МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

РАБОТА ДЛЯ КОНКУРСА МЁБИУСА

Черных Георгия Сергеевича

Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

Москва
2020 г.

SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов

Черных Г. С.

Аннотация. Мы изучаем SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и доказываем, что все они порождаются известными геометрическими операциями ∂_i. Также мы изучаем теорию W c_1-сферических бордизмов, описываем SU-линейные умножения на W и проекторы $MU \to W$. Кроме того, мы исследуем комплексные ориентации в W и доказываем результаты о s-числах соответствующих формальных групп.

Содержание

Введение

В разделе 1.1 мы доказываем некоторые эквивалентности (при определённых условиях) определений R-линейных отображениях спектров R-модулей для кольцевого спектра R, применимые в случае SU-линейных операций в комплексных кобордизмах. В разделе 1.2 мы описываем структуру спектра MU как свободного MSU-модуля. Это позволяет описать все SU-линейные операции в комплексных кобордизмах в терминах геометрических операций ∂_i.

В разделе 2.1 мы (следуя [**11**, Глава VIII]) напоминаем геометрическое и гомотопическое определения теории c_1-сферических бордизмов W. Далее мы описываем структуру MSU-модуля на W и устанавливаем эквивалетность W и кослоя умножения в MSU на нетривиальный элемент $\theta \in \pi_1(MSU)$.

В разделе 2.2 мы вводим (следуя [**11**, Глава VIII]) проектор Стонга $\pi_0\colon MU \to W$. Мы описываем некоторые свойства π_0 и приводим формулу, выражающую его через ∂_i. С помощью этого мы легко устанавливаем, что образ забывания в $\pi_*(W)$ в $\pi_*(MU)$ совпадает с ядром операции Δ. Именно в такой интерпретации $\pi_*(W)$ появляется, например, при вычислении $\pi_*(MSU)$ методом спектральной последовательности Адамса–Новикова (см., например, [**6**]). Наконец, мы проверяем, что W совпадает со слоем операции Δ.

В разделе 2.3 из идентификации W со слоем Δ мы получаем описания проекторов $MU \to W$. Обычное произведение многообразий не индуцирует умножение в теории W_* (в частности, $\pi_*(W)$ не является подкольцом в $\pi_*(MU)$), но можно ввести мультипликативную структуру на W с помощью проектора Стонга (или любого другого

SU-линейного проектора). Используя описание SU-линейных операций из раздела 1.2 мы также получаем общий вид SU-билинейного умножения на W.

В последнем разделе 3 мы изучаем (следуя **[4]** и применяя результаты предыдущих двух разделов) комплексные ориентации на W, получающиеся с помощью произвольного SU-линейного проектора из стандартной ориентации на MU. Мы описываем s-числа коэффициентов соответствующих формальных групп и доказываем, что эти коэффициенты ни для какой комплексной ориентации на W не порождают всего кольца $\pi_*(W)$.

1. SU-линейные операции в комплексных кобордизмах

1.1. Эквивалентные определения SU-линейности. Здесь мы будем работать в стабильной гомотопической категории (см. например **[1]**, **[9]**, **[10]**, **[7]** или более современное изложение в **[2]**). Пусть R — коммутативный кольцевой спектр, E, F — R-модули. Рассмотрим следующие условия на $f \in [E, F]$:

Определение 1.1.

1) f — *R-линейно*, то есть, коммутативен (в стабильной гомотопической категории) квадрат

$$\begin{tikzcd} R \wedge E \arrow[r, "1\wedge f"] \arrow[d] & R \wedge F \arrow[d] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

2) f — *линейно относительно умножения на элементы* $\pi_*(R)$, то есть, для любого $x \in \pi_k(R)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Sigma^k E \arrow[r, "\cdot x"] \arrow[d, "\Sigma^k f"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \Sigma^k F \arrow[r, "\cdot x"] & F \end{tikzcd}$$

3) $\pi_*(f) \in \mathrm{Hom}(\pi_*(E), \pi_*(F))$ — $\pi_*(R)$-*линейно.*

Предложение 1.2. *Из свойства 1) следует свойство 2), а из свойства 2) следует свойство 3).*

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2): Вторая диаграмма в более подробном виде представляет из себя следующее:

$$\begin{tikzcd} S^k \wedge E \arrow[r, "x\wedge 1"] \arrow[d, "1\wedge f"'] & R \wedge E \arrow[r] \arrow[d, "1\wedge f"] & E \arrow[d, "f"] \\ S^k \wedge F \arrow[r, "x\wedge 1"] & R \wedge F \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Левый квадрат коммутирует, поэтому, если коммутирует правый квадрат, что и утверждается в 1), то коммутирует и весь прямоугольник, что утверждается в 2).

2) $\Rightarrow$ 3): Для $a \in \pi_n(R)$ и $x \in \pi_k(E)$ условие $\pi_*(f)(ax) = a\pi_*(f)(x)$ выражается в коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & R \wedge E \arrow[r] & E \arrow[dr, "f"] & \\
S^n \wedge S^k \arrow[ur, "a\wedge x"] \arrow[dr, "1\wedge x"'] & & & F \\
 & S^n \wedge E \arrow[r, "a\wedge f"] & R \wedge F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Если её разбить на две части:

$$\begin{tikzcd}
 & R \wedge E \arrow[r] & E \arrow[dr, "f"] & \\
S^n \wedge S^k \arrow[ur, "a\wedge x"] \arrow[dr, "1\wedge x"'] & & & F \\
 & S^n \wedge E \arrow[uu, "a\wedge 1"'] \arrow[r, "a\wedge f"] & R \wedge F \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

то мы увидим, что левый треугольник коммутативен, а коммутативность правой части как раз и утверждается в 2).

□

Далее мы обозначаем через $[E, F]$ абелеву группу морфизмов в стабильной гомотопической категории между спектрами E и F, а через $[E, F]_*$ — соответствующую градуированную группу, где $[E, F]_k = [\Sigma^k E, F]$. Напомним также, что существует спектр $\mathrm{Hom}(E, F)$, сопряжённый к $E \wedge F$ в следующем смысле: $[X \wedge Y, Z] = [X, \mathrm{Hom}(Y, Z)]$. В частности, $\pi_*(\mathrm{Hom}(E, F)) = [S, \mathrm{Hom}(E, F)]_* = [E, F]_*$.

Предложение 1.3. *Если $[R\wedge E, F]$ и $[E, F]_*$ не имеют кручения, то из свойства 3) следует свойство 1).*

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1.4 ([**9**, лемма VII.3.2]). *Если $[E, F]_*$ не имеет кручения, то естественное отображение $p\colon [E, F]_* \to \mathrm{Hom}_*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ инъективно.*

Замечание. Условие этого утверждения выполнено, например, если E и F — связные спектры конечного типа, причём $\pi_*(F)$ и $H_*(E)$ не имеют кручения. Это более просто проверяемые условия, и именно с ними утверждение сформулировано в [**9**] (хотя доказательство опирается только на сформулированное у нас условие отсутствия кручения в $[E, F]_*$).

Доказательство предложения 1.3.

Рассмотрим отображения $\varphi_1\colon R \wedge E \xrightarrow{1\wedge f} R \wedge F \to F$, $\varphi_2\colon R \wedge E \to E \xrightarrow{f} F$ и $\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$. Надо доказать, что $\varphi' = 0$. Это эквивалентно равенству нулю сопряжённого отображения спектров $\varphi\colon R \to \mathrm{Hom}(E, F)$.

В гомотопических группах имеем отображение $\pi_*(R) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_*(\mathrm{Hom}(E, F)) = [E, F]_*$. Рассмотрим его композицию с естественным отображением $p\colon [E, F]_* \to \mathrm{Hom}_*(\pi_*(E), \pi_*(F))$.

Композиция $\pi_*(R) \xrightarrow{\varphi_*} [E, F]_* \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}_*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ сопоставляет элементу $a \in \pi_*(R)$ гомоморфизм в гомотопических группах «коммутирования» $\pi_*(f)$ с умножением на a: $x \mapsto af_*(x) - f_*(ax)$. Но это нулевой гомоморфизм для любого $a \in \pi_*(R)$ согласно условию 3), то есть, композиция равна нулю.

Но гомоморфизм $p\colon [E, F]_* \to \mathrm{Hom}_*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ — инъективен согласно предложению 1.4. Значит, нулевым является и морфизм $\pi_*(R) \xrightarrow{\varphi_*} [E, F]_*$. Осталось только заметить, что отображение $[R, \mathrm{Hom}(E,F)] \to \mathrm{Hom}(\pi_*(R), \pi_*(\mathrm{Hom}(E,F)))$ тоже является инъективным по предложению 1.4, так как $[R, \mathrm{Hom}(E,F)] = [R \wedge E, F]$ не имеет кручения. А значит, и само $\varphi = 0$.

$\square$

Применяя предложение 1.3 к $R = MSU$ и $E = MU$, $F = \Sigma^k MU$, получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Все три условия из определения 1.1 эквивалентны для SU-линейных операций в комплексных кобордизмах $f \in [MU, MU]_*$.*

1.2. Описание SU-линейных операций в комплексных кобордизмах. Следующее утверждение восходит к Коннеру и Флойду [**5**, Chapter III].

Предложение 1.6. *Как MSU-модуль спектр MU эквивалентен $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим следующее отображение MSU-модулей

$$MSU \wedge \Sigma^{-2} MU(1) \xrightarrow{1\wedge i} MSU \wedge MU \to MU$$

Это отображение спектров Тома, индуцированное отображением пространств

$$BSU \times BU(1) \to BU \times BU \xrightarrow{\oplus} BU$$

Но это отображение является гомотопической эквивалентностью (с обратной эквивалентностью $BU \xrightarrow{(\eta - \det \eta)\times \det \eta} BSU \times BU(1)$). Следовательно, оно индуцирует эквивалентность и соответствующих спектров Тома.

$\square$

Легко видеть, что отображения $f \in [E, F]_*$, удовлетворяющие свойству 1) из определения 1.1 для R-модуля E вида $R \wedge X$, находятся в естественном биективном соответствии с $[X, F]_*$.

Отсюда мы получаем

Предложение 1.7. *Имеется естественный изоморфизм Ω^U-модулей между множеством SU-линейных операций $f \in [MU, MU]_*$ и $[\Sigma^{-2}\mathbb{C}P^\infty, MU]_* = \widetilde{U}^{*+2}(\mathbb{C}P^\infty)$.*

Мы имеем $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u]]$, где $\Omega_U = U^*(pt)$ — кольцо кобордизмов точки, $u = c_1^U \in \widetilde{U}^2(\mathbb{C}P^\infty)$. При этом $\widetilde{U}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ соответствует подкольцу рядов от u без свободного члена.

Возникает вопрос: какая операция соответствует u^i в силу предложения 1.7?

Нужные операции были рассмотрены С. П. Новиковым в [**8**]. Напомним их определение, следуя [**6**].

Конструкция 1.8 (операции ∂_k). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 определим операцию из $[MU, MU]_{-2(k_1+k_2)}$

$$\Delta_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\big((\overline{\delta})^{k_1}(\delta)^{k_2}\big).$$

Здесь φ^* — стабильный изоморфизм Тома в комплексных кобордизмах $U^*(BU) \xrightarrow{\sim} U^*(MU)$, отождествляющий характеристические классы с когомологическими операциями в комплексных кобордизмах; $\delta = \det^*(c_1^U) \in U^2(BU)$ для $\det\colon BU \to \mathbb{C}P^\infty = BU(1)$; $\bar{u}$ — обратный ряд к формальной группе комплексных кобордизмов.

Геометрически, то есть на гомотопических группах $\pi_*(MU) = \Omega^U$, операция $\Delta_{(k_1,k_2)}$ сопоставляет классу бордизмов $[M]$ класс $[M_{k_1,k_2}]$ подмногообразия, двойственного к $(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k_1} \oplus (\overline{\det \mathcal{T}M})^{\oplus k_2}$.

Также заметим, что действие операций $\Delta_{(k_1,k_2)}$ на канонической ориентации $u \in \widetilde{U}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ задаётся формулой $\Delta_{(k_1,k_2)} u = u\bar{u}^{k_1}u^{k_2}$.

Предложение 1.9. *Операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$ SU-линейны.*

Доказательство. Согласно следствию 1.5 достаточно проверить SU-линейность действия $\Delta_{(k_1,k_2)}$ на гомотопических группах $\pi_*(MU) = \Omega^U$. Пусть $[M] \in \Omega^U_m$, $N \in \Omega^{SU}_n$. Нужно доказать, что $\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = [N] \cdot \Delta_{(k_1,k_2)}([M])$.

Из определения следует, что

$$\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\Big(\big(c_1^U(\det \mathcal{T}(N \times M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(N \times M)})\big)^{k_2}\Big),$$

где $D_U \colon U^*(N \times M) \xrightarrow{\cong} U_{n+m-*}(N \times M)$ — оператор двойственности Атья–Пуанкаре в комплексных кобордизмах, а $\varepsilon \colon U_*(N \times M) \to U_*(pt)$ — аугментация.

Но $\det \mathcal{T}(N \times M) = \det \mathcal{T}N \otimes \det \mathcal{T}M = \det \mathcal{T}M$, так как N является SU-многообразием. То есть, мы получаем, что

$$\Delta_{(k_1,k_2)}([N \times M]) = \varepsilon D_U\Big(\big(c_1^U(\det \mathcal{T}(M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(M)})\big)^{k_2}\Big).$$

Ясно, что в произведении $N \times M$ подмногообразие двойственное к $\big(c_1^U(\det \mathcal{T}(M))\big)^{k_1}\big(c_1^U(\overline{\det \mathcal{T}(M)})\big)^{k_2}$ есть просто $N \times \Delta_{(k_1,k_2)}([M])$.

$\square$

Введём следующие обозначения

$$\Delta_{(1,1)} = \Delta,\ \Delta_{(k,0)} = \partial_k,\ \partial_1 = \partial,\ \Delta_{(0,k)} = \bar{\partial}_k.$$

При этом операции $\bar{\partial}_k$ выражаются в виде ряда через ∂_k.

Заметим, что ∂_0 является тождественной операцией.

Кроме того, образ операции ∂ при действии на Ω^U состоит из классов SU-многообразий. В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что для произвольной SU-линейной операции f выполнено $f(x\,\partial y) = f(x)\partial y$.

Лемма 1.10. *Элементу $u^{i+1} \in \widetilde{U}^{2i+2}(\mathbb{C}P^\infty)$ соответствует операция $\bar{\partial}_i$.*

Доказательство. Из определения операции $\bar{\partial}_i$ следует, что мы имеем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-2}MU(1) \arrow[r, "u^{i+1}"] \arrow[d, "i"'] & \Sigma^{2i}MU \arrow[d, equal] \\
MU \arrow[r, "\bar{\partial}_i"] & \Sigma^{2i}MU
\end{tikzcd}$$

Тогда получаем

$$\begin{tikzcd}
MSU \wedge \Sigma^{-2}MU(1) \arrow[r, "1\wedge u^{i+1}"] \arrow[d, "1\wedge i"'] & MSU \wedge \Sigma^{2i}MU \arrow[d, equal] \\
MSU \wedge MU \arrow[r, "1\wedge\bar{\partial}_i"] \arrow[d] & MSU \wedge \Sigma^{2i}MU \arrow[d] \\
MU \arrow[r, "\bar{\partial}_i"] & \Sigma^{2i}MU
\end{tikzcd}$$

Коммутативность нижнего квадрата следует из SU-линейности операции $\bar{\partial}_i$, а коммутативность всей диаграммы и означает, что $u^{i+1} \in \widetilde{U}^{2i+2}(\mathbb{C}P^\infty)$ соответствует операции $\bar{\partial}_i$.

$\square$

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела.

Теорема 1.11. *Каждая* SU*-линейная операция* $f \in [MU, MU]_*$ *единственным образом представляется в виде ряда* $f = \sum\limits_{i\geqslant 0} \alpha_i \partial_i$*, где* $\alpha_i \in \Omega_U$*.*

Доказательство. Из предложения 1.7 и леммы 1.10 следует, что каждая SU-линейная операция единственным образом представляются в виде ряда $\sum \alpha_i \bar\partial_i$. Так как $\bar\partial_i$ выражаются через ∂_i, получаем аналогичное разложение $\sum \alpha_i \partial_i$. Единственность последнего следует из того, что и обратно ∂_i выражаются через $\bar\partial_i$ По-другому, коэффициенты разложения $\sum \alpha_i \partial_i$ единственным образом восстанавливаются из действия операции на канонической ориентации $u \in \widetilde{U}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ в силу формулы $\partial_i u = u\bar u^i$. □

Замечание. Выбор именно операций ∂_i, а не $\bar\partial_i$, связан, например, с тем, что через эти операции далее выражается важный проектор Стонга, см. раздел 2.2 и предложение 2.6.

Аналогично доказывается

Теорема 1.12. *Каждая* SU*-полилинейная операция в комплексных кобордизмах единственным образом представляется в виде ряда* $\sum \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \partial_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{i_k}$*.*

2. c_1-сферические бордизмы

Здесь мы рассмотрим теорию c_1-сферических бордизмов W_*, опишем SU-линейные умножения на ней и SU-линейные проекторы $MU \to W$.

2.1. Определение и MSU-модульная структура. Геометрически теория W_* c_1-сферических бордизмов определяется следующим образом (подробности см. в [**11**, Глава VIII]). Рассматриваются замкнутые многообразия M со следующими дополнительными структурами:

1) стабильно комплексной структурой на касательном расслоении $\mathcal{T}M$;

2) $\mathbb{C}P^1$-редукцией детерминантного расслоения, то есть, отображением $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ и эквивалентностью $f^*(\eta) \cong \det \mathcal{T}M$, где η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

Это естественное обобщение SU-структуры, которая задаётся «$\mathbb{C}P^0$-редукцией», то есть, тривиализацией детерминантного расслоения.

Данная структура задаёт теорию бордизмов W_*. Из определения ясно, что существуют забывающие преобразования $MSU_* \to W_* \to MU_*$.

Гомотопически c_1-сферическая структура на стабильно комплексном расслоении $\xi\colon M \to BU$ задаётся поднятием до отображения $M \to X$, где X замыкает (гомотопический) декартов квадрат справа на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "i"] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU \arrow[r, "\det"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Так как $\mathbb{C}P^\infty$ — H-группа, в этой диаграмме декартов квадрат можно заменить следующим образом:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ M \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\xi"] & BU \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det - i"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Отображение $X \to BU$ индуцирует на X стабильно комплексное расслоение, спектр Тома которого задаёт теорию бордизмов многообразий с $\mathbb{C}P^1$-редукцией в нормальном расслоении. Если же мы хотим получить теорию бордизмов многообразий с

$\mathbb{C}P^1$-редукцией в касательном расслоении (т. е. теорию W_*), то мы формально должны рассмотреть спектр Тома пространства Y, замыкающего декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ BU \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det + i"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Заменяя правое отображение в квадрате выше на расслоение $S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$, мы приходим к определению, данному в **[11]**:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & S^\infty \arrow[d] \\ BU \times \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "\det + i"] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Спектр Тома, соответствующий отображению $Y \to BU$, задаёт теорию W_*. Будем обозначать этот спектр также через W.

Спектр W обладает естественной структурой MSU-модуля. Забывающие морфизмы $MSU \to W \to MU$ являются отображениями MSU-модулей. Структура MSU-модуля W описывается следующим предложением (неявно содержащимся в **[11]** и также восходящем к Коннеру и Флойду).

Предложение 2.1. *Имеем эквивалентность MSU-модулей $W \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & BU \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\det"] & BSU \times \mathbb{C}P^\infty \arrow[d, "pr_2"] \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "-i"] & \mathbb{C}P^\infty \arrow[r, equal] & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

в которой использована гомотопическая эквивалентность $BU \simeq BSU \times \mathbb{C}P^\infty$ из доказательства предложения 1.6. Так как квадрат слева является декартовым, получаем, что отображение $Y \to BU$ отождествляется с $BSU \times \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\mathrm{id}\times(-i)} BSU \times \mathbb{C}P^\infty$. Тогда, переходя к соответствующим спектрам Тома, мы получаем эквивалентность MSU-модулей $W \simeq MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$ — пространство Тома тавтологического рассслоения над $\mathbb{C}P^1$).

□

Предложение 2.2. *Спектр W как MSU-модуль совпадает с кослоем умножения $\Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU$ на нетривиальный элемент $\theta \in \pi_1(MSU)$.*

Доказательство. Обозначим кослой этого отображения через C. Спектр C наследует естественную структуру MSU-модуля.

Элемент θ задаётся отображением Хопфа $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 = MSU(1)$. При этом умножение на него соответствует отображению

$$MSU \wedge \Sigma^{-2}S^3 \xrightarrow{1\wedge\Sigma^{-2}\eta} MSU \wedge \Sigma^{-2}S^2.$$

Так как кослоем отображения $S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$ является $\mathbb{C}P^2$, получаем, что кослой C эквивалентен $MSU \wedge \Sigma^{-2}\mathbb{C}P^2$, что совпадает со спектром W в силу предложения .

□

Следствие 2.3. *Спектры W и MSU имеют одинаковый локализационный тип в смысле Боусфилда, то есть, $MSU_*(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $W_*(X) = 0$ и $X \to Y$ индуцирует изоморфизм $MSU_*(X) \xrightarrow{\cong} MSU_*(Y)$, если и только если оно индуцирует изоморфизм $W_*(X) \xrightarrow{\cong} W_*(Y)$.*

Доказательство. Это общее свойство кослоя отображения конечного порядка. Второе утверждение (об изоморфизме гомологий) эквивалентно первому (про обращение гомологий в ноль) в силу гомологической точной последовательности отображения.

Точная последовательность спектров $\Sigma MSU \xrightarrow{\cdot\theta} MSU \to W$ из предложения 2.2 приводит к точной последовательности гомологий

$$\cdots \to MSU_{*-1}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X) \to W_*(X) \to MSU_{*-2}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_{*-1}(X) \to \cdots$$

Отсюда ясно, что если $MSU_*(X) = 0$, то $W_*(X) = 0$. Обратно, если $W_*(X) = 0$, то $MSU_{*-1}(X) \xrightarrow{\cdot\theta} MSU_*(X)$ — изоморфизм. Так как $\theta^3 \in \Omega_3^{SU} = 0$ (см., например, [**6**, Пример 5.7]), получаем, что $MSU_*(X) = 0$. $\square$

2.2. Связь с операцией Δ.

В [**11**, Глава VIII] геометрически определяется операция $\pi_0 \colon \pi_*(MU) \to \pi_*(W)$, которая сопоставляет классу комплексных бордизмов $[M]$ класс бордизмов подмногообразия $N \subset \mathbb{C}P^1 \times M$ двойственного к $\bar\eta \otimes \det \mathcal{T}M$. Это подмногообразие имеет естественную c_1-сферическую стабильно комплексную структуру (так как $\det \mathcal{T}N$ изоморфно расслоению $i^*\bar\eta$, где i – вложение $N \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times M$).

В [**11**] геометрически доказано следующее

Предложение 2.4 ([**11**, Глава VIII]). *Композиция гомомофризмов*

$$\pi_*(W) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\pi_0} \pi_*(W)$$

является тождественным отображением.

Следствие 2.5. *Гомоморфизм забывания инъективно отображает $\pi_*(W)$ на прямое слагаемое в $\pi_*(MU)$, на которое $\pi_*(MU)$ проектируется при помощи π_0.*

Мы будем называть π_0 *проектором Стонга.* Мы также будем рассматривать π_0 как идемпотентную операцию $\Omega^U \to \Omega^U$. В этом случае имеется следующее

Предложение 2.6. *Для любого $a \in \Omega^U$ выполнено равенство*

$$\pi_0(a) = a + \sum_{k\geqslant 2} \alpha_{1k}\partial_k a, \tag{2.1}$$

где α_{1k} – коэффициенты формальной группы в комплексных кобордизмах $F(u,v) = u + v + \sum \alpha_{ij}u^iv^j$.

При этом

$$\partial\pi_0 = \pi_0\partial = \partial$$

Замечание. Заметим, что это утверждение однозначно (в силу предложения 1.4) расширяет изначальное геометрическое определение π_0 до когомологической операции из $[MU, MU]$.

Доказательство предложения 2.6.

1) Докажем формулу (2.1). Пусть $a = [M]$. Геометрическое определение π_0 формально можно записать следующим образом

$$\pi_0(a) = \varepsilon D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det \mathcal{T}M)),$$

где $D_U \colon U^*(\mathbb{C}P^1 \times M^n) \xrightarrow{\simeq} U_{n+2-*}(\mathbb{C}P^1 \otimes M^n)$ — оператор двойственности Пуанкаре–Атья в комплексных кобордизмах, а $\varepsilon \colon U_*(X) \to U_*(pt)$ — аугментация.

Обозначим $u = c_1^U(\bar\eta)$, $v = c_1^U(\det \mathcal{T}M) \in U^2(\mathbb{C}P^1 \times M)$. Тогда

$$\varepsilon D_U(c_1^U(\bar\eta \otimes \det \mathcal{T}M)) = \varepsilon D_U(F(u,v)) = \varepsilon D_U(u) + \varepsilon D_U(v) +$$

$$+\sum_{i,j\geqslant 1}\alpha_{ij}\varepsilon D_U(u^iv^j) = [M] + [\mathbb{C}P^1]\partial[M] + \sum_{j\geqslant 1}\alpha_{1j}\partial_j[M].$$

В последнем равенстве мы использовали соотношения $u^2 = 0$, $\varepsilon D_U(uv^j) = \partial_j[M]$ и $\varepsilon D_U(v) = [\mathbb{C}P^1]\partial[M]$.

Для доказательства (2.1) осталось воспользоваться равенством $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$.

2) Равенство $\pi_0\partial = \partial$ теперь вытекает из доказанной формулы (2.1) и соотношения $\partial_k\partial = 0$, которое следует из определения операций ∂_i.

3) Осталось доказать $\partial\pi_0 = \partial$. В силу предложения 1.4 это равенство достаточно проверить на кобордизмах точки. Пусть $\pi_0[M] = [N]$. Надо доказать, что $\partial[N] = \partial[M]$. Заметим, что $\det(\mathcal{T}N) = i^*(\overline{\eta})$, где $i\colon N \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times M$, и $i_*[N] = D_U(c_1^U(\overline{\eta}\otimes\det(\mathcal{T}M))) = D_U(F(u,v)) = F(u,v) \frown [M \times \mathbb{C}P^1]$. Тогда следующая выкладка доказывает нужное равенство:

$$\partial[N] = \varepsilon D_U(c_1^U(\det\mathcal{T}N)) = \varepsilon D_U(i^*u) = \langle i^*u, [N]\rangle = \langle u, i_*[N]\rangle = \langle u, F(u,v) \frown [M\times\mathbb{C}P^1]\rangle =$$
$$= \langle uF(u,v), [M \times \mathbb{C}P^1]\rangle = \langle uv, [M \times \mathbb{C}P^1]\rangle = \partial[M].$$

Здесь мы вновь воспользовались тем, что $u^2 = 0$. □

Замечание. В частности, мы видим, что операция π_0 является SU-линейной (что, впрочем, видно и из геометрического определения).

Предложение 2.7. *Образ забывания $\pi_*(W)$ в $\pi_*(MU)$ совпадает с ядром* $\ker\Delta$.

Доказательство. Операция Δ сопоставляет классу многообразия $[M]$ класс подмногообразия $[N]$, двойственный к $\det\mathcal{T}M \oplus \overline{\det\mathcal{T}M}$. Для c_1-сферического многообразия M расслоение $\det\mathcal{T}M$ индуцируется из тавтологического расслоения η над $\mathbb{C}P^1$. Так как $\eta \oplus \bar\eta$ тривиально на $\mathbb{C}P^1$, образ $\pi_*(W)$ содержится в $\ker\Delta$.

Обратно, пусть $x \in \ker\Delta$. Согласно [**6**, Следствие 6.4] $\partial_i x = 0$ при $i \geqslant 2$. Следовательно, тогда из формулы (2.1) получаем, что гомоморфизм забывания переводит $\pi_0(x)$ в x.

□

Замечание. Кольцо коэффициентов $\pi_*(W)$ было впервые введено Коннером и Флойдом [**5**] именно как $\ker\Delta$.

Отсюда мы уже можем получить следующее гомотопическое описание спектра W.

Предложение 2.8. *Спектр W совпадает со слоем отображения $MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$.*

Доказательство. Обозначим этот слой через F. Тогда мы имеем длинную точную последовательность гомотопических групп

$$\cdots \to \pi_{*-3}(MU) \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{*-4}(MU) \to \pi_{*-1}(F) \to \cdots$$

Так как операция Δ_* сюръективна (у неё есть правая обратная, см. например [**6**, лемма 4.3]), эта длинная точная последовательность распадается на короткие:

$$0 \to \pi_*(F) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{*-4}(MU) \to 0$$

Из предложения 2.7 следует, что аналогичные короткие точные последовательности имеются для $\pi_*(W)$:

$$0 \to \pi_*(W) \to \pi_*(MU) \xrightarrow{\Delta_*} \pi_{*-4}(MU) \to 0$$

Композиция $W \to MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU$ гомотопна нулю. Действительно, композиция равна нулю на гомотопических группах, но так как группа $H_*(W)$ не имеет кручения (она изоморфна прямому слагаемому в $H_*(MU)$), то в силу замечания после предложения 1.4, этого достаточно. Следовательно, имеется отображение $W \to F$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_*(W) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[d, equal] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*(F) \arrow[r] & \pi_*(MU) \arrow[r, "\Delta_*"] & \pi_{*-4}(MU) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что это отображение индуцирует изоморфизм гомотопических групп, и следовательно, является эквивалентностью спектров.

□

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что операция $\pi_0 \in [MU, MU]$ действительно поднимается (единственным образом) до $\pi_0 \in [MU, W]$.

2.3. Общий вид SU-линейных умножений и проекторов на W.

Теорема 2.9. *Пусть $\pi\colon MU \to W$ — некоторый проектор на W. Тогда любой другой проектор $MU \to W$ имеет вид $\pi(1 + f\Delta)$, где $f \in [MU, \Sigma^{-4}MU]$ — произвольная операция. При этом, если π SU-линеен, то для SU-линейных проекторов операцию f можно выбрать SU-линейной.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность, возникающую из предложения 2.8:

$$\cdots \to \Sigma^3 MU \to W \to MU \xrightarrow{\Delta} \Sigma^4 MU \to \cdots$$

Она даёт точную последовательность

$$\cdots \leftarrow [\Sigma^3 MU, W] \leftarrow [W, W] \leftarrow [MU, W] \leftarrow [\Sigma^4 MU, W] \leftarrow \cdots$$

Тогда проекторами будут те операции из $[MU, W]$, которые переходят в $\mathbb{1} \in [W, W]$. Заметим, что существование таких проекторов следует из того, что $[\Sigma^3 MU, W] = 0$. При этом любые два таких проектора отличаются на образ элемента из $[\Sigma^4 MU, W]$. То есть, любой проектор имеет вид $\pi + g\Delta$, где $g \in [\Sigma^4 MU, W]$. Осталось заметить, что любой такой элемент g имеет вид πf для $f \in [\Sigma^4 MU, MU]$. Это доказывает первое утверждение.

Пусть проектор π является SU-линейным. Тогда SU-линейные операции f дают SU-линейные проекторы. Обратно, если проектор $\pi(1 + f\Delta)$ является SU-линейным, то операция $\pi f \Delta$ также SU-линейна. Обозначим через $f' \in [\Sigma^4 MU, MU]$ композицию $\pi f \in [\Sigma^4 MU, W]$ и гомоморфизма забывания $W \to MU$. Тогда операция $f'\Delta$ является SU-линейной. Из наличия правой обратной для Δ следует теперь SU-линейность и самой f'. Но $\pi f' \Delta = \pi f \Delta$, то есть, мы можем в качестве f взять SU-линейную f'.

□

Лемма 2.10. *Множество операций вида $g\Delta$ для SU-линейных g совпадает с множеством операций $\{\sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_i \partial_i\}$.*

Доказательство. Мы докажем, что оба множества сопадают с множеством SU-линейных операций, равных нулю на W. Действительно, операции $g\Delta$ обращаются в ноль на W согласно предложению 2.8. С другой стороны, $\sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_i \partial_i$ обращается в нуль на W в силу того, что ∂_i равны нулю на W при $i \geqslant 2$ (см. [**6**, Следствие 6.4]).

Обратно, если операция равна нулю на W, то она имеет вид $g\Delta$ согласно предложению 2.8. Причём из SU-линейности $g\Delta$ и наличия правой обратной для Δ следует SU-линейность g.

Наконец, любая SU-линейная операция представляется в виде $\sum\limits_{i \geqslant 0} \alpha_i \partial_i$ в силу теоремы 1.11. Если она равна нулю на W, то вычисляя на $1 \in \pi_0(W)$ и $[\mathbb{C}P^1] \in \pi_2(W)$, получим $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

□

Из теоремы 2.9 и леммы 2.10 получаем

Следствие 2.11. *Если π — SU-линейный проектор MU на W, то любой другой такой SU-линейный проектор представляется в виде $\pi + \sum\limits_{i\geqslant 2} \alpha_i\partial_i$.*

В частности, применяя формулу (2.1) *из предложения 2.6 для проектора Стонга π_0, получаем, что все SU-линейные проекторы представляются в виде $\pi = 1 + \sum\limits_{i\geqslant 2} \alpha_i\partial_i$.*

Предложение 2.12. *Если проекторы MU на W рассматривать как операции в комплексных кобордизмах, то все они имеют вид $1 - f\Delta$, где f — произвольная операция, удовлетворяющая равенству $\Delta f = 1$. При этом различные проекторы соответствуют различным f, а SU-линейным проекторам соответствуют SU-линейные f.*

Доказательство. Из точной последовательности расслоения из предложения 2.8 мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \leftarrow [W, MU] \leftarrow [MU, MU] \leftarrow [\Sigma^4 MU, MU] \leftarrow 0$$

Операциями из $[MU, MU]$, тождественными на W, являются те, которые переходят в естественное отображение $W \to MU$. Из точной последовательности мы видим, что такие операции имеют вид $1 - f\Delta$, причём разным f соответствуют разные операции. При этом такие операции будут проекторами на W, если и только если $\Delta(1 - f\Delta) = 0$. Так как у Δ есть правая обратная операция, получаем, что $1 - \Delta f = 0$. Обратно, из этого условия следует, что $\Delta(1 - f\Delta) = 0$.

Эквивалентность SU-линейности получающихся операций и SU-линейности f опять получается из наличия правой обратной для Δ.

□

Любой SU-линейный проектор $\pi\colon MU \to W$ задаёт SU-билинейное умножение на W по формуле $W \wedge W \to MU \wedge MU \xrightarrow{m_{MU}} MU \xrightarrow{\pi} W$. Любое такое умножение обладает стандартной единицей (получающейся с помощью забывания из единицы MSU).

Предложение 2.13. *Умножения на W, получающиеся из SU-линейных проекторов, имеют вид*

$$a * b = ab + 2([V] - w)\partial a\partial b, \tag{2.2}$$

где $[V] = \alpha_{12}$ (коэффициент формальной группы в комплексных кобордизмах) $= [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$, а w — произвольный элемент из $\pi_4(W)$.

В терминах самого проектора π в формуле (2.2) *для задаваемого им умножения имеем $w = \pi([V])$.*

Если π записать в виде $\pi_0(1 + f\Delta)$, где π_0 — проектор Стонга, то $w = \pi_0 f(1)$.

Наконец, если представить π в виде ряда $1 + \sum\limits_{i\geqslant 2} \alpha_i\partial_i$, то задаваемое им умножение будет иметь вид

$$a * b = ab + 2\alpha_2\partial a\partial b$$

Доказательство. Докажем сначала последнее утверждение. Имеет место формула $\Delta(ab) = -2\partial a\partial b$ для a, b из W (см. [**6**, Лемма 6.5]). Аналогично доказывается, что $\partial_2(ab) = 2\partial a\partial b$ и $\partial_i(ab) = 0$ при $i \geqslant 3$ для a, b из W. Отсюда получаем, что если $\pi = 1 + \alpha_2\partial_2 + \sum\limits_{i\geqslant 3} \alpha_i\partial_i$, то $a * b = \pi(ab) = ab + 2\alpha_2\partial a\partial b$.

В частности, для проектора Стонга π_0 согласно предложению 2.6 имеем $\pi_0 = 1 + \sum\limits_{i\geqslant 2} \alpha_{i1}\partial_i$, и следовательно, задаваемое им умножение имеет вид $a * b = \pi_0(ab) = ab + 2\alpha_{12}\partial a\partial b = ab + 2[V]\partial a\partial b$.

По теореме 2.9 любой SU-линейный проектор имеет вид $\pi = \pi_0 + \pi_0 f\Delta$ для SU-линейной f. Тогда, используя SU-линейность $\pi_0 f$ и то, что $\Delta(ab) = -2\partial a\partial b$, мы получаем, что умножение, задаваемое π, имеет вид $a*b = \pi_0(ab) + \pi_0 f\Delta(ab) = ab + 2[V]\partial a\partial b - 2\pi_0 f(1)\partial a\partial b$. При этом в качестве $\pi_0 f(1)$, очевидно, может выступать любой элемент $w \in \pi_4(W)$.

Наконец, если умножение определяется SU-линейным проектором π, то

$$a*b = \pi(a*b) = \pi(ab) + 2\pi([V]-w)\partial a\partial b = a*b + 2\pi([V]-w)\partial a\partial b$$

То есть, $\pi([V]-w) = 0$, и следовательно, $\pi([V]) = \pi(w) = w$.

□

Пример 2.14. В работе [**5**] Коннером и Флойдом была геометрически определена правая обратная операция к Δ на гомотопических группах Ω^U. В [**8**] Новиковым она была расширена до когомологической операции $\Psi \in [\Sigma^{-4}MU, MU]$ (см., например, [**6**, Конструкция 4.2]). Таким образом возникает пример проектора описанного в предложении 2.12 вида — *проектор Коннера–Флойда* $1 - \Psi\Delta$. В [**6**] замечено, что этот проектор отличается от проектора Стонга, хотя и задаёт такое же умножение (что согласно предложению 2.13 соответствует совпадению коэффициентов при ∂_2 в разложении $1 + \sum_{i\geqslant 2}\alpha_i\partial_i$).

Теорема 2.15. *Любое SU-билинейное умножение со стандартной единицей (получающейся с помощью забывания из единицы MSU) на W имеет вид*

$$ab + (2[V]+w)\partial a\partial b$$

для $w \in \pi_4(W)$. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. При этом из SU-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых $w = 2\tilde{w}$, $\tilde{w} \in \pi_4(W)$.

Доказательство. Пусть $m(x,y)$ — произвольная SU-билинейная операция на W. Если расширить её с помощью произвольного SU-линейного проектора $\pi\colon MU \to W$ до SU-билинейной операции $m(\pi(x),\pi(y))$ на MU, а затем взять композицию с гомоморфизмом забывания $W \to MU$, то мы получим SU-билинейную операцию в комплексных кобордизмах. Согласно теореме 1.12 все такие операции порождаются произведениями ∂_i. В силу того, что $\partial_i = 0$ на W при $i \geqslant 2$, то ограничиваясь обратно на W, мы получаем $m(x,y) = a\,x\,y + b\,\partial x\,y + c\,x\,\partial y + d\,\partial x\,\partial y$. Из условия $m(x,1) = x$ получаем $ax + b\partial x = x$, то есть, $a = 1, b = 0$ ($x = 1$ и $x = [\mathbb{C}P^1]$). Аналогично $c = 0$.

Наконец, необходимое и достаточное условие того, чтобы умножение принимало значения в W:

$$0 = \Delta m(x,y) = \Delta(xy + d\partial x\partial y) = -2\partial x\partial y + \Delta d\partial x\partial y$$

То есть, $\Delta d = 2$. Так как $\Delta[V] = 1$, это равносильно $d = 2[V] + w$, $w \in \pi_4(W)$.

Коммутативность таких умножений очевидна.

Докажем ассоциативность. Имеем

$$(a*b)*c = (ab + d\,\partial a\,\partial b)*c = (ab + d\,\partial a\,\partial b)c + d\,\partial(ab + d\,\partial a\,\partial b)\,\partial c$$

Из SU-линейности ∂ и того, что эта операция тождественно равна нулю на Ω^U_4, следует, что $\partial(d\,\partial a\,\partial b) = \partial d\,\partial a\,\partial b = 0$. Наконец, имеет место формула $\partial(ab) = a\,\partial b + b\,\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\,\partial b$ для a и b из W (см. [**6**, Лемма 6.5]). В итоге мы получаем равенство

$$(a*b)*c = abc + d\,\partial a\,\partial b\,c + d\,a\,\partial b\,\partial c + d\,b\,\partial a\,\partial c - d[\mathbb{C}P^1]\partial a\,\partial b\,\partial c$$

Это равенство симметрично относительно перестановок тройки (a,b,c), и следовательно $(a*b)*c = (b*c)*a = a*(b*c)$.

Наконец из формулы (2.2) следует, что из проекторов получаются те умножения, для которых w делится на 2.

□

Замечание. Умножения такого вида в более общем алгебраическом контексте изучались в [**3**].

3. Комплексные ориентации на W и формальные группы

Предложение 3.1. *Каждый SU-линейный проектор $MU \to W$ задаёт комплексную ориентацию на W.*

Доказательство. Действительно, пусть u^{MU} — каноническая ориентация в комплексных кобордизмах. Тогда $\pi(u^{MU})$ будет комплексной ориентацией в W, так как согласно следствию 2.11 и из-за того, что $\partial_i(u^{MU})|_{\mathbb{C}P^1} = 0$ (при $i \geqslant 1$), мы получаем, что $\pi(u^{MU})|_{\mathbb{C}P^1} = u^{MU}|_{\mathbb{C}P^1}$. □

Обозначим соответствующую ориентацию и формальную группу через w^π и $F^\pi(u,v)$ соответственно.

Напомним, что по теореме 2.15 произвольное умножение на W действует по формуле

$$a * b = ab + Q\partial a\partial b, \tag{3.1}$$

где $Q = 2[V] - w$, $w \in \pi_4(W)$. И так как $\partial Q = 0$,

$$\partial(a * b) = \partial(ab) = a\partial b + b\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\partial b \tag{3.2}$$

Зафиксируем данную мультипликативную структуру и комплексную ориентацию w^π для спектра W.

Рассмотрим теперь, следуя [**4**], мультипликативную теорию гомологий $\Gamma_* = MU_*[t]/(t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + Q)$.

Имеется естественное отображение $\varphi\colon W_* \to \Gamma_*$, $\varphi(x) = x + t\partial x$.

Предложение 3.2 ([**4**, лемма 2]).
Отображение $\varphi\colon W_* \to \Gamma_*$ является мультипликативным преобразованием.

Доказательство. В силу (3.1) и (3.2) имеем

$$(a + t\partial a)(b + t\partial b) = ab + t(a\partial b + b\partial a) + t^2\partial a\partial b =$$
$$= a * b + t\partial(a * b) + (t^2 + t[\mathbb{C}P^1] - Q)\partial a\partial b = a * b + t\partial(a * b)$$

□

Ориентация $w^\pi = \pi(u^{MU})$ при этом отображении переходит в ориентацию $\varphi(w^\pi) = \pi(u^{MU}) + t\partial\pi(u^{MU}) = u^\pi$ теории Γ (тут π рассматривается как операция $MU \to MU$). В теории Γ есть ещё другая каноническая ориентация u^Γ, индуцированная естественным включением $MU_* \hookrightarrow \Gamma_*$. Тогда u^π выражается в виде некоторого ряда $\gamma(u^\Gamma)$ из $\Gamma^*[[u^\Gamma]]$.

Предложение 3.3 ([**4**, лемма 3]). *Имеет место равенство*

$$\varphi_* F^\pi(u,v) = \gamma F(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v)),$$

где $F(u,v)$ — формальная группа комплексных кобордизмов (рассматриваемая как формальная группа над Γ^* посредством естественного включения $MU^* \hookrightarrow \Gamma^*$).

Доказательство. Ориентации $u^\pi = \varphi(w^\pi)$ соответствует формальная группа $\varphi_* F^\pi$, так как φ мультипликативно.

Аналогично, так как вложение $MU_* \hookrightarrow \Gamma_*$ тоже мультипликативно, формальная группа, соответствующая ориентации u^Γ, просто совпадает с универсальной формальной группой комплексных кобордизмов F (рассматриваемой над Γ^*).

В итоге требуемое равенство следует из того, что $u^\pi = \gamma(u^\Gamma)$.

□

Обозначим $F^\pi(u,v) = u + v + \sum A_{ij}u^i v^j$. Далее нас будут интересовать s-числа коэффициентов $A_{ij} \in \pi_*(W)$.

Так как на s-числа не влияют разложимые слагаемые, все дальнейшие вычисления мы будем проводить над факторкольцом $R^* = \Gamma^*/I$ по идеалу $I = J^2 + tJ$, где $J = \Omega_U^{<0}$ — идеал элементов ненулевой степени, а значит, J^2 — идеал разложимых элементов (из формулы (3.1) следует, что I — действительно идеал). То есть, мы будем пренебрегать элементами вида ab и at для элементов $a, b \in \Omega_U^{<0}$. (В частности, $t^2 = Q$ и $t^3 = 0$). Кроме того, $R^{<0}J = 0$ и, в частности, $R^{<-2}R^{<0} = 0$ так как $R^{<-2} \subset J$.

Именно над кольцом R^* мы вычислим формальную группу $\varphi_* F^\pi(u, v) = u + v + \sum (A_{ij} + t\partial A_{ij}) u^i v^j$ по формуле из предложения 3.3. Так как факторизация по J^2 не влияет на s-числа, то таким образом мы получим информацию и об s-числах коэффициентов формальной группы F^π.

Предложение 3.4. *Над факторкольцом R^* ряд $\gamma(u)$ имеет вид*

$$\gamma(u) = u - tu^2 + \sum_{i \geqslant 2} (\alpha_{i1}(-1)^i + w_i) u^{i+1} = u - tu^2 + \sum_{i \geqslant 3} \gamma_i u^i,$$

где $\gamma_{i+1} = \alpha_{i1}(-1)^i + w_i$ для некоторых $w_i \in \pi_{2i}(W)$.

При этом любой набор w_i получается из некоторого проектора π.

Доказательство.

По определению $\gamma(u) = \pi(u) + t\partial\pi(u) = \pi_0(u) + t\partial u + \pi_0 f\Delta(u) + t\partial f\Delta(u)$ (здесь мы использовали то, что проектор π записывается в виде $\pi_0(1 + f\Delta)$, где π_0 — проектор Стонга, и формулу $\partial\pi_0 = \partial$ из предложения 2.6).

Разберём каждое слагаемое по отдельности.

1) Согласно предложению 2.6 $\pi_0 = 1 + \sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_{i1}\partial_i$. При этом $\partial_i(u) = u \cdot (\overline{u})^i$, где $\overline{u}$ — обратный ряд относительно формальной группы F.

Имеем $\overline{u} = -u + J(u)$, где $J(u)$ обозначает произвольный ряд от u с коэффициентами из J. Следовательно, $\partial_i u = u\overline{u}^i = u(-u + J(u))^i = (-1)^i u^{i+1} + J(u)$. Тогда $\pi_0(u) = u + \sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_{i1}((-1)^i u^{i+1} + J(u)) = u + \sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_{i1}(-1)^i u^{i+1}$.

2) Аналогично $\partial u = u\overline{u} = -u^2 + J(u)$, и следовательно, $t\partial u = -tu^2$.

3) Так как $\pi_0 f\Delta(u) \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, мы имеем разложение в ряд $\pi_0 f\Delta(u) = \sum\limits_{i \geqslant 0} w_i * (w^\pi)^{*(i+1)}$, где $w_i \in \pi_{2i}(W)$ и $w^\pi = \pi(u)$. Согласно лемме 2.10 $f\Delta$ пробегает множество $\{\sum\limits_{i \geqslant 2} \alpha_i \partial_i\}$, что совпадает с такими операциями a, что $a(u)|_{\mathbb{C}P^2} = 0$. При этом π_0 проектирует такие операции на операции $\tilde{a}\colon MU \to W$ с аналогичном свойством. Отсюда следует, что $\pi_0 f\Delta(u)$ имеет вид $\sum\limits_{i \geqslant 2} w_i * (w^\pi)^{*(i+1)}$, где w_i — произвольные элементы из $\pi_{2i}(W)$ (зависящие от проектора π).

В силу (3.1) $w_i * \pi(u) = w_i\pi(u) + Q\partial w_i \partial\pi(u)$. Причём, так как w_i, $\partial w_i \in J$ при $i \geqslant 2$ и $\pi(u) = u + J(u)$ в силу следствия 2.11, мы получаем, что $w_i * \pi(u) = w_i\pi(u) = w_i u$. То есть, $\pi_0 f\Delta(u) = \sum\limits_{i \geqslant 2} w_i * (\pi(u))^{*(i+1)} = \sum\limits_{i \geqslant 2} w_i u^{i+1}$.

4) Наконец, в силу леммы 2.10 $\partial f\Delta = \sum\limits_{i \geqslant 2} \beta_i \partial_i$, $\beta_i \in \pi_{2i-2}(MU) \subset J$. Следовательно, $\partial f\Delta(u) = J(u)$, и значит, $t\partial f\Delta(u) = 0$.

Суммируя все полученные выражения, получаем требуемое.

□

Напомним, что $\varphi_* F^\pi(u, v) = u + v + \sum (A_{ij} + t\partial A_{ij}) u^i v^j$.

Мы видим, что $t\partial A_{ij} = 0$ над R^* при $i + j > 2$. То есть, над факторкольцом мы имеем $\varphi_* F^\pi(u, v) = u + v + t\partial A_{11} uv + \sum A_{ij} u^i v^j$.

Предложение 3.5. *Над кольцом R^* имеет место равенство*

$$\varphi_* F^\pi(u, v) = u + v - 2tuv - 2Q(uv^2 + vu^2) + \sum \alpha_{ij} u^i v^j + \sum \gamma_i((u + v)^i - u^i - v^i)$$

Доказательство.

Согласно предложению 3.3 $F^{\pi}(u,v)=\gamma(F(\gamma^{-1}(u),\gamma^{-1}(v)))$.

1) В силу предложения 3.4 $\gamma(u)=u-tu^2+\sum\limits_{i\geqslant 3}\gamma_i u^i$.

$(F(x,y))^i=(x+y+J(x,y))^i=(x+y)^i+J(x,y)$.

Следовательно, $\gamma(F(x,y))=F(x,y)-t(x+y)^2+\sum\limits_{i\geqslant 3}\gamma_i(x+y)^i$.

2) Найдём теперь $\gamma^{-1}(u)$.

Обозначим $\gamma^{-1}(u)=\sum\limits_{i\geqslant 1}x_i u^i$, $\gamma(u)=u+\sum\limits_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i$ $(\gamma_2=-t)$.

$u=\gamma^{-1}(\gamma(u))=\sum\limits_{j\geqslant 1}x_j(u+\sum\limits_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)^j$

Заметим, что $x_i\in R^{-2i+2}$, а значит, $x_iJ=0$ при $i>1$ и $x_iR^{>0}=0$ при $i>2$.

Следовательно, $x_2(u+\sum\limits_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)=x_2(u-tu^2)$, $x_i(u+\sum\limits_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)=x_i u$ при $i\geqslant 3$.

То есть, $u=x_1(u+\sum\limits_{i\geqslant 2}\gamma_i u^i)+x_2(u-tu^2)^2+\sum\limits_{j\geqslant 3}x_j u^j$.

при u: $1=x_1$.

при u^2: $0=x_1\gamma_2+x_2$, $x_2=-\gamma_2=t$.

Теперь получаем $x_2(u-tu^2)^2=t(u^2-2tu^3)=tu^2-2Qu^3$.

при u^3: $0=\gamma_3-2Q+x_3$, $x_3=2Q-\gamma_3$

при u^i, $i\geqslant 4$: $x_i=-\gamma_i$.

То есть, $\gamma^{-1}(u)=u+tu^2+(2Q-\gamma_3)u^3-\sum\limits_{i\geqslant 4}\gamma_i u^i$.

3) $\gamma(F(x,y))=x+y+\sum\alpha_{ij}x^iy^j-t(x+y)^2+\sum\limits_{i\geqslant 3}\gamma_i(x+y)^i$,

$x=\gamma^{-1}(u)=u+tu^2+J(u)$, $y=\gamma^{-1}(v)=v+tv^2+J(v)$.

Тогда $\alpha_{ij}(u+tu^2+J(u))=\alpha_{ij}u$, то есть $\alpha_{ij}x^iy^j=\alpha_{ij}u^iv^j$. Аналогично $\gamma_i(x+y)^i=\gamma_i(u+v)^i$.

$t(x+y)=t(u+v+tu^2+tv^2+J(u)+J(v))=t(u+v+tu^2+tv^2)$.

$t(u+v+tu^2+tv^2)^2=t((u+v)^2+2t(u+v)(u^2+v^2)+J(u,v))=t(u+v)^2+2Q(u+v)(u^2+v^2)$.

4) В итоге получаем искомую формулу

$$\gamma(F(\gamma^{-1}(u),\gamma^{-1}(v)))=\gamma^{-1}(u)+\gamma^{-1}(v)+\sum\alpha_{ij}u^iv^j+\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i-t(u+v)^2-$$

$$-2Q(u+v)(u^2+v^2)=u+tu^2+(2Q-\gamma_3)u^3-\sum_{i\geqslant 4}\gamma_i u^i+v+tv^2+(2Q-\gamma_3)v^3-\sum_{i\geqslant 4}\gamma_i v^i+$$

$$+\sum\alpha_{ij}u^iv^j+\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i(u+v)^i-t(u+v)^2-2Q(u^3+uv^2+vu^2+v^3)=u+v-2tuv-$$

$$-2Q(uv^2+vu^2)+\sum\alpha_{ij}u^iv^j+\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i((u+v)^i-u^i-v^i).$$

□

Таким образом,

$$u+v+A_{11}uv+t\partial A_{11}uv+\sum_{i,j>1}A_{ij}u^iv^j=$$
$$=u+v-2tuv-2Q(uv^2+vu^2)+\sum\alpha_{ij}u^iv^j+\sum_{i\geqslant 3}\gamma_i((u+v)^i-u^i-v^i).$$

Отсюда в малых размерностях получаем:

- ▶ $A_{11} = \alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$
- ▶ $\partial A_{11} = -2(= -\partial[\mathbb{C}P^1])$
- ▶ $A_{12} = \alpha_{12} + 3\gamma_3 - 2Q = \alpha_{12} + 3\alpha_{21} + 3w_2 - 2Q = 4\alpha_{12} + 3w_2 - 2Q$.

  Напомним, что $Q = 2[V] - w = 2\alpha_{12} - w$.

  То есть, $A_{12} = 2w + 3w_2$

  Заметим, что если $\pi_0 f\Delta = \beta\partial_2 + \ldots$, то $\beta = -\pi_0 f(1)$.

  Кроме того, мы видели что $\pi_0 f\Delta(u) = w_2u^3 + \ldots$, а значит, $\beta = w_2 = -\pi_0 f(1)$ (над R).

  В итоге, $A_{12} = 2w - 3\pi_0 f(1) = 2w - 3\pi([V])$.

  В частности, если умножение задаётся тем же проектором $\pi_0(1 + f\Delta)$, то $w = 2\pi_0 f(1)$ и $A_{12} = \pi_0 f(1) = \pi([V])$.

Наконец, для старших степеней, при $k \geqslant 3$

$$\sum_{i+j=k+1} A_{ij}u^iv^j = \sum_{i+j=k+1} \alpha_{ij}u^iv^j + \gamma_{k+1}((u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1})$$

Известно (см., например, [**11**, Добавление]), что по модулю разложимых элементов

$$\sum_{i+j=k+1} \alpha_{ij}u^iv^j = \frac{a_k}{m(k)}((u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1}),$$

где a_k — полиномиальные образующие $\varOmega_*^U = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$, а $m(k) = s_k(a_k) =$ НОД$(\binom{k+1}{i}, 1 \leqslant i \leqslant k)$.

То есть, $\alpha_{ij} = \binom{i+j}{i}\frac{a_{i+j-1}}{m(i+j-1)}$.

В частности, $\alpha_{1i} = (i+1)\frac{a_i}{m(i)}$.

То есть, $\gamma_{k+1} = (-1)^k\alpha_{1k} + w_k = (-1)^k(k+1)\frac{a_k}{m(k)} + w_k$.

В итоге, получаем

$$\sum_{i+j=k+1} A_{ij}u^iv^j = (\frac{a_k}{m(k)} + (-1)^k(k+1)\frac{a_k}{m(k)} + w_k)((u+v)^{k+1} - u^{k+1} - v^{k+1})$$

Отсюда уже получаем следующее

Предложение 3.6 ([**4**]).
НОД $(\, s_{i+j-1}([A_{ij}]) \mid i + j = k + 1) = m(k)\big(1 + (-1)^k(k+1) + c_k m(k)m(k-1)\big)$ *при* $k \geqslant 3$, *где* $c_k \in \mathbb{Z}$ *зависят от проектора.*

Теорема 3.7. *Ни для какой комплексной ориентации W коэффициенты соответствующей формальной группы не порождают всё кольцо $\pi_*(W)$.*

Доказательство. Произвольная комплексная ориентация w в W получается из некоторой ориентации $\widetilde{u}$ в MU с помощью проектора π_0.

При этом ориентация $\widetilde{u}$ выражается в виде ряда $u + \sum\limits_{i\geqslant 1} \alpha_i u^{i+1}$ от стандартной ориентации u. Так как $u^{i+1} = \bar{\partial}_i u$, то $\widetilde{u}$ получается из u при помощи SU-линейной операции $f = 1 + \sum\limits_{i\geqslant 1} \alpha_i\bar{\partial}_i$, которую в силу теоремы 1.11 и леммы 2.10 можно записать в виде $1 + A\partial + g\Delta$.

Обозначим формальную группу, соответствующую ориентации $w = \pi_0(\widetilde{u}) = \pi_0 f(u)$, через F^w. Аналогично предложению 3.3 получаем

$$\varphi_* F^w(u, v) = \gamma F(\gamma^{-1}(u), \gamma^{-1}(v)),$$

где ряд $\gamma(u)$ теперь просто выражает ориентацию $\varphi(w)$ через u^Γ, то есть, $\gamma(u) = \pi_0 f(u) + t\partial f(u)$.

1) $\pi_0 f = \pi_0 + \pi_0(A\partial) + \pi_0 g\Delta$.

Из SU-линейности π_0 получаем, что $\pi_0(A\partial) = \pi_0(A)\partial$. Но так как $A \in \pi_2(MU) = \pi_2(W)$, в итоге $\pi_0(A\partial) = A\partial$.

2) $\partial f = \partial + \partial(A\partial) + g'\Delta$.

Из SU-линейности: $\partial(A\partial) = \partial(A)\partial = 2c\partial$, $c \in \mathbb{Z}$.

В итоге, получаем: $\gamma(u) = \pi_0(u) + A\partial(u) + \pi_0 g\Delta(u) + t\partial(u) + 2ct\partial(u) + tg'\Delta(u)$.

Теперь аналогично доказательству предложения 3.4 получаем, что над R^*

$$\gamma(u) = u - (A + (2c+1)t)u^2 + \sum_{i\geqslant 3} \gamma_i u^i,\ \gamma_{i+1} = (-1)^i \alpha_{1i} + W_i$$

Дальнейшие вычисления проходят аналогично доказательству предложения 3.5.

$\gamma(F(x,y)) = F(x,y) - (A + (2c+1)t)(x+y)^2 + \sum \gamma_i (x+y)^i$

$\gamma^{-1}(u) = u + (A + (2c+1)t)u^2 + (2Q(2c+1)^2 - \gamma_3)u^3 - \sum\limits_{i\geqslant 4} \gamma_i u^i$

В итоге получаем следующую формулу

$$\varphi_* F^w(u,v) = u + v - 2(A + (2c+1)t)uv - 2Q(2c+1)^2(uv^2 + vu^2) + \\ + \sum \alpha_{ij} u^i v^j + \sum \gamma_i((u+v)^i - u^i - v^i)$$

То есть, мы видим, что формула для старших членов просто не изминилась по сравнению с предложением 3.5. В частности, остаётся справедливым предложение 3.6.

Наконец, известно (см. [**11**, Глава X] или [**6**, Теорема 6.10]), что кольцо $\pi_*(W)$ относительно умножения, задаваемого проектором Стонга, полиномиально от образующих $x_1 \in \pi_2(W)$, $x_i \in \pi_{2i}(W)$, $i \geqslant 3$. При этом $s_k(x_k) = m(k)m(k-1)$. Кроме того, в старших размерностях ($\geqslant 3$) разложимость относительно умножения в W влечёт разложимость (после забывания) а Ω^U. Отсюда следует, что минимальное достижимое s-число на $\pi_i(W)$ (при $i \geqslant 3$) равняется как раз $s_i(x_i) = m(i)m(i-1)$. Сравнивая это с формулой из предложения 3.6, мы получаем, что не все s-числа достигаются на подкольце порождённом коэффициентами формальной группы.

□

Замечание. В доказательстве теоремы 3.7 мы видели, что произвольная ориентация W имеет вид $\pi_0(u) + A\partial(u) + \pi_0 f\Delta(u)$. С другой стороны, так как в силу теоремы 2.9 произвольный SU-линейный проектор на W имеет вид $\pi_0 + \pi_0 f\Delta$, мы видим, что ориентации на W вида $w^\pi = \pi(u^{MU})$ имеют вид $\pi_0(u) + \pi_0 f\Delta(u)$.

Более того, если мы фиксируем произвольную ориентацию $\widetilde{u} = (1 + A\partial + g\Delta)(u)$ на MU, то $\pi(\widetilde{u}) = (\pi_0 + \pi_0 f\Delta)(1 + A\partial + g\Delta)(u) = \pi_0 + A\partial + \pi_0\psi\Delta(u)$. То есть, для различных π и фиксированной $\widetilde{u}$ не меняется, например, коэффициент $-A$ при u^2, который, с другой стороны, при различных $\widetilde{u}$ может быть произвольным.

То есть, в частности, ни одна фиксированная ориентация на MU при проектировании всевозможными проекторами на W не заметает все ориентации на W.

Заметаемое множество может быть очень небольшим, например, любая ориентация MU, полученная забыванием некоторой ориентации w на W, проектируется любым проектором только в w.

Список литературы

[1] Адамс Дж. Ф. *Стабильные гомотопии и обобщённые гомологии.* Издательство МЦНМО. Москва, 2014.

[2] Barnes D., Roitzheim C. *Foundations of Stable Homotopy Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2020.

[3] Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах*, УМН, 2000, том 55, выпуск 4(334), 5–24.

[4] Бухштабер В. М. *Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией*, УМН, 1972, том 27, выпуск 6(168), 231–232.

[5] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60, 1966.

[6] Лимонченко И. Ю., Панов Т. Е., Черных Г. С. *SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители*, УМН, 2019, том 74, выпуск 3(447), 95–166

[7] Margolis H. R. *Spectra and the Steenrod Algebra.* North-Holland Mathematical Library. Elsevier Science Publishers, 1983.

[8] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[9] Rudyak, Yuli B. *On Thom spectra, orientability, and cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[10] Свитцер Р. М. *Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии*, «Наука», Москва, 1985.

[11] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов,* «Мир», Москва, 1973.