Структура алгебры форм Якоби для системы корней F_4

Д.В. Адлер *

9 июля 2020 г.

Аннотация

В данной работе мы доказываем полиномиальность биградуированной алгебры $J^{w,W}_{*,*}(F_4)$ слабых форм Якоби для системы корней F_4, инвариантных относительно действия соответствующей группы Вейля. Данная работа является продолжением совместной с В.А. Гриценко работы, в которой изучалась структура алгебр слабых форм Якоби, связанных с системами корней типа D_n с $2 \leqslant n \leqslant 8$.

Ключевые слова: формы Якоби, теория инвариантов.
2010 MSC: 11F50, 16W22

1 Введение

Классическая теорема Шевалле (см. [1]) утверждает, что алгебра многочленов, инвариантных относительно действия конечной группы, является свободной тогда и только тогда, когда эта группа порождена (псевдо)отражениями. В работах [2], [3], [4] и [5] было рассмотрено обобщение данного результата на случай комплексных кристаллографических групп Кокстера. Аналог теоремы Шевалле для форм Якоби был получен К. Виртмюллером в [6] в 1992 году. В его работе рассмотрены структуры алгебр слабых форм Якоби, связанных со всеми системами корней, кроме E_8. Система корней E_8 в данном контексте была рассмотрена в недавней статье Х. Ванга [7] и, как оказалось, в этом случае алгебра форм Якоби не является полиномиальной.

Доказательство К. Виртмюллера не содержит прямого построения всех образующих соответствующих алгебр, однако их явный вид может быть крайне полезен в приложениях. Одним из таких приложений является построение плоских координат на подходящих фробениусовых

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ Договор № 14.641.31.0001).

многообразиях (см. [8], [9], [10] §4, [11] и [12]-[13]). Так, например, в статьях М. Бертолы [12] и [13] были независимо разобраны случаи систем корней A_n, B_n и G_2, а И. Сатаке в [11] был рассмотрен случай системы корней E_6.

Основной целью данной работы является доказательство аналога теоремы Шевалле для $J^{w,W}_{*,*}(F_4)$ – биградуированного кольца инвариантных относительно действия группы Вейля слабых форм Якоби для решётки, порождённой системой корней F_4. А именно, мы доказываем, что это кольцо имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм. В совместной работе автора и В.А. Гриценко [14] доказывается аналогичный результат для колец слабых форм Якоби, связанных с решётками, порождёнными системами корней D_n с $2 \leqslant n \leqslant 8$, а также явным образом строятся соответствующие образующие. В данной работе, используя образующие для алгебры слабых форм Якоби в случае системы корней D_4, мы приводим явную конструкцию образующих для случая системы корней F_4.

Статья организована следующим образом. В §2 мы приводим необходимые определения систем корней, форм Якоби, а также их примеры. В §3 мы вводим обозначения для инвариантных относительно действия группы Вейля коэффициентов рядов Фурье форм Якоби. В §4 мы формулируем основную теорему и строим образующие алгебры слабых форм для системы корней F_4. В §5 мы доказываем, что построенные формы алгебраически независимы и порождают соответствующую алгебру слабых форм Якоби.

В ближайших работах автор планирует изучить вопрос построения плоских координат в случае систем корней типа D_n и F_4.

Автор благодарен В.А. Гриценко за научное руководство и консультации, а также О.В. Шварцману за изначальную постановку задачи, обсуждение результатов и крайне полезные замечания к данной работе.

2 Основные определения и конструкции

2.1 Системы корней

Основными системами корней, рассматриваемыми в данной работе, являются системы корней типа D_n и F_4. Определим их, следуя [15].

Определение 1. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ – стандартный ортонормированный базис $\mathbb{Z}^n$. Тогда векторы $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ и $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ образуют базис системы корней D_n и порождают решётку

$$D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \mod 2\}.$$

Как следует из определения, данная решётка является чётной, то есть для любого вектора $\lambda \in D_n$ квадрат его длины $(\lambda, \lambda) \in 2\mathbb{Z}$.

Здесь и далее для упрощения обозначений мы будем обозначать одинаковым образом и систему корней, и решётку порождённую ею. Отметим также, что система корней D_n также может быть определена при $n = 2$, однако в этом случае она приводима и изоморфна $A_1 \oplus A_1$, где A_1 – система корней с базисом $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и решёткой

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$

Группа Вейля для D_n действует на векторах перестановками и сменой знака у чётного числа координат.

Определение 2. Если в стандартном ортонормированном базисе рассмотреть векторы $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ и $\alpha_n = 2\varepsilon_n$ при $n \geqslant 3$, то они образуют базис системы корней C_n и также порождают решётку D_n.

При $n \neq 4$ группа Вейля $W(C_n)$ переставляет координаты и меняет знак у произвольного числа из них. Эта группа является полной ортогональной группой $O(D_n)$ решётки D_n и содержит группу Вейля $W(D_n)$ в качестве подгруппы индекса 2.

При $n = 4$ группа $W(C_n)$ действует аналогичным образом. В терминах решётки D_4, согласно [14], будем обозначать её $O'(D_4)$, так как полная ортогональная группа для решётки D_4 больше, и может быть определена следующая система корней.

Определение 3. При $n = 4$ существует исключительная система корней F_4 с базисом

$$\tilde{\alpha}_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \tilde{\alpha}_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \tilde{\alpha}_3 = \varepsilon_4, \quad \tilde{\alpha}_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Решётка, порождаемая системой корней F_4, содержит решётку D_4, но является нечётной.

Группа Вейля данной системы корней соответствует полной ортогональной группе решётки D_4 и является полупрямым произведением группы S_3 и группы Вейля системы корней D_4. Порождается $W(F_4)$ отражениями в корнях $\pm\varepsilon_i$, $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ и $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.

Замечание 1. Пусть L – решётка со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим теперь те же векторы из L, но уже со скалярным произведением $m(\cdot, \cdot)$. Мы снова получим решётку, будем обозначать её $L(m)$.

Пример 1. По определению решётка A_1 состоит из векторов $(x, -x)$ с целочисленными координатами. Квадрат длины каждого такого вектора равен $2x^2$, поэтому $A_1 \simeq \mathbb{Z}(2)$. Как следует из определения 1, D_n – подрешётка $\mathbb{Z}^n$ индекса 2. Поэтому также мы имеем

$$D_n(2) < \mathbb{Z}(2)^{\oplus n} \simeq A_1^{\oplus n}.$$

Пример 2. Рассмотрим решётку $F_4(2)$. Как можно показать, построив явный изоморфизм, эта решётка изоморфна решётке D_4 с обычным скалярным произведением.

Как уже упоминалось, группа Вейля для F_4 является полной ортогональной группой для решётки D_4. Таким образом имеется следующее соответствие системам корней пар (решётка, группа):

$$D_4 \leftrightarrow (D_4, W(D_4)), \quad C_4 \leftrightarrow (D_4, O'(D_4)), \quad F_4 \leftrightarrow (D_4, O(D_4)).$$

2.2 Формы Якоби

Для любой положительно определённой решётки L можно ввести понятие связанных с ней форм Якоби. А именно, имеет место следующее определение.

Определение 4. Пусть L – положительно определённая решётка со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, переменная τ принадлежит верхней полуплоскости $\mathcal{H}$, а многомерная переменная $\mathfrak{z} = (z_1, \dots, z_n) \in L\otimes\mathbb{C}$. Тогда *слабая форма Якоби веса k и индекса m для решётки L* (где k, $m \in \mathbb{Z}$) – это голоморфная функция $\varphi_{k,m} : \mathcal{H} \times (L \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varphi_{k,m}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\pi i m \frac{c(\mathfrak{z},\mathfrak{z})}{c\tau+d}} \varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) \text{ для } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

$$\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z} + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi i m(\lambda,\mathfrak{z}) - \pi i m(\lambda,\lambda)\tau} \varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) \text{ для } \lambda, \mu \in L$$

и функция $\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})$ имеет разложение в ряд Фурье вида

$$\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{l\in L^\vee} \sum_{n\geqslant 0} a(n,l) q^n \zeta^l.$$

Здесь и далее $L^\vee = \{m \in L \otimes \mathbb{Q} \,|\, \forall l \in L : (m,l) \in \mathbb{Z}\}$ – дуальная к L решётка, $q = e^{2\pi i\tau}$, $\zeta^l = e^{2\pi i(\mathfrak{z},\,l)}$ для любого элемента l из L или $L^\vee$.

Первое функциональное уравнение будем называть модулярным, а второе уравнением квазипериодичности.

Множество слабых форм Якоби имеет естественную структуру биградуированного кольца и обозначается

$$J^w_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J^w_{k,m}(L).$$

Замечание 2. В зависимости от типа разложения в ряд Фурье функций, удовлетворяющих первым двум условиям из рассмотренного определения, выделяют ещё два типа форм Якоби.

Форма $\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})$ называется *голоморфной формой Якоби*, если

$$\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{l\in L^\vee} \sum_{n} a(n,l) q^n \zeta^l$$

и $a(n,l) \neq 0 \Rightarrow 2nm \geqslant (l,l)$. Множество таких форм обозначается

$$J_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J_{k,m}(L).$$

Форма $\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z})$ называется *параболической формой Якоби*, если

$$\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L^\vee} \sum_{n} a(n,l) q^n \zeta^l,$$

и $a(n,l) \neq 0 \Rightarrow 2nm > (l,l)$. Множество таких форм обозначается

$$J^c_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J^c_{k,m}(L).$$

Как следует из определений,

$$J^c_{*,*}(L) \subset J_{*,*}(L) \subset J^w_{*,*}(L).$$

Отметим, что, следуя [16], голоморфные формы Якоби часто называются просто *формами Якоби*. Однако, во избежание путаницы, мы будем называть функцию формой Якоби, только если не имеет значения, является ли она слабой, голоморфной или параболической. Также заметим, что для голоморфных и параболических форм Якоби неверны аналоги основной теоремы 2 данной работы о полиномиальности соответствующих алгебр.

Замечание 3. Пусть $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ – форма Якоби веса k и индекса m для решётки L. Тогда для решётки $L(m)$, как следует непосредственно из определений, форма $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ также является формой Якоби веса k, но индекса 1 (см. замечание 1).

Лемма 1. *Пусть L – нечётная положительно определённая решётка. Тогда произвольная форма Якоби, связанная с данной решёткой, имеет чётный индекс.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную форму Якоби $\varphi_{k,m}$ веса k и индекса m. Сделаем в уравнении квазипериодичности из определения форм Якоби замену τ на $\tau+1$. Получим

$$\varphi_{k,m}(\tau+1, \mathfrak{z} + \lambda(\tau+1) + \mu) = e^{-2\pi i m(\lambda, \mathfrak{z}) - \pi i m(\lambda,\lambda)(\tau+1)} \varphi_{k,m}(\tau+1, \mathfrak{z}).$$

Ввиду модулярного функционального уравнения и уравнения квазипериодичности (а точнее, периодичности при сдвигах $z \mapsto z + \lambda$):

$$\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z} + \lambda\tau + \mu) = \varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z} + \lambda\tau + (\lambda + \mu)) =$$

$$= e^{-2\pi i m(\lambda, \mathfrak{z}) - \pi i m(\lambda,\lambda)(\tau+1)} \varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z}) =$$

$$= e^{-\pi i m(\lambda,\lambda)} e^{-2\pi i m(\lambda,\mathfrak{z}) - \pi i m(\lambda,\lambda)\tau} \varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}).$$

Сравнивая полученное уравнение с исходным уравнением квазипериодичности, получаем, что $m(\lambda,\lambda) \in 2\mathbb{Z}$ для каждого $\lambda \in L$. Таким образом, формы Якоби для решётки L должны иметь чётный индекс, так как по предположению решётка L нечётная. Или, что то же самое, в силу замечания 3, можно рассматривать формы Якоби произвольного целого индекса, но для чётной решётки $L(2)$. □

Определение 5. Пусть G – подгруппа полной ортогональной группы положительно определённой решётки L. Форма Якоби $\varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z})$ для данной решётки называется G-инвариантной, если для любого $g \in G$

$$\varphi_{k,m}(\tau, g(\mathfrak{z})) = \varphi_{k,m}(\tau,\mathfrak{z}).$$

В данной работе мы будем рассматривать слабые формы. Биградуированное кольцо соответствующих G-инвариантных слабых форм Якоби мы будем обозначать

$$J^{w,G}_{*,*}(L) = \bigoplus_{k,m} J^{w,G}_{k,m}(L).$$

Целью данной работы является доказательство полиномиальности алгебры слабых $W(F_4)$-инвариантных форм Якоби. Как было отмечено, решётка F_4 является нечётной, а поэтому (см. лемму 1) нужно рассматривать формы Якоби для решётки $F_4(2)$. Однако, в силу примера 2,

$$J^{w,W}_{*,*}(F_4(2)) \simeq J^{w,O}_{*,*}(D_4).$$

Таким образом, нам нужно изучить структуру кольца слабых форм Якоби для решётки D_4, инвариантных относительно полной ортогональной группы.

Так как группа $W(D_4)$ является подгруппой группы $O(D_4)$, то любая $O(D_4)$-инвариантная форма Якоби является также $W(D_4)$- инвариантной. Поэтому образующие $J^{w,O}_{*,*}(D_4)$ являются $W(F_4)/W(D_4) \simeq S_3$-инвариантными многочленами от образующих алгебры слабых $W(D_4)$ -инвариантных форм Якоби, так как все другие условия из определения G-инвариантных форм выполнены автоматически.

2.3 Примеры форм Якоби

В данном параграфе мы приведём основные примеры форм Якоби, а также, следуя [14], образующие алгебры $J^{w,W}_{*,*}(D_4)$.

Пример 3. Одной из важнейших функций в теории форм Якоби является классическая нечётная тета-функция Якоби (см. [17]):

$$\vartheta(\tau,z) = -i\vartheta_{11}(\tau,z) = q^{\frac{1}{8}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta^{n+\frac{1}{2}} =$$

$$= -q^{\frac{1}{8}}\zeta^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n).$$

Формально $\vartheta(\tau, z)$ не является формой Якоби (если рассматривать формы только целого веса и без характера), так как

$$\vartheta(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{\lambda+\mu}e^{-\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\vartheta(\tau, z), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Z},$$
$$\vartheta\left(\frac{-1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = -i\sqrt{i\tau}e^{\pi i\frac{z^2}{\tau}}\vartheta(\tau, z).$$

Однако вместе с η-функцией Дедекинда

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)$$

она позволяет строить множество примеров форм Якоби. Так, например, слабая форма Якоби веса -2 и индекса 1 из классической книги [16] может быть представлена как

$$\phi_{-2,1}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)\vartheta(\tau, -z)}{\eta^6(\tau)} = (\zeta - 2 + \zeta^{-1}) + q\cdot(\ldots) \in J^W_{-2,1}(A_1),$$

так как $A_1 \simeq \mathbb{Z}(2)$, а группа Вейля действует сменой знака (см. замечание 1).

Определение 6. Другим полезным инструментом для работы с формами Якоби является модулярный дифференциальный оператор. А именно, на формах Якоби веса k и индекса m для решётки L ранга n_0 со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ можно определить оператор H_k, действующий следующим образом:

$$H_k^{(L)}(\varphi_{k,m})(\tau, \mathfrak{z}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial\varphi_{k,m}}{\partial\tau}(\tau, \mathfrak{z}) + \frac{1}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}, \frac{\partial}{\partial\mathfrak{z}}\right)\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z}) + (2k-n_0)G_2(\tau)\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l\in L^\vee}\left(n - \frac{1}{2m}(l,l)\right)a(n,l)q^n\zeta^l + (2k-n_0)G_2(\tau)\varphi_{k,m}(\tau, \mathfrak{z}),$$

где $G_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \sum_{n\geqslant 1}\sigma(n)q^n$ – квазимодулярный ряд Эйзенштейна веса 2 с

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n}d^k.$$

Данный оператор, как можно проверить прямым вычислением, переводит слабые (голоморфные, параболические) формы Якоби веса k и индекса m в слабые (голоморфные, параболические) формы Якоби веса $k+2$ и индекса m. Подробности см. в [18].

Пример 4. При помощи данного оператора можно построить слабую форму веса 0 и индекса 1 из [16]:

$$\phi_{0,1}(\tau, z) = H_{-2}^{A_1}(\phi_{-2,1}(\tau, z)) = (\zeta + 10 + \zeta^{-1}) + q \cdot (\dots) \in J_{0,1}(A_1).$$

Как было показано в [16],

$$J_{*,*}^{w,W}(A_1) = M_*[\phi_{0,1}, \phi_{-2,1}],$$

где

$$M_* = \bigoplus_{k \geqslant 0} M_{2k}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$$

есть кольцо модулярных форм, порождённое двумя рядами Эйзенштейна

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_3(n) q^n, \quad E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_5(n) q^n. \tag{1}$$

Пример 5. Пусть $\varphi_1(\tau, \mathfrak{z}_1)$ является слабой (аналогично можно действовать и в случае голоморфных или параболических) формой Якоби веса k_1 и индекса m для решётки L_1, а $\varphi_2(\tau, \mathfrak{z}_2)$ является слабой формой Якоби веса k_2 и того же индекса m для решётки L_2. Тогда для решётки L, являющейся прямой ортогональной суммой решёток L_1 и L_2, форма

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \varphi_1(\tau, \mathfrak{z}_1) \varphi_2(\tau, \mathfrak{z}_2)$$

является слабой формой Якоби веса $k_1 + k_2$ и индекса m. Для получения формы, инвариантной относительно группы G (некоторой подгруппы полной ортогональной группы решётки L), нужно усреднить $\varphi(\tau, \mathfrak{z})$ по этой подгруппе.

Так, например, если $L = A_1^{\oplus n}$, то, используя $\phi_{-2,1}$ и $\phi_{0,1}$ из [16], для каждого k можно получить, что

$$\begin{aligned}\varphi_{-2k,1}^L = \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{-2,1}(\tau, z_{\sigma(1)}) \dots \phi_{-2,1}(\tau, z_{\sigma(k)}) \times \\ \times \phi_{0,1}(\tau, z_{\sigma(k+1)}) \dots \phi_{0,1}(\tau, z_{\sigma(n)}),\end{aligned}$$

является слабой формой Якоби веса $-2k$ и индекса 1 для $(A_1)^{\oplus n}$.

Таким образом, в силу замечания 1, каждая построенная выше форма $\varphi_{-2k,1}^L$ является слабой $O(D_n)$ (или $O'(D_4)$, если $n = 4$)-инвариантной формой Якоби веса $-2k$ и индекса 2.

Пример 6. В работе [19] (пример 1.8) для решётки D_4 были рассмотрены следующие функции:

$$\vartheta_{D_4}(\tau, \mathfrak{z}) = \vartheta(\tau, z_1) \cdot \ldots \cdot \vartheta(\tau, z_4),$$

$$\vartheta^{(2)}_{D_4}(\tau,\mathfrak{z})=\vartheta\left(\tau,\frac{-z_1+z_2+z_3+z_4}{2}\right)\vartheta\left(\tau,\frac{z_1-z_2+z_3+z_4}{2}\right)\times$$
$$\times\vartheta\left(\tau,\frac{z_1+z_2-z_3+z_4}{2}\right)\vartheta\left(\tau,\frac{z_1+z_2+z_3-z_4}{2}\right),$$
$$\vartheta^{(3)}_{D_4}(\tau,\mathfrak{z})=\vartheta\left(\tau,\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{2}\right)\vartheta\left(\tau,\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{2}\right)\times$$
$$\times\vartheta\left(\tau,\frac{z_1+z_2-z_3-z_4}{2}\right)\vartheta\left(\tau,\frac{z_1-z_2+z_3-z_4}{2}\right).$$

Данные функции не являются формами Якоби в смысле определения 4, при сдвигах на элементы решётки и действии группы $SL_2(\mathbb{Z})$ они преобразуются с некоторыми характерами. Однако, по аналогии с примером 3, при помощи η-функции от характеров можно избавиться, получив слабые $W(D_4)$-инвариантные формы Якоби веса -4 и индекса 1:

$$\omega_{-4,1}(\tau,\mathfrak{z})=\frac{\vartheta(\tau,z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta(\tau,z_4)}{\eta^{12}(\tau)},$$

$$\varphi^{(2)}_{-4,1}(\tau,\mathfrak{z})=\frac{\vartheta^{(2)}(\tau,\mathfrak{z})}{\eta^{12}(\tau)}\ \text{и}\ \varphi^{(3)}_{-4,1}(\tau,\mathfrak{z})=\frac{\vartheta^{(3)}(\tau,\mathfrak{z})}{\eta^{12}(\tau)}.$$

Форма $\omega_{-4,1}$ обращается в ноль при подстановке любого $z_i\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$ и является антиинвариантной относительно смены знака у нечётного числа координат. Относительно этого преобразования остальные две формы не являются ни инвариантными, ни антиинвариантными, но, как можно проверить, $\omega_{-4,1}=\varphi^{(2)}_{-4,1}+\varphi^{(3)}_{-4,1}$. Если же рассмотреть $\varphi_{-4,1}=\varphi^{(2)}_{-4,1}-\varphi^{(3)}_{-4,1}$, мы получим, что $\varphi_{-4,1}$ уже инвариантна относительно смены знака у нечётного числа z-координат.

Замечание 4. По аналогии с построением формы $\omega_{-4,1}(\tau,\mathfrak{z})$, для любой решётки D_n может быть определена форма

$$\omega_{-n,1}(\tau,\mathfrak{z})=\frac{\vartheta(\tau,z_1)\cdot\ldots\cdot\vartheta(\tau,z_n)}{\eta^{3n}(\tau)}.$$

Она также антиинвариантна относительно смены нечётного числа z-координат и имеет дивизор, состоящий из точек $z_i\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$.

В [14] автором данной работы и В.А. Гриценко в качестве одного из результатов было показано, что инвариантные относительно группы Вейля слабые формы Якоби для решёток корней D_n с $3\leqslant n\leqslant 8$ образуют свободную алгебру с $n+1$ образующей над кольцом модулярных форм. Более того, данные образующие могут быть построены явным образом, и они согласованы относительно отображений ограничения на подрешётки. В данной работе нам понадобится этот результат лишь в частном случае $n=4$ для W-инвариантных слабых форм Якоби. Приведём его более подробно.

Теорема 1. *Биградуированная алгебра слабых W-инвариантных форм для системы корней D_4 является свободной:*

$$J^{w,W}_{*,*}(D_4) = M_*[\varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \omega_{-4,1}].$$

Форма $\omega_{-4,1}$ антиинвариантна относительно смены знака у нечётного числа координат z_i, а остальные формы инвариантны. Более того,

$$J^{w,W}_{*,*}(D_3) = M_* \left[\varphi_{0,1}\Big|_{z_4=0}, \varphi_{-2,1}\Big|_{z_4=0}, \varphi_{-4,1}\Big|_{z_4=0}, \omega_{-3,1} \right].$$

Формы $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$ из теоремы 1 – ровно те формы, которые были описаны в примере 6. Построение формы $\varphi_{-6,2}$ описано в примере 5. Отметим, что в случае системы корней D_4, применение дифференциального оператора H_{-4} к обеим формам $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$ тождественно равно нулю (прямое вычисление). Однако для D_n с $n \neq 4$,

$$H_{-4}(\varphi_{-4,1}) = \varphi_{-2,1} \neq 0,$$

и форма $\varphi_{-2,1} \neq 0$ для D_4 может быть получена как ограничение $\varphi_{-2,1}$ для D_n с $n > 4$ на D_4, которое, как оказывается, также является ненулевым (подробности см. в [14]). Форма же $\varphi_{0,1}$ получается при помощи дифференциального оператора и при $n = 4$:

$$\varphi_{0,1} = 4H_{-2}(\varphi_{-2,1}) + \frac{1}{3}E_4\varphi_{-4,1}.$$

Замечание 5. В дальнейших построениях мы будем пользоваться представлением образующих $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$ через $\varphi^{(2)}_{-4,1}$ и $\varphi^{(3)}_{-4,1}$. Отметим, что преобразование, переводящее $\varphi^{(2)}_{-4,1}$ и $\varphi^{(3)}_{-4,1}$ в $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$ обратимо, поэтому если произвольная $W(D_4)$-инвариантная форма представлялась единственным образом как многочлен от $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{-2,1}$, $\varphi_{-4,1}$, $\varphi_{-6,2}$ и $\omega_{-4,1}$, то она будет также единственным образом представима в виде многочлена от $\varphi_{0,1}$, $\varphi_{-2,1}$, $\varphi^{(2)}_{-4,1}$, $\varphi_{-6,2}$ и $\varphi^{(3)}_{-4,1}$.

3 Инвариантные коэффициенты рядов Фурье

Как было отмечено в определении 4, слабая форма Якоби имеет следующее разложение в ряд Фурье:

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{l \in L^\vee} \sum_{n \geqslant 0} a(n,l) q^n \zeta^l.$$

Пусть L – решётка, порождённая некоторой системой корней. Тогда её группа Вейля действует как на элементах L, так и на элементах $L^\vee$. Таким образом, если два вектора l_1 и l_2 лежат в одной орбите относительно этого действия, то у любой $W(L)$-инвариантной формы $a(n, l_1) = a(n, l_2)$. Поэтому каждый коэффициент при q^n в разложении в ряд Фурье будет разбиваться в сумму $W(L)$-инвариантных многочленов от ζ^l. Для решётки D_4 определим следующие инвариантные многочлены от экспонент:

$$Q_0 = 1 - \text{соответствующий орбите } 0,$$

$$P_1 = \sum_{j=1}^{4}(\zeta_j + \zeta_j^{-1}) - \text{сумма соответствующих орбитам } \varepsilon_1 \text{ и } -\varepsilon_1,$$

$$P^+_{\frac{4}{4}} = \sum_{\{\text{чёт. число } +\}} \zeta_1^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_2^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_3^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_4^{\pm\frac{1}{2}} - \text{для орбиты } \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$P^-_{\frac{4}{4}} = \sum_{\{\text{нечёт. число } +\}} \zeta_1^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_2^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_3^{\pm\frac{1}{2}}\zeta_4^{\pm\frac{1}{2}} - \text{для орбиты } \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4),$$

$$P_{\frac{4}{4}} = P^+_{\frac{4}{4}} + P^-_{\frac{4}{4}},$$

$$Q_2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \zeta_i^{\pm 1}\zeta_j^{\pm 1} - \text{для орбиты корней } \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2,$$

$$P_3 = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} \zeta_i^{\pm 1}\zeta_j^{\pm 1}\zeta_k^{\pm 1} - \text{для орбит элементов типа } \pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3,$$

$$Q_4^1 = \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant 4} \zeta_i^{\pm 1}\zeta_j^{\pm 1}\zeta_k^{\pm 1}\zeta_l^{\pm 1} - \text{для орбиты элементов типа } \sum_{i=1}^{4} \pm\varepsilon_i,$$

$$Q_4^2 = \sum_{j=1}^{4}(\zeta_j^2 + \zeta_j^{-2}) - \text{сумма соответствующих орбитам } 2\varepsilon_1 \text{ и } -2\varepsilon_1,$$

$$Q_4 = Q_4^1 + Q_4^2,$$

$$P_{\frac{12}{4}} - \text{сумма для орбит элементов типа } \frac{1}{2}(\pm 3\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4),$$

$$\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm 3\varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4), \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm 3\varepsilon_3 \pm \varepsilon_4), \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm 3\varepsilon_4).$$

Замечание 6. Следуя традиции, буквами Q обозначаются орбиты, векторы из которых лежат в решётке. Буквы P соответствуют орбитам весовых векторов. Нижний индекс у орбит соответствует длине каждого элемента из неё. Здесь мы намеренно пишем $P_{\frac{4}{4}}$, так как многочлены P_1 и $P_{\frac{4}{4}}$ представляют различные орбиты, и в общем случае в $D_n^\vee$ имеется вектор $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)$ длины $\frac{n}{4}$. Аналогично с P_3 и $P_{\frac{12}{4}}$. В случае Q_4^1 и Q_4^2 схожего способа различить многочлены нет, поэтому мы вводим дополнительно верхние индексы.

Как можно посчитать, используя результаты [14], в терминах, определённых выше, мы имеем следующий вид образующих алгебры слабых $W(D_4)$-инвариантных форм из теоремы 1:

$$\varphi_{0,1} = 32Q_0 + P_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots),$$

$$\varphi_{-2,1} = 24Q_0 - P_1 - P_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots),$$

$$\varphi_{-4,1} = -2P_1 + P_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots),$$

$$\omega_{-4,1} = P^+_{\frac{4}{4}} - P^-_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots),$$

$$\varphi_{-6,2} = -320Q_0 + 112P_1 - 32Q_2 + 4P_3 + 4Q^1_4 + q \cdot (\ldots),$$

Также отметим отдельно, что из примера 6 следует, что

$$\varphi^{(2)}_{-4,1} = -P_1 + P^+_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots);$$

$$\varphi^{(3)}_{-4,1} = P_1 - P^-_{\frac{4}{4}} + q \cdot (\ldots).$$

Замечание 7. Многочлены Q^2_4 и $P_{\frac{12}{4}}$ не появляются в q^0-членах указанных выше форм, но они возникнут при построении $O(D_4)$-инвариантных образующих.

4 Построение образующих

В данной работе будем обозначать слабые формы Якоби, связанные с решёткой $F_4(2)$ (т.е. $O(D_4)$-инвариантные формы), с соответствующим верхним индексом F_4, а $W(D_4)$-инвариантные формы, как и в предыдущих параграфах, без верхнего индекса, чтобы не перегружать обозначения. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Кольцо слабых форм Якоби чётного индекса, соответствующих решётке F_4 и инвариантных относительно группы Вейля $W(F_4)$, имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм. А именно,*

$$J^{w,W}_{*,2*}(F_4) \simeq J^{w,W}_{*,*}(F_4(2)) = M_*[\varphi^{F_4}_{0,1}, \varphi^{F_4}_{-2,1}, \varphi^{F_4}_{-6,2}, \varphi^{F_4}_{-8,2}, \varphi^{F_4}_{-12,3}] \simeq J^{w,O}_{*,*}(D_4).$$

Замечание 8. Основная сложность в переходе от решётки D_4 к решётке F_4 заключается в том, что форма $\varphi_{-4,1}$, основная в конструкции $W(F_4)$-инвариантных форм индекса 1 (см. [14]) не является $W(F_4)$-инвариантной, и усреднение по $W(F_4)/W(D_4) \simeq S_3$ этой формы, как можно проверить прямым вычислением, тождественно равно нулю.

Мы будем строить указанные формы Якоби, используя образующие алгебры $W(D_4)$-инвариантных форм. Так как новые формы должны быть инвариантны относительно группы Вейля для системы корней F_4, то нам нужно построить формы, инвариантные не только относительно группы Вейля для D_4, порождённой отражениями в корнях $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, но и относительно отражений в $\pm\varepsilon_i$ (то есть смены знака у любого числа координат) и отражений относительно всех векторов вида $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm\varepsilon_3 \pm\varepsilon_4)$.

Отметим, что в силу инвариантности форм относительно группы $W(D_4)$, достаточно проверить инвариантность относительно отражения в одном представителе каждого из трёх типов векторов: $\pm\varepsilon_i$, $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm\varepsilon_4)$ с чётным числом плюсов, $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm\varepsilon_2 \pm\varepsilon_3 \pm\varepsilon_4)$ с нечётным числом плюсов. Выберем по произвольному из каждого типа и обозначим индуцированные ими действия на экспонентах через f, g и h, соответственно. Имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. *При отражении в корнях описанных выше типов происходят следующие преобразования многочленов P_1, $P^+_{\frac{4}{4}}$ и $P^-_{\frac{4}{4}}$:*

$$\begin{aligned} f:&\quad P^-_{\frac{4}{4}} \mapsto P^+_{\frac{4}{4}}, \quad P^+_{\frac{4}{4}} \mapsto P^-_{\frac{4}{4}} \quad P_1 \mapsto P_1;\\ g:&\quad P^-_{\frac{4}{4}} \mapsto P_1, \quad P^+_{\frac{4}{4}} \mapsto P^+_{\frac{4}{4}}, \quad P_1 \mapsto P^-_{\frac{4}{4}};\\ h:&\quad P^-_{\frac{4}{4}} \mapsto P^-_{\frac{4}{4}}, \quad P^+_{\frac{4}{4}} \mapsto P_1, \quad P_1 \mapsto P^+_{\frac{4}{4}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Прямое вычисление. □

Предложение 2. *Имеют место следующие преобразования слабых форм Якоби:*

$$\begin{aligned} f:&\ \varphi^{(2)}_{-4,1} \mapsto -\varphi^{(3)}_{-4,1}, \quad \varphi^{(3)}_{-4,1} \mapsto -\varphi^{(2)}_{-4,1};\\ g:&\ \varphi^{(2)}_{-4,1} \mapsto \varphi^{(2)}_{-4,1} + \varphi^{(3)}_{-4,1}, \quad \varphi^{(3)}_{-4,1} \mapsto -\varphi^{(3)}_{-4,1};\\ h:&\ \varphi^{(2)}_{-4,1} \mapsto -\varphi^{(2)}_{-4,1}, \quad \varphi^{(3)}_{-4,1} \mapsto \varphi^{(2)}_{-4,1} + \varphi^{(3)}_{-4,1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Данное утверждение – прямая проверка, аналогичная предыдущему предложению, ввиду явного выражения этих форм через $\vartheta^{(2)}$ и $\vartheta^{(3)}$ в примере 6. □

4.1 Построение форм $\varphi^{F_4}_{-12,3}$ и $\varphi^{F_4}_{-8,2}$

Как уже упоминалось в определении 3, группа Вейля для системы корней F_4 является полупрямым произведением группы $W(D_4)$ и группы

S_3. Сопоставление транспозициям из S_3 инволюций f, g и h задаёт представление этой группы, которое в матричном виде может быть записано как

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, по теореме Шевалле над полем комплексных чисел (см. [15], V, §5), подалгебра инвариантов в алгебре многочленов от $\varphi^{(2)}_{-4,1}$ и $\varphi^{(3)}_{-4,1}$ свободно порождается многочленами степени 2 и 3. Эти многочлены являются $W(F_4)$-инвариантными слабыми формами Якоби $\varphi^{F_4}_{-12,3}$ и $\varphi^{F_4}_{-8,2}$. Найдём их явный вид.

В общем виде, из соображений веса и индекса форма $\varphi^{F_4}_{-12,3}$ может быть записана как

$$P(\varphi^{(2)}_{-4,1}, \varphi^{(3)}_{-4,1}) = a(\varphi^{(2)}_{-4,1})^3 + b(\varphi^{(2)}_{-4,1})^2(\varphi^{(3)}_{-4,1}) + c(\varphi^{(2)}_{-4,1})(\varphi^{(3)}_{-4,1})^2 + d(\varphi^{(3)}_{-4,1})^3,$$

с коэффициентами из поля комплексных чисел. Прямая проверка действия S_3, описанного выше, на этом многочлене показывает, что с точностью до умножения на константу существует единственная инвариантная форма:

$$2\varphi^{F_4}_{-12,3} = 2(\varphi^{(2)}_{-4,1})^3 + 3(\varphi^{(2)}_{-4,1})^2\varphi^{(3)}_{-4,1} - 3\varphi^{(2)}_{-4,1}(\varphi^{(3)}_{-4,1})^2 - 2(\varphi^{(3)}_{-4,1})^3.$$

Используя тот факт, что $\varphi_{-4,1} = \varphi^{(2)}_{-4,1} - \varphi^{(3)}_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1} = \varphi^{(2)}_{-4,1} + \varphi^{(3)}_{-4,1}$, получаем

$$8\varphi^{F_4}_{-12,3} = 9\varphi_{-4,1}\omega^2_{-4,1} - \varphi^3_{-4,1} = \varphi_{-4,1}(9\omega^2_{-4,1} - \varphi^2_{-4,1}).$$

Аналогично подойдём к построению формы $\varphi^{F_4}_{-8,2}$. Она может быть представлена в виде

$$Q(\varphi^{(2)}_{-4,1}, \varphi^{(3)}_{-4,1}) = a(\varphi^{(2)}_{-4,1})^2 + b(\varphi^{(2)}_{-4,1})(\varphi^{(3)}_{-4,1}) + c(\varphi^{(3)}_{-4,1})^2,$$

где коэффициенты являются константами. Опять же прямым вычислением получаем, что с точностью до умножения на константу инвариантным является лишь многочлен

$$\varphi^{F_4}_{-8,2} = (\varphi^{(2)}_{-4,1})^2 + \varphi^{(2)}_{-4,1}\varphi^{(3)}_{-4,1} + (\varphi^{(3)}_{-4,1})^2.$$

Используя тот факт, что $\varphi_{-4,1} = \varphi^{(2)}_{-4,1} - \varphi^{(3)}_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1} = \varphi^{(2)}_{-4,1} + \varphi^{(3)}_{-4,1}$, получаем, что

$$4\varphi^{F_4}_{-8,2} = 3\omega^2_{-4,1} + \varphi^2_{-4,1}.$$

4.2 Умножение некоторых инвариантных многочленов

Для дальнейших вычислений нам необходимо найти q^0-члены всех $W(D_4)$ -инвариантных форм индекса 2. Так как среди образующих для D_4 только одна форма имеет индекс 2, а остальные 1, и q^0-член каждой формы индекса 1 есть линейная комбинация $Q_0, P_1, P^+_{\frac{4}{4}}$ и $P^-_{\frac{4}{4}}$, то нам нужно составить аналог таблицы умножения для этих многочленов. Очевидно, что умножение на Q_0 никак не меняет многочлен. Найдём остальные произведения (отметим только, что по отдельности $P_1 \cdot P^+_{\frac{4}{4}}$ и $P_1 \cdot P^-_{\frac{4}{4}}$ нам интересны не будут, нужно будет только произведение $P_1 \cdot P_{\frac{4}{4}}$). Итак,

$$(P^+_{\frac{4}{4}})^2 = 8Q_0 + 2Q_2 + Q_4^{1,+},$$

$$(P^-_{\frac{4}{4}})^2 = 8Q_0 + 2Q_2 + Q_4^{1,-},$$

где $Q_4^{1,+}$ соответствует слагаемым из орбиты с чётным числом плюсов, а $Q_4^{1,-}$ с нечётным.

$$P^-_{\frac{4}{4}} \cdot P^+_{\frac{4}{4}} = 4P_1 + P_3,$$

$$(P_1)^2 = 8Q_0 + 2Q_2 + Q_4^2,$$

$$P_1 \cdot P_{\frac{4}{4}} = 4P_{\frac{4}{4}} + P_{\frac{12}{4}}.$$

Используя данные формулы, мы можем найти произведение любых форм индекса 1.

4.3 Построение формы $\varphi^{F_4}_{-6,2}$

Так как данная форма имеет тот же индекс, что и $\varphi^{F_4}_{-8,2}$, и вес на 2 больше, то мы можем пробовать искать представление формы $\varphi^{F_4}_{-6,2}$ в виде $H_{-8}(\varphi^{F_4}_{-8,2})$, где H_k – модулярный дифференциальный оператор из примера 6. В данном случае он будет иметь вид

$$H_k(\varphi^{F_4}_{k,m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l \in F_4} \left(n - \frac{1}{2m}(l,l) \right) a(n,l) q^n \zeta^l + (2k-4) G_2 \varphi^{F_4}_{k,m}.$$

Используя полученные выше правила умножения инвариантных многочленов, получаем, что

$$\varphi^{F_4}_{-8,2} = \frac{3\omega^2_{-4,1} + \varphi^2_{-4,1}}{4} = 24Q_0 - 4P_1 - 4P_{\frac{4}{4}} + 6Q_2 - P_3 - P_{\frac{12}{4}} + Q_4 + q \cdot (\ldots).$$

Применив данный оператор к форме $\varphi^{F_4}_{-8,2}$, мы получим:

$$12H_{-8}(\varphi^{F_4}_{-8,2}) = 240Q_0 - 28P_1 - 28P_{\frac{4}{4}} + 24Q_2 - P_3 - P_{\frac{12}{4}} - 2Q_4 + q \cdot (\ldots) \neq 0,$$

поэтому мы можем выбрать полученную форму в качестве формы $\varphi^{F_4}_{-6,2}$.

Выразим эту форму через формы Якоби для системы корней D_4. Как мы знаем,

$$J^{w,W}_{-6,2}(D_4) = \langle \varphi_{-6,2}; \varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1}; \varphi_{-2,1}\omega_{-4,1} \rangle,$$

но форма $\varphi_{-2,1}\omega_{-4,1}$ ведёт себя антиинвариантно при смене знака у нечётного числа z-координат. Поэтому

$$\varphi^{F_4}_{-6,2} = a\varphi_{-6,2} + b\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1}.$$

Используя то, что

$$\varphi_{-6,2} = -320Q_0 + 112P_1 - 32Q_2 + 4P_3 + 4Q_4^1 + q \cdot (\ldots);$$

$$\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1} = (24Q_0 - P_1 - P_{\frac{4}{4}})(-2P_1 + P_{\frac{4}{4}}) + q \cdot (\ldots) =$$

$$= -56P_1 + 28P_{\frac{4}{4}} - 2P_3 + P_{\frac{12}{4}} - Q_4^1 + 2Q_4^2,$$

получаем условие на коэффициенты:

$$240Q_0 - 28P_1 - 28P_{\frac{4}{4}} + 24Q_2 - P_3 - P_{\frac{12}{4}} - 2Q_4 =$$

$$a(-320Q_0+112P_1-32Q_2+4P_3+4Q_4^1)-b(56P_1-28P_{\frac{4}{4}}+2P_3-P_{\frac{12}{4}}+Q_4^1-2Q_4^2),$$

которое даёт единственное решение $a = -\frac{3}{4}$, $b = -1$. Поэтому

$$-4\varphi^{F_4}_{-6,2} = 3\varphi_{-6,2} + 4\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1}.$$

4.4 Построение формы $\varphi^{F_4}_{-2,1}$

Аналогично предыдущему случаю, применим дифференциальный оператор H_{-6} к $\varphi^{F_4}_{-6,2}$. Получим

$$H_{-6}(\varphi^{F_4}_{-6,2}) =$$

$$= \frac{1}{12}\Big(1920Q_0 - 140P_1 - 140P_{\frac{4}{4}} + 48Q_2 + P_3 + P_{\frac{12}{4}} + 8Q_4 + q \cdot (\ldots)\Big)$$

Однако в данном случае

$$J^{w,W}_{-4,2}(D_4) = \langle E_4\varphi^2_{-4,1}; E_4\omega^2_{-4,1}; \varphi^2_{-2,1}; \varphi_{0,1}\varphi_{-4,1}; \varphi_{0,1}\omega_{-4,1} \rangle.$$

Последняя форма не инвариантна относительно смены знака у нечётного числа переменных, поэтому в искомом представлении она будет отсутствовать. Посчитаем q^0- члены у оставшихся форм. Как следует из свойств умножения, полученных ранее:

$$E_4\omega^2_{-4,1} = 16Q_0 - 8P_1 + 4Q_2 - 2P_3 + Q_4^1;$$

$$E_4\varphi^2_{-4,1} = 48Q_0 + 8P_1 - 16P_{\frac{4}{4}} + 12Q_2 + 2P_3 - 4P_{\frac{12}{4}} + Q^1_4 + 4Q^2_4;$$

$$\varphi^2_{-2,1} = 600Q_0 - 40P_1 - 40P_{\frac{4}{4}} + 6Q_2 + 2P_3 + 2P_{\frac{12}{3}} + Q_4;$$

$$\varphi_{-4,1}\varphi_{0,1} = 16Q_0 - 56P_1 - 40P_{\frac{4}{4}} + 4Q_2 + 2P_3 - 2P_{\frac{12}{4}} + Q^1_4.$$

Полагая, что $H_{-6}(\varphi^{F_4}_{-6,2}) = aE_4\omega^2_{-4,1} + bE_4\varphi^2_{-4,1} + c\varphi^2_{-2,1} + d\varphi_{0,1}\varphi_{-4,1}$, получаем систему линейных уравнений на коэффициенты, у которой, как оказывается, существует единственное решение. А именно, $a = \frac{15}{4}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = 3$, $d = 0$. То есть

$$H_{-6}(\varphi^{F_4}_{-6,2}) = \frac{15}{4}E_4\omega^2_{-4,1} + \frac{3}{4}E_4\varphi^2_{-4,1} + 3\varphi^2_{-2,1} =$$

$$= \frac{5}{4}(3E_4\omega^2_{-4,1} + E_4\varphi^2_{-4,1} + 3\varphi^2_{-2,1}).$$

Вычтем из получившейся формы $5E_4\varphi^{F_4}_{-8,2} = \frac{5}{4}(3E_4\omega^2_{-4,1} + E_4\varphi^2_{-4,1})$. Тогда мы получим, что форма $0 \neq \varphi^2_{-2,1} \in J^{w,W}_{-4,2}(F_4)$.

Докажем теперь, что $\varphi_{-2,1}$ будет $W(F_4)$-инвариантной. По построению для D_4, данная форма инвариантна и относительно действия группы $W(D_4)$, и относительно смены знака у любого числа переменных. Поэтому необходимо лишь проверить инвариантность относительно отражений в корнях типа $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$. В силу инвариантности формы $\varphi^2_{-2,1}$ относительно этого преобразования, либо $\varphi_{-2,1}$ также $W(F_4)$-инвариантна, либо $W(F_4)$-антиинвариантна. Но q^0-член $\varphi_{-2,1}$ равен $24Q_0 - P_1 - P_{\frac{4}{4}}$, и он $W(F_4)$-инвариантен по предложению 1. Поэтому форма $\varphi_{-2,1}$ является $W(F_4)$-инвариантной.

4.5 Построение формы $\varphi^{F_4}_{0,1}$

Построим форму веса 0 и индекса 1. Для этого снова применим дифференциальный оператор, но уже к форме $\varphi^{F_4}_{-2,1}$. Получим

$$\varphi^{F_4}_{0,1} = 6H_{-2}(\varphi^{F_4}_{-2,1}) = 48Q_0 + P_1 + P_{\frac{4}{4}} + q\cdot(\ldots).$$

Как мы знаем, для системы корней D_4 форма индекса 1 и веса 0, инвариантная относительно смены знаков у любого числа координат, есть линейная комбинация форм $\varphi_{0,1}$ и $E_4\varphi_{-4,1}$. Таким образом, соотношение на коэффициенты даёт нам следующее представление:

$$2\varphi^{F_4}_{0,1} = 3\varphi_{0,1} - E_4\varphi_{-4,1}.$$

5 Алгебраическая независимость и достаточность построенных образующих

Перейдём теперь к доказательству того, что построенные нами выше функции являются образующими для алгебры слабых форм Якоби, ассоциированных с решёткой $F_4(2)$.

Лемма 2. *Формы $\varphi_{0,1}^{F_4}$, $\varphi_{-2,1}^{F_4}$, $\varphi_{-6,2}^{F_4}$, $\varphi_{-8,2}^{F_4}$ и $\varphi_{-12,3}^{F_4}$ алгебраически независимы над кольцом модулярных форм.*

Доказательство. Приведём ещё раз представление данных форм через образующие алгебры слабых $W(D_4)$-инвариантных форм Якоби:

$$2\varphi_{0,1}^{F_4} = 3\varphi_{0,1} - E_4\varphi_{-4,1},$$

$$\varphi_{-2,1}^{F_4} = \varphi_{-2,1},$$

$$-4\varphi_{-6,2}^{F_4} = 3\varphi_{-6,2} + 4\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1},$$

$$4\varphi_{-8,2}^{F_4} = 3\omega_{-4,1}^2 + \varphi_{-4,1}^2,$$

$$8\varphi_{-12,3}^{F_4} = \varphi_{-4,1}(9\omega_{-4,1}^2 - \varphi_{-4,1}^2).$$

Предположим, что данные формы алгебраически зависимы, тогда существует некий многочлен

$$U(\varphi_{0,1}^{F_4}, \varphi_{-2,1}^{F_4}, \varphi_{-6,2}^{F_4}, \varphi_{-8,2}^{F_4}, \varphi_{-12,3}^{F_4})$$

с коэффициентами из кольца модулярных форм, аннулирующий полученные формы. Рассмотрим его мономы, содержащие максимальную степень k формы $\varphi_{0,1}^{F_4}$:

$$(\varphi_{0,1}^{F_4})^k U_1(\varphi_{-2,1}^{F_4}, \varphi_{-6,2}^{F_4}, \varphi_{-8,2}^{F_4}, \varphi_{-12,3}^{F_4}).$$

Подставим $\varphi_{0,1}^{F_4} = \frac{3}{2}\varphi_{0,1} - \frac{1}{2}E_4\varphi_{-4,1}$ и рассмотрим линейную комбинацию выбранных мономов. После раскрытия скобкок получим, что многочлен $U \equiv 0$ может быть записан как

$$\varphi_{0,1}^k U_1(\varphi_{-2,1}^{F_4}, \varphi_{-6,2}^{F_4}, \varphi_{-8,2}^{F_4}, \varphi_{-12,3}^{F_4}) + \varphi_{0,1}^{k-1} U_2(\varphi_{-2,1}^{F_4}, \varphi_{-6,2}^{F_4}, \varphi_{-8,2}^{F_4}, \varphi_{-12,3}^{F_4}) + \ldots.$$

Рассмотрим полученное соотношение как соотношение для D_4. Тогда $U_1 = 0$, а значит, ввиду максимальности k, соотношение U не зависит от $\varphi_{0,1}^{F_4}$.

Аналогично можно поступить с формами $\varphi_{-2,1}^{F_4}$ и $\varphi_{-6,2}^{F_4}$, так как они, как и форма $\varphi_{0,1}^{F_4}$, содержат в представлении через $W(D_4)$-инвариантные образующие слагаемые, которые не содержатся ни в каких из оставшихся предполагаемых $W(F_4)$-инвариантных образующих. Таким образом, осталось проверить алгебраическую независимость форм $\varphi^{F_4}_{-8,2}$ и $\varphi^{F_4}_{-12,3}$ над кольцом модулярных форм.

Предположим противное, и $U(\varphi^{F_4}_{-8,2}, \varphi^{F_4}_{-12,3}) \equiv 0$. Но тогда, ввиду явного выражения этих форм через $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$, полученное в §4.1, при подстановке $z_4 = 0$ мы получаем нетривиальное соотношение на образующую $\varphi^{D_3}_{-4,1} = \varphi_{-4,1}\Big|_{z_4=0}$ для системы корней D_3, так как $\omega_{-4,1}\Big|_{z_4=0} = 0$ (см. теорему 1). Противоречие. □

Лемма 3. *Любая слабая $W(F_4)$-инвариантная форма Якоби является многочленом от $\varphi^{F_4}_{0,1}$, $\varphi^{F_4}_{-2,1}$, $\varphi^{F_4}_{-6,2}$, $\varphi^{F_4}_{-8,2}$ и $\varphi^{F_4}_{-12,3}$ с модулярными формами в качестве коэффициентов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную форму $\Phi_{k,m} \in J^{w,W}_{*,*}(F_4)$. Данная форма, как мы знаем, может быть представлена в виде полинома от $W(D_4)$-инвариантных образующих алгебры форм Якоби. То есть для некоторого многочлена U с комплексными коэффициентами

$$\Phi_{k,m} = U(E_4, E_6, \varphi_{0,1}, \varphi_{-2,1}, \varphi_{-4,1}, \varphi_{-6,2}, \omega_{-4,1}).$$

Подставим в многочлен U вместо форм веса 0 и -6 следующие выражения через остальные формы и предполагаемые $W(F_4)$-инвариантные образующие:

$$\varphi_{0,1} = \frac{2\varphi^{F_4}_{0,1} + E_4\varphi_{-4,1}}{3},$$

$$\varphi_{-6,2} = \frac{\varphi^{F_4}_{-6,2} - 4\varphi_{-2,1}\varphi_{-4,1}}{3}.$$

Тогда мы получим, что исходную форму можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5)} a_\alpha U_\alpha(\varphi_{-4,1}, \omega_{-4,1}) E_4^{n_1} E_6^{n_2} (\varphi^{F_4}_{0,1})^{n_3} (\varphi^{F_4}_{-2,1})^{n_4} (\varphi^{F_4}_{-6,2})^{n_5},$$

где α – мультииндекс, a_α – комплексное число, U_α – многочлен от форм $\varphi_{-4,1}$ и $\omega_{-4,1}$ с комплексными коэффициентами. Такое представление корректно, так как $\varphi^{F_4}_{-2,1} = \varphi_{-2,1}$. По построению каждая из форм

$$E_4^{n_1} E_6^{n_2} (\varphi^{F_4}_{0,1})^{n_3} (\varphi^{F_4}_{-2,1})^{n_4} (\varphi^{F_4}_{-6,2})^{n_5}$$

инвариантна относительно действия $W(F_4)$, поэтому каждый многочлен U_α также должен быть инвариантен. Но тогда, как было показано в §4.1 он является многочленом от $\varphi^{F_4}_{-8,2}$ и $\varphi^{F_4}_{-12,3}$. □

Леммы 2 и 3 вместе дают доказательство теоремы 2.

Список литературы

[1] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections.* Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782

[2] И.Н. Бернштейн, О.В. Шварцман, *Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических кокстеровских групп.* Функц. анализ и его прил., **12:4** (1978), 79–80.

[3] E. Looijenga, *Root Systems and Elliptic Curves.* Inv. Mathem. **38** (1976), 17–32.

[4] E. Looijenga, *Invariant Theory for Generalized Root Systems.* Inv. Mathem. **61** (1980), 1–32.

[5] V. Kac, D. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms.* Adv. in Math., **53** (1984), 125–264.

[6] K. Wirthmüller, *Root systems and Jacobi forms.* Comp. Math. **82** (1992), 293–354.

[7] H. Wang, *Weyl invariant E_8 Jacobi forms.* arXiv:1801.08462

[8] K. Saito, *Extended Affine Root Systems I (Coxeter transformations).* Publ. RIMS, **21** (1985), 75–179.

[9] K. Saito, *Extended Affine Root Systems II (Flat Invariants).* Publ. RIMS, **26** (1990), 15–78.

[10] B.N. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories in Integrable Systems and Quantum Groups.* Montecatini, Terme 1993, ed. Francaviglia, M. and Greco, S.. Springer lecture notes in mathematics, **1620**, Springer-Verlag 1996, 120–348.

[11] I. Satake *Flat Structure for the Simple Elliptic Singularity of Type $\widetilde{E}_6$ and Jacobi Form.* Proc. Japan Acad., **69**, Ser. A (1993) No. 7, 247–251.

[12] M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part I.* Differential Geom. Appl. **13** (2000), 19–41.

[13] M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part II.* Differential Geom. Appl. **13 (3)** (2000), 213–233.

[14] D. Adler, V. Gritsenko, *The D_8-tower of weak Jacobi forms and applications.* J. Geom. Phys., electronically published on February 6, 2020, DOI: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.103616 (to appear in print).

[15] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Ch. 4, 5, 6.* Masson, 1981.

[16] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser, Boston, Mass. (1985).

[17] D. Mumford, *Tata lectures on theta I.* Progress in Mathem. **28**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983.

[18] V.A. Gritsenko, *Jacobi modular forms: 30 ans après.* Course of lectures on Coursera 2016–2018. https://ru.coursera.org/learn/modular-forms-jacobi

[19] F. Cléry, V. Gritsenko, *Modular forms of orthogonal type and Jacobi theta-series.* Abh. Math. Semin. Univ. Hambg **83** (2013), 187–217.

Д.В. Адлер

Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм, Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики, Москва

dmitry.v.adler@gmail.com