t;\varepsilon;s) := Me^{-is\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-isM_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0}M_0^{-1}\widehat{P}. \tag{4.16}$$

Следующая лемма является аналогом [35, лемма 5.3].

Лемма 4.3. *В предположениях пп. 4.1, 4.2 справедливы оценки*

$$\|J(t;\varepsilon;s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2 \|e^{-is\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-isL(t,\varepsilon)P}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}, \tag{4.17}$$

$$\|e^{-is\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-isL(t,\varepsilon)P}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J(t;\varepsilon;s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}. \tag{4.18}$$

Применяя (4.17) и принимая во внимание лемму 4.1, из теорем 2.3, 2.4 получаем следующие результаты. Здесь используется обозначение (4.16).

Теорема 4.4. *В предположениях пп. 4.1, 4.2 при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|\tau| \leqslant \tau^0$ выполнена оценка*

$$\|J(t;\varepsilon;\varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(2C_1 + C_2|s|)\varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1, C_2 определены в теореме 2.3.

Теорема 4.5. *Пусть выполнены предположения пп. 4.1, 4.2 и пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$, определённый в (4.11), равен нулю: $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}} = 0$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|\tau| \leqslant \tau^0$ выполнена оценка*

$$\|J(t;\varepsilon;\varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(2C_1' + C_6|s|)\varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1', C_6 определены в теореме 2.4.

4.5. Подтверждение точности результата. Укажем связь коэффициентов $\lambda_l^{(4)}$, ω_l, $l = 1, \ldots, n$, степенных разложений (3.2), (3.3) при $c = 1$ и операторов $\widehat{S}$ и $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \ldots, n$. Тогда из (3.13) и (4.3), (4.4) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \lambda_l^{(4)} \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} \zeta_l, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4.19}$$

Набор $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$: $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_k)_{\widehat{\mathfrak{H}}} = \delta_{lk}$, где $l, k = 1, \ldots, n$.

Перейдём теперь к обозначениям, принятым в замечании 3.1. Напомним, что различные собственные значения оператора S обозначаются через $\lambda_q^{\circ,(4)}$, где $q = 1, \ldots, p$, а соответствующие собственные подпространства — через $\mathfrak{N}_q$. Векторы ω_l, $l = i(q), \ldots, i(q) + k_q - 1$, где $i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_q$. Тогда те же числа $\lambda_q^{\circ,(4)}$, где $q = 1, \ldots, p$, — это различные собственные значения задачи (4.19), а $M\mathfrak{N}_q$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = i(q), \ldots, i(q) + k_q - 1$, образуют базис в $M\mathfrak{N}_q$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$.

Далее, свяжем собственные числа и собственные векторы задачи (3.21) при $c = 1$ и оператор $\widehat{\mathscr{Y}}_M^{(q)} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}\widehat{T}\big|_{M\mathfrak{N}_q}$, где

$$\widehat{T} := -(\widehat{X}_0\widehat{Z})^*\widehat{X}_0\widehat{\widehat{Z}} - (\widehat{X}_0\widehat{\widehat{Z}})^*\widehat{X}_0\widehat{Z} + \widehat{Y}_2^*\widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^*\widehat{Y}_2,$$

а $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}$ — ортопроектор на подпространство $M\mathfrak{N}_q$. Из (4.9), равенств $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$ и $MP_q = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q} MP_q$ видно, что

$$\widehat{\mathscr{Y}}_M^{(q)}\zeta_l = \lambda_l^{(5)} \mathfrak{Q}_{M\mathfrak{N}_q}\zeta_l, \qquad l = i(q), \ldots, i(q) + k_q - 1, \tag{4.20}$$

где $\mathfrak{Q}_{M\mathfrak{N}_q} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}|_{M\mathfrak{N}_q}$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 3.2. Различные собственные значения оператора $\mathscr{Y}^{(q)}$ обозначаются через $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, где $q' = 1, \ldots, p'(q)$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_{q',q}$. Векторы ω_l, $l = j(q',q), \ldots, j(q',q) + k_{q',q} - 1$, где $j(q',q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q} + 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Тогда те же числа $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}$, где $q' = 1, \ldots, p'(q)$, — это различные собственные значения задачи (4.20), а $M\mathfrak{N}_{q',q}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = j(q',q), \ldots, j(q',q) + k_{q',q} - 1$, образуют базис в $M\mathfrak{N}_{q',q}$. Через $\mathcal{P}_{q',q}$ обозначим "косой" проектор на $M\mathfrak{N}_{q',q}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\,\cdot\,, \,\cdot\,)_{\widehat{\mathfrak{H}}}$, то есть

$$\mathcal{P}_{q',q} = \sum_{l=j(q',q)}^{j(q',q)+k_{q',q}-1} (\,\cdot\,, \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l)_{\widehat{\mathfrak{H}}}\zeta_l, \qquad q = 1, \ldots, p, \quad q' = 1, \ldots, p'(q).$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{P}_{q',q} = MP_{q',q}M^{-1}\widehat{P}. \tag{4.21}$$

Лемма 4.6. *Пусть оператор N_{11} определён в (1.31), а оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$ определён в (4.11). Тогда условие $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} = 0$ равносильно равенству $\mathcal{P}_{q',q}^*\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_{q',q} = 0$.*

Доказательство. В силу (4.12) и (4.21) условие $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} = 0$ влечёт $\mathcal{P}_{q',q}^*\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_{q',q} = 0$.

Обратно, пусть $\mathcal{P}_{q',q}^*\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_{q',q} = 0$. Тогда из соотношений (4.12) и (4.21) следует, что $\widehat{P}(M^*)^{-1}P_{q',q}N_{11}P_{q',q}M^{-1}\widehat{\omega} = 0$ для любого $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$. Поскольку M^{-1} — изоморфизм $\widehat{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{N}$, то $\widehat{P}(M^*)^{-1}P_{q',q}N_{11}P_{q',q}\omega = 0$ при любом $\omega \in \mathfrak{N}$. Домножая последнее равенство скалярно на $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}$, получаем, что $(P_{q',q}N_{11}P_{q',q}\omega, M^{-1}\widehat{\eta})_{\mathfrak{H}} = 0$ для всех $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}$. Снова используя свойство $M^{-1}\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, заключаем, что оператор $P_{q',q}N_{11}P_{q',q}$ равен нулю. $\square$

Используя теорему 3.5, лемму 4.6 и оценку (4.18), мы подтверждаем точность теоремы 4.4.

Теорема 4.7. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$ определён в* (4.11). *Пусть $\mathcal{P}^*_{q',q}\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}\mathcal{P}_{q',q} \neq 0$ для некоторых $q \in \{1,\dots,p\}$, $q' \in \{1,\dots,p'(q)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant r < 3$. Тогда не существует такой константы $C(s) > 0$, чтобы оценка*

$$\|J(t;\varepsilon;\varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C(s)\varepsilon \tag{4.22}$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Доказательство. В силу леммы 4.6 из условий теоремы следует, что $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} \neq 0$. Рассуждаем от противного. Пусть для некоторых $s \neq 0$ и $0 \leqslant r < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (4.22) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу оценки (4.18) это означает, что выполнено также неравенство вида (3.39) (с другой константой). Но это противоречит утверждению теоремы 3.5. $\square$

Глава 2. Усреднение периодических дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

§5. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

5.1. Предварительные сведения: решётки и преобразование Гельфанда. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, то есть $\Gamma = \bigl\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j\mathbf{a}_j,\ n_j \in \mathbb{Z}\bigr\}$, и пусть Ω — элементарная ячейка решётки Γ: $\Omega := \bigl\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j\mathbf{a}_j,\ 0 < \xi_j < 1\bigr\}$. Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle\mathbf{b}_l,\mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке Γ. Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ центральную *зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \Bigl\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \colon |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\Bigr\}. \tag{5.1}$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, *вписанного* в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$2r_0 = \min|\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}. \tag{5.2}$$

С решёткой Γ связано дискретное преобразование Фурье $\{\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}\} \mapsto \mathbf{u}$: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2}\sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}e^{i\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle}$, которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma};\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

Через $\widetilde{H}^\sigma(\Omega;\mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^\sigma(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int\limits_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2|\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.3}$$

причём сходимость ряда в правой части (5.3) равносильна включению $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Из (5.1) и (5.3) следует оценка

$$\int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \geqslant \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{5.4}$$

Преобразование Гельфанда $\mathscr{U}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathscr{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},$$

и продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{U}: L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\,\cdot\,) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п.в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и $\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\Omega} \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty$. Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathscr{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\,\cdot\,) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

5.2. Факторизованные операторы $\mathcal{A}$ второго порядка. Пусть

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l,$$

где b_l — постоянные $(m \times n)$-матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). *Предполагается, что* $m \geqslant n$. Рассмотрим символ

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^{d} b_l \xi_l, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Предположим, что $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых α_0, α_1 выполнены неравенства

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{5.5}$$

Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n\times n)$-матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(m \times m)$-матричнозначная функция, такие что

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{5.6}$$

Рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, заданный выражением $\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{X} = \left\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\right\}$.

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально, $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (5.5), (5.6), легко проверить оценки

$$\begin{gathered}\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

5.3. Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$. Рассмотрим замкнутый оператор

$$\mathcal{Y}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn}),$$

действующий по формуле $\mathcal{Y}\mathbf{u}=\mathbf{D}(f\mathbf{u})=\{D_1(f\mathbf{u}),\dots,D_d(f\mathbf{u})\}^{\mathrm{T}}$. Нижняя оценка (5.7) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c_1\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X},\tag{5.8}$$

$$c_1=\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}.\tag{5.9}$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ-периодические $(n\times n)$-матричнозначные функции $a_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,d$, такие, что

$$a_j\in L_\rho(\Omega),\qquad \rho=2\ \text{ при }\ d=1,\quad \rho>d\ \text{ при }\ d\geqslant 2;\quad j=1,\dots,d.\tag{5.10}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{Y}_2\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\ \to\ L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn}),$$

действующий как умножение на $(dn\times n)$-матричнозначную функцию, составленную из матриц a_j^*, $j=1,\dots,d$. Иначе говоря, $\mathcal{Y}_2\mathbf{u}=\{a_1^*f\mathbf{u},\dots,a_d^*f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}$, $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}_2=\operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Используя неравенство Гёльдера, (5.7), (5.10) и компактность вложения $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_p(\Omega)$ при $p=2\rho/(\rho-2)$, можно показать (см. [31, п. 5.2]), что для любого $\nu>0$ существует постоянная $C(\nu)>0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\nu\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\tag{5.11}$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит лишь от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, от $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, α_0, d, ρ и от параметров решётки Γ.

5.4. Форма $q[\mathbf{u},\mathbf{u}]$. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Γ-периодическая борелевская σ-конечная мера $d\mu(\mathbf{x})=\{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, где $j,l=1,\dots,n$, со значениями в классе эрмитовых $(n\times n)$-матриц. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|u(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$q[\mathbf{u},\mathbf{v}]=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\,,\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

На меру $d\mu$ накладывается следующее *условие*:

Условие 5.1. *Для любых $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ существуют постоянные $\widehat{c}_0\in\mathbb{R}$, $\widetilde{c}_2\geqslant 0$, $\widehat{c}_3\geqslant 0$, $0\leqslant\widetilde{c}<\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, такие, что справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_\Omega\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\right|\\ \leqslant\left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}+\widehat{c}_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}+\widehat{c}_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2},\\ \int\limits_\Omega\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\geqslant-\widetilde{c}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}-\widehat{c}_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)},\qquad \mathbf{u},\mathbf{v}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n).\end{gathered}$$

Из условия 5.1 вытекают оценки

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{v}\rangle\right| \leqslant \Big(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \Big(\widetilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}, \\
&\int\limits_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle \geqslant -\widetilde{c}\, \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} - c_0 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n),
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

с постоянными $c_0 = \widehat{c}_0 \|f\|^2_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 \geqslant 0$, $c_0 = \widehat{c}_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}$, если $\widehat{c}_0 < 0$; $c_3 = \widehat{c}_3 \|f\|^2_{L_\infty}$. Запишем неравенства (5.12) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. С учётом (5.7) получаем

$$
\begin{aligned}
&\big|q[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}]\big| \leqslant \big(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big)^{1/2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \big(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big)^{1/2}, \\
&\big|q[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}]\big| \geqslant -(1-\kappa) \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X},
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

где

$$
c_2 = \widetilde{c}_2 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \kappa = 1 - \widetilde{c} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \kappa \leqslant 1. \tag{5.14}
$$

Примеры форм, заведомо удовлетворяющих условию 5.1, приведены в [31, п. 5.5]. Приведём один пример.

Пример 5.2 (см. [31]). *Предположим, что мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то есть $d\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(n \times n)$-матричнозначная функция в $\mathbb{R}^d$, такая, что*

$$
\mathcal{Q} \in L_\varrho(\Omega), \qquad \varrho = 1 \ \text{при}\ d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \ \text{при}\ d \geqslant 2. \tag{5.15}
$$

Тогда $q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \, d\mathbf{x}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При условии (5.15) в силу теоремы вложения для любого $\nu > 0$ существует такое $C_{\mathcal{Q}}(\nu) > 0$, что

$$
\int\limits_{\Omega} |\mathcal{Q}(\mathbf{x})| |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leqslant \nu \int\limits_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + C_{\mathcal{Q}}(\nu) \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n).
$$

Отсюда следует, что условие 5.1 выполнено, причём постоянные можно выбирать следующим образом: $\widetilde{c}_2 = 1$, $\widehat{c}_3 = C_{\mathcal{Q}}(1)$, $\widetilde{c} = \nu$ и $\widehat{c}_0 = C_{\mathcal{Q}}(\nu)$ при $2\nu = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Тогда неравенства (5.13) выполнены при $\kappa = 1/2$, $c_2 = \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$. Постоянная c_3 контролируется через d, ϱ, $\|\mathcal{Q}\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $\|f\|_{L_\infty}$ и параметры решётки, а c_0 зависит от тех же параметров и от α_0, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

5.5. Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &+ 2\varepsilon \operatorname{Re} (\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2 \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] \\
&+ \varepsilon^2 \lambda (\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X},
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на Γ-периодическую положительно определённую и ограниченную $(n\times n)$-матричнозначную функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$. Ограничение на λ наложим позже.

Оценим форму (5.16) снизу. В силу (5.8)

$$\begin{aligned}2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| &\leqslant 2c_1\varepsilon\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \frac{\kappa}{4}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\frac{4c_1^2}{\kappa}\varepsilon^2\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\qquad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Положим

$$c_4=4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu)\ \text{при}\ \nu=\kappa^2(16c_1^2)^{-1}.\tag{5.18}$$

Тогда из (5.11), (5.17), (5.18) следует, что

$$2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}|\leqslant\frac{\kappa}{2}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\qquad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\tag{5.19}$$

Наложим на λ следующее ограничение:

$$\begin{aligned}&\lambda>\|(f^*\mathcal{Q}_0f)^{-1}\|_{L_\infty}(c_0+c_4), &&\text{если } \lambda\geqslant 0,\\ &\lambda>\|f^*\mathcal{Q}_0f\|^{-1}_{L_\infty}(c_0+c_4), &&\text{если } \lambda<0 \text{ и } c_0+c_4<0,\end{aligned}\tag{5.20}$$

которое обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0f\mathbf{u},f\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\geqslant(c_0+c_4+\beta)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\tag{5.21}$$

где $\beta>0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\beta=\lambda\|(f^*\mathcal{Q}_0f)^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}-c_0-c_4, &&\text{если } \lambda\geqslant 0,\\ &\beta=\lambda\|f^*\mathcal{Q}_0f\|_{L_\infty}-c_0-c_4, &&\text{если } \lambda<0 \text{ и } c_0+c_4<0.\end{aligned}$$

Из нижней оценки (5.13), (5.19) и (5.21) с учётом $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$ вытекает, что

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]\geqslant\frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]+\beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\tag{5.22}$$

Далее, из (5.7), (5.8), (5.11) (при $\nu=1$) и верхней оценки (5.13) следует верхняя оценка для квадратичной формы (5.16):

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}]&\leqslant(2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+(C(1)+c_3+|\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Оценки (5.22), (5.23) показывают, что форма (5.16) замкнута и положительно определена. *Через $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, порождённый этой формой.* Формально можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\varepsilon)&=f(\mathbf{x})^*b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})\\ &+\varepsilon\sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^*(a_j(\mathbf{x})D_j+D_ja_j(\mathbf{x})^*)f(\mathbf{x})\\ &+\varepsilon^2f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})+\varepsilon^2\lambda f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})f(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{5.24}$$

где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ следует интерпретировать как обобщённый матричный потенциал, порождённый мерой $d\mu(\mathbf{x})$.

Для удобства дальнейших ссылок будем называть “исходными данными” следующие величины:

$$\begin{aligned}&d,m,n,\rho;\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},\|f\|_{L_\infty},\|f^{-1}\|_{L_\infty},\\ &\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d;\ \ \widetilde{c},\widehat{c}_0,\widetilde{c}_2,\widehat{c}_3\ \text{из условия 5.1};\\ &\lambda,\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty},\|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решётки}\ \Gamma.\end{aligned}\tag{5.25}$$

5.6. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Пусть $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad \widetilde{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^{dn}) \tag{5.26}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, заданный выражением $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f$ на области $\operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} \colon f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)\} =: \mathcal{D}$. Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}) \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ порождается квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$. Используя разложение функции $\mathbf{u}$ в ряд Фурье и условия (5.5), (5.6), легко проверить, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}. \tag{5.27}$$

Из нижней оценки (5.27) и из (5.4) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^2 I, \qquad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \ c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{5.28}$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0). \tag{5.29}$$

Соотношения (5.27) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \colon f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \tag{5.30}$$

Как видно из (5.2) и (5.3) при $\mathbf{k} = 0$ для функции $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0$, то есть $\widehat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \geqslant 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}, \qquad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \ \int\limits_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.31}$$

Из (5.31) и из нижней оценки (5.27) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geqslant 4c_* r_0^2. \tag{5.32}$$

5.7. Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2. Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k}) \colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u} = \{(D_1+k_1)f\mathbf{u}, \dots, (D_d+k_d)f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} \mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \mathcal{D}. \tag{5.33}$$

Используя нижнюю оценку (5.27), убеждаемся, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}, \tag{5.34}$$

где постоянная c_1 определена в (5.9).

Рассмотрим оператор $Y_2 \colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$Y_2 \mathbf{u} = \{a_1(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}, \dots, a_d(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} Y_2 = \mathcal{D}. \tag{5.35}$$

Как показано в [31, п. 5.7], для любого $\nu > 0$ существуют положительные постоянные $C_j(\nu) > 0$ такие, что

$$\|a_j^* \mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \nu \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + C_j(\nu)\|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \dots, d.$$

Подставим $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, просуммируем по j и, учитывая нижнюю оценку (5.27), получим, что для любого $\nu > 0$ найдётся постоянная $C(\nu) > 0$ (та же, что и в (5.11)) такая, что

$$\|Y_2 \mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.36}$$

5.8. Форма $q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{u}]$. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим форму

$$q_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \int\limits_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\,, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{5.37}$$

Заменяя в (5.12) $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}$ соответственно (эти функции принадлежат $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ одновременно) и используя (5.27), получаем, что выполнены оценки

$$\begin{gathered}\bigl|q_\Omega[f\mathbf{u},f\mathbf{v}]\bigr| \leqslant \bigl(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}+c_3\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\bigr)^{1/2}\bigl(c_2\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}_*}+c_3\|\mathbf{v}\|^2_{\mathfrak{H}}\bigr)^{1/2},\\ q_\Omega[f\mathbf{u},f\mathbf{u}]\geqslant -(1-\kappa)\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}-c_0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}},\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{D},\end{gathered} \tag{5.38}$$

где постоянные κ, c_0, c_2, c_3 — те же, что в (5.13).

5.9. Оператор $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u},Y_2\mathbf{u})_{\widetilde{\mathfrak{H}}}&\\ +\,\varepsilon^2 q_\Omega[f\mathbf{u},f\mathbf{u}]+\varepsilon^2\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u},f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}},&\quad \mathbf{u}\in\mathcal{D},\end{aligned} \tag{5.39}$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $\mathfrak{H}$, действующий как умножение на $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$.

Оценим форму (5.39) снизу. Условие (5.20) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u},f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}} \geqslant (c_0+c_4+\beta)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}},\quad \mathbf{u}\in\mathfrak{H}. \tag{5.40}$$

Используя (5.34), (5.36), (5.38), (5.40), нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}]+\beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}},\quad \mathbf{u}\in\mathcal{D}. \tag{5.41}$$

Из (5.27), (5.34), (5.36) (при $\nu=1$) и верхней оценки (5.38) следует верхняя оценка для квадратичной формы (5.39):

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2+c_1^2+c_2)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}&\\ +\,(C(1)+c_3+|\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}},&\quad \mathbf{u}\in\mathcal{D}.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Оценки (5.41), (5.42) показывают, что форма (5.39) замкнута и положительно определена. Через $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, порождённый этой формой. Формально можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = f(\mathbf{x})^*b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f(\mathbf{x})&\\ +\,\varepsilon\sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^*\bigl(a_j(\mathbf{x})(D_j+k_j)+(D_j+k_j)a_j(\mathbf{x})^*\bigr)f(\mathbf{x})&\\ +\,\varepsilon^2 f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})+\varepsilon^2\lambda f(\mathbf{x})^*\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})f(\mathbf{x}).&\end{aligned}$$

5.10. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{U}$ оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$:

$$\mathscr{U}\mathcal{B}(\varepsilon)\mathscr{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}}\oplus\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)\,d\mathbf{k}. \tag{5.43}$$

Говоря подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$, тогда

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \,\cdot\,) \in \mathcal{D} \quad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{5.44}$$

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \,\cdot\,), \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \,\cdot\,)]\, d\mathbf{k}. \tag{5.45}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}$ выполнено (5.44) и интеграл в (5.45) конечен, тогда $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$ и выполнено (5.45).

5.11. Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в абстрактную схему. Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [4, гл. 2], введём одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ определены в (5.26). Положим $X(t) = X(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t; \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathcal{D}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.29), (5.30), $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0)$, $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d^0 удовлетворяет оценке (5.32). Как было показано в [4, гл. 2, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$).

Роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. В силу (5.33) имеет место равенство

$$Y(t; \boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta}),$$

где

$$\begin{gathered} Y_0\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \{D_1 f\mathbf{u}, \dots, D_d f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom} Y_0 = \mathcal{D}, \\ Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \{\theta_1 f\mathbf{u}, \dots, \theta_d f\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{5.46}$$

Условие 1.2 выполнено благодаря оценке (5.34). Оператор Y_2 определён в (5.35). Условие 1.3 выполнено в силу (5.36). Роль формы $\mathfrak{q}$ из п. 1.3 играет форма $q_\Omega[f\,\cdot\,, f\,\cdot\,]$, определённая в (5.37). Условие 1.4 выполнено благодаря оценкам (5.38).

Наконец, роль оператора $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ играет $\mathfrak{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$. Роль оператора Q_0 из п. 1.4 играет оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$. Ограничение (1.5) на параметр λ выполнено благодаря (5.20).

Следуя пункту 1.5, мы должны фиксировать число $\delta > 0$, такое что $\delta < \kappa d^0/13$. Учитывая (5.28) и (5.32), положим

$$\delta = \frac{1}{4}\kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\kappa \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2. \tag{5.47}$$

Отметим, что в силу (5.5), (5.6) и (5.46)

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5.48}$$

Для τ^0 (см. (1.9)) примем следующее значение:

$$\tau^0 = \delta^{1/2} \big((2 + c_1^2 + c_2)\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|^2_{L_\infty} \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} \big)^{-1/2}, \tag{5.49}$$

которое подходит при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

§6. Эффективные характеристики

6.1. Случай $f = \mathbf{1}_n$. Приведём в этом пункте эффективные характеристики для случая $f = \mathbf{1}_n$, которые были построены в [31, пп. 6.3, 6.4, 7.1].

Все объекты, отвечающие случаю $f = \mathbf{1}_n$, далее помечаются значком "$\widehat{\ }$". В частности, для оператора

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)=b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})+\varepsilon\sum_{j=1}^{d}(a_j(\mathbf{x})D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*)+\varepsilon^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})+\varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

соответствующее операторное семейство $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ обозначается $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathfrak{H}} && = \mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n),\\
&\widehat{X}_0 && = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom}\widehat{X}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\\
&\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) && \text{— ограниченный оператор умножения на матрицу } h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta}),\\
&\widehat{\mathfrak{N}} && = \left\{\mathbf{u}\in\widehat{\mathfrak{H}}\colon \mathbf{u}=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\right\}, \quad \dim\widehat{\mathfrak{N}} = n,\\
&\widehat{P}\mathbf{u} && = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \text{ — ортопроектор на } \widehat{\mathfrak{N}},\\
&\widehat{Y}_0\mathbf{u} && = \mathbf{D}\mathbf{u} = \{D_1\mathbf{u},\dots,D_d\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom}\widehat{Y}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\\
&\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} && = \{\theta_1\mathbf{u},\dots,\theta_d\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}},\\
&\widehat{Y}_2\mathbf{u} && = \{a_1(\mathbf{x})^*\mathbf{u},\dots,a_d(\mathbf{x})^*\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{Dom}\widehat{Y}_2 = \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n).
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Согласно п. 1.6 введём операторы $\widehat{Z}$ и $\widehat{\widetilde{Z}}$. Оператор $\widehat{Z}$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Как показано в [6, п. 4.1], $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}$, где $\Lambda(\mathbf{x})$ — периодическая $(n\times m)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{6.3}$$

В соответствии с [31, п. 6.3], $\widehat{\widetilde{Z}} = \widetilde{\Lambda}\widehat{P}$, где $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — периодическая $(n\times n)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \qquad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{6.4}$$

Оператор $\widehat{S}$, определённый в п. 1.7, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [4, гл. 3, §1], оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\colon \widehat{\mathfrak{N}}\to\widehat{\mathfrak{N}}$ действует как умножение на матрицу $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$. Здесь g^0 — постоянная положительная $(m\times m)$-матрица, называемая *эффективной* матрицей. Эффективная матрица g^0 может быть определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \tag{6.5}$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{6.6}$$

Введём в соответствии с [31, (7.2), (7.3)] постоянные матрицы:

$$V := |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{6.7}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{6.8}$$

Оператор $\widehat{L}(t,\varepsilon)$, определённый в (1.24), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Для него справедливо представление (см. [31, (7.8)]):

$$\begin{aligned}\widehat{L}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) =: \widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) - \varepsilon\,(b(\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{k})) \\ + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) k_j + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0}),\end{aligned}$$

где используются обозначения

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{Q}} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} d\mu(\mathbf{x}), \\ \overline{\mathcal{Q}_0} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathcal{Q}_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \\ \overline{a_j + a_j^*} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (a_j(\mathbf{x}) + a_j^*(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

В $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) - \varepsilon\big(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\big) \\ + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*})(D_j + k_j) + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0})\end{aligned}$$

при периодических граничных условиях. Имеет место равенство

$$\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}. \tag{6.9}$$

6.2. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства g^0 были проверены в [4, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 6.1 (см. [4]). *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{6.10}$$

где

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \Big(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}\Big)^{-1}.$$

В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (6.10) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (6.10). Следующие утверждения были проверены в [4, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

Предложение 6.2 (см. [4]). *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{6.11}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 6.3 (см. [4]). *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \tag{6.12}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

6.3. Оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$. Нам понадобится описать оператор N_{11} (в абстрактных терминах определённый в (1.31)). Как проверено в [6, п. 4.2], для семейства $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ этот оператор принимает вид

$$\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \tag{6.13}$$

где $L(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$-матричнозначная функция, заданная соотношением

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{6.14}$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи (6.3), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (6.5).

В [6, следствие 4.4 и предложение 4.5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (6.13) обращается в ноль.

Предложение 6.4 (см. [6]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений.*

1°. *Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*

2°. *Выполнены соотношения (6.11), то есть $g^0 = \overline{g}$.*

3°. *Выполнены соотношения (6.12), то есть $g^0 = \underline{g}$. (В частности, это автоматически выполнено, если $m = n$.)*

Тогда $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

§7. Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}$

7.1. Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}$ в общем случае. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ на области $\widetilde{H}^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Введём обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{7.1}$$

Очевидно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} \widehat{P} = \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \widehat{P}, \quad r > 0. \tag{7.2}$$

Отметим, что при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2} > \widehat{\tau}^0$ выполнено

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (\widehat{\tau}^0)^{-1}\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ \sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2}>\widehat{\tau}^0. \tag{7.3}$$

Далее, используя разложение в ряд Фурье, получаем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^r(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant r_0^{-r}\varepsilon^r,\\ \varepsilon>0,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Обозначим

$$\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon;s) := e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}. \tag{7.5}$$

Мы применим к оператору $\widehat{\mathfrak{B}}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ теоремы из пп. 2.2, 2.3. При этом мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных. Отметим что $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_2$, $\widehat{\kappa}$, $\widehat{C}(1)$, $\widehat{\delta}$ и $\widehat{\tau}^0$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (5.9), (5.11), (5.14), (5.47), (5.49) при $f=\mathbf{1}_n$). Согласно (5.48) (при $f=\mathbf{1}_n$) норму $\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}$ и подставить $\|\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\|=1$. Поэтому постоянные в теоремах 2.3 и 2.4 (применённых к оператору $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от следующих величин:

$$\begin{aligned}&d,m,n,\rho;\alpha_0,\alpha_1,\|g\|_{L_\infty},\|g^{-1}\|_{L_\infty},\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d;\\ &\widetilde{c},\widehat{c}_0,\widetilde{c}_2,\widehat{c}_3 \text{ из условия } 5.1;\\ &\lambda,\|Q_0\|_{L_\infty},\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \quad \text{и параметры решётки}\,\Gamma.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Применяя теорему 2.3 с учётом (7.2)–(7.4) и очевидного неравенства

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 1, \tag{7.7}$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 7.1. *При $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(1+|s|)\varepsilon,$$

где константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от данных задачи (7.6).

7.2. Улучшение аппроксимации экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}$ при условии $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})=0$. Применим теперь теорему 2.4, предполагая, что $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (7.2)–(7.4) и (7.7) это влечёт следующий результат.

Теорема 7.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (6.13). *Пусть $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(1+|s|)\varepsilon,$$

где константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от данных задачи (7.6).

7.3. Подтверждение точности результата. Перейдём к обозначениям, принятым в замечаниях 3.1, 3.2. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\lambda}_1^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\lambda}_{p(\boldsymbol{\theta})}^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\lambda}_q^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$.

Далее, количество $p'(q,\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений

$$\widehat{\lambda}_{1,q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\lambda}_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$$

оператора

$$\widehat{\mathscr{Y}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})\Big(-b(\boldsymbol{\theta})^*V-V^*b(\boldsymbol{\theta})+\sum_{j=1}^d\overline{(a_j+a_j^*)}\theta_j\Big)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})}$$

и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p'(\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ также зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{\mathscr{Y}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\lambda}_{q',q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$.

Теорема 7.3. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (6.13). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$ для некоторых $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q'\in\{1,\dots,p'(q,\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s\neq 0$ и $0\leqslant r<3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s)>0$, чтобы оценка*

$$\big\|\big(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}-e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}\big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}(s)\varepsilon \tag{7.8}$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$.

Нам понадобится следующая лемма, аналогичная [35, лемма 9.9].

Лемма 7.4. *Пусть $\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon)$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ для промежутка $[0,\widehat{\delta}]$. Тогда при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2}\leqslant\widehat{\tau}^0$, $\sqrt{|\mathbf{k}_0|^2+\varepsilon^2}\leqslant\widehat{\tau}^0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon)-\widehat{F}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant\widehat{C}'|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,\\ \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon)-\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant\widehat{C}''|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,\\ \|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon)-e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant(2\widehat{C}'+\widehat{C}''|s|)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7.3. Достаточно считать $1\leqslant r<3$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $s\neq 0$ и $1\leqslant r<3$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(s)>0$ такая, что выполнена оценка (7.8) при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$. С учётом (7.2) и (7.4) отсюда следует, что найдётся постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}(s)>0$ такая, что выполнена оценка

$$\big\|\big(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}-e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \tag{7.9}$$

при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}\big]$.

Рассмотрим теперь значения $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}$. В силу (1.25)

$$\begin{aligned}\big\|\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon)-\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant\widehat{C}_1(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2},\\ &|\mathbf{k}|\leqslant\widehat{\tau}^0/\sqrt{2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

Из (7.9) и (7.10) вытекает справедливость неравенства

$$\left\| e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k},\varepsilon) - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \tag{7.11}$$

при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant \widehat{\tau}^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}\big]$.

Заметим, что проектор $\widehat{P}$ является спектральным проектором оператора $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$ для промежутка $[0,\widehat{\delta}]$. Поэтому из леммы 7.4 (в применении к $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$) следует, что при фиксированных s и ε оператор, стоящий под знаком нормы в (7.11), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant \widehat{\tau}^0/\sqrt{2}$. Следовательно, оценка (7.11) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t\leqslant\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}$. Применяя снова неравенство (7.10), получаем, что справедливо неравенство

$$\left\|\left(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(t\boldsymbol{\theta}_0,\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0,\varepsilon)}\right)\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant \check{\mathcal{C}}'(s)\varepsilon \tag{7.12}$$

при всех $t\leqslant\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\widehat{\tau}^0/\sqrt{2}\big]$.

Оценка (7.12) в абстрактных терминах соответствует оценке (3.39). Поскольку по условию выполнено $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$, то применение теоремы 3.5 приводит нас к противоречию. $\square$

§8. Операторное семейство $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Применение схемы §4

8.1. Случай $f\neq \mathbf{1}_n$. Возвращаемся к рассмотрению операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ общего вида (5.24) и соответствующих семейств $\mathfrak{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ из п. 5.11.

Будем использовать схему из §4. У нас $\widehat{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, а роль изоморфизма M играет оператор умножения на $f(\mathbf{x})$. В качестве оператора $\mathfrak{Q}$ (см. (4.2)) выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}):=(f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок $\mathfrak{Q}$ в ядре $\widehat{\mathfrak{N}}$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{\mathfrak{Q}}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (4.13)) играет оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0:=(\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2}=\Big(|\Omega|^{-1}\int\limits_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}\Big)^{-1/2}. \tag{8.1}$$

Отметим, что

$$|f_0|\leqslant\|f\|_{L_\infty},\quad |f_0^{-1}|\leqslant\|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{8.2}$$

В $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ определим оператор $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon):=f_0\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)f_0$. Согласно (6.2), (6.9) справедливо равенство $f_0\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)f_0\widehat{P}=\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}$.

8.2. Оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$. Нам понадобится описать оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}$ (определённый в абстрактных терминах в п. 4.3). Для этого введём Γ-периодическое решение $\Lambda_\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ задачи $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_\mathfrak{Q}(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)=0$, $\int_\Omega \mathfrak{Q}(\mathbf{x})\Lambda_\mathfrak{Q}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0$.

Ясно, что $\Lambda_\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (6.3) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_\mathfrak{Q}(\mathbf{x})=\Lambda(\mathbf{x})+\Lambda_\mathfrak{Q}^0,\quad \Lambda_\mathfrak{Q}^0=-(\overline{\mathfrak{Q}})^{-1}(\overline{\mathfrak{Q}\Lambda}). \tag{8.3}$$

Как проверено в [6, п. 5.3], оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимает вид

$$\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=b(\boldsymbol{\theta})^*L_\mathfrak{Q}(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{8.4}$$

где $L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ — $(m\times m)$-матрица, заданная соотношением

$$L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega} (\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_{\mathfrak{Q}}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{8.5}$$

Сопоставляя (8.3), (8.5) с (6.14), убеждаемся, что справедливо равенство

$$L_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}) + L^0_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}), \quad L^0_{\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = (\Lambda^0_{\mathfrak{Q}})^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 + g^0 b(\boldsymbol{\theta})\Lambda^0_{\mathfrak{Q}}.$$

В [6, п. 5.4] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (8.4) обращается в ноль.

Предложение 8.1 (см. [6]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений.*

1°. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^*\mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*

2°. *Выполнены соотношения (6.11), то есть $g^0 = \overline{g}$.*

Тогда $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

§9. Аппроксимация окаймлённого оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}$

9.1. Аппроксимация оператора $fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}f^{-1}$ в общем случае. Положим

$$J(\mathbf{k},\varepsilon;s) := fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1}. \tag{9.1}$$

Мы применим к оператору $\mathfrak{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ теоремы из п. 4.4. При этом мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных. Отметим что c_1, c_2, κ, $C(1)$, δ и τ^0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (5.9), (5.11), (5.14), (5.47), (5.49)). Согласно (5.48) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}$, а норму $\|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ — на $\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные в теоремах 4.4 и 4.5 (применённых к оператору $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от данных задачи (5.25).

Применяя теорему 4.4 с учётом (7.2)–(7.4), (7.7) и (8.2), приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.1. *При $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|J(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|s|)\varepsilon,$$

где константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от данных задачи (5.25).

9.2. Улучшение аппроксимации окаймлённой экспоненты при условии $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$. Применим теорему 4.5, предполагая, что $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (7.2)–(7.4), (7.7) и (8.2) это влечёт следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (8.4). *Пусть $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\bigl\|J(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|s|)\varepsilon,$$

где константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от данных задачи (5.25).

9.3. Подтверждение точности результата. Коэффициенты $\lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})$ и $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, где $l = 1,\dots,n$, являются собственными для оператора $S(\boldsymbol{\theta})$. Однако, удобнее перейти к обобщённой спектральной задаче для $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (4.19) числа $\lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, где $l = 1,\dots,n$, являются собственными значениями и собственными элементами обобщённой спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,\dots,n. \tag{9.2}$$

При этом векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, где $l = 1,\dots,n$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом: $(\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_j(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl}$, где $j,l = 1,\dots,n$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 3.1, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. В силу сказанного в п. 4.5 эти же значения являются собственными числами обобщённой задачи (9.2). Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений

$$\lambda_1^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\lambda_{p(\boldsymbol{\theta})}^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$$

оператора $S(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (9.2), отвечающее тому же значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$.

Далее, коэффициенты $\lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta})$ и $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i(q,\boldsymbol{\theta}),\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1$, где $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta})+\dots+k_{q-1}(\boldsymbol{\theta})+1$, являются собственными для оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ (см. (3.21)). Согласно (4.20) числа $\lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i(q,\boldsymbol{\theta}),\dots,i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$\begin{gathered}\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}\Bigl(-b(\boldsymbol{\theta})^*V - V^*b(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j + a_j^*})\theta_j\Bigr)\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}\overline{\mathfrak{Q}}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}),\\ l = i(q,\boldsymbol{\theta}),\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1,\end{gathered} \tag{9.3}$$

где $\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$ — ортопроектор на $f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$.

Количество $p'(q,\boldsymbol{\theta})$ различных собственных чисел

$$\lambda_{1,q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\lambda_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$$

задачи (9.3) и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p'(\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ также зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (9.3), отвечающее тому же значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$. Введём обозначение $\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{\mathfrak{Q}}$.

Применяя теорему 4.7, подтвердим точность результата теоремы 9.1.

Теорема 9.3. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (8.4). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\mathcal{P}_{q',q}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ для некоторых $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1,\dots,p'(q,\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка*

$$\bigl\|\bigl(fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}f^{-1} - f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1}\bigr)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon \tag{9.4}$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Нам понадобится следующая лемма, аналогичная [35, лемма 11.8].

Лемма 9.4. *Пусть* $F(\mathbf{k},\varepsilon)$ *— спектральный проектор оператора* $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ *для промежутка* $[0,\delta]$. *Тогда при* $\sqrt{|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2}\leqslant\tau^0$, $\sqrt{|\mathbf{k}_0|^2+\varepsilon^2}\leqslant\tau^0$ *справедливы оценки*

$$\|F(\mathbf{k},\varepsilon)-F(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C'|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$\|\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)F(\mathbf{k},\varepsilon)-\mathcal{B}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)F(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C''|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$\|e^{-is\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}F(\mathbf{k},\varepsilon)-e^{-is\mathcal{B}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)}F(\mathbf{k}_0,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant (2C'+C''|s|)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.$$

Доказательство теоремы 9.3. Достаточно считать $1\leqslant r<3$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $s\neq 0$ и $1\leqslant r<3$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(s)>0$ такая, что выполнена оценка (9.4) при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$. С учётом (7.2) и (7.4) отсюда следует, что найдётся постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}(s)>0$ такая, что выполнена оценка

$$\big\|\big(fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}f^{-1}-f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \tag{9.5}$$

при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\tau^0/\sqrt{2}\big]$.

В силу (4.3) справедливо тождество $f^{-1}\widehat{P}=Pf^*\overline{\mathfrak{Q}}$, где P — ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ (см. (5.30)). Тогда оператор под знаком нормы в (9.5) можно записать в виде $fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}Pf^*\overline{\mathfrak{Q}}-f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1}\widehat{P}$.

Рассмотрим теперь значения $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant\tau^0/\sqrt{2}$. В силу (1.25)

$$\begin{aligned}\big\|F(\mathbf{k},\varepsilon)-P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant C_1(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2},\\ &|\mathbf{k}|\leqslant\tau^0/\sqrt{2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\tau^0/\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{9.6}$$

Из (9.5) и (9.6) вытекает справедливость неравенства

$$\begin{aligned}\|fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}F(\mathbf{k},\varepsilon)f^*\overline{\mathfrak{Q}}-f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)}f_0^{-1}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\\ \times\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant\check{\mathcal{C}}(s)\varepsilon&\end{aligned} \tag{9.7}$$

при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant\tau^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\tau^0/\sqrt{2}\big]$.

Заметим, что проектор $\widehat{P}$ является спектральным проектором оператора $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$ для промежутка $[0,\delta]$. Поэтому из леммы 9.4 (в применении к $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)$) следует, что при фиксированных s и ε оператор, стоящий под знаком нормы в (9.7), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}|\leqslant\tau^0/\sqrt{2}$. Следовательно, оценка (9.7) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t\leqslant\tau^0/\sqrt{2}$. Применяя снова неравенство (9.6) и тождество $Pf^*\overline{\mathfrak{Q}}=f^{-1}\widehat{P}$, получаем, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\big\|\big(fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta}_0,\varepsilon)}f^{-1}-f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(t\boldsymbol{\theta}_0,\varepsilon)}f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\\ \times\,\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\leqslant\check{\mathcal{C}}'(s)\varepsilon&\end{aligned} \tag{9.8}$$

при всех $t\leqslant\tau^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon\in\big(0,\tau^0/\sqrt{2}\big]$.

Оценка (9.8) в абстрактных терминах соответствует оценке (4.22). Поскольку по условию выполнено $\mathcal{P}^*_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$, то применение теоремы 4.7 приводит нас к противоречию. $\square$

§10. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)}$

10.1. Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)}$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (6.1). Введём эффективный оператор с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})-\varepsilon\,(b(\mathbf{D})^*V+V^*b(\mathbf{D}))+\varepsilon\sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j+a_j^*})D_j+\varepsilon^2(\overline{\mathcal{Q}}+\lambda\overline{\mathcal{Q}_0}-W),$$

где матрица g^0 определена в (6.6), а матрицы V, W — в (6.7) и (6.8).

Обозначим $\widehat{J}(\varepsilon;s):=e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)}-e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)}$. Напомним обозначение $\mathcal{H}_0=-\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon):=\varepsilon^2(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2I)^{-1}. \tag{10.1}$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (7.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon)=\mathscr{U}^{-1}\Bigl(\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\,d\mathbf{k}\Bigr)\mathscr{U}.$$

Напомним также обозначение (7.5). Из разложений вида (5.43) для $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ следует равенство

$$\bigl\|\widehat{J}(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\bigl\|\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \tag{10.2}$$

Поэтому из теорем 7.1, 7.2 прямо вытекают следующие утверждения.

Теорема 10.1. *Для $s\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\bigl\|\widehat{J}(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_1(1+|s|)\varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от данных задачи (7.6).

Теорема 10.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (6.13). Пусть $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $s\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\bigl\|\widehat{J}(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_2(1+|s|)\varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от данных задачи (7.6).

Применяя теорему 7.3, подтвердим точность результата теоремы 10.1.

Теорема 10.3. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (6.13). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq0$ для некоторых $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q'\in\{1,\dots,p'(q,\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s\neq0$ и $0\leqslant r<3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s)>0$, чтобы оценка*

$$\bigl\|\widehat{J}(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

10.2. Аппроксимация “окаймлённого” оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)}$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (5.24). Пусть f_0 — матрица (8.1). Введём оператор $\mathcal{B}^0(\varepsilon) = f_0\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)f_0$. Обозначим

$$J(\varepsilon;s) := fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)}f^{-1} - f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\varepsilon)}f_0^{-1}.$$

Аналогично (10.2) имеем

$$\|J(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|J(\mathbf{k},\varepsilon;s)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Здесь $J(\mathbf{k},\varepsilon;s)$ определено в (9.1). Таким образом, из теорем 9.1 и 9.2 получаем следующие результаты.

Теорема 10.4. *Для $s\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|s|)\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от данных задачи (5.25).

Теорема 10.5. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$, определённый в* (8.4)*, равен нулю: $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $s\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|s|)\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от данных задачи (5.25).

Используя теорему 9.3, мы подтверждаем точность результата теоремы 10.4.

Теорема 10.6. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (8.4)*. Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\mathcal{P}^*_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$ для некоторых $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q'\in\{1,\dots,p'(q,\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s\neq 0$ и $0\leqslant r<3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s)>0$, чтобы оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

Глава 3. Задачи усреднения для нестационарных уравнений типа Шрёдингера

§11. Усреднение оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$

11.1. Операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$, $\mathcal{B}_\varepsilon$. Постановка задачи.. Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$. Условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon>0$. *Наши основные объекты* — операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$, $\mathcal{B}_\varepsilon$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_ja_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{11.1}$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon := f^\varepsilon(\mathbf{x})^*\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{11.2}$$

Строгие определения даются через квадратичные формы (ср. п. 5.5). Коэффициенты операторов (11.1) и (11.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Введём *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0} - W, \tag{11.3}$$

а также оператор

$$\mathcal{B}^0 = f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0, \tag{11.4}$$

где эффективная матрица g^0 определена в (6.6), а матрицы V, W — в (6.7) и (6.8). Матрица f_0 задана формулой (8.1).

Наша цель — получить аппроксимацию оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$ и применить полученные результаты к усреднению задачи Коши для нестационарных уравнений типа Шрёдингера.

11.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — *унитарный в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования*: $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо тождество $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}(\varepsilon) T_\varepsilon$. Следовательно,

$$e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} = T_\varepsilon^* e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)} T_\varepsilon. \tag{11.5}$$

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и используя обозначение (10.1), получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \tag{11.6}$$

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдёт в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$: $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi]T_\varepsilon$.

11.3. Усреднение оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$. Начнём с более простого оператора $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$. Пусть $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — эффективный оператор (11.3). Применяя соотношения вида (11.5) (для операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0$), а также (11.6), получаем тождество

$$(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2} = T_\varepsilon^* \widehat{J}(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{11.7}$$

В общем случае справедлив следующий результат.

Теорема 11.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — *оператор* (11.1) *и* $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — *эффективный оператор* (11.3). *Тогда при* $0 \leqslant r \leqslant 3$ *и* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\| e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0} \|_{H^r(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(r; s) \varepsilon^{r/3}, \tag{11.8}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_1(r;s) = 2^{1-r/3} \widehat{\mathcal{C}}_1^{r/3} (1 + |s|)^{r/3}$. *Константа* $\widehat{\mathcal{C}}_1$ *зависит только от данных задачи* (7.6).

Доказательство. Ввиду унитарности оператора T_ε и (11.7) из теоремы 10.1 следует оценка

$$\left\| (e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1 (1 + |s|) \varepsilon. \tag{11.9}$$

Очевидно,

$$\left\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2. \qquad (11.10)$$

Интерполируя между (11.10) и (11.9), при $0 \leqslant r \leqslant 3$ получаем

$$\left\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0+I)^{-r/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^{1-r/3}\widehat{\mathcal{C}}_1^{r/3}(1+|s|)^{r/3}\varepsilon^{r/3}. \qquad (11.11)$$

Оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{r/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Поэтому оценка (11.11) эквивалентна (11.8). $\square$

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Применяя теорему 10.2, получаем следующий результат.

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.1. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (6.13). *Предположим, что* $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $0 \leqslant r \leqslant 2$ *и* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\right\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s)\varepsilon^{r/2},$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s) = 2^{1-r/2}\widehat{\mathcal{C}}_2^{r/2}(1 + |s|)^{r/2}$. *Константа* $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *зависит только от данных задачи* (7.6).

Применяя теорему 10.3, подтвердим точность результата теоремы 11.1.

Теорема 11.3. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (6.13). *Пусть хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ *имеет место* $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторых* $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. *Пусть* $s \neq 0$ *и* $0 \leqslant r < 3$. *Тогда не существует такой константы* $\mathcal{C}(s) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\left(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

11.4. Усреднение окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$**.** Рассмотрим теперь более общий оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ (см. (11.2)). Пусть оператор $\mathcal{B}^0$ определён в (11.4). Применяя соотношения вида (11.5) (для операторов $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0$), а также (11.6), получаем тождество

$$\begin{aligned}\left(f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2}& \\ = T_\varepsilon^* J(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}T_\varepsilon, &\quad \varepsilon > 0.\end{aligned} \qquad (11.12)$$

Из теоремы 10.4, тождества (11.12) и очевидной оценки

$$\left\|f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$$

вытекает следующий результат.

Теорема 11.4. *Пусть* $\mathcal{B}_\varepsilon$ *и* $\mathcal{B}^0$ — *операторы, определённые выражениями* (11.2) *и* (11.4). *Тогда при* $0 \leqslant r \leqslant 3$ *и* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(r; s)\varepsilon^{r/3},$$

где $\mathfrak{C}_1(r; s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-r/3}\mathcal{C}_1^{r/3}(1 + |s|)^{r/3}$. *Константа* $\mathcal{C}_1$ *зависит только от данных задачи* (5.25).

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Теорема 10.5 позволяет получить следующий результат.

Теорема 11.5. *Пусть выполнены условия теоремы 11.4. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (8.4). Предположим, что $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $0 \leqslant r \leqslant 2$ и $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1} \right\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2(r;s)\varepsilon^{r/2},$$

где $\mathfrak{C}_2(r;s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-r/2}\mathcal{C}_2^{r/2}(1+|s|)^{r/2}$. Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от данных задачи (5.25).

Используя теорему 10.6, подтвердим точность результата теоремы 11.4.

Теорема 11.6. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (8.4). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\mathcal{P}^*_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ для некоторых $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1,\dots,p'(q,\boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leqslant r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\| \left(f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

§12. Усреднение задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера

12.1. Задача Коши для уравнения с оператором $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} &= (\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s) + \mathbf{F}(\mathbf{x},s), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^s e^{-i(s-\widetilde{s})\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})\,d\widetilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} &= (\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x},s) + \mathbf{F}(\mathbf{x},s), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{12.2}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^s e^{-i(s-\widetilde{s})\widehat{\mathcal{B}}^0}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})\,d\widetilde{s}.$$

Из теоремы 11.1 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 12.1. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (12.1) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (12.2).*

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant r \leqslant 3$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)-\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\varepsilon^{r/3}\widehat{\mathfrak{C}}_1(r;s)\big(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}\big). \tag{12.3}$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_1(r;s)$ *определена в теореме* 11.1.

2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)-\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Утверждение 2° в силу теоремы Банаха–Штейнгауза прямо следует из (12.3) и очевидной оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)-\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+2|s|\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

Утверждение 1° можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 11.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 12.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.1. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (6.13). *Предположим, что* $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})=0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant r \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)-\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\varepsilon^{r/2}\widehat{\mathfrak{C}}_2(r;s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r;s)$ *определена в теореме* 11.2.

12.2. Задача Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$. Рассмотрим более общую задачу Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} &= (\mathcal{B}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s)+(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s\in\mathbb{R},\\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{12.4}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s)=e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi}-i\int\limits_0^s e^{-i(s-\widetilde{s})\mathcal{B}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})\,d\widetilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} &= (\mathcal{B}^0\mathbf{u}_0)(\mathbf{x},s)+f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},s), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s\in\mathbb{R},\\ f_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{12.5}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)=e^{-is\mathcal{B}^0}f_0^{-1}\boldsymbol{\phi}-i\int\limits_0^s e^{-i(s-\widetilde{s})\mathcal{B}^0}f_0^{-1}\mathbf{F}(\,\cdot\,,\widetilde{s})\,d\widetilde{s}.$$

Из теоремы 11.4 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 12.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (12.4) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (12.5).

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant r \leqslant 3$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\bigl\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{r/3}\mathfrak{C}_1(r;s)\bigl(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}\bigr).$$

Величина $\mathfrak{C}_1(r;s)$ *определена в теореме* 11.4.

2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 1° можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 11.5, получаем следующую теорему.

Теорема 12.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.3. *Пусть оператор* $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (8.4). *Предположим, что* $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant r \leqslant 2$, *то при* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\bigl\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\,\cdot\,, s)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{r/2}\mathfrak{C}_2(r;s)\bigl(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}\bigr).$$

Величина $\mathfrak{C}_2(r;s)$ *определена в теореме* 11.5.

§13. Применение общих результатов: магнитное уравнение Шрёдингера

13.1. Магнитное уравнение Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим скалярный (то есть $n = 1$) оператор

$$\mathcal{M}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{13.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(d\times d)$-матрица с вещественными элементами,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}},$$

где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, такие что

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \ \text{при} \ d = 1, \quad \rho > d \ \text{при} \ d \geqslant 2; \quad j = 1, \dots, d. \tag{13.2}$$

Наконец, $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, причём

$$v, \mathcal{V} \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 1 \ \text{при} \ d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \ \text{при} \ d \geqslant 2; \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{13.3}$$

Точное определение оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$ даётся через квадратичную форму

$$\mathfrak{m}_\varepsilon[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \bigl(\langle g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u\rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}))|u|^2\bigr)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Оператор (13.1) можно трактовать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x})$, содержащим “сингулярное” первое слагаемое.

В [31, п. 13.1] показано, что оператор (13.1) можно представить в виде (11.1). Обозначим $g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) =: \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \{\eta_1(\mathbf{x}), \dots, \eta_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$. Тогда первое слагаемое в (13.1) перепишется в виде

$$(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* g^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) = -\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla + i \sum_{j=1}^d \left(\eta_j^\varepsilon \partial_j + \partial_j(\eta_j^\varepsilon\, \cdot\,)\right) + \langle g^\varepsilon \mathbf{A}^\varepsilon, \mathbf{A}^\varepsilon\rangle .$$

Пусть Φ — Γ-периодическое решение уравнения $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$. Определим функции $\zeta_j = -\partial_j \Phi$, $j = 1, \dots, d$. Тогда $v = -\sum_{j=1}^d \partial_j \zeta_j$. Положим

$$a_j = -\eta_j + i\zeta_j, \quad j = 1, \dots, d. \tag{13.4}$$

Можно убедиться (подробнее см. [31, п. 13.1]), что функции (13.4) удовлетворяют (5.10) с подходящим показателем ρ' (зависящим от ρ и ϱ); нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_\varrho(\Omega)}$ и параметры решётки Γ. Видно, что

$$\sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon D_j + D_j (a_j^\varepsilon)^*\right) = i \sum_{j=1}^d (\eta_j^\varepsilon \partial_j + \partial_j(\eta_j^\varepsilon\, \cdot\,)) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon.$$

Функция $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) := \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle$ удовлетворяет условию (5.15) с подходящим показателем $\varrho' = \min\{\varrho, \rho/2\}$. Реализуется пример 5.2. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\mathcal{M}_\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная функция, а параметр λ подчинён ограничению (5.20) (при $f = 1$). Таким образом, *оператор* $\mathscr{M}_\varepsilon := \mathcal{M}_\varepsilon + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon$ *приведён к виду* (11.1):

$$\mathscr{M}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Исходные данные (7.6) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned} &d, \rho, \varrho; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|v\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \\ &\lambda, \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \text{параметры решётки } \Gamma. \end{aligned}$$

Построим эффективный оператор. Матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ является матрицей-строкой $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))$, где $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — (слабое) решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d\times d)$-матрица со столбцами $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определяется стандартным образом: $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющаяся Γ-периодическим решением задачи (6.4), представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$, $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$

являются решениями задач

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \qquad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,$$
$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Матрица-столбец V и число W определяются согласно (6.7) и (6.8). Имеем:

$$-\mathbf{D}^* V u - V^* \mathbf{D} u + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j u = 2i \langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}} \rangle,$$

где $V_1 = \operatorname{Re} V$. В итоге эффективный оператор $\mathscr{M}^0$ принимает вид

$$\mathscr{M}^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + (\overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0} - W) u,$$

что можно записать в виде

$$\mathscr{M}^0 u = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) u + \mathcal{V}^0 u, \tag{13.5}$$
$$\mathbf{A}^0 := \left(g^0\right)^{-1} (V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 := \overline{\mathcal{V}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}_0} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} - \left\langle g^0 \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0 \right\rangle - W.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{M}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad s \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{13.6}$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, и соответствующую усреднённую задачу

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathscr{M}^0 u_0)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad s \in \mathbb{R}, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{13.7}$$

Сейчас выполнены условия предложения 6.4(1°). Поэтому применима теорема 12.2, которая даёт следующий результат.

Теорема 13.1. *Пусть u_ε — решение задачи (13.6) и пусть u_0 — решение задачи (13.7).*

1°. *Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leqslant r \leqslant 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\| u_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - u_0(\,\cdot\,, s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{r/2} \widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s) \Big(\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s); H^r(\mathbb{R}^d))} \Big),$$

где константа $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s)$ определена в теореме 11.2.

2°. *Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_\varepsilon(\,\cdot\,, s) - u_0(\,\cdot\,, s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

13.2. Магнитное уравнение Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$, где $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, ограниченная и положительно определённая, а $\check{v}(\mathbf{x})$ — вещественная Γ-периодическая функция такая, что

$$\check{v} \in L_\varrho(\Omega), \qquad \varrho = 1 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2.$$

Строгое определение оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ даётся через квадратичную форму

$$\widetilde{\mathfrak{a}}[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u\rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2 \right) \, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{13.8}$$

За счёт добавления к $\check{v}$ постоянной будем считать, что краем спектра оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ является точка $\lambda_0 = 0$. При этом условии оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [4, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0.$$

Существует Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int\limits_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{13.9}$$

Оказывается, что решение $\omega(\mathbf{x})$ положительно определено и ограничено, а нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{v}\|_{L_\varrho(\Omega)}$. Функция ω является мультипликатором как в $H^1(\mathbb{R}^d)$, так и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega\varphi$ преобразует форму (13.8) к виду

$$\widetilde{\mathfrak{a}}[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \, \langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\varphi, \mathbf{D}\varphi\rangle \, d\mathbf{x}, \qquad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \omega^{-1}\mathbf{D}^* g \mathbf{D}\omega^{-1}, \qquad g = \omega^2\check{g}. \tag{13.10}$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}. \tag{13.11}$$

В исходных терминах это выражение запишется в виде

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^*\check{g}^\varepsilon\mathbf{D} + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon, \tag{13.12}$$

что можно толковать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции, удовлетворяющие (13.2). Пусть $\widetilde{v}(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, такие что

$$\begin{gathered} \widetilde{v}, \widetilde{\mathcal{V}} \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 1 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > \frac{d}{2} \text{ при } d \geqslant 2; \\ \int\limits_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\widetilde{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{gathered} \tag{13.13}$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \breve{g}^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-2}\breve{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1}\widetilde{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \widetilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{13.14}$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Оператор (13.14) можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\breve{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2}\breve{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widetilde{v}^\varepsilon + \widetilde{\mathcal{V}}^\varepsilon$, включающим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2}\breve{v}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\widetilde{v}^\varepsilon$. За счёт добавления подходящей константы λ всегда можно считать, что оператор $\widetilde{\mathscr{M}_\varepsilon} := \widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon + \lambda$ положительно определён. Положим

$$v(\mathbf{x}) := \widetilde{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \widetilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x}). \tag{13.15}$$

Учитывая (13.11), (13.12), убеждаемся в справедливости тождества

$$\widetilde{\mathscr{M}_\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathscr{M}_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1},$$

где оператор $\mathscr{M}_\varepsilon$ описан в предыдущем параграфе, причём для него g определено в (13.10), а v, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{Q}_0$ — в (13.15). В силу (13.13) коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют требуемым условиям (13.3).

Воспользуемся результатами п. 12.2. Сейчас $f = \omega^{-1}$. Функция $\mathfrak{Q} = (ff^*)^{-1}$ равна $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$. В силу условия (13.9) имеем $\overline{\mathfrak{Q}} = 1$ и $f_0 = (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2} = 1$. Исходные данные (5.25) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned}&d, \rho, \varrho; \|\breve{g}\|_{L_\infty}, \|\breve{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\breve{v}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\widetilde{v}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|\widetilde{\mathcal{V}}\|_{L_\varrho(\Omega)},\\ &\lambda, \quad \text{параметры решётки}\ \Gamma.\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу Коши с оператором $\widetilde{\mathscr{M}_\varepsilon}$:

$$\begin{cases} i\frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\widetilde{\mathscr{M}_\varepsilon}u_\varepsilon)(\mathbf{x},s) + \omega^\varepsilon(\mathbf{x})F(\mathbf{x},s), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s\in\mathbb{R},\\ (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\end{cases} \tag{13.16}$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, и соответствующую усреднённую задачу

$$\begin{cases} i\frac{\partial u_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathscr{M}^0 u_0)(\mathbf{x},s) + F(\mathbf{x},s), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad s\in\mathbb{R},\\ u_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.\end{cases} \tag{13.17}$$

Здесь $\mathscr{M}^0$ – эффективный оператор (13.5) для оператора $\mathscr{M}$ с коэффициентами (13.10), (13.15). Сейчас выполнены условия предложения 8.1(1°). Поэтому применима теорема 12.4, которая даёт следующий результат.

Теорема 13.2. *Пусть u_ε — решение задачи (13.16) и пусть u_0 — решение задачи (13.17).*

1°. *Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leqslant r \leqslant 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\left\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - u_0(\,\cdot\,,s)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{r/2}\mathfrak{C}_2(r;s)\big(\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}\big),$$

где константа $\mathfrak{C}_2(r;s)$ определена в теореме 11.5.

2°. *Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - u_0(\,\cdot\,,s)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s\in\mathbb{R}.$$

§14. Применение общих результатов: двумерное волновое уравнение Паули

14.1. Оператор $\mathcal{P}$. Пусть магнитный потенциал задан вектор-функцией

$$\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \{\check{A}_1(\mathbf{x}), \check{A}_2(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}},$$

где $\check{A}_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции в $\mathbb{R}^2$, причём

$$\check{A}_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 2, \quad j = 1, 2. \tag{14.1}$$

Напомним стандартные обозначения для матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор Дирака $\mathcal{D} = (D_1 - \check{A}_1)\sigma_1 + (D_2 - \check{A}_2)\sigma_2$, $\operatorname{Dom}\mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. По определению оператор Паули $\mathcal{P}$ есть квадрат оператора $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

Точное определение оператора $\mathcal{P}$ даётся через замкнутую квадратичную форму $\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$. Если потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ — липшицева функция, то блоки оператора (14.2) задаются выражениями

$$P_\pm = (\mathbf{D} - \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2 \pm \check{B}(\mathbf{x}), \quad \check{B}(\mathbf{x}) := \partial_1 \check{A}_2(\mathbf{x}) - \partial_2 \check{A}_1(\mathbf{x}).$$

Здесь $\check{B}(\mathbf{x})$ имеет смысл напряжённости магнитного поля.

Оператор $\mathcal{P}$ допускает удобную факторизацию. За счёт калибровочного преобразования можно подчинить потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ условиям

$$\operatorname{div}\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int\limits_\Omega \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{14.3}$$

не нарушая (14.1). (Первое равенство в (14.3) понимается в смысле распределений.) Тогда существует Γ-периодическая вещественная функция φ, такая, что $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \{\check{A}_2(\mathbf{x}), -\check{A}_1(\mathbf{x})\}^{\mathrm{T}}$ и $\overline{\varphi} = 0$. Отметим, что $\varphi \in \widetilde{W}^1_\rho(\Omega) \subset C^\sigma$, $\sigma = 1 - 2/\rho$. Положим $\omega_\pm(\mathbf{x}) := e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}$. Тогда оператор (14.2) может быть записан в виде: $\mathcal{P} = f_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) g_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) f_\times(\mathbf{x})$, где $\partial_\pm := D_1 \pm iD_2$,

$$b_\times(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad f_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+^2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Блоки $P_\pm$ оператора (14.2) могут быть записаны в виде

$$P_+ = \omega_- \partial_+ \omega_+^2 \partial_- \omega_-, \quad P_- = \omega_+ \partial_- \omega_-^2 \partial_+ \omega_+.$$

14.2. Оператор $\widehat{\mathcal{B}}_\times$. Пусть заданы $\eta_{j,\times}(\mathbf{x})$, $j=1,2$, $v_\times(\mathbf{x})$, $\mathcal{Q}_\times(\mathbf{x})$ — Γ-периодические эрмитовы (2×2)-матричнозначные функции в $\mathbb{R}^2$ такие, что

$$\eta_{j,\times}\in L_\rho(\Omega),\quad \rho>2,\ j=1,2;\quad v_\times,\mathcal{Q}_\times\in L_\varrho(\Omega),\quad \varrho>1;\quad \int\limits_\Omega v_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{B}}_\times$, формально заданный выражением

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}&=b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})\\&\quad+i\sum_{j=1}^2\bigl(\eta^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\partial_j+\partial_j(\eta^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\,\cdot\,)\bigr)+\varepsilon^{-1}v^\varepsilon_\times(\mathbf{x})+\mathcal{Q}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{14.4}$$

Чтобы записать оператор (14.4) в требуемом виде, введём $\Phi_\times$ — Γ-периодическое решение уравнения $\Delta\Phi_\times(\mathbf{x})=v_\times(\mathbf{x})$, $\int_\Omega\Phi_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0$ и положим $\zeta_{j,\times}=-\partial_j\Phi_\times$. Тогда $v_\times=-\sum_{j=1}^2\partial_j\zeta_{j,\times}$. Положим $a_{j,\times}=-\eta_{j,\times}+i\zeta_{j,\times}$. Легко проверить, что $a_{j,\times}\in L_{\rho'}(\Omega)$ при некотором $\rho'>2$ (зависящим от ρ и ϱ), причём $\|a_{j,\times}\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируется через $\|\eta_{j,\times}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v_\times\|_{L_\varrho(\Omega)}$ и параметры решётки Γ; подробнее см. [31, п. 14.2]. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}_{0,\times}(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}+\lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_{0,\times}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная (2×2)-матричнозначная функция, а параметр λ подчинён ограничению (5.20) (при $f=\mathbf{1}_2$). Таким образом, оператор $\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon}:=\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}+\lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}$ можно записать в виде (11.1):

$$\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon}=b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})+\sum_{j=1}^d\bigl(a^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})D_j+D_j(a^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x}))^*\bigr)+\mathcal{Q}^\varepsilon_\times(\mathbf{x})+\lambda\mathcal{Q}^\varepsilon_{0,\times}(\mathbf{x}).$$

Опишем эффективный оператор. Уравнение (6.3) сейчас имеет вид

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x})+\mathbf{1}_2)=0,\qquad\int\limits_\Omega\Lambda_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Его решение $\Lambda_\times(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$\Lambda_\times(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}0&\Lambda_-(\mathbf{x})\\\Lambda_+(\mathbf{x})&0\end{pmatrix},$$

где $\Lambda_\pm(\mathbf{x})$ являются Γ-периодическими решениями задач

$$\partial_\pm\omega^2_\pm(\mathbf{x})(\partial_\mp\Lambda_\pm(\mathbf{x})+1)=0,\qquad\int\limits_\Omega\Lambda_\pm(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Поскольку $m=n$, эффективная матрица равна

$$g^0_\times=\underline{g_\times}=\begin{pmatrix}g^0_+&0\\0&g^0_-\end{pmatrix},\qquad g^0_\pm=\underline{\omega^2_\pm}.$$

В качестве $\widetilde{\Lambda}$ выступает Γ-периодическое решение $\widetilde{\Lambda}_\times$ задачи

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x})+v_\times(\mathbf{x})+i\sum_{j=1}^2\partial_j\eta_{j,\times}(\mathbf{x})=0,\qquad\int\limits_\Omega\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Матрицы (6.7) и (6.8) сейчас реализуются в виде

$$V_\times := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x},$$

$$W_\times := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

Вычисление эффективного оператора по общему правилу даёт

$$\widehat{\mathscr{B}}^0_\times = -g^0_\times \Delta + 2i(\eta^0_{1,\times}\partial_1 + \eta^0_{2,\times}\partial_2) + \overline{\mathcal{Q}_\times} - W_\times + \lambda\overline{\mathcal{Q}_{0,\times}},$$

где $2\eta^0_{1,\times} = 2\overline{\eta_{1,\times}} + \sigma_1 V_\times + V^*_\times\sigma_1$, $2\eta^0_{2,\times} = 2\overline{\eta_{2,\times}} + \sigma_2 V_\times + V^*_\times\sigma_2$.

14.3. Оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$, формально заданный выражением

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} &= f^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) g^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) f^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) \\ &\quad + i\sum_{j=1}^{2}\big(\check{\eta}^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\partial_j + \partial_j(\check{\eta}^\varepsilon_{j,\times}(\mathbf{x})\,\cdot\,)\big) + \varepsilon^{-1}\check{v}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) + \check{\mathcal{Q}}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{14.5}$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Здесь $\check{\eta}_{j,\times}(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$, — Γ-периодические *диагональные* (2×2)-матрицы-функции с вещественными элементами такие, что $\check{\eta}_{j,\times} \in L_\rho(\Omega)$, $\rho > 2$; $\check{v}_\times(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{Q}}_\times(\mathbf{x})$ — Γ-периодические эрмитовы (2×2)-матрицы-функции, причём

$$\check{v}_\times, \check{\mathcal{Q}}_\times \in L_\varrho(\Omega),\ \varrho > 1, \quad \int_\Omega f_\times(\mathbf{x})^{-1}\check{v}_\times(\mathbf{x}) f_\times(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} = 0.$$

Замечание 14.1. *Считая потенциалы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ липшицевыми функциями, рассмотрим оператор*

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_\varepsilon &= \begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{-,\varepsilon} & 0\\ 0 & \mathfrak{B}_{+,\varepsilon}\end{pmatrix},\\ \mathfrak{B}_{\pm,\varepsilon} &= (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^\varepsilon(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^2 \pm (\varepsilon^{-2}\check{B}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1}B^\varepsilon(\mathbf{x})),\end{aligned} \tag{14.6}$$

где $B(\mathbf{x}) = \partial_1 A_2(\mathbf{x}) - \partial_2 A_1(\mathbf{x})$. Оператор (14.6) — это матричный оператор Паули с магнитным потенциалом $\varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^\varepsilon + \mathbf{A}^\varepsilon$ (содержащим сингулярное слагаемое). Пусть $\widetilde{v}_\times(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}_\times(\mathbf{x})$ — Γ-периодические эрмитовы (2×2)-матрицы-функции, причём $\widetilde{v}_\times, \mathcal{V}_\times \in L_\varrho(\Omega)$, $\varrho > 1$. Рассмотрим возмущённый электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}\widetilde{v}^\varepsilon_\times + \mathcal{V}^\varepsilon_\times$ (также содержащим сингулярное слагаемое) оператор Паули

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} = \mathfrak{B}_\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widetilde{v}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon_\times(\mathbf{x}). \tag{14.7}$$

Дополнительно наложим условие нормировки на $\widetilde{v}_\times$:

$$\int_\Omega f_\times(\mathbf{x})^{-1}\left(\widetilde{v}_\times(\mathbf{x}) + 2\left\langle\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\right\rangle \mathbf{1}_2 - B(\mathbf{x})\sigma_3\right) f_\times(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда оператор (14.7) может быть записан в виде (14.5) при

$$\check{\eta}_{j,\times} = A_j\mathbf{1}_2,\ j = 1,2; \quad \check{v}_\times = \widetilde{v}_\times + 2\left\langle\check{\mathbf{A}}, \mathbf{A}\right\rangle\mathbf{1}_2 - B\sigma_3, \quad \check{\mathcal{Q}}_\times = \mathcal{V}_\times + |\mathbf{A}|^2\mathbf{1}_2.$$

За счёт добавления подходящего слагаемого $\lambda \mathbf{1}_2$ всегда можно считать, что оператор $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon} := \mathcal{B}_{\times,\varepsilon} + \lambda \mathbf{1}_2$ положительно определён.

Справедливо тождество $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon} = f_\times^\varepsilon \widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon} f_\times^\varepsilon$, где коэффициенты оператора $\widehat{\mathscr{B}}_{\times,\varepsilon}$ выбраны следующим образом:

$$\eta_{j,\times} = f_\times^{-1} \check{\eta}_{j,\times} f_\times^{-1},\ j = 1,2; \quad v_\times = f_\times^{-1} \check{v}_\times f_\times^{-1}, \quad \mathcal{Q}_\times = f_\times^{-1} \check{\mathcal{Q}}_\times f_\times^{-1};$$
$$\mathcal{Q}_{0,\times} = f_\times^{-2}.$$

Роль $\mathfrak{Q}$ играет матрица $\mathfrak{Q}_\times = f_\times^{-2} = g_\times^{-1}$. Тогда

$$\overline{\mathfrak{Q}}_\times = \begin{pmatrix} (g_+^0)^{-1} & 0 \\ 0 & (g_-^0)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица f_0 сейчас равна $f_{\times,0} = \begin{pmatrix} (g_+^0)^{1/2} & 0 \\ 0 & (g_-^0)^{1/2} \end{pmatrix}$, а оператор (11.4) имеет вид $\mathscr{B}_\times^0 = f_{\times,0} \widehat{\mathscr{B}}_\times^0 f_{\times,0}$.

14.4. Задача Коши для оператора $\mathscr{B}_{\times,\varepsilon}$. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения Паули

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathscr{B}_{\times,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad s \in \mathbb{R}, \\ f_\times^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{14.8}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, и соответствующую усреднённую задачу

$$\begin{cases} i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = (\mathscr{B}_\times^0\mathbf{u}_0)(\mathbf{x},s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad s \in \mathbb{R}, \\ f_{\times,0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{14.9}$$

Применима теорема 12.3. Исходные данные (5.25) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned} &\rho, \varrho;\ \|\omega_+\|_{L_\infty},\ \|\omega_-\|_{L_\infty},\ \|\check{\eta}_{j,\times}\|_{L_\rho(\Omega)},\ j = 1,2; \\ &\|\check{v}_\times\|_{L_\varrho(\Omega)},\ \|\check{\mathcal{Q}}_\times\|_{L_\varrho(\Omega)},\ \lambda,\ \text{параметры решётки}\,\Gamma. \end{aligned}$$

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 14.2. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (14.8) и пусть $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (14.9).*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^2)$, где $0 \leqslant r \leqslant 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - f_{\times,0}\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \varepsilon^{r/3}\mathfrak{C}_1(r;s)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $\mathfrak{C}_1(r;s)$ определена в теореме 11.4.

2°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^2)$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,s) - f_{\times,0}\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Результат теоремы 14.2 в общем случае является точным. Покажем это. Для этого рассмотрим оператор $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})$. Здесь оператор $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta})$ играет роль $\widehat{N}_{11,\mathfrak{Q}}(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathscr{B}_\times$ (см. п. 8.2). Используя формулы

$$\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = f_\times P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P} \quad \text{и} \quad \widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P} f_\times^{-1} N_{11,\times}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1}\widehat{P}$$

(см. (4.21) и (4.12)), получаем:

$$\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) N_{11,\times}(\boldsymbol{\theta}) P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}.$$

Как показано в [6, п. 12.4] (см. также [35, пп. 16.2 и 16.3]), оператор $N_{11,\times}(\boldsymbol{\theta})$, играющий роль $N_{11}(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathscr{B}_\times$, имеет вид $N_{11,\times}(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) I|_{\mathfrak{N}}$. Здесь

$$\mu(\boldsymbol{\theta}) = -2g_-^0 \gamma \left(\theta_1 \operatorname{Re} \overline{\omega_+^2 w} + \theta_2 \operatorname{Im} \overline{\omega_+^2 w} \right), \qquad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1,$$
$$\gamma = g_+^0 g_-^0 = |\Omega|^2 \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2},$$

а $w(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение уравнения

$$(D_1 - iD_2) w(\mathbf{x}) = g_+^0 \omega_-^2(\mathbf{x}) - 1, \qquad \int\limits_\Omega w(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Поэтому $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}$. Ясно, что $P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$, а потому $\widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$. В [35, пример 16.2] приведён пример, в котором $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

Пример 14.3 (см. [35]). *Пусть* $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ *и*

$$\omega_-^2(\mathbf{x}) = 1 + \alpha(\sin x_2 + 4 \sin 2x_2),$$

где $\alpha > 0$ *достаточно мало. Тогда* $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ *при* $\theta_1 \neq 0$.

Таким образом, в данном примере $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11,\mathfrak{Q},\times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$. Применима теорема 11.6.

Благодарности

Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за руководство работой, полезные обсуждения и ценные советы.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-01-00087 А.

Литература

[1] Allaire G., Piatnitski A., *Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems*, Comm. Math. Phys. **258** (2005), 1–22.

[2] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[3] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York, 1978.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряжённого семейства с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.

[6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[8] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), №6, 30–107.

[9] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), №2, 19–42.

[10] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), no. 5, 1166–1198.

[11] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 3–60.

[12] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряжённого операторного семейства с учётом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), №2, 102–146.

[13] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 1–103.

[14] Дородный М. А., *Усреднение периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка*, Алгебра и анализ **31** (2019), №6, 122–196.

[15] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: sharpness of the results*, Applicable Analysis, to appear.

[16] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анал. и его прил. **50** (2016), №4, 91–96.

[17] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral Approach to Homogenization of Hyperbolic Equations With Periodic Coefficients*, J. Differential Equations **264** (2018), no. 12, 7463–7522.

[18] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), №5, 597–601.

[19] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[20] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[21] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[22] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), №3 , 27–122.

[23] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[24] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.

[25] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, J. Spectral Theory, to appear.

[26] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Мат. заметки **105** (2019), №6, 937–942.

[27] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115** (1981), №2, 204–222.

[28] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анал. и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.

[29] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 201–233.

[30] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[31] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[32] Суслина Т. А., *Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра*, Алгебра и анализ **25** (2013), №5, 221–251.

[33] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами*: *операторные оценки погрешности в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *с учётом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), №4, 195–263.

[34] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера*, Функц. анал. и его прил. **50** (2016), №3, 90–96.

[35] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.