ОДНОРОДНЫЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НЕФАКТОРИАЛЬНЫХ ТРИНОМИАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Ю. И. ЗАЙЦЕВА

Аннотация. В работе получено описание однородных локально нильпотентных дифференцирований алгебры регулярных функций некоторого класса триномиальных гиперповерхностей. Данный класс включает в себя все нефакториальные триномиальные гиперповерхности.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль и R — алгебра над полем $\mathbb{K}$. Дифференцированием алгебры R называется линейное отображение $\delta\colon R \to R$, удовлетворяющее правилу Лейбница: $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$ для всех $f, g \in R$. Дифференцирование называется локально нильпотентым, если для любого $f \in R$ существует такое натуральное число m, что $\delta^m(f) = 0$.

Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{K}$ и $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — аддитивная группа поля. Известно, что локально нильпотентные дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X имеют геометрический смысл: существует взаимно однозначное соответствие между локально нильпотентными дифференцированиями алгебры $\mathbb{K}[X]$ и регулярными $\mathbb{G}_a$-действиями на многообразии X, см., например, [7, Section 1.5].

Предположим, что алгебра R градуирована абелевой группой K:

$$R = \bigoplus_{w \in K} R_w.$$

Дифференцирование $\delta\colon R \to R$ будем называть однородным, если оно отображает однородные элементы в однородные. Легко доказать, что в этом случае существует такой элемент $\deg\delta \in K$, что для любого $w \in K$ выполнено $\delta(R_w) \subseteq R_{w+\deg\delta}$. Этот элемент называется степенью дифференцирования δ.

Напомним, что квазитором называется алгебраическая группа, изоморфная прямому произведению алгебраического тора и конечной абелевой группы. Предположим, что на многообразии X действует некоторый квазитор H. Такому действию соответствует градуировка алгебры $\mathbb{K}[X]$ конечнопорождённой абелевой группой K характеров квазитора H:

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{w \in K} \mathbb{K}[X]_w, \quad \text{где } \mathbb{K}[X]_w = \{f \mid h \circ f = w(h)f \quad \forall h \in H\}.$$

Несложно видеть, что локально нильпотентное дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[X]$ однородно относительно этой градуировки тогда и только тогда, когда соответствующее $\mathbb{G}_a$-действие на X нормализуется квазитором H. Описание однородных локально нильпотентных дифференцирований позволяет описывать группу автоморфизмов алгебраического многообразия, см., например, [4, Theorem 5.5], [3, Theorem 3].

Зафиксируем натуральные числа n_0, n_1, n_2 и положим $n = n_0+n_1+n_2$. Для каждого $i = 0,1,2$ зафиксируем также набор натуральных чисел $l_i = (l_{ij} \mid j = 1,\dots,n_i)$. Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{K}[T_{ij},\, i = 0,1,2,\, j = 1,\dots,n_i]$ и определим в ней мономы $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$. Триномом называется многочлен

$$g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2},$$

а триномиальной гиперповерхностью $X(g)$ — множество нулей уравнения $g = 0$ в пространстве $\mathbb{A}^n$. Обозначим её алгебру регулярных функций $\mathbb{K}[X(g)]$ через $R(g)$.

Нашей мотивацией к изучению триномов является торическая геометрия. Пусть $T \times X \to X$ — эффективное действие алгебраического тора на многообразии X. Сложностью такого действия называется коразмерность типичной орбиты тора, она равна $\dim X - \dim T$.

Действие сложности нуль является действием тора с открытой орбитой; нормальные многообразия, допускающие такое действие, называются торическими. Если X — торическое многообразие, на котором действует тор T, то $\mathbb{G}_a$-действия на X, нормализуемые тором T, могут быть описаны в терминах корней Демазюра веера полиэдральных конусов, отвечающих многообразию X, см. [6], [15, Section 3.4] и обобщения в [13, 5, 4].

Пусть $T \times X \to X$ — действие тора сложности один. В работах [14] и [13] $\mathbb{G}_a$-действия на X, нормализуемые тором T, классифицированы в терминах собственных полиэдральных дивизоров. Интересно, однако, получать их явные описания.

Изучение торических многообразий связано с биномами, см., например, [16, Chapter 4]. В то же время кольца Кокса устанавливают тесную связь между действиями тора сложности один и триномами, см. [12, 11, 10, 4, 9]. В частности, каждая триномиальная гиперповерхность $X(g)$ допускает действие тора сложности один.

В этой работе изучаются локально нильпотентные дифференцирования алгебры $R(g)$, однородные относительно «самой тонкой» градуировки; она будет определена в конструкции 1. Эта градуировка соответствует эффективному действию квазитора H на $X(g)$. Связная компонента квазитора H является тором размерности $n-2$ и действует на $X(g)$ со сложностью один.

Весовым моноидом произвольной градуированной алгебры $R = \bigoplus\limits_{w\in K} R_w$ называется множество $S = \{w \in K \mid R_w \neq 0\}$, а весовым конусом алгебры R — выпуклый конус ω в рациональном векторном пространстве $K_{\mathbb{Q}} = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, порождённый весовым моноидом S. Говорят, что однородное дифференцирование примитивно, если его степень не лежит в весовом конусе $\omega \subseteq K_{\mathbb{Q}}$. Ясно, что любое примитивное дифференцирование локально нильпотентно. Обратное не верно (см. пример 7).

В статье [4], где помимо триномиальных гиперповерхностей $X(g)$ рассматриваются многообразия, заданные несколькими триномами (см. подробнее [4, Construction 3.1]), дано явное описание всех примитивных (локально нильпотентных) дифференцирований алгебры $R(g)$, однородных относительно «самой тонкой» градуировки (см. [4, Theorem 4.4]). Они имеют вид $h\delta_{C,\beta}$, где $\delta_{C,\beta}$ — некоторое специальное примитивное дифференцирование алгебры $R(g)$ (см. [4, Construction 4.3] или конструкцию 2), а однородный элемент h лежит в ядре дифференцирования $\delta_{C,\beta}$. Назовём дифференцирования такого вида элементарными.

Мы предполагаем (см. гипотезу в разделе 5), что все однородные локально нильпотентные дифференцирования триномиальных алгебр элементарны. В теореме 1 мы докажем эту гипотезу для некоторых типов триномов. В частности, гипотеза доказана для нефакториальных триномиальных алгебр (см. следствие 1). Следствие 2 даёт критерий существования однородных локально нильпотентных дифференцирований триномиальных алгебр. Это позволяет дать новое доказательство критерия жёсткости триномиальной факториальной гиперповерхности, доказанного ранее в [2, Theorem 1] (см. следствие 3).

Автор выражает признательность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи и постоянную поддержку и благодарит С. А. Гайфуллина за полезные обсуждения и замечания.

2. Предварительные сведения

В этом разделе определены «самая тонкая» deg-градуировка алгебры регулярных функций триномиальной гиперповерхности и элементарные дифференцирования.

Конструкция 1. Пусть заданы натуральные числа n_0, n_1, n_2, $n = n_0+n_1+n_2$ и для $i = 0, 1, 2$ зафиксированы наборы натуральных чисел $l_i = (l_{ij} \mid j = 1, \ldots, n_i)$. Обозначим $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \ldots T_{in_i}^{l_{in_i}} \in \mathbb{K}[T_{ij},\, i = 0, 1, 2,\, j = 1, \ldots, n_i]$. *Триномом* называется многочлен вида

$$g = T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2}.$$

Гиперповерхность $X(g)$ в пространстве $\mathbb{A}^n$, заданную уравнением $g = 0$, будем называть *триномиальной гиперповерхностью*. Можно проверить, что многочлен g неприводим, а поэтому её алгебра регулярных функций $R(g) := \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$ не имеет делителей нуля. Такие алгебры мы называем *триномиальными*. Будем далее использовать одинаковые обозначения для элементов $\mathbb{K}[T_{ij}]$ и их образов в $R(g)$.

Следуя [10], построим по триному g матрицу размера $2 \times n$:

$$L = \begin{pmatrix} -l_0 & l_1 & 0 \\ -l_0 & 0 & l_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть L^* — матрица, транспонированная к L. Через K обозначим факторгруппу $K = \mathbb{Z}^n \,/\, \operatorname{Im} L^*$, а через $Q\colon \mathbb{Z}^n \to K$ — проекцию на неё. Пусть e_{ij}, $i = 0, 1, 2$, $j = 1, \ldots, n_i$ — стандартный базис $\mathbb{Z}^n$. Тогда равенства

$$\deg T_{ij} = Q(e_{ij}) \tag{1}$$

определяют K-градуировку на алгебре $\mathbb{K}[T_{ij}]$.

Так как g — однородный многочлен степени

$$\mu = l_{i1}Q(e_{i1}) + \ldots + l_{in_i}Q(e_{in_i})$$

для некоторого $\mu \in K$ при любом $i = 0, 1, 2$, то равенства (1) определяют градуировку и на $R(g) = \mathbb{K}[T_{ij}] \,/\, (g)$. Будем использовать «deg» для обозначения степени относительно этой градуировки.

Пример 1. Пусть $g = T_{01}T_{02}^3 + T_{11}^3 + T_{21}^2$, то есть $L = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (см. [4, Example 3.3]). Так как матрица L может быть приведена целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то группа $K = \mathbb{Z}^4 \,/\, \operatorname{Im} L^*$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^2$. Можно задать эту градуировку и явно:

$$\deg T_{01} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задание единственно с точностью до замены базиса в $\mathbb{Z}^4$.

Пример 2. Пусть $g = T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2$ и $L = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица L может быть приведена целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому группа $K = \mathbb{Z}^5 \,/\, \operatorname{Im} L^*$ изоморфна $\mathbb{Z}^3$. Градуировка может быть задана явно:

$$\deg T_{01} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \deg T_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \deg T_{11} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \deg T_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \deg T_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $g = T_{01}^2 + T_{11}^2 + T_{21}^2$ и $L = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Так как L приводится к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, то $K = \mathbb{Z}^3 \,/\, \operatorname{Im} L^*$ изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Обозначим $\mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$. Задать градуировку явно можно так:

$$\deg T_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ [0]_2 \\ [0]_2 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ [1]_2 \\ [0]_2 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ [0]_2 \\ [1]_2 \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма утверждает, что построенная deg-градуировка является «самой тонкой» градуировкой алгебры $R(g)$, относительно которой все образующие T_{ij} однородны.

Лемма 1. *Пусть* $\deg$ *— K-градуировка алгебры $R(g)$ из конструкции 1,* $\widehat{\deg}$ *— произвольная $\widehat{K}$-градуировка алгебры $R(g)$ некоторой абелевой группой $\widehat{K}$, в которой все образующие T_{ij} однородны. Тогда* $\widehat{\deg} = \psi \circ \deg$ *для некоторого отображения $\psi\colon K \to \widehat{K}$, а любое дифференцирование, однородное относительно градуировки* $\deg$*, однородно и относительно* $\widehat{\deg}$.

Доказательство. Веса $\widehat{w}_{ij} = \widehat{\deg}\, T_{ij}$ корректно определяют градуировку на алгебре $R(g)$ тогда и только тогда, когда многочлен g относительно неё однороден, то есть сумма $l_{i1}\widehat{w}_{i1} + \ldots + l_{in_i}\widehat{w}_{in_i} \in \widehat{K}$ одинакова для всех $i = 0, 1, 2$. Факторизация $\mathbb{Z}^n = \langle e_{ij} \rangle$ по $\operatorname{Im} L^*$ как раз обеспечивает выполнение этого условия для образов e_{ij} в группе K. Любая другая градуировка $R(g)$ с однородными образующими T_{ij} получается дальнейшей факторизацией группы $K = \mathbb{Z}^n \,/\, \operatorname{Im} L^*$ (отображением ψ из формулировки леммы). Однородность относительно градуировки $\widehat{\deg}$ любого дифференцирования, однородного относительно deg, несложно проверить по определению однородности. □

Следующая конструкция взята из работы [4] и описана ниже в частном случае триномиальной гиперповерхности (в обозначениях [4]: $r = 2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $g = g_I$ для $I = \{0, 1, 2\}$, $R(g) = R(A, P_0)$).

Конструкция 2. Определим дифференцирование $\delta_{C,\beta}$ алгебры $R(g)$. Пусть даны:

- последовательность $C = (c_0, c_1, c_2)$, где $c_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant c_i \leqslant n_i$,
- вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, такой что $\beta_i \in \mathbb{K}$, $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$.

Ясно, что для $\beta \neq 0$ либо ни одно из чисел β_i не равно 0, либо только одно β_{i_0} равно 0. Рассмотрим эти два случая.

(1) Пусть для любого $i = 0, 1, 2$ выполнено $\beta_i \neq 0$ и, кроме того, есть не более одного такого i_1, что $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$. Тогда положим

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k\neq i} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

(2) Пусть для единственного индекса i_0 выполнено $\beta_{i_0} = 0$ и, кроме того, есть не более одного такого i_1, что $i_1 \neq i_0$ и $l_{i_1 c_{i_1}} > 1$. Тогда положим

$$\delta_{C,\beta}(T_{ij}) = \begin{cases} \beta_i \prod\limits_{k\neq i, i_0} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & j = c_i, \\ 0, & j \neq c_i. \end{cases}$$

Эти равенства определяют отображение $\delta_{C,\beta}$ на образующих T_{ij}, которое единственным образом с помощью правила Лейбница продолжается до дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[T_{ij}]$. Легко проверить, что $\delta_{C,\beta}(g) = 0$, поэтому построенное отображение индуцирует корректно определённое дифференцирование алгебры $R(g)$.

Лемма 2. *Дифференцирования $\delta_{C,\beta}$ алгебры $R(g)$ примитивны и локально нильпотентны.*

Доказательство дано в [4, Construction 4.3].

Пусть h — однородный элемент алгебры $R(g)$ из ядра дифференцирования $\delta_{C,\beta}$. Несложно понять, что дифференцирование $h\delta_{C,\beta}$ также является однородным локально нильпотентным дифференцированием алгебры $R(g)$.

Определение. Дифференцирования триномиальной алгебры $R(g)$ вида $h\delta_{C,\beta}$, где h — однородный элемент ядра $\delta_{C,\beta}$, будем называть *элементарными*. При этом дифференцирования, соответствующие случаю (1) в конструкции 2, будем называть *элементарными дифференцированиями типа I*, а случаю (2) — *типа II*.

Пример 4. Рассмотрим $g = T_{01}T_{02}^3 + T_{11}^3 + T_{21}^2$ (см. пример 1 и [4, Example 4.7]). Найдём все элементарные дифференцирования алгебры $R(g)$. Так как в g в степени 1 входит только переменная T_{01}, то возможен только случай (2) при $i_0 \neq 0$, $C = (1, 1, 1)$. Получаем два вида элементарных дифференцирований $h\delta_{C,\beta}$, они имеют тип II:

(а) $i_0 = 1$, то есть $\beta = (\beta_0, 0, -\beta_0)$ для некоторого $\beta_0 \in \mathbb{K}$. Тогда

$$\delta_{C,\beta}(T_{01}) = 2\beta_0 T_{21}, \quad \delta_{C,\beta}(T_{02}) = 0, \quad \delta_{C,\beta}(T_{11}) = 0, \quad \delta_{C,\beta}(T_{21}) = -\beta_0 T_{02}^3,$$

то есть $\delta_{C,\beta} = 2\beta_0 T_{21} \dfrac{\partial}{\partial T_{01}} - \beta_0 T_{02}^3 \dfrac{\partial}{\partial T_{21}}$, $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$.

(б) $i_0 = 2$, то есть $\beta = (\beta_0, -\beta_0, 0)$ для некоторого $\beta_0 \in \mathbb{K}$. Тогда

$$\delta_{C,\beta}(T_{01}) = 3\beta_0 T_{11}^2, \quad \delta_{C,\beta}(T_{02}) = 0, \quad \delta_{C,\beta}(T_{11}) = -\beta_0 T_{02}^3, \quad \delta_{C,\beta}(T_{21}) = 0,$$

то есть $\delta_{C,\beta} = 3\beta_0 T_{11}^2 \dfrac{\partial}{\partial T_{01}} - \beta_0 T_{02}^3 \dfrac{\partial}{\partial T_{11}}$, $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$.

Пример 5. Пусть $g = T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2$ (см. пример 2). Лишь одна переменная входит в трином в степени, большей 1, поэтому алгебра $R(g)$ допускает элементарные дифференцирования обоих типов: можно взять любую последовательность $C = (c_0, c_1, 1)$,

$c_0, c_1 \in \{1, 2\}$, и любой вектор $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, такой что $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0$. Пример элементарного дифференцирования типа I:

$$\delta_{C,\beta} = T_{11}T_{21}\frac{\partial}{\partial T_{02}} + T_{01}T_{21}\frac{\partial}{\partial T_{12}} - T_{01}T_{11}\frac{\partial}{\partial T_{21}}.$$

Пример 6. Пусть $g = T_{01}^2 + T_{11}^2 + T_{21}^2$ (см. пример 3). Так как степени всех переменных в триноме больше 1, то дифференцирований вида $\delta_{C,\beta}$ в этом случае нет.

3. Вспомогательные леммы

Сохраняем обозначения предыдущего раздела. Сформулируем леммы, которые будут использоваться в доказательстве последующих утверждений.

Напомним несколько определений. Пусть алгебра R градуирована абелевой группой K. Однородный ненулевой необратимый элемент f алгебры R называется *K-простым*, если для однородных элементов $g, h \in R$ из условия $f \mid gh$ следует $f \mid g$ или $f \mid h$. Алгебра R называется *однородно факториальной*, если каждый её необратимый однородный элемент разлагается в произведение K-простых. Ясно, что такое разложение единственно с точностью до перестановки множителей и умножения на обратимые элементы.

Лемма 3. *Рассмотрим для триномиальной алгебры $R(g)$ градуировку абелевой группой K из конструкции 1. Тогда:*

(а) *образующие T_{ij} являются попарно неассоциированными K-простыми элементами алгебры $R(g)$;*

(б) *алгебра $R(g)$ однородно факториальна.*

Это утверждение доказано в [10, Proposition 2.2(i) и Theorem 1.1(i)].

Следующие две леммы — несколько стандартных свойств локально нильпотентных дифференцирований.

Лемма 4. *Пусть $\delta\colon R \to R$ — локально нильпотентное дифференцирование алгебры R без делителей нуля, $f, g \in R$. Тогда:*

(а) *если $f \mid \delta(f)$, то $\delta(f) = 0$;*

(б) *дифференцирование $f\delta$ локально нильпотентно тогда и только тогда, когда $f \in \operatorname{Ker}\delta$;*

(в) *если $f \mid \delta(g)$ и $g \mid \delta(f)$, то $\delta(f) = 0$ или $\delta(g) = 0$;*

(г) *если $\delta = \sum\limits_{m \leqslant i \leqslant n} \delta_i$, где все дифференцирования δ_i однородны относительно некоторой $\mathbb{Z}$-градуировки алгебры R, $\delta_m, \delta_n \neq 0$, то δ_m и δ_n локально нильпотентны.*

Доказательство можно найти, например, в [7, Principles 5, 7, 14 и Corollary 1.20].

Лемма 5. *Пусть алгебра R без делителей нуля конечно порождена и градуирована группой $\mathbb{Z}^k$. Если существует ненулевое локально нильпотентное дифференцирование, то существует и ненулевое однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры R.*

Доказательство. Обозначим данное локально нильпотентное дифференцирование через $\delta^{(0)}$. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры R, индуцированную из $\mathbb{Z}^k$-градуировки первой координатой в $\mathbb{Z}^k$. Из условия конечнопорождённости алгебры следует, что $\delta^{(0)}$

представимо в виде конечной суммы $\delta^{(0)} = \sum\limits_{m\leqslant i\leqslant n} \delta_i^{(0)}$ однородных дифференцирований $\delta_i^{(0)}$, поэтому по лемме 4(г) из $\delta^{(0)}$ можно получить ненулевое локально нильпотентное дифференцирование $\delta^{(1)} = \delta_n^{(0)}$, однородное относительно $\mathbb{Z}$-градуировки первой координатой группы $\mathbb{Z}^k$. Применив лемму 4(г) к оставшимся координатам ещё $k-1$ раз, получим из $\delta^{(1)}$ дифференцирование $\delta^{(k)}$, однородное относительно градуировки всеми координатами группы $\mathbb{Z}^k$, то есть относительно исходной градуировки. □

Следующее утверждение доказано в [8, Lemma 3.4].

Лемма 6. *Пусть δ — $\deg$-однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$. Тогда в каждом мономе $T_i^{l_i}$ содержится не более одной такой переменной T_{ij}, что $\delta(T_{ij}) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть в некотором мономе есть две переменные, которые не лежат в ядре дифференцирования. Можно считать, что это T_{01} и T_{02} в $T_0^{l_0}$.

Рассмотрим следующую градуировку алгебры $\mathbb{K}[T_{ij}]$:

T_{ij}	T_{01}	T_{02}	T_{03}	$\ldots$	T_{0n_0}	T_{11}	$\ldots$	T_{1n_1}	T_{21}	$\ldots$	T_{2n_2}
$\widehat{\deg}\, T_{ij}$	l_{02}	$-l_{01}$	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0	0	$\ldots$	0

Относительно неё g является однородным многочленом (степени 0), поэтому градуировка $\widehat{\deg}$ корректно определена и для элементов факторалгебры $R(g)$.

По лемме 1 дифференцирование δ является $\widehat{\deg}$-однородным. Рассмотрим два случая.

1) $\widehat{\deg}\,\delta \geqslant 0$. Тогда $\widehat{\deg}\,\delta(T_{01}) = \widehat{\deg}\,\delta + \widehat{\deg}\,T_{01} > 0$. Но тогда каждый моном в $\delta(T_{01})$ должен содержать T_{01}, поскольку это единственная переменная с положительным вкладом в степень монома. Значит, $\delta(T_{01})$ делится на T_{01}, но по предположению $\delta(T_{01}) \neq 0$ — противоречие с леммой 4(а).

2) $\widehat{\deg}\,\delta \leqslant 0$. Тогда $\widehat{\deg}\,\delta(T_{02}) = \widehat{\deg}\,\delta + \widehat{\deg}\,T_{02} < 0$. Аналогично предыдущему случаю, $\delta(T_{02})$ делится на T_{02} — противоречие леммой 4(а). □

4. Основные результаты

Следующее предложение и его доказательство фактически являются переформулировкой [4, Theorem 4.4]. Отличие состоит в том, что мы рассматриваем лишь случай триномиальной гиперповерхности, но вместо условия примитивности однородного локально нильпотентного дифференцирования требуем условие пропорциональности образов мономов при дифференцировании. Последнее слабее, так как согласно [4, Proposition 3.5] размерность однородной компоненты степени w равна 1, если $w - \deg g$ не лежит в весовом моноиде.

Предложение 1. *Пусть $\delta\colon R(g) \to R(g)$ — $\deg$-однородное локально нильпотентное дифференцирование. Предположим, что $\delta(T_0^{l_0})$, $\delta(T_1^{l_1})$, $\delta(T_2^{l_2})$ порождают одномерное подпространство в $R(g)$. Тогда дифференцирование δ элементарно.*

Доказательство. По лемме 6 в каждом мономе $T_i^{l_i}$ не более одной переменной T_{ij}, такой что $\delta(T_{ij}) \neq 0$. Пусть $\mathfrak{K} = \{i \mid \exists c_i\colon \delta(T_{ic_i}) \neq 0\}$.

Докажем, что если $\delta(T_{ic_i}) \neq 0$ и $\delta(T_{kc_k}) \neq 0$, то $l_{ic_i} = 1$ или $l_{kc_k} = 1$. Предположим противное, пусть $l_{ic_i} \neq 1$ и $l_{kc_k} \neq 1$. Согласно сказанному выше,

$$\delta(T_i^{l_i}) = \delta(T_{ic_i}) \frac{\partial T_i^{l_i}}{\partial T_{ic_i}}. \tag{2}$$

Так как $l_{ic_i} \neq 1$, то $T_{ic_i} \mid \partial T_i^{l_i}/\partial T_{ic_i}$, то есть $T_{ic_i} \mid \delta(T_i^{l_i})$. Аналогично $T_{kc_k} \mid \delta(T_k^{l_k})$. По условию теоремы $\delta(T_i^{l_i})$ и $\delta(T_k^{l_k})$ пропорциональны, поэтому $T_{kc_k} \mid \delta(T_i^{l_i})$ и $T_{ic_i} \mid \delta(T_k^{l_k})$. Но по (2) $\delta(T_i^{l_i})$ есть произведение $\delta(T_{ic_i})$ и переменных, не равных T_{kc_k}, поэтому из однородной факториальности алгебры $R(g)$ (см. лемму 3(б)), получим, что $T_{kc_k} \mid \delta(T_{ic_i})$. Аналогично $T_{ic_i} \mid \delta(T_{kc_k})$, противоречие с леммой 4(в).

Итак, $l_{ic_i} > 1$ не более чем для одного $i \in \mathfrak{K}$.

Элементы $\delta(T_i^{l_i})$ пропорциональны, то есть существует такой элемент $f \in R(g)$, что $\delta(T_i^{l_i}) \in \mathbb{K}f$ для любого i. Из равенства (2) видим, что $\partial T_i^{l_i}/\partial T_{ic_i}$ делит f для всех $i \in \mathfrak{K}$. Тогда из однородной факториальности алгебры $R(g)$ произведение $\prod\limits_{i\in\mathfrak{K}} \partial T_i^{l_i}/\partial T_{ic_i}$ делит f. Пусть отношение равно h. Тогда из (2) можно найти $\delta(T_{ic_i})$:

$$f = h \prod_{i\in\mathfrak{K}} \frac{\partial T_i^{l_i}}{\partial T_{ic_i}}, \quad \delta(T_{ic_i}) = \begin{cases} \beta_i h \prod\limits_{k\in\mathfrak{K}\setminus\{i\}} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}, & i \in \mathfrak{K}, \\ 0, & i \notin \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Положим $\beta_i = 0$ для всех $i \notin \mathfrak{K}$. Покажем, что сумма всех β_i равна 0. Заметим, что

$$\delta(g) = \sum_{i\in\mathfrak{K}} \delta(T_{ic_i}) \frac{\partial T_i^{l_i}}{\partial T_{ic_i}} = \sum_{i\in\mathfrak{K}} \left(\beta_i h \prod_{k\in\mathfrak{K}\setminus\{i\}} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}} \right) \frac{\partial T_i^{l_i}}{\partial T_{ic_i}} = h \left(\sum_{i\in\mathfrak{K}} \beta_i \right) \prod_{k\in\mathfrak{K}} \frac{\partial T_k^{l_k}}{\partial T_{kc_k}}$$

должно делиться на g в алгебре многочленов $\mathbb{K}[T_{ij}]$, так как δ является дифференцированием алгебры $R(g)$. Но трином g и моном $\prod\limits_{k\in\mathfrak{K}} \left(\partial T_k^{l_k}/\partial T_{kc_k}\right)$ взаимно просты в факториальной алгебре $\mathbb{K}[T_{ij}]$. Значит, сумма $\sum\limits_{i\in\mathfrak{K}} \beta_i$ делится на g, то есть $\sum\limits_{i\in\mathfrak{K}} \beta_i = \sum\limits_{i} \beta_i = 0$.

Теперь, произвольно дополнив $c_i, i \in \mathfrak{K}$, до последовательности $C = (c_0, c_1, c_2)$, получим, что $\delta = h\delta_{C,\beta}$, причём $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$ по лемме 4(б). □

Следующее утверждение является основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть $R(g)$ — триномиальная алгебра. Предположим, что не более чем в одном из трёх мономов g есть переменная степени 1, то есть $(l_{i_1j_1} = l_{i_2j_2} = 1) \Rightarrow (i_1 = i_2)$. Тогда любое $\deg$-однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$ элементарно типа II.*

Доказательство. Обозначим произвольное $\deg$-однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$ через δ. По лемме 6 в каждом мономе $T_i^{l_i}$ не больше одной переменной T_{ic_i}, такой что $\delta(T_{ic_i}) \neq 0$. Обозначим множество индексов i, допускающих такое c_i, через $\mathfrak{K}$.

1) Зафиксируем любое $i \in \mathfrak{K}$, для которого $l_{ic_i} > 1$. Докажем, что $\delta(T_{kc_k})$ делится на T_{ic_i} при всех $k \in \mathfrak{K} \setminus \{i\}$.

Обозначим через $\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}$ циклическую группу порядка m. Рассмотрим следующую $\mathbb{Z}_{l_{ic_i}}$-градуировку алгебры $R(g)$:

T_{ks}	T_{01}	T_{02}	$\ldots$	T_{ic_i}	$\ldots$	T_{2n_2}
$\widehat{\deg}\, T_{ks}$	$[0]_{l_{ic_i}}$	$[0]_{l_{ic_i}}$	$\ldots$	$[1]_{l_{ic_i}}$	$\ldots$	$[0]_{l_{ic_i}}$

Корректность следует из того, что $l_{ic_i}[1]_{l_{ic_i}} = [0]_{l_{ic_i}}$, то есть все мономы в g имеют одинаковую степень $[0]_{l_{ic_i}}$. По лемме 1 дифференцирование δ является $\widehat{\deg}$-однородным.

Если $\widehat{\deg}\,\delta(T_{ic_i}) \neq [0]_{l_{ic_i}}$, то $\delta(T_{ic_i})$ делится на T_{ic_i}. Действительно, степень каждого монома в $\delta(T_{ic_i})$ должна быть тогда не равна $[0]_{l_{ic_i}}$, а это может быть только тогда, когда в каждом мономе есть T_{ic_i} — единственная переменная с ненулевой степенью.

Но если $\delta(T_{ic_i})$ делится на T_{ic_i}, то мы получаем противоречие с леммой 4(а), так как $\delta(T_{ic_i}) \neq 0$. Значит, $\widehat{\deg}\,\delta(T_{ic_i}) = [0]_{l_{ic_i}}$. Отсюда $\widehat{\deg}\,\delta = [l_{ic_i} - 1]_{l_{ic_i}} \neq [0]_{l_{ic_i}}$. Значит, $\widehat{\deg}\,\delta(T_{ks}) \neq [0]_{l_{ic_i}}$ для всех $(k,s) \neq (i,c_i)$. В частности, $\widehat{\deg}\,\delta(T_{kc_k}) \neq [0]_{l_{ic_i}}$ при $k \in \mathfrak{K}\backslash\{i\}$, то есть $\delta(T_{kc_k})$ делится на T_{ic_i}.

2) Докажем, что $|\mathfrak{K}| \leqslant 2$. Предположим противное. По условию теоремы число таких i, что $l_{ic_i} = 1$, не превосходит 1, поэтому $|\{i \in \mathfrak{K} \mid l_{ic_i} > 1\}| \geqslant 2$. Возьмём любые два различных индекса i и k из этого множества. По пункту 1) $\delta(T_{kc_k})$ делится на T_{ic_i}, а $\delta(T_{ic_i})$ делится на T_{kc_k}, что противоречит лемме 4(в).

3) Итак, $|\mathfrak{K}| \leqslant 2$. Тогда есть не больше двух $\delta(T_i^{l_i})$, не равных 0. Кроме того, $\delta(T_0^{l_0}) + \delta(T_1^{l_1}) + \delta(T_2^{l_2}) = \delta(g) = 0$ в $R(g)$. Значит, $\delta(T_i^{l_i})$, $i = 0,1,2$, лежат в одном подпространстве размерности 1. По предложению 1 дифференцирование δ элементарно. Так как при этом есть не больше двух $\delta(T_i^{l_i})$, не равных 0, то оно элементарно типа II. $\square$

Если трином, задающий гиперповерхность, имеет линейный член (то есть для некоторого $i = 0,1,2$ выполнено $n_i l_{i1} = 1$), то триномиальная гиперповерхность изоморфна аффинному пространству $\mathbb{K}^{n-1}$. Далее будем считать, что $n_i l_{i1} > 1$ для всех $i = 0,1,2$. Согласно [10, Theorem 1.1(ii)], в этом случае верен следующий результат.

Предложение 2. *Следующие условия эквивалентны:*
(а) алгебра $R(g)$ факториальна;
(б) группа K (см. конструкцию 1) свободна;
(в) числа $d_i :=$ НОД$(l_{i1},\ldots,l_{in_i})$ попарно взаимно просты.

С помощью этого утверждения докажем ряд следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Если алгебра $R(g)$ нефакториальна, то все её* deg*-однородные локально нильпотентные дифференцирования элементарны типа II.*

Доказательство. Достаточно показать, что все алгебры, не удовлетворяющие условию теоремы 1, являются факториальными. Не удовлетворяют теореме 1 триномы с хотя бы двумя мономами, содержащими степень 1. В этом случае среди чисел d_0, d_1, d_2 есть две единицы, поэтому d_0, d_1, d_2 попарно взаимно просты, откуда по предложению 2 алгебра $R(g)$ факториальна. $\square$

Следствие 2. *Алгебра $R(g)$ допускает ненулевое* deg*-однородное локально нильпотентное дифференцирование тогда и только тогда, когда $l_{ij} = 1$ для некоторых $i = 0,1,2,\ j = 1,\ldots,n_i$.*

Доказательство. Если условие $l_{ij} = 1$ выполнено для некоторой пары (i,j), то существует дифференцирование вида $\delta_{C,\beta}$ (см. конструкцию 2, случай (2)). Оно deg-однородно и локально нильпотентно.

В обратную сторону докажем от противного. Пусть $l_{ij} \geqslant 2$ для всех $i = 0, 1, 2$, $j = 1, \dots, n_i$. Тогда применима теорема 1, которая утверждает, что все deg-однородные локально нильпотентные дифференцирования $R(g)$ имеют вид $h\delta_{C,\beta}$ (где $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$). Но из конструкции 2 следует, что дифференцирований вида $\delta_{C,\beta}$ при условии $l_{ij} \geqslant 2$ для всех $i = 0, 1, 2$, $j = 1, \dots, n_i$, не существует. Противоречие. □

Говорят, что аффинное многообразие *жёсткое*, если его алгебра регулярных функций не допускает ненулевых локально нильпотентных дифференцирований. Геометрически это означает, что многообразие не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$-действий. Группа автоморфизмов жёстких триномиальных гиперповерхностей описана в [3, Theorem 3].

Следствие 2 позволяет получить новое доказательство результата, доказанного ранее в [2, Theorem 1]:

Следствие 3. *Триномиальная факториальная гиперповерхность $X(g)$ является жёсткой тогда и только тогда, когда $l_{ij} \geqslant 2$ для всех $i = 0, 1, 2$, $j = 1, \dots, n_i$.*

Доказательство. Если условие $l_{ij} \geqslant 2$ не выполнено для некоторой пары (i, j), то существует дифференцирование вида $\delta_{C,\beta}$ (см. конструкцию 2, случай (2)). Отсюда следует необходимость.

Покажем достаточность. Согласно следствию 2, ненулевых deg-однородных локально нильпотентных дифференцирований алгебры $R(g)$ не существует. Поскольку триномиальная гиперповерхность факториальна, то по предложению 2 группа K свободна. Тогда по лемме 5 отсутствие deg-однородных ненулевых локально нильпотентных дифференцирований влечёт отсутствие любых ненулевых локально нильпотентных дифференцирований алгебры $R(g)$, что и означает жёсткость. □

Пример 7. Рассмотрим $g = T_{01}T_{02}^3 + T_{11}^3 + T_{21}^2$ (см. примеры 1 и 4). Этот трином удовлетворяет условию теоремы 1, поэтому все deg-однородные локально нильпотентные дифференцирования δ алгебры $R(g)$ делятся на два вида:

(а) $\delta = 2h\beta_0 T_{21}\dfrac{\partial}{\partial T_{01}} - h\beta_0 T_{02}^3\dfrac{\partial}{\partial T_{21}}$, где $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$ для $C = (1, 1, 1)$, $\beta = (\beta_0, 0, -\beta_0)$;

(б) $\delta = 3h\beta_0 T_{11}^2\dfrac{\partial}{\partial T_{01}} - h\beta_0 T_{02}^3\dfrac{\partial}{\partial T_{11}}$, где $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$ для $C = (1, 1, 1)$, $\beta = (\beta_0, -\beta_0, 0)$.

Не все они примитивны, то есть $\deg \delta = \deg h\delta_{C,\beta}$ может лежать внутри весового конуса ω для некоторых $h \in \operatorname{Ker} \delta_{C,\beta}$. Приведём соответствующий пример. Весовой моноид порождается векторами

$$\deg T_{01} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \deg T_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

поэтому весовой конус ω является углом $\{-u \leqslant v \leqslant u\}$, где $\deg = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (см. рис. 1).

В случае (а) имеем $\deg \delta_{C,\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Так как для любого $k \in \mathbb{N}$ многочлен $h = T_{11}^k$ лежит в ядре $\delta_{C,\beta}$, то $T_{11}^k\delta_{C,\beta}$ будет однородным локально нильпотентным дифференцированием. Его степень равна $k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k \end{pmatrix}$ и лежит в весовом конусе при $k \geqslant 2$.

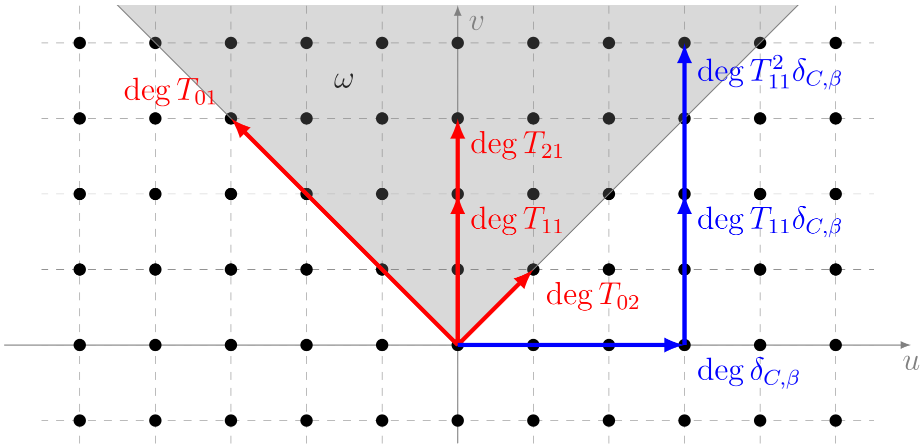

Рис. 1. Весовой конус в примере 7

Пример 8. Пусть $g = T_{01}^2 + T_{11}^2 + T_{21}^2$ (см. примеры 3 и 6). Согласно следствию 2, deg-однородных локально нильпотентных дифференцирований алгебры $R(g)$ не существует.

Тем не менее, алгебра $R(g)$ допускает локально нильпотентные дифференцирования. Например, можно рассмотреть такое дифференцирование δ:

$$\delta(T_{01}) = iT_{21}, \quad \delta(T_{11}) = -T_{21}, \quad \delta(T_{21}) = -iT_{01} + T_{11},$$

где $i \in \mathbb{K}$, $i^2 = -1$. Локальная нильпотентность этого дифференцирования следует из равенств $\delta(-iT_{01} + T_{11}) = 0$, $\delta^2(T_{21}) = 0$, $\delta^3(T_{01}) = 0$.

5. Открытые вопросы

В этом разделе мы обсудим несколько открытых вопросов, связанных с локально нильпотентными дифференцированиями триномиальных алгебр.

Гипотеза. Все deg-однородные локально нильпотентные дифференцирования триномиальных алгебр элементарны.

В теореме 1 мы смогли применить предложение 1 и, как следствие, доказать гипотезу для триномиальных алгебр $R(g)$, соответствующих триномам g с не более чем одним мономом, в котором есть переменные степени 1. Хочется доказать, что предложение 1 можно применить и в случае, когда в триноме g есть хотя бы два монома с переменными степени 1. В последнем случае по предложению 2 алгебра $R(g)$ факториальна, группа K свободна и квазитор, действие которого соответствует градуировке deg, является тором размерности $n-2$. В диссертации [1] описаны все deg-однородные локально нильпотентные дифференцирования нескольких триномиальных гиперповерхностей, не удовлетворяющих условию теоремы 1, в частности, доказаны следующие утверждения (теоремы 3.22 и 3.24).

Пример 9 (ср. с примером 5)**.** Всякое deg-однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$ для $g = T_{01}T_{02} + T_{11}T_{12} + T_{21}^2$ имеет вид

$$\lambda T_{0i}^k T_{1j}^l T_{21}^p \left(T_{1j}\frac{\partial}{\partial T_{1\bar{i}}} - T_{0i}\frac{\partial}{\partial T_{1\bar{j}}} \right) \quad \text{или}$$

$$T_{0i}^k T_{1j}^l (\beta T_{01}T_{02} - \alpha T_{11}T_{12})^p \left(\alpha T_{1j}T_{21}\frac{\partial}{\partial T_{0\bar{i}}} + \beta T_{0i}T_{21}\frac{\partial}{\partial T_{1\bar{j}}} - \frac{\alpha+\beta}{2} T_{0i}T_{1j}\frac{\partial}{\partial T_{21}} \right),$$

где $k,l,p\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i,\bar{i}\}=\{j,\bar{j}\}=\{1,2\}$ и $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{K}$, $\alpha+\beta\neq 0$.

Пример 10. Всякое deg-однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $R(g)$ для $g=T_{01}T_{02}+T_{11}T_{12}+T_{21}T_{22}$ имеет вид

$$T_{0i_0}^{k_0}T_{1i_1}^{k_1}T_{2i_2}^{k_2}(\gamma T_{11}T_{12}-\beta T_{21}T_{22})^p\left(\alpha T_{1i_1}T_{2i_2}\frac{\partial}{\partial T_{0\bar{i}_0}}+\beta T_{0i_0}T_{2i_2}\frac{\partial}{\partial T_{1\bar{i}_1}}+\gamma T_{0i_0}T_{1i_1}\frac{\partial}{\partial T_{2\bar{i}_2}}\right),$$

где $k_0,k_1,k_2,p\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\{i_0,\bar{i}_0\}=\{i_1,\bar{i}_1\}=\{i_2,\bar{i}_2\}=\{1,2\}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}$, $\alpha+\beta+\gamma=0$ и никакие два из α,β,γ не обращаются одновременно в ноль.

Можно проверить, что для всех дифференцирований δ, указанных в этих примерах, образы мономов $\delta(T_0^{l_0}),\delta(T_1^{l_1}),\delta(T_2^{l_2})$ пропорциональны, то есть применимо предложение 1 и гипотеза верна.

Кроме «самой тонкой» deg-градуировки алгебры $R(g)$ группой K можно рассматривать более грубую градуировку алгебры $R(g)$ её свободной частью K_0. Локально нильпотентных дифференцирований, однородных относительно градуировки группой K_0, больше. По предложению 2 deg-градуировка группой K совпадает с градуировкой группой K_0 тогда и только тогда, когда алгебра $R(g)$ факториальна.

Пример 11. Пусть $g=T_{01}^2+T_{11}^2+T_{21}^2$ (см. примеры 3, 6 и 8). Как показано в примере 3, $K=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2$. Значит, $K_0=\mathbb{Z}$, причём степень относительно K_0 есть степень многочлена по сумме степеней переменных. Значит, дифференцирование δ из примера 8 однородно относительно градуировки группой K_0. При этом, согласно примеру 8, ненулевых локально нильпотентных дифференцирований, однородных относительно градуировки группой K, не существует.

Если K_0-однородных локально нильпотентных дифференцирований у $R(g)$ нет, то по лемме 5 нет никаких локально нильпотентных дифференцирований, то есть многообразие $X(g)$ жёсткое.

Вопрос 1. Описать локально нильпотентные дифференцирования триномиальной алгебры $R(g)$, однородные относительно K_0-градуировки.

В то время как градуировке группой K геометрически соответствует действие квазитора на триномиальной гиперповерхности, градуировке группой K_0 соответствует действие его связной компоненты, то есть максимального тора. Иначе говоря, вопрос 1 соответствует вопросу об описании $\mathbb{G}_a$-действий, нормализуемых максимальным тором, то есть описанию корневых подгрупп в группе автоморфизмов алгебры $R(g)$.

Вопрос 2. Описать все (не обязательно однородные) локально нильпотентные дифференцирования триномиальной алгебры $R(g)$.

Список литературы

[1] П.Ю. Котенкова. *Действия торов и локально нильпотентные дифференцирования.* Диссертация на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014

[2] Ivan Arzhantsev. On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces. Int. J. Algebra Comput. 26 (2016), no. 5, 1061–1070

[3] Ivan Arzhantsev and Sergey Gaifullin. The automorphism group of a rigid affine variety. Math. Nachrichten 290 (2017), no. 5-6, 662–671

[4] Ivan Arzhantsev, Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Alvaro Liendo. The automorphism group of a variety with torus action of complexity one. Moscow Math. J. 14 (2014), no. 3, 429–471

[5] Ivan Arzhantsev and Alvaro Liendo. Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties. Michigan Math. J. 61 (2012), no. 4, 731–762

[6] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. École Norm. Sup. 3 (1970), 507–588

[7] Gene Freudenburg. *Algebraic theory of locally nilpotent derivations.* Encyclopaedia Math. Sci., vol. 136, Springer, Berlin, 2006

[8] Sergey Gaifullin. Automorphisms of Danielewski varieties. arXiv:1709.09237, 22 pages

[9] Jürgen Hausen and Milena Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachrichten 290 (2017), no. 5-6, 815–826

[10] Jürgen Hausen and Elaine Herppich. Factorially graded rings of complexity one. In: Torsors, étale homotopy and applications to rational points. London Math. Soc. Lecture Note Series 405, 414–428, 2013

[11] Jürgen Hausen, Elaine Herppich, and Hendrik Süß. Multigraded factorial rings and Fano varieties with torus action. Documenta Math. 16 (2011), 71–109

[12] Jürgen Hausen and Hendrik Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. Advances Math. 225 (2010), no. 2, 977–1012

[13] Alvaro Liendo. Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. Transform. Groups 15 (2010), no. 2, 398–425

[14] Alvaro Liendo. $\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties. J. Algebra 324 (2010), no. 12, 3653–3665

[15] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry: an introduction to the theory of toric varieties.* A Series of Modern Surveys in Math. 15, Springer, Berlin, 1988

[16] Bernd Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes.* University Lecture Series, vol. 8, AMS, Providence, RI, 1996

Россия, 119991 Москва, Ленинские горы 1, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры

Email address: yuliazaitseva@gmail.com