Работа на конкурс Мёбиуса

Петрова Юлия Петровна

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

2018

Оглавление

Введение

В работе изучается асимптотическое поведение малых уклонений для конечномерных возмущений гауссовских процессов.

Теория малых уклонений для гауссовских процессов в различных нормах активно изучается в последние десятилетия (см., например, обзоры [40; 42; 75]; актуальную литературу по теме можно найти в [43]) и имеет широкий спектр применений, таких как оценка точности квантования случайных процессов [63, §13], вычисление метрической энтропии функциональных множеств [38; 41], закон повторного логарифма в форме Чжуна [45], нахождение скорости ухода бесконечномерного винеровского процесса [27]. Также известно, что малые уклонения тесно связаны с функциональным анализом данных [28] и непараметрическим байесовским оцениванием [14; 54][1].

Задача малых уклонений случайного процесса X в норме $\|\cdot\|$ состоит в поиске асимптотики величины $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Большинство результатов относятся к гауссовским процессам. Согласно [63], для гауссовского процесса «типичным» является ответ вида (для некоторых констант $A,B,D > 0$, $C \in \mathbb{R}$)

$$\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\} \sim D\,\varepsilon^C \exp(-B\varepsilon^{-A}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1}$$

Асимптотику величины $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$ называют точной асимптотикой малых уклонений. Отметим, что точную асимптотику удается найти только в исключительных случаях, поэтому часто рассматривают так называемую логарифмическую асимптотику $\ln(\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\})$. Но даже на логарифмическом уровне к задаче нет общего подхода, что делает задачу актуальной и по сей день.

По проблеме малых уклонений за последние 5 лет имеется более 70 публикаций (согласно библиографии [43]), что свидетельствует об интересе математиков к рассматриваемой тематике. Наиболее продвинутые результаты относятся к случаю L_2-нормы. Благодаря гильбертовой структуре задачу удается свести к спектральным асимптотикам интегральных операторов, что дает дополнительные возможности в поиске асимптотик малых уклонений. Имеющиеся подходы в других нормах описаны, например, в обзоре [75]. Среди недавних

---
[1] Здесь даны лишь некоторые ссылки на применения малых уклонений. Более подробные списки литературы можно найти в приведенных выше обзорах.

работ по L_p-норме, $1 \leqslant p < \infty$, отметим [76; 77], в супремум-норме, например, [12; 13], в гельдеровской норме, например, [44].

Конечномерные возмущения гауссовских процессов часто возникают в теории вероятностей и статистике. Например, броуновский мост является одномерным возмущением винеровского процесса. Другой пример — процессы, возникающие как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат, Колмогорова–Смирнова и их вариантов для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке, являются конечномерными возмущениями броуновского моста. Актуальным является исследование задачи малых уклонений для таких процессов и разработка общего подхода.

В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом: при каких условиях, зная асимптотику малых уклонений для невозмущенного процесса, можно найти асимптотику малых уклонений для его конечномерного возмущения?

Степень разработанности темы исследования. Задача малых уклонений в L_2-норме в силу разложения Кархунена–Лоэва (см., например, [63, §12]) может быть сведена к поиску асимптотики $\mathbb{P}\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\}$, где μ_k — собственные числа ковариационного оператора, ξ_k — независимые одинаково распределенные стандартные нормальные случайные величины. Неявное решение задачи было получено Г. Н. Сытой в работе [73]. Затем многие авторы, начиная с работ И. А. Ибрагимова [61], В. М. Золотарева [55], Дж. Хоффмана-Йоргенсена [34], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях на μ_k. Существенный вклад внесла работа Т. Дункера, М. А. Лифшица, В. Линде [25], в которой явные выражения для асимптотики малых уклонений получены при достаточно общих условиях на μ_k, в частности, для степенного и экспоненциального поведения μ_k.

Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений удается найти в редких случаях. Полезным инструментом служит принцип сравнения Венбо Ли (см. [30; 39]): если μ_k и $\tilde{\mu}_k$ «асимптотически близки» (произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k/\tilde{\mu}_k$ сходится), то асимптотики вероятностей малых уклонений для соответствующих процессов совпадают с точностью до мультипликативной константы. Тем самым задача сводится к поиску достаточно точной спектральной асимптотики ковариационного оператора.

В работах А. И. Назарова, Я. Ю. Никитина [46; 48] был выделен класс *гриновских* гауссовских процессов, для которых ковариационная функция есть функция Грина обыкновенного дифференциального оператора (ОДО). Это позволяет применить для нахождения асимптотики собственных чисел ковариационного оператора методы спектральной теории ОДО, восходящие к классическим работам Дж. Биркгофа [17; 18] и Я. Д. Тамаркина [52; 53] (дальнейшее развитие этой теории можно найти у А. А. Шкаликова в [79; 80]).

Спектральный подход, развитый в [46; 48], позволил получить в [65; 67—70] точные асимптотики малых уклонений для большого количества конкретных гриновских процессов в L_2-норме с различными весами (см. также [23; 29; 31; 32]). Отметим также важную серию работ П. Чиганского, М. Клепцыной, Д. Марушкевича [20—22], в которых впервые получены точные асимптотики для некоторых негриновских процессов.

Опишем результаты, относящиеся к малым уклонениям для конечномерных возмущений гауссовских процессов. Известно, что при конечномерном возмущении логарифмическая асимптотика не изменяется (в более общих терминах доказано Ф. Гао, В. Ли [33] и А. И. Назаровым [47]). Поэтому изучается вопрос о точной асимптотике.

В работе А. И. Назарова [66] рассматривалась задача о возмущении спектра ковариационного оператора при одномерном возмущении гауссовской функции и получены соответствующие формулы для асимптотики L_2-малых уклонений. Частный случай был рассмотрен ранее П. Деовельсом в [24].

В [66] было показано, что если возмущение не является критическим (см. ниже определение 1 при $m = 1$), то собственные числа μ_k возмущенного оператора «асимптотически близки» к невозмущенным собственным числам μ_k^0 (т.е. $\prod \mu_k/\mu_k^0 < \infty$). Для более узкого класса операторов аналогичный результат был получен А. А. Владимировым и И. А. Шейпаком в [58].

Далее, если возмущение является критическим (см. ниже определение 3 при $m = 1$) и удовлетворяет условию А (см. ниже теорему 2), то собственные числа μ_k возмущенного оператора «асимптотически близки» к сдвинутым собственным числам μ_{k+1}^0 невозмущенного оператора, причем $\prod \mu_k/\mu_{k+1}^0 < \infty$.

Публикации. Результаты данной работы опубликованы в работах [1—4]. Работа [1], совместная с научным руководителем, написана в неразделимом соавторстве, за исключением построения асимптотического разложения интегралов с медленно меняющейся амплитудой, проведенного Петровой Ю.П. В настоящей работе результаты, полученные в совместной работе [1], содержатся в §2.4, §3.5.

Структура работы.

В главе 1 рассматривается задача о возмущении спектра ковариационного оператора при конечномерном возмущении гауссовской функции. Для одномерных возмущений задача была рассмотрена в [66].

Рассмотрим случайную гауссовскую функцию $X_0(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^d$, с нулевым средним и функцией ковариации $G_0(x,y) := \mathbb{E}X_0(x)X_0(y)$, имеющую конечную L_2-норму: $\|X\|^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} X^2(x)\,dx$. Соответствующий ковариационный оператор в $L_2(\mathcal{O})$ будем обозначать $\mathbb{G}_0$. В качестве параметров возмущения рассмотрим вектор-функцию $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x))^T$ с локально суммируемыми линейно независимыми компонентами при $x \in \bar{\mathcal{O}}$ и вещественнозначную матрицу A размера $m \times m$. Пусть $\vec{\psi} = \mathbb{G}_0\vec{\varphi}$ и определена матрица $Q = (Q_{ij})$, $i,j = 1,\ldots,m$:

$$Q_{ij} = \int\limits_{\mathcal{O}} \psi_i(t)\varphi_j(t)\,dt < +\infty, \quad \text{что равносильно} \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2}).$$

Тогда определено семейство гауссовских функций

$$X_A(x) := X_0(x) - \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)\,dy. \tag{2}$$

Лемма 1. *Функция $X_A(x)$ имеет ковариацию*

$$G_A(x,y) = G_0(x,y) + \vec{\psi}(x)^T \cdot D \cdot \vec{\psi}(y),$$

где матрица D имеет вид:

$$D = -A - A^T + AQA^T.$$

Определение 1. *Будем говорить, что X_A — некритическое возмущение функции X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\det(E_m - A^TQ) \neq 0$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$, $j = 1,\ldots,m$, *линейно независимы.*

Определение 2. *Будем говорить, что X_A — частично критическое возмущение порядка s функции X_0, $0 < s < m$, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\operatorname{rank}(E_m - A^T Q) = m - s$;

2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$, $j = 1,\ldots,m$, *образуют линейное пространство размерности* $m - s$.

Определение 3. *Будем говорить, что X_A — критическое возмущение функции X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $A = Q^{-1}$;

2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt = 0$, $j = 1,\ldots,m$.

Основные результаты главы 1 следующие:

Теорема 1. (Случай некритического возмущения)

Пусть X_A — некритическое возмущение X_0. При $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbb{P}\left(\|X_A\| < \varepsilon\right) \sim \frac{\mathbb{P}\left(\|X_0\| < \varepsilon\right)}{\det\left(E_m - QA\right)}.$$

Теорема 2. (Случай критического возмущения)

Пусть X_A — критическое возмущение X_0. Если выполнено

$$\forall j = 1,\ldots,m: \quad \varphi_j \in L_2(\mathcal{O}), \text{ что равносильно } \psi_j \in \operatorname{Im}(\mathbb{G}_0), \qquad (\textbf{\textit{условие A}})$$

то асимптотика вероятностей малых уклонений примет вид при $r \to 0$

$$\mathbb{P}\bigl\{\|X_A\| < \sqrt{r}\bigr\} \sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^r \int\limits_0^{r_1} \ldots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m}\mathbb{P}\bigl\{\|X_0\| < \sqrt{r_m}\bigr\} \frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r - r_1)(r_1 - r_2)\ldots(r_{m-1} - r_m)}}.$$

В параграфе 1.4 рассматривается класс процессов вида (2), естественным образом возникающих в статистике, введенных Дж. Дурбиным в [26]. Эти процессы возникают как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке. Случай проверки на нормальность был рассмотрен ранее в работе М. Каца, Дж. Кифера и Дж. Вольфовица [37], где была доказана сходимость эмпирических процессов с оцененными параметрами к предельным в смысле конечномерных распределений. Аналогичные результаты были независимо получены И. И. Гихманом [59; 60].

Опишем процессы Дурбина более подробно.

Пусть $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ есть выборка с генеральной функцией распределения $F(x,\theta)$, $f(x,\theta)$ — плотность распределения, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_s)$, $s \in \mathbb{N}$, — вектор параметров. Рассмотрим эмпирическую функцию распределения при фиксированных значениях параметров $\theta^0 = (\theta_1^0,\ldots,\theta_s^0)$:

$$F_n^0(t) = \frac{\#\{x_i : F(x_i,\theta^0) \leqslant t, i = 1,\ldots,n\}}{n}, \quad t \in [0,1].$$

Известно (см. [56, глава 3]), что процесс $n^{1/2}\big[F_n^0(t) - t\big]$ слабо сходится к броуновскому мосту $B(t)$ в пространстве $D[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих разрывы только первого рода.

Допустим, что часть параметров распределения неизвестна (не умаляя общности, можно считать, что это первые m параметров). Оценим неизвестные параметры по выборке (например, методом максимального правдоподобия) и обозначим новый вектор параметров $\hat\theta := (\hat\theta_1,\ldots,\hat\theta_m,\theta_{m+1}^0,\ldots,\theta_s^0)$. Тогда эмпирическая функция распределения примет вид:

$$\hat F_n(t) = \frac{\#\{x_i \colon F(x_i,\hat\theta) \leqslant t, i = 1,\ldots,n\}}{n}, \quad t \in [0,1].$$

В статье [26] показано, что процесс $n^{1/2}\big[\hat F_n(t) - t\big]$ сходится слабо в $D[0,1]$ к конечномерному возмущению броуновского моста, а именно, к гауссовскому процессу с нулевым средним и функцией ковариации:

$$G(s,t) = G_B(s,t) - \vec\psi^{\,T}(s)\, S^{-1}\, \vec\psi(t), \qquad s,t \in [0,1],$$

где $G_B(s,t) = \min(s,t) - st$ — функция ковариации броуновского моста $B(t)$, S — матрица информации Фишера с элементами S_{ij}, $i,j = 1,\ldots,m$:

$$S_{ij} = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln(f(x,\theta))\right)\Big|_{\theta=\theta_0} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln(f(x,\theta))\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln(f(x,\theta))\right)\Big|_{\theta=\theta_0},$$

$\theta^0 = (\theta_1^0,\ldots,\theta_s^0)$ — фиксированный вектор параметров, x и t связаны равенством $t = F(x,\theta)$. Вектор функций $\vec\psi = \big(\psi_1(t),\ldots,\psi_m(t)\big)$ задается соотношениями:

$$\psi_j(t) = \frac{\partial F(x,\theta)}{\partial\theta_j}\Big|_{\theta=\theta^0,\, x=F^{-1}(t)}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

В параграфе 1.4 доказывается следующая теорема:

Теорема 3. *Процессы Дурбина с m оцененными параметрами являются критическими.*

В <u>главе 2</u> получены полные асимптотические разложения быстро осциллирующих интегралов с медленно меняющейся амплитудой. Напомним определение медленно меняющейся функции (см. [71, глава 1, с. 1]).

Определение 4. *Функция $F(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если она измерима и знакопостоянна на полуоси $[A,\infty)$, $A > 0$, и для произвольного $\lambda > 0$ выполнено:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(\lambda x)}{F(x)} = 1.$$

Функция $F(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $F(\frac{1}{x})$ медленно меняется на бесконечности.

Пусть функции $F(t)$ и $H(t)$ заданы на полуинтервале $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, и функции $F_0(t) = F(t)$, $F_{n+1}(t) = tF_n'(t)$ и $H_0(t) = H(t)$, $H_{n+1}(t) = tH_n'(t)$, $n \geqslant 0$, являются медленно меняющимися в нуле.

Теорема 4. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{cos}, \quad |R_N^{cos}| \leqslant C\cdot\frac{\left|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})\right|}{\omega},$$

где для коэффициентов c_k дано явное выражение и $C = C(F,N)$.

Теорема 5. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\sin(\omega t)\,dt = \frac{F(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \sum_{k=1}^{N} d_k \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{sin}, \quad |R_N^{sin}| \leqslant C\cdot\frac{|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})|}{\omega},$$

где для коэффициентов d_k дано явное выражение и $C = C(F,N)$.

Теорема 6. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{I}(\omega) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)H(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)H(t)\,dt + \sum_{n=2}^{N}\sum_{\substack{k+m=n\\k,m\geqslant 1}} a_{k,m}\frac{F_k(\frac{1}{\omega})H_m(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + R_N^{sc},$$

где для коэффициентов $a_{k,m}$ дано явное выражение, и справедлива оценка:

$$|R_N^{sc}| \leqslant C(F,H,N) \sum_{\substack{i+j=N+1\\ i,j\geqslant 1}} \frac{|F_i(\frac{1}{\omega})H_j(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}.$$

Пусть $F(x) = \Phi^{-1}(x)$, $x \in [0,1]$, где

$$x = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\Bigl(-\frac{t^2}{2}\Bigr)dt$$

— функция стандартного нормального распределения. Построим последовательность функций: $F_{N+1}(x) := xF_N'(x), \quad N \geqslant 0$.

В параграфе 2.2 доказана следующая теорема:

Теорема 7. *$F_N(x)$, $N \geqslant 0$, — медленно меняющиеся функции в нуле.*

В параграфе 2.3 доказывается, что обратная функция к функции гамма-распределения является медленно меняющейся при $t \to 1$, а также выводятся асимптотические формулы, связанные с функцией гамма-распределения.

В параграфе 2.4 получена формула для асимптотики малых уклонений точностью до константы при специальном асимптотическом поведении собственных чисел ковариационного оператора.

Теорема 8. *Рассмотрим форму $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2$, где*

$$\Lambda_k = (\vartheta(k + \delta + F(k)))^{-d},$$

а $\vartheta > 0$, $\delta > -1$ и $d > 1$ — некоторые константы, а $F(t)$, $t \in [1,\infty)$, — медленно меняющаяся, монотонно стремящаяся к нулю функция при $t \to \infty$. Пусть

$$F_{-1}(x) := \int\limits_1^x \frac{F(t)}{t}\,dt, \text{ и } F_{-1}(x) \text{ стремится к бесконечности при } x \to \infty.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\Bigl\{\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Bigr\} \sim$$

$$\sim C \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \exp\Bigl(-\frac{d-1}{2}\Bigl(\frac{\pi}{d\vartheta \sin(\frac{\pi}{d})}\Bigr)^{\frac{d}{d-1}} \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{d-1}} + \frac{d}{2} \cdot F_{-1}(\varepsilon^{-\frac{2}{d-1}})\Bigr),$$

где

$$\gamma = \frac{2-d-2d\delta}{2(d-1)}, \quad C = C(\vartheta,\delta,d,F) = \mathrm{const}.$$

В главе 3 считаются точные асимптотики малых уклонений для предельных процессов Дурбина, возникающих при проверке выборки на принадлежность к следующим распределениям с параметрами $\theta = (\theta_1,\theta_2)$. Обозначим α — параметр сдвига, $\beta > 0$ — параметр масштаба, $\varkappa > 0$ — параметр формы.

А. распределение Лапласа с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LAP}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\alpha}{\beta}), & x \leqslant \alpha; \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta}), & x > \alpha. \end{cases}$$

Б. логистическое распределение с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LOG}(x,\theta) = \big(1 + \exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\big)^{-1}.$$

В. нормальное распределение с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{NOR}(x,\theta) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\beta^2}\right) dt.$$

Г. распределение Гумбеля с параметрами $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{GUM}(x,\theta) = \exp\big(-\exp\big(-\frac{x-\alpha}{\beta}\big)\big).$$

Д. гамма-распределение с параметрами $\theta = (\beta,\varkappa)$:

$$F^{GAM}(x,\theta) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \frac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)}\,dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Каждому распределению соответствует три предельных случайных процесса:

1) Первый параметр известен, а второй оценивается по выборке.

2) Второй параметр известен, а первый оценивается по выборке.

3) Оба параметра оцениваются по выборке.

В качестве предельных процессов возникают гауссовские процессы $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, соответственно, с нулевыми средними и функциями ковариации $G_i(s,t)$:

1) $G_1(s,t) = G_0(s,t) - p_1(s)p_1(t)$,

2) $G_2(s,t) = G_0(s,t) - p_2(s)p_2(t)$,

3) $G_3(s,t) = G_0(s,t) - \tilde{p}_1(s)\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_2(s)\tilde{p}_2(t)$, где $G_0(s,t) = \min(s,t) - st$ — функция ковариации броуновского моста, а $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\tilde{p}_1(t)$, $\tilde{p}_2(t)$ выписываются явно.

Замечание 1. *По теореме 3 все рассматриваемые процессы являются критическими возмущениями броуновского моста. Однако только в случае процесса $X^{(1)}$ для логистического распределения выполнено условие A и потому применима теорема 2.*

Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов, не подходящих под общие теоремы, считается индивидуально с использованием асимптотических разложений, полученных в главе 2.

Заметим, что если распределение имеет экспоненциальные хвосты на бесконечности, то функция, обратная к функции распределения, будет медленно меняющейся на концах промежутка $[0,1]$. Поэтому в этом случае уравнение на собственные числа будет содержать интегралы с медленно меняющейся амплитудой. Это обуславливает выбор распределений А–Д.

В параграфе 3.2 выписывается общий вид уравнения на собственные числа ковариационного оператора при одномерном и двумерном возмущениях броуновского моста в терминах осцилляционных интегралов.

В параграфах 3.3–3.7 выводятся теоремы о спектральных асимптотиках ковариационных операторов для процессов $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, в случаях распределений А–Д, а также соответствующие асимптотики малых уклонений.

Распределение Лапласа

Теорема 9. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на распределение Лапласа, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

1) $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$; **3)** $\tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$.

Теорема 10. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на распределение Лапласа* ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Логистическое распределение

Теорема 11. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на логистическое распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$; **2)** $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$;

3) $\tilde{\mu}_{2k-1}^{(3)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(3)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$.

Теорема 12. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на логистическое распределение* ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{15(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Нормальное распределение

Теорема 13. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на нормальное распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

1) $\tilde{\mu}_{2k}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}, \quad \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = \left(2\pi k + \dfrac{\pi}{\ln(k)}\right)^{-2};$

2) $\tilde{\mu}_1^{(2)} = \pi, \quad \tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2};$

3) $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}; \quad \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = \left(2\pi k + \dfrac{\pi}{\ln(k)}\right)^{-2}.$

Теорема 14. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на нормальное распределение* $(\varepsilon \to 0)$:

1) $\mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_1 \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$

2) $\mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\ \varepsilon^{-1} \exp\Big(-\dfrac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$

3) $\mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_2 \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$

Заметим, что константы C_1 и C_2 найти пока не удалось.

Распределение Гумбеля

Теорема 15. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на распределение Гумбеля, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2};$

2) $\tilde{\mu}_k^{(2)} = \big((k+1/2)\,\pi + r_k\big)^{-2},$

$$r_k = (-1)^k \cdot 2\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{\ln(\ln(k))+1}\Big) - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))};$$

3) $\tilde{\mu}_k^{(3)} = \big((k+1)\,\pi + r_k\big)^{-2}, \quad r_k = 2\pi\,\dfrac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)} + \pi\,\dfrac{(-1)^k}{\ln(k)}.$

Теорема 16. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на распределение Гумбеля* ($\varepsilon \to 0$):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_3\cdot\frac{1}{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_4\cdot\exp\big(2\pi\ln^2(\ln(\varepsilon^{-1}))\big)\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).
\end{aligned}$$

Заметим, что константы C_3 и C_4 найти пока не удалось.

Гамма-распределение

Теорема 17. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *возникающим при проверке на гамма-распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$, *где*

$$\mathbf{1)}\ \tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2};\qquad \mathbf{2)}\ \tilde{\mu}_k^{(2)} = \Big((k+1/2)\,\pi + \frac{(-1)^k\cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)}\Big)^{-2};$$

$$\mathbf{3)}\ \tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2},$$

где $\varkappa_0$ *— фиксированный параметр формы.*

Теорема 18. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на гамма-распределение* ($\varepsilon \to 0$):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\,\varkappa_0^{1/2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\,d\,\varkappa_0}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\varkappa_0\sqrt{2(\varkappa_0 d^2-1)}}{\pi^{7/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big),
\end{aligned}$$

где константа d *определена в формуле* (3.19).

В приложение (глава 4) вынесены вспомогательные леммы и их доказательство, а также некоторые вспомогательные утверждения, не принадлежащие автору, со ссылками на первоисточники.

Глава 1. Малые уклонения для конечномерных возмущений гауссовских процессов: общие теоремы

В данной главе дается ответ на следующий вопрос: что в общем случае можно сказать об асимптотике вероятностей малых уклонений при конечномерном возмущении гауссовкой функции? Выделяются два типа возмущений: некритическое и критическое. Если возмущение некритическое, то асимптотика вероятностей малых уклонений сохраняется с точностью до константы. В критическом случае удается доказать формулу, связывающую малые уклонения для возмущенной и исходной функции, только при выполнении условия A. Также приводится важный для статистики пример критических возмущений — предельные процессы Дурбина.

1.1 Конечномерные возмущения и их свойства

Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$; $\bar{\mathcal{O}}$ — замыкание $\mathcal{O}$. Пусть $X_0(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}}$, — случайная гауссовская функция с нулевым средним и функцией ковариации $G_0(x,y) := \mathbb{E}X_0(x)X_0(y)$. Соответствующий ковариационный оператор в $L_2(\mathcal{O})$ обозначим $\mathbb{G}_0$:

$$(\mathbb{G}_0 u)(s) = \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(s,t)u(t)\,dt.$$

Предположим $\|X\|^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} X^2(x)\,dx < \infty$, тогда верны все утверждения параграфа 4.3 из приложения.

Рассмотрим $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_m(x))^T$, где $\varphi_j(x)$ — локально суммируемые функции при $x \in \bar{\mathcal{O}}$, $j = 1\ldots m$. Предположим, что вектор-функция

$$\vec{\psi}(x) = (\psi_1(x),\ldots,\psi_m(x))^T = \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(x,y)\vec{\varphi}(y)\,dy$$

определена п.в. в $\mathcal{O}$, $\psi_j \not\equiv 0$, $j = 1,\ldots,m$, и определена матрица $Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^m$

$$Q_{ij} = \int\limits_{\mathcal{O}} \psi_i(x)\varphi_j(x)\,dx < \infty, \quad \text{что равносильно} \quad \psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2}). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1. *Не умаляя общности, можно считать, что функции* $\varphi_j(x)$, $j = 1 \ldots m$, *линейно независимы.*

Замечание 1.2. *Формула* (1.1) *задает скалярное произведение на двойственном пространстве к* $\mathrm{Im}(\mathbb{G}_0^{1/2})$. *Поэтому матрица* Q *является матрицей Грама, а следовательно, симметрична и невырождена.*

Построим семейство гауссовских функций — аналог формулы (1.3) статьи [66]

$$X_A(x) := X_0(x) - \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)\,dy. \tag{1.2}$$

Здесь A — матрица параметров возмущения ($A_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\ldots,m$). Ясно, что $\mathbb{E}X_A = 0$.

Лемма 1.1. *Функция* $X_A(x)$ *имеет ковариацию*

$$G_A(x,y) = G_0(x,y) + \vec{\psi}(x)^T \cdot D \cdot \vec{\psi}(y), \tag{1.3}$$

где матрица D *имеет вид:*

$$D = -A - A^T + AQA^T.$$

Доказательство. Проверяется непосредственным вычислением. Действительно,

$$G_A(x,y) = \mathbb{E}X_A(x)X_A(y) = \mathbb{E}\left(X_0(x) - \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(s)\vec{\varphi}(s)\,ds\right) \cdot$$
$$\cdot \left(X_0(y) - \vec{\psi}(y)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(t)\vec{\varphi}(t)\,dt\right) =$$
$$= G_0(x,y) - \vec{\psi}(x)^T A \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(s,y)\vec{\varphi}(s)\,ds - \vec{\psi}(y)^T A \int\limits_{\mathcal{O}} G_0(x,t)\vec{\varphi}(t)\,dt +$$
$$+ \vec{\psi}(x)^T \cdot A \cdot \int\limits_{\mathcal{O}}\int\limits_{\mathcal{O}} G_0(s,t)\vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}(t)^T\,dt \cdot A^T \cdot \vec{\psi}(y),$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Следствие 1.1. *Конечномерные распределения функций* $X_A(x)$ *и* $X_{2Q^{-1}-A}(x)$ *совпадают.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\mathbb{E}X_A(x) = \mathbb{E}X_{2Q^{-1}-A}(x)$ (очевидно), и совпадение функций ковариации. А значит, достаточно проверить совпадение матриц D. Учитывая, что матрица Q симметричная, имеем:

$$\begin{aligned} D_{X_{2Q^{-1}-A}} &= -(2Q^{-1}-A)-(2Q^{-1}-A)^T+(2Q^{-1}-A)\cdot Q\cdot(2Q^{-1}-A)^T = \\ &= -2Q^{-1}+A-2Q^{-1}+A^T+4Q^{-1}-2A-2A^T+A\cdot Q\cdot A^T = \\ &= -A-A^T+A\cdot Q\cdot A^T = D_{X_A}. \end{aligned}$$

■

Следствие 1.2. *Пусть* $A = Q^{-1}$. *Тогда:*

1. *Имеет место тождество п.н.* $(j = 1,\ldots,m)$
$$\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\varphi_j(x)\,dx = 0.$$
2. *Функция* $X_A(x)$ *и случайная величина* $\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(s)\varphi_j(s)\,ds$, $j = 1,\ldots,m$, *независимы.*
3. *Если* $\varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, *то интегральный оператор с ядром* $G_A(x,y)$ *имеет нулевое собственное число кратности* m, *соответствующее собственным функциям* φ_j, $j = 1,\ldots,m$.

Доказательство. Все утверждения следуют из следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{O}} X_A(x)\vec{\varphi}(x)^T\,dx &= \int\limits_{\mathcal{O}}\left(X_0(x)-\vec{\psi}(x)^T\cdot A\cdot\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)\,dy\right)\vec{\varphi}(x)^T\,dx = \\ &= \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(x)\vec{\varphi}(x)^T\,dx - \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(s)\vec{\varphi}(s)^T\,ds\cdot A\int\limits_{\mathcal{O}}\vec{\psi}(t)\vec{\varphi}(t)^T\,dt = \\ &= \int\limits_{\mathcal{O}} X_0(t)\vec{\varphi}(t)^T\,dt\,(E_m - AQ)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_A(x)\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(y)\vec{\varphi}(y)^T\,dy &= \mathbb{E}\left(X_0(t)-\vec{\psi}(x)^T\cdot A\cdot\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(u)\vec{\varphi}(u)\,du\right)\cdot \\ &\cdot\int\limits_{\mathcal{O}} X_0(s)\vec{\varphi}(s)^T\,ds = \vec{\psi}(t)^T(E_m - AQ). \end{aligned}$$

■

Определение 1.1. *Будем говорить, что X_A — некритическое возмущение процесса X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\det(E_m - A^T Q) \neq 0$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$, $j = 1,\ldots,m$, *линейно независимы.*

Определение 1.2. *Будем говорить, что X_A — частично критическое возмущение порядка s процесса X_0, $0 < s < m$, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $\operatorname{rank}(E_m - A^T Q) = m - s$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt$, $j = 1,\ldots,m$, *образуют линейное пространство размерности $m - s$.*

Определение 1.3. *Будем говорить, что X_A — критическое возмущение процесса X_0, если выполнены следующие равносильные условия:*

1. $A = Q^{-1}$;
2. $\int\limits_{\mathcal{O}} X_A(t)\varphi_j(t)\,dt = 0$, $j = 1,\ldots,m$.

Замечание 1.3. *Для критических возмущений выполнено следствие 1.2, а также*

$$G_A(x,y) = G_0(x,y) - \vec{\psi}(x) \cdot Q^{-1} \cdot \vec{\psi}(y)^T. \tag{1.4}$$

Действительно,

$$D = -A - A^T + A^T \cdot Q \cdot A = -(Q^{-1})^T - Q^{-1} + Q^{-1} \cdot Q \cdot (Q^{-1})^T = -Q^{-1}.$$

1.2 Малые уклонения (некритический случай)

Пусть μ_k и $u_k(x)$ — собственные числа и соответствующие им собственные функции интегрального оператора с ядром $G_A(x,y)$, т.е.

$$\mu_k u_k(x) = \int\limits_{\mathcal{O}} G_A(x,y) u_k(y)\,dy,$$

где ядро $G_A(x,y)$ задается формулой (1.3). Не умаляя общности, можно считать, что D — симметричная матрица. Пусть $\lambda_k^0 := (\mu_k^0)^{-1}$, $\lambda_k := \mu_k^{-1}$.

Теорема 1.1. *Пусть X_A — некритическое возмущение функции X_0. При $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathbb{P}\{\|X_A\| < \varepsilon\} \sim \frac{\mathbb{P}\{\|X_0\| < \varepsilon\}}{\det(E_m - QA)}.$$

Доказательство. По теореме сравнения Ли (предложение 3 из приложения) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbb{P}\{\|X_A\| < \varepsilon\} \sim \mathbb{P}\{\|X_0\| < \varepsilon\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^0}{\mu_k}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим определители Фредгольма для ядер G_0 и G_A, соответственно:

$$\mathcal{F}^0(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k^0}\right); \qquad \mathcal{F}(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

В силу сходимости рядов $\sum\limits_k (\lambda_k^0)^{-1}$ и $\sum\limits_k \lambda_k^{-1}$ эти канонические произведения Адамара сходятся при всех $z \in \mathbb{C}$. Теорема Йенсена (см. предложение 6 из приложения) дает

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)}\right| d\arg(z)\right). \tag{1.5}$$

Ввиду формулы для преобразования определителя Фредгольма при конечномерном возмущении оператора (см. [15], [51, теорема 2.2], или более общая формула [62, глава 2, п. 4.6]) имеем

$$\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} = \det(L(z)), \tag{1.6}$$

где матрица $L(z)$ определяется из соотношения

$$L(z) = E_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T}{1 - \frac{\lambda_n^0}{z}} \cdot D. \tag{1.7}$$

Здесь E_m — единичная матрица порядка m, а $\vec{a}_n = \int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\psi}(x) u_n(x)\, dx$ — n-ый коэффициент Фурье вектор-функции $\vec{\psi}(x)$. Для обоснования предельного перехода в (1.5) будем рассуждать аналогично лемме 5.1 из статьи [66]. А именно, при $|z| \to \infty$ элементы матрицы $L(z)$ сходятся к элементам матрицы $\left(E_m + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T \cdot D\right)$ равномерно при $\arg(z) \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. В окрестности положительной вещественной оси у подынтегрального выражения имеется суммируемая мажоранта, поэтому предел (1.5) равен

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} = \det \left(E_m + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T \cdot D \right). \tag{1.8}$$

Заметим, что

$$\vec{\psi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{a}_n u_n(x); \qquad \vec{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n u_n(x).$$

Тогда

$$Q = \int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(x) \vec{\psi}^{\,T}(x)\, dx = \int\limits_{\mathcal{O}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 u_n(x) \vec{a}_n \sum_{k=1}^{\infty} \vec{a}_k^T u_k(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^T. \tag{1.9}$$

Поэтому формула (1.8) примет вид:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k} &= \det\left(E_m + Q \cdot D\right) = \det\left(E_m + Q \cdot [-A - A^T + A^T \cdot Q \cdot A)]\right) = \\ &= \det\left(E_m - Q \cdot A^T\right) \cdot \det\left(E_m - Q \cdot A\right) = \\ &= \det\left(E_m - A \cdot Q\right) \cdot \det\left(E_m - Q \cdot A\right) = \left(\det\left(E_m - Q \cdot A\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Ясно, что в некритическом случае $\det(E_m - AQ) \neq 0$ и $\det(E_m - QA) \neq 0$, откуда следует утверждение теоремы 1.1. ■

1.3 Малые уклонения (критический случай)

Теорема 1.2. *Пусть X_A — критическое возмущение функции X_0. Если*

$\forall j = 1, \ldots, m: \quad \varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, *что равносильно* $\psi_j \in \mathrm{Im}(\mathbb{G}_0)$, **(*условие A*)** *то асимптотика вероятностей малых уклонений примет вид*

$$\mathbb{P}\left\{\|X_A\| < \sqrt{r}\right\} \sim \sqrt{\frac{\det(Q)}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}} \vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^r \int\limits_0^{r_1} \ldots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{d^m}{dr_m^m} \mathbb{P}\left\{\|X_0\| < \sqrt{r_m}\right\} \frac{dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(r-r_1)(r_1-r_2)\ldots(r_{m-1}-r_m)}}.$$

Замечание 1.4. *В случае частично критического возмущения (см. определение 1.2), если функции* $\varphi_j \in L_2(\mathcal{O})$, $j = 1,\ldots,m$, *то асимптотику вероятностей малых уклонений можно вычислить, комбинируя теоремы 1.1 и 1.2.*

Доказательство. Введем три функции распределения:

$$F^0(r) := \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < r\right\} = \mathbb{P}\left\{\|X_0\| < \sqrt{r}\right\};$$

$$F(r) := \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < r\right\} = \mathbb{P}\left\{\|X_A\| < \sqrt{r}\right\};$$

$$F_m(r) := \mathbb{P}\left\{\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu_k^0 \xi_k^2 < r\right\}.$$

Покажем, что при $r \to 0$

$$F(r) \sim F_m(r) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k+m}^0}{\mu_k}\right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Теорема Йенсена (см. предложение 6 из приложения) дает

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu_{k+m}^0} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k+m}^0}{\lambda_k} = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)} \cdot \prod_{l=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{\lambda_l^0}\right)\right| d\arg(z)\right). \tag{1.11}$$

Заметим, что в критическом случае $E_m = -QD$, поэтому с помощью (1.9) формулу (1.7) можно преобразовать следующим образом:

$$L = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T} \cdot D + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^0 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}}{1 - \frac{\lambda_n^0}{z}} \cdot D = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^0)^2 \vec{a}_n \vec{a}_n^{\,T}}{1 - \frac{\lambda_n^0}{z}} \cdot D. \tag{1.12}$$

Тогда подлогарифмическое выражение в формуле (1.11) можно привести к более удобному виду (используя формулы (1.6) и (1.12)):

$$\left|\frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}^0(z)}\cdot\prod_{l=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\lambda_l^0}\right)\right| = \left|\det(L_{ij})_{i,j=1}^m\cdot\prod_{l=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\lambda_l^0}\right)\right| =$$
$$= \left|\det\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n^0)^2\vec{a}_n\vec{a}_n^{\,T}}{1-\frac{\lambda_n^0}{z}}\cdot D\cdot\prod_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\lambda_l^0}\right)\right|.$$

По лемме 5.1 из статьи [66] в правой части формулы Йенсена можно перейти к пределу, получим:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\mu_{k+m}^0} = \left|\det\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^0)^2\vec{a}_n\vec{a}_n^{\,T}\cdot D\right)\right|\cdot\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_l^0}. \qquad (1.13)$$

Рассмотрим матрицу, все компоненты которой существуют и конечны по условию теоремы:

$$\int\limits_{\mathcal{O}}\vec{\varphi}(x)\vec{\varphi}^{\,T}(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{O}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^0\vec{a}_k u_k(x)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^0\vec{a}_n u_n(x)\right)^T dx = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^0)^2\vec{a}_n\vec{a}_n^{\,T}.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\mu_{k+m}^0} = \det\left(\int\limits_{\mathcal{O}}\vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)\cdot\frac{1}{\det(Q)}\cdot\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda_l^0}.$$

Формулы (1.10) и (1.13) дают следующее соотношение:

$$F(r)\sim F_m(r)\cdot\sqrt{\frac{\det(Q)\cdot\lambda_1^0\cdot\ldots\cdot\lambda_m^0}{\det\left(\int\limits_{\mathcal{O}}\vec{\varphi}(s)\vec{\varphi}^{\,T}(s)\,ds\right)}}. \qquad (1.14)$$

Далее, ясно, что $F(r_m) = (F_m * f_1 * \ldots * f_m)(r_m)$, где

$$f_j(x) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{\mu_j^0\xi_j^2\leqslant x\} = \begin{cases}\frac{\exp\left(-\frac{x}{2\mu_j^0}\right)}{\sqrt{2\pi\mu_j^0 x}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} \qquad j=1\ldots m.$$

Заметим, что верно соотношение

$$(F_m * f_m)(r) = F_{m-1}(r).$$

С помощью преобразования Лапласа получаем решение этого сверточного уравнения:

$$F_m(z) = \sqrt{\frac{2\mu_m^0}{\pi}} \int\limits_0^z \left(F'_{m-1}(r_1) + \frac{1}{2\mu_m^0} F_{m-1}(r_1) \right) \exp\left(-\frac{z-r_1}{2\mu_m^0} \right) \frac{dr_1}{\sqrt{z-r_1}}.$$

По лемме А из приложения имеем, что $F_{m-1}(r_1) = o(F'_{m-1}(r_1))$, $r_1 \to +0$. Поэтому при $z \to +0$ получаем

$$F_m(z) \sim \sqrt{\frac{2\mu_m^0}{\pi}} \int\limits_0^z F'_{m-1}(r_1) \frac{dr_1}{\sqrt{z-r_1}}.$$

Аналогично, выразим F_{m-1} через F_{m-2}, получим

$$F_{m-1}(r_1) = \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int\limits_0^{r_1} \left(F'_{m-2}(r_2) + \frac{1}{2\mu_{m-1}^0} F_{m-2}(r_2) \right) \exp\left(-\frac{r_1-r_2}{2\mu_{m-1}^0} \right) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1-r_2}};$$

$$F'_{m-1}(r_1) = \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int\limits_0^{r_1} \left(F''_{m-2}(r_2) + \frac{1}{2\mu_{m-1}^0} F'_{m-2}(r_2) \right) \exp\left(-\frac{r_1-r_2}{2\mu_{m-1}^0} \right) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1-r_2}}.$$

По лемме А из приложения имеем, что $F'_{m-1}(r_2) = o(F''_{m-1}(r_2))$, $r_2 \to +0$. Поэтому при $r_1 \to +0$ получаем

$$F'_{m-1}(z) \sim \sqrt{\frac{2\mu_{m-1}^0}{\pi}} \int\limits_0^{r_1} F''_{m-2}(r_2) \frac{dr_2}{\sqrt{r_1-r_2}}.$$

А значит,

$$F_m(z) \sim \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 \sqrt{\mu_m^0 \mu_{m-1}^0} \int\limits_0^z \int\limits_0^{r_1} F''_{m-2}(r_2) \frac{dr_2\, dr_1}{\sqrt{(z-r_1)(r_1-r_2)}}.$$

Проделывая эту процедуру еще $m-2$ раза, получаем при $z \to +0$

$$F_m(z) \sim \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^m \prod_{l=1}^m \sqrt{\mu_l^0} \int\limits_0^z \int\limits_0^{r_1} \ldots \int\limits_0^{r_{m-1}} \frac{F^{(m)}(r_m)\, dr_m \ldots dr_1}{\sqrt{(z-r_1)(r_1-r_2)\ldots(r_{m-1}-r_m)}}. \tag{1.15}$$

Тогда из (1.14) и (1.15) получаем утверждение теоремы. ■

1.4 Пример: процессы Дурбина

Основным мотивирующим примером процессов вида (1.2) являются процессы Дурбина, возникающие как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на принадлежность семейству распределений в случае, когда параметры семейства оцениваются по выборке. Опишем их более подробно.

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ есть выборка с генеральной функцией распределения $F(x,\theta)$, $f(x,\theta)$ — плотность распределения, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $s \in \mathbb{N}$, — вектор параметров. Рассмотрим эмпирическую функцию распределения при фиксированных значениях параметров $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_s^0)$:

$$F_n^0(t) = \frac{\#\{x_i : F(x_i,\theta^0) \leqslant t, i = 1, \ldots, n\}}{n}, \quad t \in [0,1].$$

Известно (см. [56, глава 3]), что процесс $n^{1/2}\big[F_n^0(t) - t\big]$ слабо сходится к броуновскому мосту $B(t)$ в $D[0,1]$. Здесь $D[0,1]$ — это пространство функций на $[0,1]$ непрерывных справа и имеющих разрывы только первого рода.

Допустим, что часть параметров распределения неизвестна (не умаляя общности, можно считать, что это первые m параметров). Оценим неизвестные параметры по выборке (например, методом максимального правдоподобия) и обозначим новый вектор параметров $\hat\theta := (\hat\theta_1, \ldots, \hat\theta_m, \theta_{m+1}^0, \ldots, \theta_s^0)$. Тогда эмпирическая функция распределения примет вид:

$$\hat F_n(t) = \frac{\#\{x_i \colon F(x_i,\hat\theta) \leqslant t, i = 1, \ldots, n\}}{n}, \quad t \in [0,1].$$

В статье [26] показано, что процесс $n^{1/2}\big[\hat F_n(t) - t\big]$ сходится слабо в $D[0,1]$ к конечномерному возмущению броуновского моста, а именно, к гауссовскому процессу с нулевым средним и функцией ковариации:

$$G(s,t) = G_B(s,t) - \vec\psi^{\,T}(s)\, S^{-1}\, \vec\psi(t), \qquad s,t \in [0,1], \tag{1.16}$$

где $G_B(s,t) = \min(s,t) - st$ — функция ковариации броуновского моста $B(t)$, S — матрица информации Фишера с элементами S_{ij}, $i,j = 1, \ldots, m$:

$$S_{ij} = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\ln(f(x,\theta))\right)\bigg|_{\theta=\theta_0} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln(f(x,\theta))\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln(f(x,\theta))\right)\bigg|_{\theta=\theta_0},$$

$\theta^0 = (\theta^0_1, \ldots, \theta^0_s)$ — фиксированный вектор параметров, x и t связаны равенством $t = F(x,\theta)$. Вектор функций $\vec{\psi} = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\big)$ задается соотношениями:

$$\psi_j(t) = \frac{\partial F(x,\theta)}{\partial \theta_j}\Big|_{\theta=\theta^0,\, x=F^{-1}(t)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Определение 1.4. *Процессы, получающиеся в результате описанной предельной процедуры, будем называть процессами Дурбина с m оцененными параметрами.*

Замечание 1.5. *Имеет место следующее равенство:*

$$\psi'_j(t) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f(F^{-1}(t,\theta)))\Big|_{\theta=\theta_0}. \qquad (1.17)$$

Действительно, для $\psi'_j(t)$ имеем

$$\begin{aligned}\psi'_j(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} F(x,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} F(x,\theta)\Big|_{\theta=\theta_0}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,\theta)\right)\Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{\partial F^{-1}(t,\theta_0)}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} f(x,\theta)\right)\Big|_{\theta=\theta_0} \cdot \frac{1}{f(F^{-1}(t,\theta_0))} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f(F^{-1}(t,\theta)))\Big|_{\theta=\theta_0}.\end{aligned}$$

Поэтому из формулы (1.17) следует следующее представление для S_{ij}:

$$S_{ij} = \int\limits_0^1 \psi'_i(t)\psi'_j(t)\,dt.$$

Теорема 1.3. *Процессы Дурбина с m оцененными параметрами являются критическими порядка m.*

Доказательство. Заметим, что если X — это броуновский мост, то выполнено соотношение $\varphi_i(s) = -\psi''_i(s)$, а значит

$$Q_{ij} = \int\limits_0^1 \psi_j(s)\varphi_i(s)\,ds = \int\limits_0^1 \psi_j(s)(-\psi''_i(s))\,ds = \int\limits_0^1 \psi'_j(s)\psi'_i(s)\,ds = S_{ij},$$

откуда из (1.4) и (1.16) немедленно следует утверждение теоремы. ∎

Глава 2. Вспомогательные леммы о медленно меняющихся функциях

2.1 Асимптотика интегралов с медленно меняющейся амплитудой

Базовые сведения о медленно меняющихся функциях находятся в параграфе 4.2 приложения. Пусть функции $F(t)$ и $H(t)$ заданы на полуинтервале $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, и функции $F_0(t) = F(t)$, $F_{n+1}(t) = tF_n'(t)$, и $H_0(t) = H(t)$, $H_{n+1}(t) = tH_n'(t)$, $n \geqslant 0$, являются медленно меняющимися в нуле. Введем обозначение:

$$\int\limits_{S_N(x_1)} F_M \, d\mu_N := \int\limits_1^{x_1} \ldots \int\limits_1^{x_N} F_M\Big(\frac{x_{N+1}}{\omega}\Big)\frac{dx_{N+1}}{x_{N+1}} \ldots \frac{dx_2}{x_2}, \quad N \geqslant 1, M \geqslant 0.$$

Теорема 2.1. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{C}(\omega) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\, dt = \sum_{k=1}^{N} c_k^{cos} \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{cos}, \tag{2.1}$$

где

$$c_k^{cos} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\, dx, \quad k \geqslant 1,$$

$$R_N^{cos} = -\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x_1)}{x_1} \int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\, d\mu_N \, \frac{dx_1}{\omega} + O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right), \tag{2.2}$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \to \infty$. Более того, верна оценка:

$$|R_N^{cos}| \leqslant C(F,N) \cdot \frac{\left|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})\right|}{\omega}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right)\frac{\sin(x)}{x}\frac{dx}{\omega}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула представления функции F_M:

$$F_M\left(\frac{x}{\omega}\right)=F_M\left(\frac{1}{\omega}\right)+\int\limits_1^x F_{M+1}\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y},\quad \forall M\geqslant 0. \tag{2.4}$$

Воспользуемся формулой (2.4) при $M=1$, получим

$$\mathcal{C}(\omega)=-\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx\cdot\frac{F_1(\frac{1}{\omega})}{\omega}-\frac{1}{\omega}\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx}_{=R_1}+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

что дает (2.1) для $N=1$. Интегрируя по частям R_1, получим

$$R_1=\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\omega}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{1-\cos(x)}{x^2}F_2\left(\frac{x}{\omega}\right)dx+ \tag{2.5}$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\,dx.$$

Пусть $\alpha>0$, и ε таково, что верно предложение 1 из приложения. Тогда при больших ω ($1/\omega<\varepsilon$) имеем оценку

$$\left|\mathbb{F}\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{y}{\omega}\right)^\alpha\leqslant\left|\mathbb{F}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|\omega^{-\alpha}\qquad\text{при } y\in(0,1], \tag{2.6}$$

$$\left|\mathbb{F}\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^\alpha\leqslant\left|\mathbb{F}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|\omega^{\alpha}\qquad\text{при } y\in(1,\varepsilon\omega]\,. \tag{2.7}$$

Наконец, ввиду (2.7) и непрерывности $\mathbb{F}$, получаем

$$\left|\mathbb{F}\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^\alpha\leqslant C(\alpha,F)\left|\mathbb{F}\left(\frac{\varepsilon\omega}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{\varepsilon\omega}\right)^\alpha\leqslant$$

$$\leqslant C(\alpha,F)\left|\mathbb{F}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|\omega^\alpha\qquad\text{при } y\in\left[\varepsilon\omega,\frac{\omega}{2}\right]. \tag{2.8}$$

Оценим $\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}$. При $x\in(0,1]$, используя оценку (2.6) для $\mathbb{F}=F_2$, получаем

$$\left|\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\right|\leqslant\omega^\alpha\int\limits_1^x\left|F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{y}{\omega}\right)^\alpha\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\leqslant\left|F_2\left(\frac{1}{\omega}\right)\right|\frac{|x^{-\alpha}-1|}{\alpha}. \tag{2.9}$$

При $x \in \left[1,\frac{\omega}{2}\right]$, используя оценки (2.7) и (2.8), имеем

$$\left|\int\limits_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\right| \leqslant \omega^{-\alpha}\int\limits_1^x \left|F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^{\alpha}\frac{dy}{y^{1-\alpha}} \leqslant C(\alpha,F)\left|F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\frac{|x^{\alpha}-1|}{\alpha}. \tag{2.10}$$

Подставляя оценки (2.9) и (2.10) при $\alpha = 1/2$ в выражение (2.5) для R_1, получим оценку (2.3) при $N = 1$. При $N > 1$ действуем по индукции: подставляем (2.4) с $M = N$ в (2.2) и оцениваем остаток с помощью предложения 1. ■

Теорема 2.2. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{S}(\omega) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\sin(\omega t)\,dt = \frac{F(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \sum_{k=1}^{N} c_k^{sin}\frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{sin},$$

где

$$c_k^{sin} = -\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx + \int\limits_1^{\infty}\frac{\cos(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx, \quad k \geqslant 1,$$

$$R_N^{sin} = -\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(x_1)}{x_1}\int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\,d\mu_N\,\frac{dx_1}{\omega} + \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}}\frac{\cos(x_1)}{x_1}\int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\,d\mu_N\,\frac{dx_1}{\omega} + $$
$$+\,O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right),$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \to \infty$.

Более того, справедлива оценка:

$$|R_N^{sin}| \leqslant C(F,N)\cdot\frac{|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})|}{\omega}.$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.1. ■

Замечание 2.1. *К интегралам $\mathcal{C}(\omega)$ и $\mathcal{S}(\omega)$ сводятся также интегралы*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)F(\tau)\sin(\omega t)\sin(\omega\tau)\,dt\,d\tau = \frac{\mathcal{S}^2(\omega)}{2},$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)F(\tau)\cos(\omega t)\cos(\omega\tau)\,dt\,d\tau = \frac{\mathcal{C}^2(\omega)}{2}.$$

Теорема 2.3. *При $\omega \to \infty$ имеет место асимптотическое разложение:*

$$\mathcal{I}(\omega) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\tau} F(t)H(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)H(t)\,dt + \sum_{n=2}^{N} \sum_{\substack{k+m=n \\ k,m\geqslant 1}} a_{k,m}\frac{F_k(\frac{1}{\omega})H_m(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + R_N^{sc}, \quad (2.11)$$

где

$$a_{k,m} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos(y)}{y}\frac{\ln^{m-1}(y)}{(m-1)!}\,dy\,dx$$

и справедлива оценка:

$$|R_N^{sc}| \leqslant C(F,H,N)\sum_{\substack{i+j=N+1 \\ i,j\geqslant 1}} \frac{|F_i(\frac{1}{\omega})H_j(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, получаем

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)H(t)\,dt - \frac{1}{\omega^2}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right)\frac{\sin(x)}{x}\int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} H_1\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{\cos(y)}{y}\,dy\,dx.$$

Воспользуемся представлением (2.4) при $M = 1$, имеем

$$\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right)\frac{\sin(x)}{x}\int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} H_1\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{\cos(y)}{y}\,dy\,dx =$$

$$= F_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big)H_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{\sin(x)}{x}\int\limits_x^{\frac{\omega}{2}}\frac{\cos(y)}{y}\,dy\,dx +$$

$$+ F_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{\sin(x)}{x}\int\limits_x^{\frac{\omega}{2}}\frac{\cos(y)}{y}\int\limits_1^{y} H_2\left(\frac{z}{\omega}\right)\frac{dz}{z}\,dy\,dx}_{=R_{11}} +$$

$$+ \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{\sin(x)}{x}\int\limits_1^{x} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right)\frac{dz}{z}\int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} H_1\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{\cos(y)}{y}\,dy\,dx}_{=R_{12}}. \quad (2.13)$$

Несложно понять, что

$$\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\infty} \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx + O\Big(\frac{1}{\omega}\Big).$$

Таким образом получена формула (2.11) при $N = 2$.

Для оценки интеграла R_{11} разобьем его на три слагаемых

$$R_{11} = \int\limits_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^1 \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx +$$
$$+ \int\limits_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx +$$
$$+ \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx =: R_{111} + R_{112} + R_{113}.$$

Заметим, что подынтегральное выражение в R_{111} знакопостоянно. Воспользуемся соотношением (2.9), а также неравенствами

$$\frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1, \qquad \cos(y) \leqslant 1,$$

получим оценку

$$|R_{111}| \leqslant \Big|H_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\Big| \int\limits_0^1 \int\limits_x^1 \frac{y^{-\alpha} - 1}{\alpha y}\, dy\, dx = C(\alpha) \cdot \Big|H_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\Big|.$$

Далее,

$$|R_{112}| \leqslant \left| \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy \right|.$$

Проинтегрируем по частям, имеем

$$|R_{112}| \leqslant \left| \frac{1+\sin(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right|_{y=1}^{y=\frac{\omega}{2}} -$$
$$- \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(H_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \Bigg|.$$

Подстановка $y = 1$ обнуляется, подстановка $y = \frac{\omega}{2}$ с учетом (2.10) есть $O(|H_2(\frac{1}{\omega})| \cdot \omega^{\alpha-1})$, а получившийся интеграл, пользуясь неравенствами (2.10), (2.7) и (2.8) для $\mathbb{F} = H_2$, оценим

$$\left| \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(H_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant C(\alpha,H) \left| H_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right| \cdot \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^{2-\alpha}}\, dy \leqslant C(\alpha,H) \left| H_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right|.$$

Рассмотрим R_{113}. После интегрирования по частям, получаем

$$R_{113} = \frac{1-\cos(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy \Bigg|_{x=1}^{x=\frac{\omega}{2}} +$$

$$+ \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx +$$

$$+ \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\big(1-\cos(x)\big)\cos(x)}{x^2} \int\limits_1^x H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dx.$$

Подстановка $x = \frac{\omega}{2}$ обнуляется, подстановка $x = 1$ оценивается через R_{112}. Последний интеграл с помощью (2.10) оценивается через $C(\alpha,H) \cdot \left| H_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right|$. Во втором слагаемом проинтегрируем по частям по переменной y, получим

$$\int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \left[\frac{1+\sin(y)}{y} \int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \Bigg|_{y=x}^{y=\frac{\omega}{2}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(\int\limits_1^y H_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} - H_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \right) dy \right] dx.$$

Оценивая это выражение аналогично интегралу R_{112}, получаем окончательно

$$|R_{11}| \leqslant C(\alpha,H) \left| H_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right|.$$

Аналогично оценим R_{12}. Полагая $\alpha = 1/2$, получаем оценку (2.12) для $N = 2$. При $N > 2$ действуем по индукции: подставляем (2.4) в (2.13) и оцениваем остатки аналогичным образом с помощью предложения 1. ∎

2.2 Свойства функции, обратной к функции нормального распределения

Введем обозначение:

$$x = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

— функция нормального распределения, и $y = F_0(x) := \Phi^{-1}(x)$ — обратная к ней. Построим последовательность функций:

$$F_{N+1}(x) := xF_N'(x), \quad N \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.4. $F_N(x)$ *— медленно меняющиеся функции в нуле при всех* $N \geqslant 0$.

Доказательство.

Обозначим $\tilde{F}_N(y) := F_N(x(y))$ и заметим, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}_1(y) = x(y)\frac{dF(x(y))}{dx} = x(y)\frac{dy}{dx},\\
&\tilde{F}_{N+1}(y) = x(y)\frac{dF_N(x)}{dx} = x(y)\frac{dy}{dx}\frac{d\tilde{F}_N(y)}{dy} = \tilde{F}_1(y)\tilde{F}_N'(y).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Исследуем поведение функций $\tilde{F}_N(y)$. Рассмотрим функцию $\tilde{F}_1(y)$, $y < 0$:

$$\tilde{F}_1(y) = x(y)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x(y)}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt}{\exp(-\frac{y^2}{2})} = \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(yz - \frac{z^2}{2}\right) dz = -\frac{1}{y}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-u - \frac{u^2}{2y^2}\right) du.$$

Введем вспомогательные функции:

$$e_N(y) := \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-u - \frac{u^2}{2y^2}\right) u^{2N-2}\, du.$$

Лемма 2.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$1. \quad e_N'(y) = \frac{e_{N+1}(y)}{y^3}; \tag{2.16}$$

$$2. \quad (2N-2)!\left(1 - \frac{N(2N-1)}{y^2}\right) < e_N(y) < (2N-2)!. \tag{2.17}$$

Доказательство. 1. Проверяется непосредственным вычислением.
2. Учитывая, что

$$1 - \frac{u^2}{2y^2} < \exp\left(-\frac{u^2}{2y^2}\right) < 1,$$

получаем

$$\int_0^\infty \exp(-u)\left(1 - \frac{u^2}{2y^2}\right)u^{2N-2}\,du < e_N(y) < \int_0^\infty \exp(-u)u^{2N-2}\,du,$$

$$(2N-2)! - \frac{(2N)!}{2y^2} < e_N(y) < (2N-2)!,$$

что дает (2.17). ■

Лемма 2.2. *Для N-ой производной функции $\tilde{F}_1(y)$ справедливо следующее тождество:*

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) = \frac{(-1)^{N+1}N!e_1(y)}{y^{N+1}} + \frac{c_2e_2(y)}{y^{N+3}} + \ldots + \frac{c_{N+1}e_{N+1}(y)}{y^{3N+1}}, \tag{2.18}$$

где

$$c_2 = c_2(N), c_3 = c_3(N), \ldots, c_{N+1} = c_{N+1}(N) \text{ — константы.}$$

Доказательство проводится по индукции с помощью (2.16). ■

Следствие 2.1. *При $y \to -\infty$ справедливо следующее соотношение:*

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) \sim \frac{(-1)^{N+1}N!}{y^{N+1}}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Следует из (2.17) и (2.18). ■

Лемма 2.3. *$\tilde{F}_N(y)$ представимо в следующем виде*

$$\tilde{F}_N(y) = \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\cdots,n_N}\tilde{F}_N^{n_1,\ldots,n_N}(y), \tag{2.20}$$

где

$$\tilde{F}_N^{n_1,\ldots,n_N}(y) := \Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1} \cdot \Big(\tilde{F}_1'(y)\Big)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N}, \qquad (2.21)$$

причем

$$\begin{aligned} &n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots\};\\ &1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + \ldots + N\cdot n_N = 2N-1; \end{aligned} \qquad (2.22)$$

а коэффициенты в (2.20) *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$c_{n_1,\cdots,n_N} \geqslant 0, \qquad \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\cdots,n_N} > 0. \qquad (2.23)$$

Доказательство проведем по индукции.
База: $N=1:\ \tilde{F}_1(y) = c_{n_1}\tilde{F}_1^{n_1}$, $n_1 = 1, c_{n_1} = 1$. Свойства (2.21)–(2.23) очевидно выполняются.
Индукционный переход: Пусть утверждение верно для $\tilde{F}_N(y)$. Запишем (2.22) в виде:

$$1\cdot n_1 + \ldots + N\cdot n_N + (N+1)\cdot n_{N+1} = 2N-1,$$

где $n_{N+1} = 0$. В силу (2.15) и (2.20)

$$\tilde{F}_{N+1}(y) = \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\ldots,n_N}\tilde{F}_1(y)\cdot\frac{d}{dy}\Big[\Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1}\cdot\Big(\tilde{F}_1'(y)\Big)^{n_2}\ldots\Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N}\Big],$$

где коэффициенты $c_{n_1,\ldots,n_N}$ удовлетворяют условию (2.23). Дифференцируя, получим

$$\sum_{k=0}^{N} c_{n_1,\ldots,n_N}\cdot n_k\cdot\Big(\tilde{F}_1\Big)^{n_1+1}\cdot\ldots\cdot\Big(\tilde{F}_1^{(k-1)}\Big)^{n_k-1}\cdot\Big(\tilde{F}_1^{(k)}\Big)^{n_{k+1}+1}\cdot\ldots\cdot\Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}\Big)^{n_N}. \qquad (2.24)$$

Рассмотрим слагаемое с номером k в сумме (2.24). Пусть $n_1', n_2', \ldots, n_{N+1}'$ — показатели степеней соответствующих производных $\tilde{F}_1$ в этом слагаемом.

Если $k=1$, то $n_2' = n_2+1$ и $n_i' = n_i$ для остальных i.

Если $k \geqslant 2$, то $n_1' = n_1+1$, $n_k' = n_k - 1$, $n_{k+1}' = n_{k+1}+1$ и $n_i' = n_i$ для остальных i.

Отсюда видно, что свойство (2.22) выполнено. Далее, все коэффициенты в (2.24) очевидно неотрицательные, причем

$$\sum_{\substack{k=1..N\\ \{n_1,\dots,n_N\}}} c_{n_1,\dots,n_N} \cdot n_k > 0.$$

Таким образом, неравенства (2.23) выполнены, и лемма доказана. ■

Лемма 2.4. *При $y \to -\infty$ имеем*

$$\tilde{F}_N(y) \sim -\frac{C}{y^{2N-1}}, \tag{2.25}$$

где $C = C(N) > 0$ — константа.

Доказательство. Для каждого слагаемого вида (2.21) с ненулевым коэффициентом $c_{n_1,\dots,n_N}$ в силу (2.19) и (2.22) получаем

$$\begin{aligned}\Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1} \cdot \Big(\tilde{F}_1'(y)\Big)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N} \sim \\ \sim \Big(\frac{(-1)0!}{y^1}\Big)^{n_1} \cdot \Big(\frac{(-1)^2 1!}{y^2}\Big)^{n_2} \cdots \Big(\frac{(-1)^N (N-1)!}{y^N}\Big)^{n_N} = \\ = \underbrace{0!^{n_1} 1!^{n_2} \ldots (N-1)!^{n_N}}_{c_N} \frac{(-1)^{n_1+2n_2+\ldots+Nn_N}}{y^{n_1+2n_2+\ldots+Nn_N}} = c_N \frac{(-1)^{2N-1}}{y^{2N-1}} = -\frac{c_N}{y^{2N-1}}.\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.25) выполнено для

$$C = \sum_{\{n_1,\dots,n_N\}} c_N \, c_{n_1,\cdots,n_N}.$$

Лемма доказана. ■

Доказательство теоремы 2.4. По предложению 2 достаточно доказать, что $F_N(x)$ — знакопостоянны в окрестности $x = 0$ (или, что то же самое, $\tilde{F}_N(y)$ — знакопостоянны в окрестности $y = -\infty$) и

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{\tilde{F}_{N+1}(y)}{\tilde{F}_N(y)} = 0.$$

Оба эти утверждения очевидно следуют из леммы 2.4. ■

Замечание 2.2. *Теорема остается справедливой, если последовательность (2.14) построить по функции $F_0(x) = \big(\Phi^{-1}(x)\big)^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

2.3 Свойства функции, обратной к функции гамма-распределения

Напомним, что функция гамма-распределения имеет вид:

$$F^{GAM}(x,\theta) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \dfrac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)}\,dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь $\beta > 0$ — параметр масштаба, $\varkappa > 0$ — параметр формы. Ее плотность

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\varkappa-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\varkappa}\Gamma(\varkappa)}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пусть $x = F_0(t) := (F^{GAM})^{-1}(t,\theta)$, $t \in [0,1]$, — обратная к функции гамма-распределения. Для простоты в этом параграфе будем обозначать ее $F^{-1}(t)$. Построим последовательность функций: $F_{N+1}(t) := (1-t)F'_N(t)$, $N \geqslant 0$.

Лемма 2.5. *$F_0(t)$, $F_1(t)$ — медленно меняющиеся функции при $t \to 1$, причем*

$$\begin{aligned} F_0(t) = &-\beta\ln(1-t) + \beta(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \beta\ln(\Gamma(\varkappa)) - \\ &-\beta(\varkappa-1)\frac{(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \ln(\Gamma(\varkappa))}{\ln(1-t)} - \beta\frac{\varkappa-1}{\ln(1-t)} + \\ &+ O\left(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\right); \\ F_1(t) = &\beta - \beta\frac{\varkappa-1}{\ln(1-t)} + O\Big(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big). \end{aligned} \tag{2.26}$$

А также имеется следующая асимптотическая формула при $t \to 1$:

$$F_2(t) = O\left(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\right).$$

Замечание 2.3. *При $\varkappa = 1$ функция гамма-распределения совпадает с функцией экспоненциального распределения. Обратная функция в этом случае равна $F^{-1}(t,\theta) = -\beta\ln(1-t)$.*

Доказательство. Из (2.26) сразу следует, что $F_0(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to 1$. Докажем (2.26) стандартными методами асимптотического анализа. Заметим, что при $t \to 1$ имеем $x \to \infty$. Рассмотрим выражение $(1-t)$ и проинтегрируем два раза по частям, получим

$$1 - t = \int\limits_{x/\beta}^{\infty} \frac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)}dy = \frac{x^{\varkappa-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\varkappa-1}\Gamma(\varkappa)} + (\varkappa-1)\frac{x^{\varkappa-2}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\varkappa-2}\Gamma(\varkappa)} + O\left(\frac{x^{\varkappa-3}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\varkappa-3}\Gamma(\varkappa)}\right) =$$
$$= \frac{x^{\varkappa-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\varkappa-1}\Gamma(\varkappa)}\left(1 + \beta\frac{\varkappa-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln(1-t) = (\varkappa-1)\ln(x) - \frac{x}{\beta} - (\varkappa-1)\ln(\beta) - \ln(\Gamma(\varkappa)) + \\ + \ln\left(1 + \beta\frac{\varkappa-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \tag{2.27}$$

Приравнивая самые большие слагаемые по порядку, получаем в первом приближении

$$x = -\beta\ln(1-t) + x_1, \quad x_1 = o(x) = o(\ln(1-t)).$$

Подставляя полученное выражение для x в уравнение (2.27), получаем после некоторых преобразований

$$0 = (\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) + (\varkappa-1)\ln\left(1 - \frac{x_1}{\beta\ln(1-t)}\right) - \frac{x_1}{\beta} - \ln(\Gamma(\varkappa)) + \\ + \ln\left(1 + \beta\frac{\varkappa-1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Снова приравнивая самые большие слагаемые, получаем

$$x_1 = \beta(k-1)\ln(-\ln(1-t)) + x_2, \quad x_2 = o(x_1) = o(\ln(-\ln(1-t))).$$

Повторяя эту процедуру еще дважды, получаем искомую формулу (2.26).

Рассмотрим $F_1(t)$:

$$F_1(t) = (1-t)F_0'(t) = \frac{1-t}{f(F^{-1}(t))} = \beta^{\varkappa}\Gamma(\varkappa)\frac{(1-t)e^{\frac{F^{-1}(t)}{\beta}}}{(F^{-1}(t))^{\varkappa-1}}.$$

При $t \to 1$ с учетом (2.26) имеем:

$$F_1(t) = \beta \exp\Big(-(\varkappa - 1)\frac{(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \ln(\Gamma(\varkappa))}{\ln(1-t)} - \frac{\varkappa-1}{\ln(1-t)}\Big) :$$

$$: \Big(1 - (\varkappa-1)\frac{\ln(-\ln(1-t))}{\ln(1-t)} + \frac{\ln(\Gamma(\varkappa))}{\ln(1-t)} + O\Big(\frac{\ln(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big)\Big) =$$

$$= \big[\beta - \beta(\varkappa-1)\frac{(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) + 1 - \ln(\Gamma(\varkappa))}{\ln(1-t)} +$$

$$+ O\Big(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big)\Big]\cdot$$

$$\cdot \Big[1 + (\varkappa-1)\frac{(\varkappa-1)\ln(-\ln(1-t)) - \ln(\Gamma(\varkappa))}{\ln(1-t)} + O\Big(\frac{\ln(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big)\Big] =$$

$$= \beta - \beta\frac{\varkappa-1}{\ln(1-t)} + O\Big(\frac{\ln^2(-\ln(1-t))}{\ln^2(1-t)}\Big).$$

Рассмотрим $F_2(t)$:

$$F_2(t) = (1-t)F_1'(t) = -\frac{1-t}{f(F^{-1}(t))} + \frac{(1-t)^2}{f^2(F^{-1}(t))}\cdot\Big[\frac{1}{\beta} - \frac{\varkappa-1}{F^{-1}(t)}\Big] =$$

$$= F_1(t)\Big(-1 + F_1(t)\Big(\frac{1}{\beta} - \frac{\varkappa-1}{F^{-1}(t)}\Big)\Big).$$

Подставляя асимптотические формулы для $F^{-1}(t)$ и $F_1(t)$, получаем утверждение теоремы для $F_2(t)$. ■

2.4 Асимптотика малых уклонений для спектральной асимптотики с медленно меняющейся добавкой

Теорема 2.5. *Рассмотрим форму* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2$, *где*

$$\Lambda_k = (\vartheta(k+\delta+F(k)))^{-d},$$

а $\vartheta > 0$, $\delta > -1$ *и* $d > 1$ *— некоторые константы, а* $F(t)$, $t \in [1,\infty)$, *— медленно меняющаяся, монотонно стремящаяся к нулю функция при* $t \to \infty$. *Пусть*

$$F_{-1}(x) := \int\limits_1^x \frac{F(t)}{t}\,dt, \text{ и } F_{-1}(x) \text{ расходится на бесконечности.}$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2<\varepsilon^2\Big\}\sim C\cdot\varepsilon^{\gamma}\cdot\exp\Big(-\frac{d-1}{2}\Big(\frac{\pi}{d\vartheta\sin(\frac{\pi}{d})}\Big)^{\frac{d}{d-1}}\cdot\varepsilon^{-\frac{2}{d-1}}+\frac{d}{2}\cdot F_{-1}(\varepsilon^{-\frac{2}{d-1}})\Big),$$

где

$$\gamma=\frac{2-d-2d\delta}{2(d-1)},\quad C=C(\vartheta,\delta,d,F)=\mathrm{const}.$$

Замечание 2.4. *По предложению 2 из приложения функция* $\exp(F^{-1}(x))$ *является медленно меняющейся функцией на бесконечности. Тем самым, если в асимптотике собственных чисел имеется медленно меняющаяся добавка, то в точной асимптотике малых уклонений в качестве сомножителя появляется медленно меняющаяся функция.*

Доказательство. Воспользуемся предложением 4 из приложения. В качестве функции $\varphi(t)$ мы будем рассматривать

$$\varphi(t)=(t+\delta+F(t))^{-d},\quad d>1,$$

где $F(t)$ — медленно меняющаяся, монотонно стремящаяся к нулю функция при $t\to\infty$. Заметим, что если $\int\limits_1^\infty\frac{F(t)}{t}\,dt<\infty$, то произведение $\prod\frac{\varphi(k)}{(k+\delta)^{-d}}$ сходится, и асимптотика с точностью до константы следует из предложения 5 из приложения. Поэтому будем считать, что $\int\limits_1^\infty\frac{F(t)}{t}\,dt$ расходится.

Преобразуем интеграл I_1 так:

$$I_1=-u\int\limits_1^\infty\frac{dt}{2u+(t+\delta+F(t))^d}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{1+\delta+F(1)}^{\infty}\frac{dx}{1+\Big(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}=$$

$$=-\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d\sin\big(\frac{\pi}{d}\big)}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{1+\delta+F(1)}\frac{dx}{1+\Big(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}.$$

Оба интегранта здесь имеют суммируемые мажоранты, поэтому по теореме Лебега при $u\to\infty$ имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{1+\delta+F(1)}\frac{dx}{1+\Big(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}\to\frac{1+\delta}{2},$$

и, таким образом,

$$I_1(u) = -\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d\sin\left(\frac{\pi}{d}\right)} + \frac{\delta+1}{2} + o(1), \qquad u \to \infty.$$

Проводя аналогичные рассуждения с интегралом $I_2(u)$, получаем при $u \to \infty$

$$I_2(u) = 2u^2 \int\limits_1^\infty \frac{dt}{(2u + (t+\delta+F(t))^d)^2} = \frac{(d-1)\pi(2u)^{1/d}}{2d^2\sin\left(\frac{\pi}{d}\right)} + O(1).$$

Заметим, что асимптотика интегралов $I_1(u)$ и $I_2(u)$ совпадает с асимптотикой соответствующих интегралов в [48], поэтому мы можем выбрать в качестве функции $u = u(r)$

$$u = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi r^{-1}}{d\sin(\frac{\pi}{d})}\Big)^{\frac{d}{d-1}}, \tag{2.28}$$

которая удовлетворяет условию (4.14).

Рассмотрим $I_0(u)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_0(u) &= -\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \ln\Big(1 + \frac{2u}{(t+\delta+F(t))^d}\Big)\,dt = \\ &= \frac{(1+\delta)}{2}\ln\Big(1 + \frac{2u}{(1+\delta+F(1))^d}\Big) - \\ &\quad - ud\int\limits_1^\infty \frac{(t+\delta)(1+F'(t))\,dt}{(2u + (t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))}. \end{aligned}$$

Последний интеграл можно расписать на следующие четыре слагаемых:

$$\begin{aligned} &- ud\int\limits_1^\infty \frac{dt}{2u + (t+\delta+F(t))^d} - ud\int\limits_1^\infty \frac{F'(t)\,dt}{2u + (t+\delta+F(t))^d} + \\ &+ ud\int\limits_1^\infty \frac{F(t)\,dt}{(2u + (t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))} + \\ &+ ud\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{(2u + (t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))} =: K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \end{aligned}$$

Интеграл $K_1 = -d \cdot I_1$, поэтому

$$K_1 = \frac{\pi(2u)^{1/d}}{2\sin(\frac{\pi}{d})} + \mathrm{const} + o(1), \qquad u \to \infty.$$

У интегрантов в K_2 и K_4 имеются суммируемые мажоранты, поэтому при $u \to \infty$

$$K_2 = \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F'(t)\,dt}{1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d} \to \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty F'(t)\,dt = -\frac{d}{2}\cdot F(1) = \mathrm{const};$$

$$K_4 = \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{\left(1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d\right)\Big(t+\delta+F(t)\Big)} \to \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{(t+\delta+F(t))} = \mathrm{const}.$$

Интеграл K_3 представим в виде суммы четырех интегралов

$$K_3 = \frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)}{t}\,dt - \frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(\delta+F(t))}{t(t+\delta+F(t))}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2u}\cdot\frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(t+\delta+F(t))^{d-1}}{1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d}\,dt + \frac{d}{2}\int\limits_{(2u)^{1/d}}^\infty \frac{F(t)\,dt}{\left(1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d\right)\Big(t+\delta+F(t)\Big)} =:$$

$$=: \frac{d}{2}\cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) - K_{31} - K_{32} + K_{33},$$

где $F_{-1}(x) = \int\limits_1^x \frac{F(t)}{t}\,dt$. По теореме Лебега

$$K_{31} \to \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F(t)(\delta+F(t))}{t(t+\delta+F(t))}\,dt = \mathrm{const}.$$

Сделаем замену переменной $t = (2u)^{1/d}\cdot z$ в интегралах K_{32} и K_{33}:

$$K_{32} = \frac{d}{2}\int\limits_{\frac{1}{(2u)^{1/d}}}^1 \frac{F((2u)^{1/d}z)\left(z+\frac{\delta+F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)^{d-1}}{1+\left(z+\frac{\delta+F((2u)^{1/d}\cdot z)}{(2u)^{1/d}}\right)^d}\,dz,$$

$$K_{33} = \int\limits_1^\infty \frac{F((2u)^{1/d}z)\,dz}{\left(1+\left(z+\frac{\delta+F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)^d\right)\left(z+\frac{\delta+F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)}.$$

Подынтегральные выражения здесь ограничены, поэтому по теореме Лебега $K_{32} \to 0$ и $K_{33} \to 0$ при $u \to \infty$. Таким образом, при $u \to \infty$

$$K_3 = \frac{d}{2}\cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) + \mathrm{const} + o(1),$$

откуда

$$I_0(u) = \frac{(1+\delta)}{2}\ln\left(1 + \frac{2u}{(1+\delta+F(1))^d}\right) - \frac{\pi(2u)^{1/d}}{2\sin(\frac{\pi}{d})} + \\ + \frac{d}{2}\cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) + \mathrm{const} + o(1).$$

Функция $\exp\left(F_{-1}(t)\right)$ — медленно меняющаяся (см. замечание 2.4), поэтому с учетом (2.28)

$$\exp\left(F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right)\right) = \exp\left(F_{-1}(r^{-\frac{1}{d-1}}) + o(1)\right), \qquad r \to 0. \tag{2.29}$$

Доказательство теоремы 2.5 следует из предложения 4 с учетом формул (2.28)–(2.29). ■

Глава 3. Малые уклонения для процессов Дурбина

3.1 Процессы Дурбина. Примеры

В главе 3 считается точная асимптотика малых уклонений для некоторых процессов Дурбина, рассмотренных Дж. Дурбиным в [26] и описанных в 1.4.

Напомним, что процесс Дурбина — это гауссовский процесс с нулевым средним и функцией ковариации:

$$G(s,t) = G_0(s,t) - \vec{\psi}^T(s)\; S^{-1}\; \vec{\psi}(t), \tag{3.1}$$

где $G_0(s,t) = \min(s,t) - st$ – функция ковариации броуновского моста $B(t)$; S — матрица информации Фишера с элементами S_{ij}, $i,j = 1,\ldots,m$:

$$S_{ij} = \int\limits_0^1 \psi_i'(t)\psi_j'(t)\,dt; \qquad \psi_i(t) = \frac{\partial F(x,\theta)}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta=\theta_0,\; x=F^{-1}(t,\theta_0)}. \tag{3.2}$$

где $F(x,\theta)$ — генеральная функция распределения выборки с параметрами θ, θ_0 – некоторый фиксированный вектор параметров.

Замечание 3.1. *Матрица S положительно определена, поэтому имеет место равенство $S^{-1} = BB^T$, где B – верхнетреугольная матрица. Отсюда функцию ковариации* (3.1) *можно записать следующим образом:*

$$G(s,t) = G_0(s,t) - \sum_{i=1}^m p_i(s)p_i(t), \qquad \vec{p}(t) = \big(p_1(t),\ldots,p_m(t)\big) := \vec{\psi}(t)\cdot B. \tag{3.3}$$

Формула (3.1) задает конечномерное возмущение ковариационного оператора. Задача о поведении спектра общего ковариационного оператора при одномерном возмущении рассматривалась в работе [66], соответствующие теоремы при конечномерном возмущении доказаны в главе 1.

Замечание 3.2. *По теореме 1.3 все рассматриваемые процессы являются критическими в смысле определения 1.3. Для таких процессов при условии $\psi_j''(t) \in L_2(0,1)$, $j = 1,\ldots,m$, задача решена в* [66, *теорема* 2] *для одномерных возмущений и в главе* 1 [*теорема* 1.2] *для конечномерных возмущений. Однако, все рассматриваемые процессы* (*кроме $X^{(1)}$ для логистического распределения*) *этому условию не удовлетворяют.*

В данной главе мы будем рассматривать процессы Дурбина, возникающие при проверке выборки на принадлежность к следующим распределениям с параметрами $\theta = (\theta_1,\theta_2)$. Обозначим α — параметр сдвига, $\beta > 0$ — параметр масштаба, $\varkappa > 0$ — параметр формы.

А. распределение Лапласа, $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LAP}(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\frac{x-\alpha}{\beta}), & x \leqslant \alpha; \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta}), & x > \alpha. \end{cases}$$

Б. логистическое распределение, $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{LOG}(x,\theta) = \big(1 + \exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\big)^{-1}.$$

В. нормальное распределение, $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{NOR}(x,\theta) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\beta^2}\right) dt.$$

Г. распределение Гумбеля, $\theta = (\alpha,\beta)$:

$$F^{GUM}(x,\theta) = \exp\big(-\exp\big(-\frac{x-\alpha}{\beta}\big)\big).$$

Д. гамма-распределение, $\theta = (\beta,\varkappa)$:

$$F^{GAM}(x,\theta) = \begin{cases} \int\limits_0^{x/\beta} \frac{y^{\varkappa-1}e^{-y}}{\Gamma(\varkappa)}\,dy, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Каждому распределению соответствует три предельных случайных процесса:

1) Первый параметр известен, а второй оценивается по выборке.

2) Второй параметр известен, а первый оценивается по выборке.

3) Оба параметра оцениваются по выборке.

По формуле (3.1) в качестве предельных процессов возникают гауссовские процессы $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, с нулевыми средними и функциями ковариации $G_i(s,t)$:

$$\textbf{1)}\ G_1(s,t) = G_0(s,t) - p_1(s)p_1(t), \tag{3.4}$$

$$\textbf{2)}\ G_2(s,t) = G_0(s,t) - p_2(s)p_2(t), \tag{3.5}$$

$$\textbf{3)}\ G_3(s,t) = G_0(s,t) - \tilde{p}_1(s)\tilde{p}_1(t) - \tilde{p}_2(s)\tilde{p}_2(t), \tag{3.6}$$

где $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\tilde{p}_1(t)$, $\tilde{p}_2(t)$ выписываются явно из формул (3.1)–(3.3):

А. для распределения Лапласа, $\theta_0 = (0{,}1)$, выписаны в работе [4]:

$$p_1(t) = \tilde{p}_1(t) = \begin{cases} t, & t \in (0{,}1/2] \\ 1 - t, & t \in (1/2{,}1) \end{cases}, \tag{3.7}$$

$$p_2(t) = \tilde{p}_2(t) = \begin{cases} t\ln(2t), & t \in (0{,}1/2] \\ -(1-t)\ln(2(1-t)), & t \in (1/2{,}1) \end{cases}. \tag{3.8}$$

Б. для логистического распределения, $\theta_0 = (0{,}1)$, выписаны в работе [50]:

$$p_1(t) = \tilde{p}_1(t) = \sqrt{3}\, t(1-t), \tag{3.9}$$

$$p_2(t) = \tilde{p}_2(t) = \frac{3}{\sqrt{3+\pi^2}}\, t(t-1)\ln\Bigl(\frac{1-t}{t}\Bigr). \tag{3.10}$$

В. для нормального распределения, $\theta_0 = (0{,}1)$, выписаны в работе [37]:

$$p_1(t) = \tilde{p}_1(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t)), \tag{3.11}$$

$$p_2(t) = \tilde{p}_2(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))\frac{\Phi^{-1}(t)}{\sqrt{2}}, \tag{3.12}$$

где

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigl(-\frac{s^2}{2}\Bigr), \quad \Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(s)\, ds$$

— плотность и функция распределения стандартного нормального закона соответственно.

Г. для распределения Гумбеля, $\theta_0 = (0{,}1)$, выписаны в работе [49]:

$$p_1(t) = t\ln(t), \tag{3.13}$$

$$p_2(t) = -c^{-1}\, t\ln(t)\cdot\ln(-\ln(t)), \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{p}_1(t) & \tilde{p}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1(t) & p_2(t)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-\gamma)\frac{\sqrt{6}}{\pi} \\ 0 & \frac{c\sqrt{6}}{\pi} \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где $c = (\pi^2/6 + (\gamma-1)^2)^{1/2}$, γ – константа Эйлера.

Д. для гамма-распределения, $\theta_0 = (1,\varkappa_0)$, выписаны в работе [4]:

$$p_1(t) = \varkappa_0^{-1/2} \cdot (F^{GAM}(t,\theta_0))^{-1} \cdot f^{GAM}((F^{GAM}(t,\theta_0))^{-1},\theta_0), \qquad (3.16)$$

$$p_2(t) = d^{-1} \cdot \int\limits_0^{(F^{GAM}(t,\theta_0))^{-1}} \left(\ln(y) - \frac{\Gamma'(\varkappa_0)}{\Gamma(\varkappa_0)}\right) f(y,\theta_0)\, dy, \qquad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{p}_1(t) & \tilde{p}_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1(t) & p_2(t)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & -(\varkappa_0 d^2 - 1)^{-1/2} \\ 0 & \varkappa_0^{1/2} d\,(\varkappa_0 d^2 - 1)^{-1/2}\end{pmatrix}, \qquad (3.18)$$

$$d = \frac{\left[\Gamma''(\varkappa_0)\Gamma(\varkappa_0) - (\Gamma'(\varkappa_0))^2\right]^{1/2}}{\Gamma(\varkappa_0)}. \qquad (3.19)$$

Собственные числа ковариационных операторов с ядрами $G_i(s,t)$ обозначим $\mu_k^{(i)}$, $i = 0,1,2,3$. Заметим, что $\mu_k^{(0)} = (\pi k)^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Замечание 3.3. *Заметим, что для нормального, логистического распределения и распределения Лапласа функция $p_1(t)$ — четная относительно точки $t = 1/2$. Поэтому при возмущении (3.4) нечетные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Для простоты мы будем обозначать их $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k}^{(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, несмотря на то, что при этом нумерация в порядке убывания может быть нарушена. Аналогично в силу нечетности функции $p_2(t)$ относительно точки $t = 1/2$ при возмущении (3.5) четные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются, будем обозначать их $\mu_{2k-1}^{(2)} = \mu_{2k-1}^{(0)}$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко видеть, что $\mu_{2k}^{(3)} = \mu_{2k}^{(1)}$ и $\mu_{2k-1}^{(3)} = \mu_{2k-1}^{(2)}$.*

Замечание 3.4. *Матрица S положительно определена, поэтому квадратичная форма оператора (3.1) не превосходит квадратичной формы исходного оператора. Поэтому для собственных чисел $\mu_k^{(i)}$, $i = 1,2,3$, возмущенного и $\mu_k^{(0)}$ исходного операторов в силу минимаксимального принципа [57, §9.2] имеем $\mu_k^{(0)} \geqslant \mu_k^{(i)}$, $i = 1,2,3$, $k \in \mathbb{N}$. При одномерном возмущении оператора собственные числа $\mu_k^{(i)}$ и $\mu_k^{(0)}$ перемежаются.*

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C.

3.2 Уравнения на собственные числа

В общем случае одномерного возмущения алгоритм получения уравнения выписан в статье [66]. В случае, когда исходный процесс — это броуновский мост $B(t)$, а возмущение задается функцией $p(t)$, получаем уравнение на $\omega = \mu^{-1/2}$

$$\det{}_1(\omega) := \det \begin{bmatrix} \eta(1) & \eta(0) & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \int\limits_{1/2}^s p(s)p''(\tau)\frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega} d\tau ds \\ \cos(\omega) & 1 & \int\limits_0^1 p(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \\ \sin(\omega) & 0 & \int\limits_0^1 p(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau \end{bmatrix} = 0,$$

где $\eta(s) = \int\limits_{1/2}^{s} \frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega} p''(\tau)\, d\tau$. Определитель $\det_1(\omega)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\det{}_1(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{\omega}\Big[\big(C_0^P(\omega)\big)^2 + \big(C_1^P(\omega)\big)^2\Big] + \frac{2}{\omega} C_0^P(\omega) C_1^P(\omega) + \tag{3.20}$$
$$+ \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\big[I_0^P(\omega) + I_1^P(\omega)\big] - \frac{\sin(\omega)}{\omega^2} - \frac{\sin(\omega)(p'(1/2))^2}{\omega^2} = 0,$$

где $P = P(t) = p'(t) - p'(1/2)$, $t \in [0,1]$ и

$$C_0^P(\omega) := \int_0^{1/2} P(t)\cos(\omega t)\, dt; \qquad C_1^P(\omega) := \int_0^{1/2} P(1-t)\cos(\omega t)\, dt;$$
$$S_0^P(\omega) := \int_0^{1/2} P(t)\sin(\omega t)\, dt; \qquad S_1^P(\omega) := \int_0^{1/2} P(1-t)\sin(\omega t)\, dt;$$
$$I_0^P(\omega) := \int_0^{1/2}\int_0^t P(t)P(s)\sin(\omega t)\cos(\omega s)\, ds\, dt;$$
$$I_1^P(\omega) := \int_0^{1/2}\int_0^t P(1-t)P(1-s)\sin(\omega t)\cos(\omega s)\, ds\, dt.$$

При $P(t) \in C^\infty[0,1]$ асимптотика этих интегралов хорошо известна (метод стац. фазы, см. [78]). В наших примерах в качестве $P(t)$ возникают медленно меняющиеся функции в точке $t = 0$ и/или $t = 1$, имеющие особенности в этих точках. Асимптотика интегралов в этом случае выписана в параграфе 2.1.

В случае двумерного возмущения (3.6) уравнение на собственные числа выводится аналогично статье [66]. Продифференцируем два раза уравнение на собственные числа для интегрального оператора с ядром (3.6), получим ($\omega = \mu^{-1/2}$):

$$-u''(s) = \omega^2 \left[u(s) + \tilde{p}_1''(s) \int_0^1 \tilde{p}_1(t) u(t)\, dt + \tilde{p}_2''(s) \int_0^1 \tilde{p}_2(t) u(t)\, dt \right]. \qquad (3.21)$$

Общее решение примет вид:

$$u(s) = c_1 \eta_1(s) + c_2 \eta_2(s) + c_3 \cos(\omega s) + c_4 \sin(\omega s), \qquad (3.22)$$

где $\eta_i(s) = \int\limits_{1/2}^{s} \frac{\sin(\omega(s-\tau))}{\omega} \tilde{p}_i''(\tau)\, d\tau$, $i = 1{,}2$, — частное решение уравнения $-\eta_i''(s) = \omega^2 \eta_i(s) - \tilde{p}_i''(s)$.

Подставляя решение (3.22) в уравнение (3.21) и пользуясь линейной независимостью $\tilde{p}_1''(s)$ и $\tilde{p}_2''(s)$, получаем два уравнения ($i = 1{,}2$):

$$-\frac{c_1}{\omega^2} = c_1 \int_0^1 \tilde{p}_i(t) \eta_1(t) + c_2 \int_0^1 \tilde{p}_i(t) \eta_2(t)\, dt + \\ + c_3 \int_0^1 \tilde{p}_i(t) \cos(\omega t)\, dt + c_4 \int_0^1 \tilde{p}_i(t) \sin(\omega t)\, dt.$$

Эти два уравнения вместе с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ дают линейную систему на коэффициенты c_i, определитель которой равен нулю, а именно:

$$\det{}_2(\omega) := \det \begin{bmatrix} \eta_1(1) & \eta_1(0) & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \tilde{p}_1(s)\eta_1(s)\, ds & \int\limits_0^1 \tilde{p}_2(s)\eta_1(s)\, ds \\ \eta_2(1) & \eta_2(0) & \int\limits_0^1 \tilde{p}_1(s)\eta_2(s)\, ds & \frac{1}{\omega^2} + \int\limits_0^1 \tilde{p}_2(s)\eta_2(s)\, ds \\ \cos(\omega) & 1 & \int\limits_0^1 \tilde{p}_1(\tau)\cos(\omega\tau) d\tau & \int\limits_0^1 \tilde{p}_2(\tau)\cos(\omega\tau) d\tau \\ \sin(\omega) & 0 & \int\limits_0^1 \tilde{p}_1(\tau)\sin(\omega\tau) d\tau & \int\limits_0^1 \tilde{p}_2(\tau)\sin(\omega\tau) d\tau \end{bmatrix} = 0,$$

Определитель $\det_2(\omega)$ можно преобразовать к виду:

$$\det{}_2(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \\ \cdot \Big[\cos(\omega) \Big(-2\,(C_0^Q)^2 \cdot I^P + 2\,C_0^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} - 2\,(C_1^Q)^2 \cdot I^P + 2\,C_1^Q \cdot C_1^P \cdot I^{PQ} - 2\,I^Q((C_0^P)^2 + (C_1^P)^2) \Big) + \\ + \sin(\omega) \Big((C_0^Q)^2 \cdot (C_1^P)^2 - 2\,C_0^Q \cdot C_1^Q \cdot C_0^P \cdot C_1^P + (C_1^Q)^2 (C_0^P)^2 - 4\,I^Q \cdot I^P + (I^{PQ})^2 \Big) + \\ + (-4\,C_1^Q \cdot I^P + 2\,C_1^P \cdot I^{PQ}) \cdot C_0^Q - 4\,C_0^P \cdot C_1^P \cdot I^Q + 2\,C_1^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} \Big] = 0, \qquad (3.23)$$

где $P = P(t) = \tilde{p}_1'(t) - \tilde{p}_1'(1/2)$, $Q = Q(t) = \tilde{p}_2'(t) - \tilde{p}_2'(1/2)$, $t \in [0,1]$, и

$$I^P(\omega) := I_0^P(\omega) + I_1^P(\omega) - \frac{(\tilde{p}_1'(1/2))^2 + 1}{2\omega};$$
$$I^Q(\omega) := I_0^Q(\omega) + I_1^Q(\omega) - \frac{(\tilde{p}_2'(1/2))^2 + 1}{2\omega};$$
$$I_0^{QP}(\omega) := \int_0^{1/2}\int_0^t Q(t)P(s)\cos(\omega s)\sin(\omega t)\,ds\,dt;$$
$$I_1^{QP}(\omega) := \int_0^{1/2}\int_0^t Q(1-t)P(1-s)\cos(\omega s)\sin(\omega t)\,ds\,dt;$$
$$I^{PQ}(\omega) := I_0^{QP}(\omega) + I_0^{PQ}(\omega) + I_1^{QP}(\omega) + I_1^{PQ}(\omega) - \frac{\tilde{p}_1'(1/2)\,\tilde{p}_2'(1/2)}{\omega}.$$

3.3 Процессы Дурбина для распределения Лапласа

Теорема 3.1. *Собственные числа* $\mu_k^{(i)}$ *ковариационных операторов, соответствующих процессам* $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, *возникающим при проверке на распределение Лапласа, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$ (*т.е.* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)}/\tilde{\mu}_k^{(i)} < \infty$), *где*

1) $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(1)} = \tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$; **3)** $\tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$.

Доказательство. **1)** Для ковариационного оператора с ядром $G_1(s,t)$ задачу на собственные числа μ можно записать следующим образом (здесь $\omega = \mu^{-1/2}$, $u(t)$ – собственная функция):

$$\begin{aligned}
t \in (0,1/2):&\qquad -u''(t) = \omega^2 u(t), \quad u(0) = 0,\\
t \in (1/2,1):&\qquad -u''(t) = \omega^2 u(t), \quad u(1) = 0,\\
&\qquad u(1/2-) = u(1/2+),\\
&\qquad \frac{1}{\omega^2}[u'(1/2+) - u'(1/2-)] = 2\int_0^{1/2} su(s)\,ds + 2\int_{1/2}^1 (1-s)u(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Решая задачу явным образом, получаем, что $\omega_{2k}^{(1)} = \omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Замечание 3.5. *В данном случае получается точное равенство* $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k-1}^{(1)} = (2\pi k)^{-2}$, *а не асимптотическое. Таким образом, все собственные числа имеют кратность 2. Этот факт можно объяснить так: этому случаю соответствует броуновский мост* $B(t)$, *«зажатый» в точке* $t = 1/2$, *т.е.* $B(1/2) = 0$, *что эквивалентно двум независимым броуновским мостам, определенным при* $t \in [0,1/2]$ *и* $t \in [1/2,1]$ *соответственно.*

2) По замечанию 3.3 возмущение $p_2(t)$, определенное в (3.8), является нечетной функцией (отн. точки $t = 1/2$), поэтому четные собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Будем рассматривать задачу на собственные значения только для нечетных собственных функций $u(t)$, поэтому при $t \in (0,1/2)$ имеем:

$$-\mu u''(t) = u(t) + 2\,p_2''(t)\int_0^{1/2} p_2(s)\,u(s)\,ds, \quad u(0) = 0, \quad u(1/2) = 0. \tag{3.24}$$

Рассмотрим функции $\breve{u}(s) = u(s/2)$, $\breve{p}_2(s) = s\ln(s) = 2\,p_2(s/2)$, заданные при $s \in [0,1]$. Перепишем уравнение (3.24) через функции $\breve{u}(s), \breve{p}_2(s)$:

$$-\breve{\mu}\breve{u}''(t) = \breve{u}(t) + \breve{p}_2''(t)\int_0^1 \breve{p}_2(s)\breve{u}(s)\,ds, \qquad \breve{u}(0) = 0, \qquad \breve{u}(1) = 0, \tag{3.25}$$

где $t \in [0,1]$, $\breve{\mu} = 4\mu$. Пусть $1/\breve{\mu} = \breve{\omega}^2$, $1/\mu = \omega^2$, тогда $\omega = 2\breve{\omega}$. Уравнение (3.25) сводится к (3.20) при

$$P(t) = \breve{p}_2'(t) - \breve{p}_2'(1/2) \underset{(3.8)}{=} \ln(2t).$$

Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\breve{\omega})$, $C_1^P(\breve{\omega})$, $I_0^P(\breve{\omega})$, $I_1^P(\breve{\omega})$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 1$ (как будет ясно из теоремы 3.2, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_0^P(\breve{\omega}) = -\frac{\pi}{2\breve{\omega}} + O\left(\frac{1}{\breve{\omega}^2}\right); \qquad C_1^P(\breve{\omega}) = O\left(\frac{1}{\breve{\omega}^2}\right);$$
$$I_0^P(\breve{\omega}) = \frac{1}{2\breve{\omega}} + O\left(\frac{1}{\breve{\omega}^3}\right); \qquad I_1^P(\breve{\omega}) = \frac{\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1}{2\breve{\omega}} + O\left(\frac{1}{\breve{\omega}^3}\right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение

$$0 = \det{}_1 = \frac{\pi^2}{4}\frac{\cos(\breve{\omega})}{\breve{\omega}^3} + O\Big(\frac{1}{\breve{\omega}^4}\Big). \tag{3.26}$$

Отсюда для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\breve{\omega}_{2k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \text{ поэтому } \omega_{2k+k_0} = 2\pi k + \pi + O\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

По замечанию 3.4 собственные числа возмущенного оператора $\mu_k^{(2)}$ и собственные числа исходного оператора $\mu_k^{(0)}$ перемежаются, поэтому $k_0 = 0$ и утверждение теоремы в этом случае доказано.

3) Утверждение теоремы в этом случае следует из замечания 3.3. ■

Теорема 3.2. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, *в случае проверки на распределение Лапласа* ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathbf{1})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{2})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$

$$\mathbf{3})\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Доказательство.

Применим принцип сравнения Ли (предложение 3 из приложения).
В случаях **1)** и **2)** в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\gamma_k := \big[(k + 1/2)\,\pi\big]^{-2}. \tag{3.27}$$

Известно, что (см. предложение 5 из приложения)

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\;\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big). \tag{3.28}$$

Найдем константу «расхождения» из (4.13). Для этого рассмотрим:

$$\mathbf{1})\ \left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2\pi)^2\cdot(4\pi)^2\cdot\ldots\cdot(2k\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k-1)\pi}{2}\cdot\frac{(4k+1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{2})\ \left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\tilde{\mu}_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{3.29}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\tilde{\mu}_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\pi\cdot(3\pi)^2\cdot(5\pi)^2\cdot\ldots\cdot((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k+3)\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.30}$$

Заметим, что последовательности $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ и $\tilde{\omega}_k^{(2)} = (\tilde{\mu}_k^{(2)})^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_1(\omega)$ определен в формуле (3.26)):

$$H_1(\omega) = -\frac{\omega}{2} \cdot \det\nolimits_1(\omega) \cdot \cos(\omega/2); \qquad H_2(\omega) = \frac{\cos^2(\omega/2)}{1 - \frac{\omega^2}{\pi^2}}; \qquad H_1(0) = H_2(0) = 1.$$

Воспользуемся леммой В из приложения, получаем:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}} \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}} \left(\frac{\cos^2(\omega/2)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{\pi^2}{4}\, \frac{\omega}{2}\, \frac{\cos^2(\omega/2)}{(\omega/2)^3} \right] \right) = \frac{1}{4},$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ρ_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\rho_k := \big[(k+1)\,\pi\big]^{-2}. \tag{3.31}$$

Известно, что (см. предложение 5 из приложения)

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{5/2}}\ \varepsilon^{-2} \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big). \tag{3.32}$$

Найдем константу «расхождения». Комбинируя результаты случаев **1**) и **2**), получаем:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{\mu_k^{(3)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

откуда, используя формулу (3.32), получаем утверждение теоремы в этом случае. ∎

3.4 Процессы Дурбина для логистического распределения

Теорема 3.3. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, возникающим при проверке на* *логистическое распределение, «асимптотически близки» к числам* $\tilde{\mu}_k^{(i)}$ *(т.е.* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)}/\tilde{\mu}_k^{(i)} < \infty$*), где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}$; **2)** $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)} = \tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$;
3) $\tilde{\mu}_{2k-1}^{(3)} = \tilde{\mu}_{2k}^{(3)} = ((2k+1)\,\pi)^{-2}$.

Доказательство. **1)** В этом случае $p_1''(t) \in L_2(0,1)$, поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 2 статьи [66].

2) Уравнение на $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2) \underset{(3.10)}{=} \frac{3}{\sqrt{3+\pi^2}}\,(2t-1)\ln\left(\frac{1-t}{t}\right).$$

Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $C_1^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N=1$ (как будет ясно из теоремы 3.4, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_0^P(\omega) = C_1^P(\omega) = -\frac{\pi}{2}\frac{3}{\sqrt{3+\pi^2}}\frac{1}{\omega} + O\left(\frac{\ln(\omega)}{\omega^2}\right);$$
$$I_0^P(\omega) = I_1^P(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(s)\,ds + O\left(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение

$$0 = \det{}_1(\omega) = \frac{2(\cos(\omega)+1)}{\omega}\left[\frac{9\pi^2}{4(3+\pi^2)}\frac{1}{\omega^2} + O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\Big)\right] + \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\cdot O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\Big). \tag{3.33}$$

После преобразований получаем:

$$\cos(\omega/2) = 0 \qquad \text{или} \qquad \cos(\omega/2) = O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega}\Big).$$

Корни уравнения $\cos(\omega/2) = 0$ соответствуют $\omega_{2k-1}^{(2)} = (2k-1)\,\pi$, а корни второго уравнения $\cos(\omega/2) = O\Big(\frac{\ln(\omega)}{\omega}\Big)$ соответствуют $\omega_{2k}^{(2)} = (2k+1)\pi + O\big(\frac{1}{k}\big)$ (такая нумерация следует из замечания 3.4).

3) Утверждение теоремы в этом случае следует из замечания 3.3. ■

Теорема 3.4. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, *в случае проверки на логистическое распределение* ($\varepsilon \to 0$):

$$\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\;\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$
$$\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{3+\pi^2}}{3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\;\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);$$
$$\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4\sqrt{15(3+\pi^2)}}{3\,\pi^{3/2}}\;\varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Доказательство. **1)** В данном случае $p_1''(t) \in L_2(0,1)$, поэтому по теореме 3 из работы [66] вероятность малых уклонений можно найти по формуле:

$$\mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{1}{\|p_1''\|}\,(2\varepsilon^2)^{-1}\,\mathbb{P}\Big\{\|B\|_2 < \varepsilon\Big\} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\pi}}\;\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big), \qquad \varepsilon \to 0.$$

В случаях **2**) и **3**) применим принцип сравнения Ли (предложение 3 из приложения). **2)** В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора γ_k, определенными в (3.27). Найдем константу «расхождения». Аналогично случаю **2)** теоремы 3.2 получаем формулы (3.29) и (3.30). Найдем $\prod \tilde{\mu}_k^{(2)}/\mu_k^{(2)}$. Заметим, что последовательности $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ и $\tilde{\omega}_k^{(2)} = (\tilde{\mu}_k^{(2)})^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_1(\omega)$ определен в формуле (3.33)):

$$H_1(\omega) = -\omega\cdot\det{}_1(\omega); \qquad H_2(\omega) = \frac{\cos^2(\omega/2)}{1-\frac{\omega^2}{\pi^2}}; \qquad H_1(0) = H_2(0) = 1.$$

Воспользуемся леммой B из приложения, получаем:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\mu}_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos^2(\omega/2)}{1-(\frac{\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{9\pi^2}{(3+\pi^2)}\frac{\cos^2(\omega/2)}{\omega^2}\right]\right) = \frac{3+\pi^2}{9}, \tag{3.34}$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами β_k ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\beta_k := \big[(k+3/2)\,\pi\big]^{-2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Известно, что (см. предложение 5 из приложения)

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\xi_k^2<\varepsilon^2\Big\}\sim\frac{4}{3\pi^{5/2}}\,\varepsilon^{-3}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).$$

Найдем константу «расхождения». Введем последовательность: $\alpha_{2k-1}=\alpha_{2k}=[(2k+1)\pi]^{-2}$, $k\in\mathbb{N}$. Имеем

$$\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\mu_k^{(3)}}\Bigg)^{\frac12}=\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\mu_k^{(3)}}\Bigg)^{\frac12}\cdot\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigg)^{\frac12}=$$

$$=\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\Bigg)^{\frac12}\cdot\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Bigg)^{\frac12}\cdot\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigg)^{\frac12}.$$

Из [66, формула (2.10)], (3.34) и (3.30) получаем

$$\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k-1}}{\mu_{2k-1}^{(1)}}\Bigg)^{\frac12}=\sqrt{30}\,\pi;\qquad\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\Bigg)^{\frac12}=\frac{\sqrt{3+\pi^2}}{3};\qquad\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Bigg)^{\frac12}=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

откуда следует утверждение теоремы в этом случае. ■

3.5 Процессы Каца–Кифера–Вольфовица

Процессы Дурбина, возникающие как предельные в задаче о построении критериев согласия типа омега-квадрат для проверки выборки на нормальность в случае, когда математическое ожидание и/или дисперсия оцениваются по выборке, впервые были рассмотрены в работе М. Каца, Дж. Кифера и Дж. Вольфовица [37].

Теорема 3.5. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, возникающим при проверке на нормальное распределение, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$ (т.е. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{(i)}/\tilde{\mu}_k^{(i)}<\infty$), где*

1) $\tilde{\mu}_{2k}^{(1)}=(2\pi k)^{-2}$, $\quad\tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)}=\Big(2\pi k+\dfrac{\pi}{\ln(k)}\Big)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_1^{(2)}=\pi$, $\quad\tilde{\mu}_{2k}^{(2)}=\tilde{\mu}_{2k+1}^{(2)}=((2k+1)\,\pi)^{-2}$;

3) $\tilde{\mu}_{2k}^{(2)}=((2k+1)\,\pi)^{-2}$; $\quad\tilde{\mu}_{2k-1}^{(1)}=\Big(2\pi k+\dfrac{\pi}{\ln(k)}\Big)^{-2}$.

Доказательство. **1)** Согласно замечанию 3.3 имеем $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k}^{(0)} = (2\pi k)^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Уравнение на $\omega_{2k-1}^{(1)} = (\mu_{2k-1}^{(1)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_1'(t) - p_1'(1/2) \underset{(3.11)}{=} \Phi^{-1}(t).$$

Обозначим для удобства $\mathcal{F}_0(t) := \Phi^{-1}(t)$, $\mathcal{F}_{n+1}(t) := t\mathcal{F}_n'(t)$, $n \geqslant 0$, и заметим, что согласно теореме 2.4 для функций $F = H = \mathcal{F}_0$ справедливы теоремы 2.1–2.3. Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $C_1^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 2$ (как будет ясно из теоремы 3.6, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_0^P(\omega) = C_1^P(\omega) = -\frac{\pi}{2}\frac{\mathcal{F}_1}{\omega} + \frac{\gamma\pi}{2}\frac{\mathcal{F}_2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3|}{\omega}\right),$$
$$I_0^P(\omega) = I_1^P(\omega) = \frac{1}{4\omega} + \frac{\pi^3}{8}\frac{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\omega^2}\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера, и у всех $\mathcal{F}_n$ аргумент равен $\frac{1}{\omega}$. Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение $\det_1(\omega) = 0$, где

$$\det_1(\omega) = \frac{\pi^2}{2\omega^3}\mathcal{F}_1^2\left[\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\gamma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} - \pi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right)\right].$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right), \tag{3.35}$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $\frac{1}{\omega}$. Поскольку правая часть стремится к нулю при $\omega \to \infty$, в окрестности точки $2\pi k$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения.

Согласно замечаниям 3.3–3.4 имеем $\mu_{2k}^{(1)} = \mu_{2k}^{(0)}$ и $\mu_{2k-1}^{(1)} \leqslant \mu_{2k-1}^{(0)}$. Поэтому $\omega_{2k}^{(1)} = 2\pi k$ и $\omega_{2k-1}^{(1)} \geqslant \pi(2k-1)$. Из этих фактов и перемежаемости собственных чисел следует, что на промежутке $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ располагаются $\omega_{2k-1}^{(1)}$ и $\omega_{2k}^{(1)}$. Значит, в окрестности $2\pi k$ лежит корень $\omega_{2k-1}^{(1)}$ уравнения (3.35).

Стандартными методами получаем асимптотику $\omega_{2k-1}^{(1)}$ при $k \to \infty$:

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + 2\pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $\dfrac{1}{2\pi k}$. В силу соотношений (2.15), (2.16)–(2.18) имеем $\omega \to \infty$

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{\mathcal{F}_0} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^3}\right), \quad \mathcal{F}_2 = -\frac{1}{\mathcal{F}_0^3} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), \quad \mathcal{F}_3 = O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), \qquad (3.36)$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $\frac{1}{\omega}$. Отсюда

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0^2(\frac{1}{2\pi k})} + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(\frac{1}{2\pi k})}\right).$$

Известно, что (см., например, [19])

$$\mathcal{F}(x) = \Phi^{-1}(x) = -\sqrt{-2\ln(x)} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}\right)\right], \qquad x \to 0.$$

Поэтому

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{\pi}{\ln(k)} + O\left(\frac{\ln(\ln(k))}{\ln^2(k)}\right). \qquad (3.37)$$

2) Согласно замечанию 3.3 имеем $\mu_{2k-1}^{(2)} = \mu_{2k-1}^{(0)} = (\pi(2k-1))^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$. Уравнение на $\omega_{2k}^{(2)} = (\mu_{2k}^{(2)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2) \underset{(3.12)}{=} \left(\Phi^{-1}(t)\right)^2.$$

Согласно замечанию 2.2 для функций $F = H = \mathcal{F}_0^2$ справедливы теоремы 2.1–2.3. Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $C_1^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 2$ (как будет ясно из теоремы 3.6, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$\begin{aligned} C_0^P(\omega) = -C_1^P(\omega) = &-\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1}{\omega} + \gamma\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2|}{\omega}\right), \\ I_0^P(\omega) = I_1^P(\omega) = &\frac{3}{4\omega} + \frac{\pi^3}{2}\frac{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^3}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Здесь γ — константа Эйлера, и у всех $\mathcal{F}_n$ аргумент равен $\frac{1}{\omega}$. Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение $\det_1(\omega) = 0$, где

$$\begin{aligned} \det\nolimits_1(\omega) = \frac{\pi^2}{\omega^3}(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1)^2 \Bigg[&-\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2\gamma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} - \\ &-\pi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + |\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right)\Bigg]. \end{aligned} \qquad (3.38)$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2+\mathcal{F}_1^4+\mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3|+|\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $\frac{1}{\omega}$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что в окрестности $2\pi k+\pi$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения с номером $\omega_{2k}^{(2)}$. Его асимптотика:

$$\omega_{2k}^{(2)} = \pi+2\pi k-\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2+\mathcal{F}_1^4+\mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3|+|\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $\dfrac{1}{\pi(2k+1)}$. В силу (3.36) имеем

$$\omega_{2k}^{(2)} = \pi+2\pi k+O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(\frac{1}{\pi(2k+1)})}\right) = \pi(2k+1)+O\left(\frac{1}{\ln^2(k)}\right).$$

3) Утверждение теоремы в этом случае следует из замечания 3.3. ■

Теорема 3.6. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, *в случае проверки на нормальное распределение* ($\varepsilon\to 0$):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\|<\varepsilon\Big\} \sim C_1\cdot\varepsilon^{-1}\cdot\ln^{\frac12}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\|<\varepsilon\Big\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\
&\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\|<\varepsilon\Big\} \sim C_2\cdot\varepsilon^{-2}\cdot\ln^{\frac12}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).
\end{aligned}$$

Замечание 3.6. *В случаях* **1**) *и* **3**) *мультипликативные константы* C_1 *и* C_2 *найти пока не удалось.*

Доказательство.

Применим принцип сравнения Ли (предложение 3 из приложения).

1) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами Λ_k ковариационного оператора ($k\in\mathbb{N}$):

$$\Lambda_k := \left[\pi\Big(k+\frac12+\frac{1}{2\ln(k+1)}\Big)\right]^{-2}.$$

Убедимся, что $\prod \mu_k^{(1)}/\Lambda_k$ сходится. Для этого определим

$$\tau_{2k} := \big(2\pi k\big)^{-2},\qquad \tau_{2k-1} := \left[\pi\Big(2k+\frac{1}{\ln(k+1)}\Big)\right]^{-2},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Имеем

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^{(1)}}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^{(1)}}{\tau_k}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k}{\Lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.39)$$

Первое произведение в (3.39) сходится, поскольку в силу (3.37)

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+O\Big(\frac{\ln\ln(k)}{k\ln^2(k)}\Big)\Big)<\infty.$$

Второе произведение представим в виде

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_{2k}\tau_{2k-1}}{\Lambda_{2k}\Lambda_{2k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln(2k+1)}\right)\left(2k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\ln(2k)}\right)}{2k(2k+\frac{1}{\ln(k+1)})}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{4k}\Big(\frac{1}{\ln(2k+1)}+\frac{1}{\ln(2k)}-\frac{2}{\ln(k+1)}\Big)+O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big)=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+O\Big(\frac{1}{k\ln^2(k)}\Big)\Big)<\infty.$$

Применяя теорему 2.5, получаем утверждение теоремы в этом случае.

2) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k ковариационного оператора, определенных в (3.27). Для того, чтобы найти константу «расхождения» из (4.13), дополнительно введем

$$\nu_1:=\pi^{-2},\quad \nu_{2k}=\nu_{2k+1}:=\Big[(2k+1)\pi\Big]^{-2}.$$

Тогда

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\nu_k}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_k}{\mu_k^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\nu_k}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\nu_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Первое бесконечное произведение легко считается по формуле Стирлинга:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\nu_k}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi\cdot(3\pi)^2\cdot(5\pi)^2\cdot\ldots\cdot((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(4k+3)\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $\nu_{2k}^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\mu_{2k}^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}}=\omega_{2k}^{(2)}$ есть корни целых функций ($\det_1(\omega)$ определен в формуле (3.38))

$$M(\omega):=\frac{\cos(\frac{\omega}{2})}{1-\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2}\quad\text{и}\quad \mathcal{D}(\omega):=\omega\cdot\det\nolimits_1(\omega),\quad \omega\in\mathbb{C},$$

причем эти корни достаточно близки. Заметим также, что $M(0) = \mathcal{D}(0) = 1$. Воспользуемся леммой В из приложения. Получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k \\ k\to\infty}} \frac{M(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)},$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Тогда, пользуясь формулами (3.36) и (3.38), имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_{2k}}{\mu_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k\to\infty}} \frac{M(\omega)}{\omega D_2(\omega)} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k\to\infty}} \left(\mathcal{F}_0\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\mathcal{F}_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right)^2 = 1. \tag{3.40}$$

В итоге из формул (4.13), (3.28)–(3.40) получаем утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами $\tilde{\Lambda}_k$ ковариационного оператора ($k \in \mathbb{N}$):

$$\tilde{\Lambda}_k := \left[\pi\Big(k + 1 + \frac{1}{2\ln(k+1)}\Big)\right]^{-2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство аналогично случаю **1)**. ∎

3.6 Процессы Дурбина для распределения Гумбеля

Теорема 3.7. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i = 1{,}2{,}3$, возникающим при проверке на распределение Гумбеля, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$ (т.е. $\prod_{k=1}^{\infty} \mu_k^{(i)}/\tilde{\mu}_k^{(i)} < \infty$), где*

1) $\tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k + 1/2)\,\pi)^{-2}$;

2) $\tilde{\mu}_k^{(2)} = \big((k + 1/2)\,\pi + r_k\big)^{-2}$,

$$r_k = (-1)^k \cdot 2\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{\ln(\ln(k)) + 1}\Big) - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))};$$

3) $\tilde{\mu}_k^{(3)} = \big((k+1)\,\pi + r_k\big)^{-2}, \quad r_k = 2\pi\,\dfrac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)} + \pi\,\dfrac{(-1)^k}{\ln(k)}$.

Доказательство. **1)** Уравнение на собственные числа $\mu_k^{(1)}$ совпадает с уравнением (3.25), откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

2) Уравнение на $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2) \underset{(3.14)}{=} -c^{-1}\big[\ln(-\ln(s)) + \ln(s)\cdot\ln(-\ln(s)) - \\ - \ln(\ln(2)) + \ln(2)\cdot\ln(\ln(2))\big], \tag{3.41}$$

где $c = (\pi^2/6 + (\gamma-1)^2)^{1/2}$. Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N=2$, и асимптотики интегралов $C_1^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$ — при $N=1$ (как будет ясно из теоремы 3.8, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_0^P(\omega) = \frac{\pi}{2c\,\omega}\left[1 + \ln(\ln(\omega)) - \frac{1}{\ln(\omega)}\right] + \frac{\gamma\pi}{2c}\frac{1}{\omega\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega\ln^2(\omega)}\right);$$

$$C_1^P(\omega) = \frac{\pi}{2c\,\omega} + O\left(\frac{\ln(\omega)}{\omega^2}\right);$$

$$I_0^P(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(s)\,ds - \frac{\pi^3}{8c^2}\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right);$$

$$I_1^P(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(1-s)\,ds + O\left(\frac{\ln(\omega)}{\omega^3}\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера. Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение

$$0 = \det{}_1(\omega) = \frac{\pi^2}{4c^2\omega^3}\Big(\cos(\omega)\Big[(\ln(\ln(\omega)))^2 + 2\ln(\ln(\omega)) + 2 + 2(\gamma-1)\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}\Big] - \\ - \sin(\omega)\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)} + 2\ln(\ln(\omega)) + 2 + O\Big(\frac{1}{\ln(\omega)}\Big)\Big).$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\cos(\omega) = \frac{\sin(\omega)\cdot\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)} - 2\ln(\ln(\omega)) - 2}{(\ln(\ln(\omega)))^2 + 2\ln(\ln(\omega)) + 2 + 2(\gamma-1)\cdot\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)}} + O\Big(\frac{1}{\ln(\omega)(\ln(\ln(\omega)))^2}\Big).$$

Так как правая часть стремится к 0 при $\omega\to\infty$, то для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$ имеем $\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + r_k$, $r_k\to 0$. Стандартными приемами асимптотического метода решения уравнений получаем:

$$\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + (-1)^k\cdot 2\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{\ln(\ln(k))+1}\Big) - \\ - \frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))} + O\Big(\frac{1}{\ln(k)(\ln(\ln(k)))^2}\Big).$$

По замечанию 3.4 имеем $k_0 = 0$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

3) Уравнение на $\omega_k^{(3)} = (\mu_k^{(3)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.23) для

$$P(t) = \tilde{p}_1'(t) - \tilde{p}_1'(1/2) \underset{(3.15)}{=} p_1'(t) - p_1'(1/2) \underset{(3.13)}{=} \ln(2t);$$

$$Q(t) = \tilde{p}_2'(t) - \tilde{p}_2'(1/2) \underset{(3.15)}{=} \frac{\sqrt{6}}{\pi}\big[(1-\gamma)\ln(2t) + c(p_2'(t) - p_2'(1/2))\big],$$

где выражение $p_2'(t) - p_2'(1/2)$ определено в формуле (3.41). Запишем асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $C_1^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, $C_1^Q(\omega)$, $I_1^Q(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 1$, и асимптотики интегралов $C_0^Q(\omega)$, $I_0^Q(\omega)$ — при $N = 2$, (как будет ясно из теоремы 3.8, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_0^P(\omega) = -\frac{\pi}{2\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right);$$

$$C_1^P(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right);$$

$$C_0^Q(\omega) = \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega} + \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\gamma}{\omega} + \frac{\sqrt{6}(\gamma-1)}{2}\frac{1}{\omega\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega\ln^2(\omega)}\right);$$

$$C_1^Q(\omega) = \frac{\sqrt{6}}{2\omega} + O\left(\frac{\ln(\omega)}{\omega^2}\right);$$

$$I_0^P(\omega) = \frac{1}{2\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right);$$

$$I_1^P(\omega) = \frac{\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1}{2\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right);$$

$$I_0^Q(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} Q^2(s)\,ds + \frac{3\pi}{4\omega^2}\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)} - \frac{3\pi}{4\omega^2}\frac{\gamma}{\ln(\omega)} + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega\ln^2(\omega)}\right);$$

$$I_1^Q(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} \tilde{Q}^2(s)\,ds + O\left(\frac{L}{\omega^3}\right).$$

Тогда получаем

$$I^P = I_0^P(\omega) + I_1^P(\omega) - \frac{(\tilde{p}_1'(1/2))^2 + 1}{2\omega} = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right);$$

$$I^Q = I_0^Q(\omega) + I_1^Q(\omega) - \frac{(\tilde{p}_2'(1/2))^2 + 1}{2\omega} =$$
$$= \frac{3\pi}{4\omega^2}\frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)} - \frac{3\pi}{4\omega^2}\frac{\gamma}{\ln(\omega)} + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega\ln^2(\omega)}\right).$$

Асимптотики интегралов $I_0^{PQ}(\omega)$, $I_0^{QP}(\omega)$ могут быть найдены из теоремы 2.3 при $N=2$, а асимптотики интегралов $I_1^{PQ}(\omega)$, $I_1^{QP}(\omega)$ — при $N=1$ (как будет ясно из теоремы 3.8, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$I_0^{PQ} = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} Q(t)P(t)\,dt + \frac{a_{2,1}\sqrt{6}}{\pi\omega^2\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right);$$

$$I_0^{QP} = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} Q(t)P(t)\,dt + \frac{a_{1,2}\sqrt{6}}{\pi\omega^2\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right);$$

$$I_1^{PQ} = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} Q(1-t)P(1-t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right);$$

$$I_1^{QP} = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right);$$

$$\begin{aligned} I^{PQ} &= I_0^{QP}(\omega) + I_0^{PQ}(\omega) + I_1^{QP}(\omega) + I_1^{PQ}(\omega) - \frac{p_1'(1/2)p_2'(1/2)}{\omega} = \\ &= \frac{\pi^2\sqrt{6}}{8\omega^2\ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right). \end{aligned}$$

Найдем самое старшее слагаемое в асимптотике:
слагаемые при $\cos(\omega)$

$$\begin{aligned}
(C_0^Q)^2\cdot I^P &= \left[O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\right]^2\cdot O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) &&= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^5}\right);\\
C_0^Q\cdot C_0^P\cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4\ln(\omega)}\right);\\
(C_1^Q)^2\cdot I^P &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2\cdot O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) &&= O\left(\frac{1}{\omega^5}\right);\\
C_1^Q\cdot C_1^P\cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{1}{\omega^5\ln(\omega)}\right);\\
(C_0^P)^2\cdot I^Q &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2\cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4\ln(\omega)}\right);\\
(C_1^P)^2\cdot I^Q &= \left[O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right]^2\cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^6\ln(\omega)}\right).
\end{aligned}$$

слагаемые при $\sin(\omega)$

$$\begin{aligned}
(C_0^Q)^2\cdot(C_1^P)^2 &= \left[O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\right]^2\cdot\left[O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right]^2 && = O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^6}\right);\\
C_0^Q\cdot C_1^Q\cdot C_0^P\cdot C_1^P &= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\cdot\left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) && = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^5}\right);\\
(C_1^Q)^2(C_0^P)^2 &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2\cdot\left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 && = O\left(\frac{1}{\omega^4}\right);\\
I^Q\cdot I^P &= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln(\omega)}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) && = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^5\ln(\omega)}\right);\\
(I^{PQ})^2 &= \left[O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right)\right]^2 && = O\left(\frac{1}{\omega^4\ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}$$

слагаемые без $\sin(\omega)$ и $\cos(\omega)$

$$\begin{aligned}
C_0^Q\cdot C_1^Q\cdot I^P &= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) && = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^5}\right);\\
C_0^Q\cdot C_1^P\cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right) && = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^5\ln(\omega)}\right);\\
C_0^P\cdot C_1^P\cdot I^Q &= O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln(\omega)}\right) && = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^5\ln(\omega)}\right);\\
C_1^Q\cdot C_0^P\cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot O\left(\frac{1}{\omega^2\ln(\omega)}\right) && = O\left(\frac{1}{\omega^4\ln(\omega)}\right).
\end{aligned}$$

Значит главные слагаемые — с ω^4 в знаменателе, поэтому уравнение (3.23) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\cos(\omega)\left(2C_0^Q\cdot C_0^P\cdot I^{PQ}-2I^Q(C_0^P)^2\right)+\sin(\omega)\left((C_1^Q)^2(C_0^P)^2+(I^{PQ})^2\right)+\\
&+2C_1^Q\cdot C_0^P\cdot I^{PQ}=O\left(\frac{L(\omega)}{\omega^5}\right),
\end{aligned}$$

где $L(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega\to\infty$. Так как самое большое слагаемое — перед $\sin(\omega)$ и имеет порядок $1/\omega^4$, то нам достаточно найти асимптотику остальных слагаемых с точностью до

$$O\left(\frac{\ln^k(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\right)$$

для некоторого k. После некоторых преобразований, получаем:

$$
\begin{aligned}
C_0^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} &= -\frac{\pi^3 \cdot 3}{16} \cdot \frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln(\omega)} - \gamma \frac{\pi^3 \cdot 3}{16} \frac{1}{\omega^4 \ln(\omega)} + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right); \\
I^Q (C_0^P)^2 &= \frac{\pi^3 \cdot 3}{16} \frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln(\omega)} - \frac{\pi^3 \cdot 3}{16} \frac{\gamma}{\omega^4 \ln(\omega)} + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right); \\
(C_1^Q)^2 (C_0^P)^2 &= \frac{3\pi^2}{8} \frac{1}{\omega^4} + O\left(\frac{1}{\omega^5}\right); \\
(I^{PQ})^2 &= O\left(\frac{1}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right); \\
C_1^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} &= -\frac{\pi^3 \cdot 3}{16} \frac{1}{\omega^4 \ln(\omega)} + O\left(\frac{1}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Учитывая полученные асимптотические равенства, уравнение (3.23) примет вид:

$$
0 = \det_2(\omega) = \frac{3\pi^3}{4} \frac{\cos(\omega)}{\omega^4} \frac{\ln(\ln(\omega))}{\ln(\omega)} + \frac{3\pi^2}{8} \frac{\sin(\omega)}{\omega^4} - \frac{3\pi^3}{8} \frac{1}{\omega^4 \ln(\omega)} + O\Big(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\Big).
$$

Отсюда, после преобразований, получаем для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}$:

$$
\omega_{k+k_0} = \pi k + 2\pi \frac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)} + \pi \frac{(-1)^k}{\ln(k)} + O\Big(\frac{\ln(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big).
$$

Поскольку процесс $X^{(3)}$ является одномерным возмущением процесса $X^{(1)}$, то по замечанию 3.4 имеем $k_0 = 1$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае. ■

Теорема 3.8. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов* $X^{(i)}$, $i = 1,2,3$, *в случае проверки на распределение Гумбеля* ($\varepsilon \to 0$):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\, \varepsilon^{-1} \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big); \\
&\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_3 \cdot \frac{1}{\ln(\ln(\varepsilon^{-1}))}\, \varepsilon^{-1} \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big); \\
&\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} \sim C_4 \cdot \exp\big(2\pi \ln^2(\ln(\varepsilon^{-1}))\big)\, \varepsilon^{-2} \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Замечание 3.7. *В случаях* **2**) *и* **3**) *мультипликативные константы* C_3 *и* C_4 *найти пока не удалось.*

Доказательство.

Применим принцип сравнения Ли (предложение 3 из приложения).

1) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k ковариационного оператора, определенными в (3.27). Рассуждая аналогично случаю **2)** теоремы 3.2, имеем:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}}=\lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2}:\left[-\frac{\pi^2}{4}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right]\right)=1,$$

откуда следует утверждение теоремы в этом случае.

2) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами η_k ковариационного оператора ($k\in\mathbb{N}$):

$$\eta_k:=\left[(k+1/2)\,\pi-\frac{1}{\ln(k)\ln(\ln(k))}\right]^{-2}.$$

Принцип сравнения Ли применим, потому что

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{\mu_k^{(2)}}=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+O\Big(\frac{1}{k\ln(k)(\ln(\ln(k)))^2}\Big)\Big)<\infty.$$

Применяя теорему 2.5, получаем утверждение теоремы в этом случае.

3) В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ζ_k ковариационного оператора ($k\in\mathbb{N}$):

$$\zeta_k:=\left[(k+1)\,\pi+2\pi\,\frac{\ln(\ln(k))}{\ln(k)}\right]^{-2}.$$

Принцип сравнения Ли применим, потому что

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta_k}{\mu_k^{(3)}}=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+O\Big(\frac{\ln(\ln(k))}{k\ln^2(k)}\Big)\Big)<\infty.$$

Применяя теорему 2.5, получаем утверждение теоремы в этом случае. ■

3.7 Процессы Дурбина для гамма-распределения

Теорема 3.9. *Собственные числа $\mu_k^{(i)}$ ковариационных операторов, соответствующих процессам $X^{(i)}$, $i=1,2,3$, возникающим при проверке на гамма-распределение, «асимптотически близки» к числам $\tilde{\mu}_k^{(i)}$ (т.е. $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{(i)}/\tilde{\mu}_k^{(i)}<\infty$),*

где

$$\textbf{1)}\ \tilde{\mu}_k^{(1)} = ((k+1/2)\,\pi)^{-2}; \qquad \textbf{2)}\ \tilde{\mu}_k^{(2)} = \Big((k+1/2)\,\pi + \frac{(-1)^k\cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)}\Big)^{-2};$$

$$\textbf{3)}\ \tilde{\mu}_k^{(3)} = ((k+1)\,\pi)^{-2}.$$

Доказательство.

1) Уравнение на $\omega_k^{(1)} = (\mu_k^{(1)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_1'(t) - p_1'(1/2) \underset{(3.16)}{=} \varkappa_0^{-1/2}(F^{-1}(1/2) - F^{-1}(t)),$$

где $F^{-1}(t)$ — обратная к функции гамма-распределения с параметрами $(1,\varkappa_0)$. Заметим, что согласно лемме 2.5 для функции $F(t) = P(1-t)$ справедливы теоремы 2.1–2.3. Запишем асимптотики интегралов $C_1^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 1$ (как будет ясно из теоремы 3.10, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$C_1^P(\omega) = -\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa_0}}\Big(1 - \frac{\varkappa_0 - 1}{\ln(\omega)}\Big)\cdot\frac{1}{\omega} + O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\ln^2(\omega)}\frac{1}{\omega}\right);$$
$$I_1^P(\omega) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(1-s)\,ds + O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\ln^2(\omega)}\frac{1}{\omega^2}\right).$$

Заметим, что $P(t)$ не имеет особенности при $t\to 0$. Стандартными методами асимптотического анализа, получаем:

$$C_0^P = O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right); \qquad I_0^P = \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(1-s)\,ds + O\left(\frac{1}{\omega^{2+2/\varkappa_0}}\right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение

$$0 = \det{}_1(\omega) = \frac{1}{\omega^3}\cdot\frac{\cos(\omega)\pi^2}{4\varkappa_0} - \frac{\pi^2(\varkappa_0-1)}{2\varkappa_0}\frac{\cos(\omega)}{\omega^3\ln(\omega)} + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\ln^2(\omega)}\frac{1}{\omega^3}\Big).$$

Откуда для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$ имеем $\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + O\Big(\frac{\ln^2(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big)$. Из замечания 3.4 следует, что $k_0 = 0$.

2) Уравнение на $\omega_k^{(2)} = (\mu_k^{(2)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.20) для

$$P(t) = p_2'(t) - p_2'(1/2) \underset{(3.17)}{=} d^{-1}(\ln(F^{-1}(t)) - \ln(F^{-1}(1/2))),$$

где $F^{-1}(t)$ — обратная к функции гамма-распределения с параметрами $(1,\varkappa_0)$, d определено в формуле (3.19). Заметим, что согласно лемме 2.5 для функции $F(t) = P(1-t)$ и $F(t) = P(t)$ справедливы теоремы 2.1–2.3. Запишем асимптотики интегралов $C_1^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 1$ (как будет ясно из теоремы 3.10, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$\begin{aligned}
C_0^P(\omega) &= -\frac{\pi}{2\varkappa_0 d}\frac{1}{\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right);\\
C_1^P(\omega) &= \frac{\pi}{2d}\frac{1}{\omega\ln(\omega)} + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega\ln^2(\omega)}\right);\\
I_0^P(\omega) &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^{2+1/\varkappa_0}}\right);\\
I_1^P(\omega) &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} P^2(1-t)(s)\,ds + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3.20), получаем уравнение

$$0 = \det{}_1(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{\omega^3}\frac{\pi^2 d^2}{4\varkappa_0^2} - \frac{\pi^2 d^2}{2\varkappa_0}\frac{1}{\omega^3\ln(\omega)} + O\Big(\frac{1}{\omega^3\ln^2(\omega)}\Big).$$

Откуда для некоторого $k_0 \in \mathbb{Z}$ получаем $\omega_{k+k_0} = \pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^k\cdot 2\varkappa_0}{\ln(k)} + O\big(\frac{1}{\ln^2(k)}\big)$. Из замечания 3.4 следует, что $k_0 = 0$.

3) Уравнение на $\omega_k^{(3)} = (\mu_k^{(3)})^{-1/2}$ (для простоты будем обозначать ω) имеет вид (3.23) для

$$\begin{aligned}
P(t) &= \tilde{p}_1'(t) - \tilde{p}_1'(1/2) \underset{(3.18)}{=} p_1'(t) - p_1'(1/2) \underset{(3.16)}{=} \varkappa_0^{-1/2}(F^{-1}(1/2) - F^{-1}(t));\\
Q(t) &= \tilde{p}_2'(t) - \tilde{p}_2'(1/2) \underset{(3.18)}{=} (\varkappa_0 d^2 - 1)^{-1/2}\cdot\\
&\quad\cdot\Big(- (F^{-1}(1/2) - F^{-1}(t)) + d\varkappa_0^{1/2}(\ln(F^{-1}(t)) - \ln(F^{-1}(1/2)))\Big)\Big],
\end{aligned}$$

где $F^{-1}(t)$ — обратная к функции гамма-распределения с параметрами $(1,\varkappa_0)$, d определено в формуле (3.19). Асимптотики интегралов $C_0^P(\omega)$, $C_1^P(\omega)$, $I_0^P(\omega)$, $I_1^P(\omega)$ записаны в пункте **1)** данной теоремы. Запишем асимптотики интегралов $C_0^Q(\omega)$, $I_0^Q(\omega)$, $I_1^Q(\omega)$, используя формулы (2.1) и (2.11) при $N = 1$, и асимптотика интеграла $C_1^Q(\omega)$ — при $N = 2$, (как будет ясно из теоремы 3.10, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$
\begin{aligned}
C_0^Q(\omega) &= -\frac{\pi(\varkappa_0 d^2-1)^{-1/2}}{2\sqrt{\varkappa_0}}\frac{1}{\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right);\\
C_1^Q(\omega) &= \frac{(\varkappa_0 d^2-1)^{-1/2}\pi}{2\sqrt{\varkappa_0}}\Big(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega\ln(\omega)}\Big) + O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\ln^2(\omega)}\frac{1}{\omega}\right);\\
I_0^Q(\omega) &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} Q^2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^{2+1/\varkappa_0}}\right);\\
I_1^Q(\omega) &= \frac{1}{2\omega}\int_0^{1/2} \tilde{Q}^2(s)\,ds + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
I^P &= I_0^P(\omega)+I_1^P(\omega)-\frac{(\tilde{p}_1'(1/2))^2+1}{2\omega} = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right);\\
I^Q &= I_0^Q(\omega)+I_1^Q(\omega)-\frac{(\tilde{p}_2'(1/2))^2+1}{2\omega} = O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Асимптотики интегралов $I_0^{PQ}(\omega)$, $I_0^{QP}(\omega)$, $I_1^{PQ}(\omega)$, $I_1^{QP}(\omega)$ могут быть найдены из теоремы 2.3 при $N=1$ (как будет ясно из теоремы 3.10, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$
\begin{aligned}
I_0^{PQ} &= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac12} Q(t)P(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^{2+1/\varkappa_0}}\right);\\
I_0^{QP} &= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac12} Q(t)P(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\omega^{2+1/\varkappa_0}}\right);\\
I_1^{PQ} &= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac12} Q(1-t)P(1-t)\,dt + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right);\\
I_1^{QP} &= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac12} Q(1-t)P(1-t)\,dt + O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right);\\
I^{PQ} &= I_0^{QP}(\omega)+I_0^{PQ}(\omega)+I_1^{QP}(\omega)+I_1^{PQ}(\omega)-\frac{p_1'(1/2)p_2'(1/2)}{\omega} =\\
&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2\ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Найдем самое старшее слагаемое в асимптотике:
слагаемые при $\cos(\omega)$

$$
\begin{aligned}
(C_0^Q)^2 \cdot I^P &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right);\\
C_0^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right) \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^{4+1/\varkappa_0} \ln^2(\omega)}\right);\\
(C_1^Q)^2 \cdot I^P &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right);\\
C_1^Q \cdot C_1^P \cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right);\\
(C_0^P)^2 \cdot I^Q &= \left[O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^{4+2/\varkappa_0} \ln^2(\omega)}\right);\\
(C_1^P)^2 \cdot I^Q &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

слагаемые при $\sin(\omega)$

$$
\begin{aligned}
(C_0^Q)^2 \cdot (C_1^P)^2 &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 &&= O\left(\frac{1}{\omega^4}\right);\\
C_0^Q \cdot C_1^Q \cdot C_0^P \cdot C_1^P &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right) &&= O\left(\frac{1}{\omega^{4+1/\varkappa_0}}\right);\\
(C_1^Q)^2 (C_0^P)^2 &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot \left[O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right)\right]^2 &&= O\left(\frac{1}{\omega^{4+1/\varkappa_0}}\right);\\
I^Q \cdot I^P &= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln^3(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^4(\omega)}\right);\\
(I^{PQ})^2 &= \left[O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right)\right]^2 &&= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^4(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

слагаемые без $\sin(\omega)$ и $\cos(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
C_0^Q \cdot C_1^Q \cdot I^P &= \left[O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]^2 \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right);\\
C_0^Q \cdot C_1^P \cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4 \ln^2(\omega)}\right);\\
C_0^P \cdot C_1^P \cdot I^Q &= O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^{4+1/\varkappa_0} \ln^2(\omega)}\right);\\
C_1^Q \cdot C_0^P \cdot I^{PQ} &= O\left(\frac{1}{\omega}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right) \cdot O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^2 \ln^2(\omega)}\right) &&= O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^{4+1/\varkappa_0} \ln^2(\omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Так как самое большое слагаемое перед $\sin(\omega)$ и имеет порядок $1/\omega^4$, то нам достаточно найти асимптотику с точностью до

$$O\left(\frac{\ln^k(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\right)$$

для некоторого k. Поэтому уравнение (3.23) можно переписать следующим образом:

$$O\left(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\right)\cdot\cos(\omega)+\frac{\sin(\omega)}{\omega^4}\cdot(C_0^Q)^2(C_1^P)^2+O\left(\frac{\ln(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\right)=0. \qquad (3.42)$$

Найдем более точную асимптотику:

$$\begin{aligned}(C_0^Q)^2(C_1^P)^2&=\left[-\frac{\pi(\varkappa_0d^2-1)^{-1/2}}{2\sqrt{\varkappa_0}}\frac{1}{\omega}+O\left(\frac{1}{\omega^{1+1/\varkappa_0}}\right)\right]^2\cdot\\&\cdot\left[-\frac{\pi}{2\sqrt{\varkappa_0}}\frac{1}{\omega}+O\left(\frac{1}{\omega\ln(\omega)}\right)\right]^2=\\&=\frac{\pi^4}{16\varkappa_0^2(\varkappa_0d^2-1)}\frac{1}{\omega}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.42) примет вид:

$$0=\det\nolimits_2(\omega)=\frac{\pi^4}{16(\varkappa_0d^2-1)\varkappa_0^2}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega^4}+O\Big(\frac{\ln^2(\ln(\omega))}{\omega^4\ln^2(\omega)}\Big). \qquad (3.43)$$

Отсюда получаем для некоторого $k_0\in\mathbb{Z}$:

$$\omega_{k+k_0}=\pi k+O\Big(\frac{\ln^2(\ln(k))}{\ln^2(k)}\Big).$$

Поскольку процесс $X^{(3)}$ является одномерным возмущением процесса $X^{(1)}$, то по замечанию 3.4 имеем $k_0=1$, откуда следует утверждение теоремы в этом случае. ■

Теорема 3.10. *Асимптотика вероятностей малых уклонений для процессов $X^{(i)}$, $i=1{,}2{,}3$, в случае проверки на гамма-распределение* ($\varepsilon\to0$):

$$\begin{aligned}&\mathbf{1)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\|<\varepsilon\Big\}\sim\frac{4\,\varkappa_0^{1/2}}{\pi^{3/2}}\;\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big); \qquad (3.44)\\&\mathbf{2)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\|<\varepsilon\Big\}\sim\frac{4\,d\,\varkappa_0}{\pi^{3/2}}\;\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big);\\&\mathbf{3)}\quad \mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\|<\varepsilon\Big\}\sim\frac{\varkappa_0\sqrt{2(\varkappa_0d^2-1)}}{\pi^{7/2}}\;\varepsilon^{-2}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big),\end{aligned}$$

где константа d определена в формуле (3.19).

Замечание 3.8. *При* $\varkappa_0 = 1$ *гамма-распределение совпадает с экспоненциальным, поэтому формула* (3.44) *дает асимптотику вероятности малых уклонений для предельного процесса при проверке выборки на экспоненциальность в случае, когда среднеквадратическое отклонение оценивается по выборке.*

Доказательство.

Применим принцип сравнения Ли (предложение 3 из приложения).

В случаях **1)** и **2)** в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора γ_k, определенными в формуле (3.27). Рассуждая аналогично случаю **2)** теоремы 3.2, получаем:

$$\textbf{1)}\ \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(1)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{\pi^2}{4\varkappa_0}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right]\right) = \varkappa_0,$$

$$\textbf{2)}\ \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{\mu_k^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\cos(\omega)}{1-(\frac{2\omega}{\pi})^2} : \left[-\frac{\pi^2}{4\varkappa_0^2 d^2}\frac{\cos(\omega)}{\omega}\right]\right) = \varkappa_0^2 d^2,$$

откуда следует утверждение теоремы в этих случаях.

3) Аналогично случаю **3)** теоремы 3.2 в качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами ковариационного оператора ρ_k, определенными в формуле (3.31). Найдем константу «расхождения». Последовательности $\omega_k^{(3)} = (\mu_k^{(3)})^{-1/2}$ и $\tilde{\omega}_k^{(3)} = (\rho_k)^{-1/2}$ являются корнями следующих целых функций ($\det_2(\omega)$ определен в формуле (3.43)):

$$H_1(\omega) = -\omega^3\cdot\det_2(\omega); \qquad H_2(\omega) = \frac{\sin(\omega)}{\omega(1-\frac{4\omega^2}{\pi^2})}, \qquad H_1(0) = H_2(0) = 1.$$

Воспользуемся леммой B из приложения. Получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k}{\mu_k^{(3)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k\\ k\to\infty}}\left(\frac{\sin(\omega)}{\omega(1-(\frac{2\omega}{\pi})^2)} : \left[-\frac{\pi^4}{16\varkappa_0^2(\varkappa_0 d^2-1)}\frac{\sin(\omega)}{\omega^3}\right]\right)$$
$$= \frac{4\varkappa_0^2(\varkappa_0 d^2-1)}{\pi^2},$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Отсюда следует утверждение теоремы в этом случае. ■

Глава 4. Приложение

4.1 Вспомогательные леммы и их доказательство

Лемма A необходима для доказательства теоремы 1.2.

Пусть $F(x) = \mathbb{P}\Big\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 < x\Big\}$, где $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$, а ξ_k — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Лемма A. $F^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Также* $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x))$, $x \to +0$.

Доказательство.

Шаг 1: Покажем, что для выполнения $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x))$, $x \to +0$, достаточно, чтобы в некоторой правой полуокрестности $x = 0$

$$F^{(n+2)}(x) > 0; \qquad F^{(n+1)}(x) \text{ — ограничена} \quad \text{и} \quad F^{(n)}(0) = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, рассмотрим интеграл и проинтегрируем его по частям:

$$\int\limits_0^x yF^{(n+2)}(y)\,dy = yF^{(n+1)}(y)\Big|_0^x - \int\limits_0^x F^{(n+1)}(y)\,dy = xF^{(n+1)}(x) - F^{(n)}(x).$$

Будем интегрировать по той окрестности, где $F^{(n+2)} > 0$, значит интеграл положительный. Но тогда получаем, что $xF^{(n+1)}(x) - F^{(n)}(x) > 0$, т.е. $xF^{(n+1)}(x) > F^{(n)}(x)$, откуда следует $F^{(n)}(x) = o(F^{(n+1)}(x))$, $x \to +0$.

Шаг 2: Докажем, что утверждение леммы A выполнено для функции распределения *конечной* суммы $\eta_m := \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j \xi_j^2$, а именно, рассмотрим

$$F_{\eta_m}(x) := \mathbb{P}\left\{\eta_m < x\right\} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{j=1}^{m} \mu_j \xi_j^2 < x\Big\}.$$

Докажем, что для любого натурального $n < m/2 - 1$ выполнено:

$$F_{\eta_m}^{(n+1)}(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_{\eta_m}^{(n)}(x) = o(F_{\eta_m}^{(n+1)}(x)), \qquad x \to +0. \tag{4.2}$$

Записывая выражение для $F_{\eta_m}(x)$ в сферических координатах, получаем:

$$F_{\eta_m}(x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \int\limits_{S^{m-1}} d\varphi_1 \ldots d\varphi_{m-1} \cdot e^{-r^2 \cdot P(\sin(\varphi_1), \ldots, \sin(\varphi_{m-1}))} \cdot |J| \, \frac{dr}{\sqrt{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_m}},$$

где $P(y_1, \ldots, y_{m-1})$ — полином, S^{m-1} — $(m-1)$-мерная сфера в $\mathbb{R}^m$, J — якобиан замены:

$$J = r^{m-1} \cdot \sin(\varphi_2) \cdot \sin^2(\varphi_3) \cdot \ldots \cdot \sin^{m-2}(\varphi_{m-1}).$$

Отсюда выражение для плотности $f_{\eta_m}(x) = F'_{\eta_m}(x)$ примет вид:

$$\begin{aligned} f_{\eta_m}(x) = & x^{m/2-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{S^{m-1}} d\varphi_1 \ldots d\varphi_{m-1} \cdot e^{-x \cdot P(\sin(\varphi_1), \ldots, \sin(\varphi_{m-1}))} \cdot \\ & \cdot |\sin(\varphi_2) \cdot \ldots \cdot \sin^{m-2}(\varphi_{m-1})| \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_m}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Из формулы (4.3) видно, что пока $n < m/2-1$ производная $f^{(n)}_{\eta_m}(x)$ определена в окрестности $x = 0$, и $f^{(n)}_{\eta_m}(0) = 0$. При этом выполнено $f^{(n)}_{\eta_m}(x) \sim C \cdot x^{m/2-1-n}$ при $x \to +0$ для некоторой константы $C > 0$, а значит верно утверждение (4.2). Также при $n < m/2-1$ выполнено $F^{(n+2)}_{\eta_m}(x) > 0$ в некоторой окрестности $x = 0$.

Шаг 3: Пусть η — случайная величина с произвольным распределением на полуоси $x \geqslant 0$; $F_\eta(x)$ — ее функция распределения. Пусть η имеет ненулевую массу в любой окрестности нуля, т.е. $F_\eta(x) > F_\eta(0)\ \forall x > 0$. Докажем, что для любого натурального $n < m/2-1$ выполнено

$$F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad F^{(n)}_{\eta_m+\eta}(x) = o(F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(x)), \quad x \to +0. \tag{4.4}$$

(т.е. утверждение (4.2) остается верным при добавлении η). По шагу 1 для этого достаточно показать, что при $n < m/2-1$ выполнено (4.1) для $F_{\eta_m+\eta}(x)$. Заметим, что (4.1) выполнено для F_{η_m}. Рассмотрим

$$F^{(n+2)}_{\eta_m+\eta}(x) = \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\eta_m}(x-y)\, dF_\eta(y) = \int\limits_0^x F^{(n+2)}_{\eta_m}(x-y)\, dF_\eta(y). \tag{4.5}$$

Ясно, что $F^{(n+1)}_{\eta_m+\eta}(0) = 0$. Рассмотрим x такие, что верно $F^{(n+2)}_{\eta_m}(x) > 0$. Тогда из (4.5) и (4.1) для $F_{\eta_m}(x)$ следует (4.4) по теореме о среднем (для некоторого $x_0 \in (0,x)$):

$$F^{(n+2)}_{\eta_m+\eta}(x) = F^{(n+2)}_{\eta_m}(x_0) \int\limits_0^x dF_\eta(y) = F^{(n+2)}_{\eta_m}(x_0)(F_\eta(x) - F_\eta(0)) > 0.$$

Шаг 4: Докажем, что утверждение леммы А верно для *бесконечной* суммы, т.е. для функции $F(x)$.

Фиксируем n. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $m > 2(n+1)$. Представим ξ в следующем виде:

$$\xi = \eta_m + \sum_{p=m+1}^{\infty} \mu_p \xi_p^2 =: \eta_m + \eta.$$

Ясно, что распределение η сосредоточено на полуоси и, очевидно, имеет ненулевую массу в любой окрестности нуля. Тогда, применяя шаг 3 для ξ, получаем утверждение леммы A. ■

Следующая лемма усиливает утверждение леммы 1.2 из [65] и будет использована при доказательстве теорем 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10.

Лемма B. *Пусть последовательности чисел ω_k и ρ_k имеют одинаковую двучленную асимптотику при $k \to \infty$*

$$\omega_k \sim c(k+\delta) + a_k, \qquad \rho_k \sim c(k+\delta) + b_k,$$

где a_k, $b_k \to 0$ и $|a_k - b_k|$ монотонно убывает при $k \to \infty$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{k} < \infty. \tag{4.6}$$

Тогда функции

$$f(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\zeta^2}{\omega_k^2}\Big), \quad g(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\zeta^2}{\rho_k^2}\Big)$$

имеют одинаковое поведение на бесконечности с точностью до константы. А именно, при $|\zeta| = c(n + \delta + \frac{1}{2})$, $n \to \infty$

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \rightrightarrows const = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k + \zeta}\Big) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k - \zeta}\Big). \tag{4.8}$$

Сходимость первого произведения в (4.8) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{c(k+\delta) + b_k},$$

который сходится благодаря условию (4.6). Пусть $\Re(\zeta) \geqslant 0$. Тогда второе произведение в (4.8) сходится равномерно. Третье произведение сходится равномерно, если сходится равномерно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|}, \quad \text{где} \quad R = c(n + \delta + 1/2). \tag{4.9}$$

Заметим, что $|\rho_k - R| \geqslant c|n - k + \delta_1|$, где $\delta_1 > 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|} \leqslant \Big(\sum_{k \leqslant \frac{2}{3}n} + \sum_{\frac{2}{3}n \leqslant k \leqslant \frac{4}{3}n} + \sum_{k \geqslant \frac{4}{3}n} \Big) \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|}. \tag{4.10}$$

Третья сумма в (4.10) стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\sum_{k \geqslant \frac{4}{3}n}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leqslant C \sum_{k \geqslant \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{k} \to 0.$$

Первая сумма мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k \leqslant \frac{2}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{k},$$

поэтому она сходится равномерно, и при $n \to \infty$

$$\sum_{k \leqslant \frac{2}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \to 0.$$

Поскольку $|a_k - b_k|$ монотонно убывает, имеем

$$\sum_{\frac{2}{3}n \leqslant k \leqslant \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leqslant 2 \sum_{\frac{2}{3}n \leqslant k \leqslant n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leqslant \frac{2}{c} \sum_{m \leqslant \frac{1}{3}n} \frac{|a_{m+\frac{n}{3}} - b_{m+\frac{n}{3}}|}{|m + \delta_1|}.$$

Последняя сумма мажорируется сходящимся рядом, поэтому она сходится равномерно. Таким образом, ряд (4.9) сходится равномерно. Значит, в (4.8) можно перейти к пределу при $|\zeta| = c(n + \delta + \frac{1}{2}) \to \infty$, что дает (4.7) для $\Re(\zeta) \geqslant 0$. Доказательство при $\Re(\zeta) \leqslant 0$ аналогично. ■

4.2 Медленно меняющиеся функции и их свойства

Определение. (см. [71, глава 1, с. 1]) *Функция $L(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если она измерима и знакопостоянна на полуоси $[A,\infty)$, $A > 0$, и для произвольного $\lambda > 0$ выполнено:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Функция $L(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $L(\frac{1}{x})$ медленно меняется на бесконечности.

Медленно меняющимися на бесконечности являются, например, $\ln^{\alpha}(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Для доказательства теорем 2.1, 2.2, 2.3 нам понадобится следующее предложение:

Предложение 1. (см. [71, глава 1, с. 18]) *Пусть $\mathbb{F}(t) > 0$ — медленно меняющаяся функция в нуле, тогда для любого $\alpha > 0$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $\mathbb{F}(t)t^{\alpha}$— возрастающая функция, а $\mathbb{F}(t)t^{-\alpha}$— убывающая функция в ε-окрестности нуля.*

Полезным оказывается следующее достаточное условие, когда функция является медленно меняющейся:

Предложение 2. (см. [71, глава 1, с. 15])
Пусть $L(x)$, $x \in [A,\infty)$, знакопостоянна, имеет непрерывную производную и удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xL'(x)}{L(x)} = 0,$$

тогда $L(x)$ — медленно меняющаяся функция на бесконечности.

4.3 Малые уклонения случайных гауссовских процессов

Напомним основные определения и теоремы из теории L_2-малых уклонений для гауссовских случайных функций.

Пусть $X(x)$, $x \in \bar{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^d$, — гауссовская случайная функция с нулевым средним и функцией ковариации $G(x,y) = \mathbb{E}X(x)X(y)$. Предположим

$$\|X\|^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} X^2(x)\,dx < \infty \quad \text{п.н.} \tag{4.11}$$

Тогда для функции $X(x)$ справедливо разложение Кархунена–Лоэва[1] (Karhunen–Loève, см. напр. [63, §12]), а именно, верно равенство п.н.:

$$X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k} u_k(x) \xi_k, \qquad x \in \mathcal{O},$$

где ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, — независимые стандартные нормальные случайные величины, а $\mu_k > 0$ и $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, соответственно, собственные числа и нормированные в $L_2(\mathcal{O})$ собственные функции интегрального оператора с ядром $G(s,t)$ (ковариационного оператора):

$$\mu_k u_k(x) = \int\limits_{\mathcal{O}} G(x,y) u_k(y)\,dy.$$

При этом $\sum \mu_k < \infty$, т.е. ковариационный оператор принадлежит ядерному классу. Из разложения Кархунена–Лоэва немедленно следует

$$\|X\|^2 \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2. \tag{4.12}$$

Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения вероятности $\mathbb{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\}$ при $\varepsilon \to 0$. Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений известны лишь для немногих процессов (см. [25; 39]). Если же известна достаточно точная асимптотика μ_k, то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью принципа сравнения Венбо Ли (см. [30; 39]):

[1] В литературе также встречается перевод «разложение Карунена–Лоэва»

Предложение 3. *Пусть* μ_k *и* $\tilde{\mu}_k$ *— две положительные невозрастающие суммируемые последовательности такие, что* $\prod \tilde{\mu}_k/\mu_k < \infty$. *Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\mu}_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\}\cdot\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\mu}_k}{\mu_k}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{4.13}$$

Мультипликативную константу из (4.13) часто называют константой «расхождения» (distortion constant).

Следующее предложение является частным случаем [25, теорема 3.1].

Предложение 4. *Пусть* $\varphi(t)$ *— определенная на* $[1,\infty)$, *положительная, логарифмически выпуклая, дважды дифференцируемая и интегрируемая функция. Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k)\xi_k^2 \leqslant r\Big\} \sim C\sqrt{\frac{f(u\varphi(1))}{I_2(u)}}\exp(I_0(u)+ur), \qquad r \to 0,$$

где $f(t) = (1+2t)^{-1/2}$, $u = u(r)$ *— функция, удовлетворяющая соотношению*

$$\lim_{r\to 0}\frac{I_1(u)+ur}{\sqrt{I_2(u)}} = 0, \tag{4.14}$$

а функции I_0, I_1, I_2 *определены формулами*

$$I_0(u) = \int_1^{\infty}\ln f(u\varphi(t))\,dt,$$

$$I_1(u) = \int_1^{\infty}u\varphi(t)(\ln f(u\varphi(t)))'\,dt,$$

$$I_2(u) = \int_1^{\infty}(u\varphi(t))^2(\ln f(u\varphi(t)))''\,dt.$$

Для доказательства теорем 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10 нам потребуется частный случай предложения 4:

Предложение 5. ([39, теорема 3.4], см. также [48, теорема 6.2])
Рассмотрим форму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_k\xi_k^2$, *где*

$$\Lambda_k = (\vartheta(k+\delta))^{-d},$$

$\vartheta > 0$, $\delta > -1$, $d > 1$ — некоторые константы. Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \Big\} \sim C(\vartheta,d,\delta) \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \exp\Big(-\frac{d-1}{2} \Big(\frac{\pi}{d\vartheta \sin(\frac{\pi}{d})} \Big)^{\frac{d}{d-1}} \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{d-1}} \Big),$$

где

$$\gamma = \frac{2-d-2d\delta}{2(d-1)}, \qquad C(\vartheta,d,\delta) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{4}} \vartheta^{\frac{d\gamma}{2}} (\sin(\frac{\pi}{d}))^{\frac{1+\gamma}{2}}}{(d-1)^{\frac{1}{2}} (\frac{\pi}{d})^{1+\frac{\gamma}{2}} \Gamma^{\frac{d}{2}}(1+\delta)},$$

где $\Gamma(x)$ — это гамма-функция.

4.4 Базовые факты из ТФКП

Предложение 6. (Теорема Йенсена) [74, §3.6]

Пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — функция, аналитическая при $|z| < R$. Предположим, что $f(0) \neq 0$, и пусть $r_1, r_2, \ldots$ — модули нулей функции $f(z)$ в круге $|z| < R$, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$

$$\ln\left(\frac{r^n |f(0)|}{r_1 \ldots r_n} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Предложение 7. (Теорема Руше) [74, §3.4]

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические внутри замкнутого контура C и на самом контуре, причем $|g(z)| < |f(z)|$ на C. Тогда функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют внутри C одинаковое число нулей.

Список публикаций автора

1. *Назаров А. И.*, *Петрова Ю. П.* Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица // Теория вероятностей и ее применения. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 482—505.
2. *Петрова Ю. П.* О спектральных асимптотиках одного семейства конечномерных возмущений операторов со следом // Доклады Академии Наук. — 2018. — Т. 481, № 5.
3. *Петрова Ю. П.* Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями // Математические заметки. — 2017. — Т. 102, № 3. — С. 405—414.
4. *Петрова Ю. П.* Точная асимптотика L_2-малых уклонений для некоторых процессов Дурбина // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — Т. 466. — С. 211—233.

Список литературы

12. *Aurzada F.*, *Lifshits M. A.* Small deviations of sums of correlated stationary Gaussian sequences // Theory of Probability & Its Applications. — 2017. — Т. 61, № 4. — С. 540—568.
13. *Aurzada F.*, *et al.* Small deviations for a family of smooth Gaussian processes // Journal of Theoretical Probability. — 2013. — Т. 26, № 1. — С. 153—168.
14. *Aurzada F.*, *et al.* Small deviations of smooth stationary Gaussian processes // Theory of Probability & Its Applications. — 2009. — Т. 53, № 4. — С. 697—707.
15. *Bateman H.* A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1908. — Т. 20. — С. 179—187.
17. *Birkhoff G.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1908. — Т. 9, № 4. — С. 373—395.

18. *Birkhoff G.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Transactions of the American Mathematical Society. — 1908. — Т. 9, № 2. — С. 219—231.

19. *Blair J. M.*, *Edwards C. A.*, *Johnson J. H.* Rational Chebyshev approximations for the inverse of the error function // Mathematics of Computation. — 1976. — Т. 30, № 136. — С. 827—830.

20. *Chigansky P.*, *Kleptsyna M.*, *Marushkevych D.* Exact spectral asymptotics of fractional processes // arXiv preprint arXiv:1802.09045. — 2018.

21. *Chigansky P.*, *Kleptsyna M.*, *Marushkevych D.* On the Karhunen–Loève expansion of Gaussian bridges // arXiv preprint arXiv:1706.09298. — 2017.

22. *Chigansky P.*, *Kleptsyna M.* Exact asymptotics in eigenproblems for fractional Brownian covariance operators // Stochastic Processes and their Applications. — 2018. — Т. 128, № 6. — С. 2007—2059.

23. *Deheuvels P.*, *Martynov G.* Karhunen–Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions // High Dimensional Probability, III (Sandjberg, 2002). Basel: Birkhauser. — 2003. — Т. 55. — С. 57—93.

24. *Deheuvels P.* A Karhunen–Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge // Statistics & Probability Letters. — 2007. — Т. 77, № 12. — С. 1190—1200.

25. *Dunker T.*, *Lifshits M. A.*, *Linde W.* Small deviation probabilities of sums of independent random variables // Progress in Probability. — 1998. — Т. 43. — С. 59—74.

26. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated // The Annals of Statistics. — 1973. — Т. 1, № 2. — С. 279—290.

27. *Erickson K. B.* Rates of escape of infinite dimensional Brownian motion // The Annals of Probability. — 1980. — С. 325—338.

28. *Ferraty F.*, *Vieu P.* Nonparametric functional data analysis: theory and practice. — Springer Science & Business Media, 2006.

29. *Gao F.*, *et al.* Laplace transforms via Hadamard factorization // Electronic Journal of Probability. — 2003. — Т. 8. — С. 1—20.

30. *Gao F., Hannig J., Torcaso F.* Comparison theorems for small deviations of random series // Electronic Journal of Probability. — 2003. — T. 8, № 21. — C. 1—17.

31. *Gao F., et al.* Exact L_2 small balls of Gaussian processes // Journal of Theoretical Probability. — 2004. — T. 17, № 2. — C. 503—520.

32. *Gao F., Hannig J., Torcaso F.* Integrated Brownian motions and Exact L_2-small balls // The Annals of Probability. — 2003. — T. 31, № 3. — C. 1320—1337.

33. *Gao F., Li W. V.* Logarithmic level comparison for small deviation probabilities // Journal of Theoretical Probability. — 2007. — T. 20, № 1. — C. 1—23.

34. *Hoffmann-Jorgensen J., Shepp L. A., Dudley R. M.* On the lower tail of Gaussian seminorms // The Annals of Probability. — 1979. — T. 7. — C. 319—342.

37. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // The Annals of Mathematical Statistics. — 1955. — T. 26, № 2. — C. 189—211.

38. *Kuelbs J., Li W. V.* Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures // Journal of Functional Analysis. — 1993. — T. 116, № 1. — C. 133—157.

39. *Li W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // Journal of Theoretical Probability. — 1992. — T. 5, № 1. — C. 1—31.

40. *Li W. V., Shao Q. M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications // Stochastic Processes: Theory and Methods. — 2001. — T. 19. — C. 533—597.

41. *Li W. V., Linde W.* Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures // The Annals of Probability. — 1999. — T. 27, № 3. — C. 1556—1578.

42. *Lifshits M. A.* Asymptotic behavior of small ball probabilities // Probability Theory and Mathematical Statististics Proceedings VII International Vilnius Conference. — 1999. — C. 453—468.

43. *Lifshits M. A.* Bibliography of small deviation probabilities. — 2018. — https://airtable.com/shrMG0nNxl9SiGxII/tbl7Xj1mZW2VuYurm.

44. *Lifshits M. A., Simon T.* Small deviations for fractional stable processes // Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics. T. 41. — Elsevier. 2005. — C. 725—752.

45. *Mogul'skii A. A.* On the law of the iterated logarithm in Chung's form for functional spaces // Theory of Probability & Its Applications. — 1980. — T. 24, № 2. — C. 405—413.

46. *Nazarov A. I.* Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems // Journal of Theoretical Probability. — 2009. — T. 22, № 3. — C. 640—665.

47. *Nazarov A. I.* Log-level comparison principle for small ball probabilities // Statistics & Probability Letters. — 2009. — T. 79, № 4. — C. 481—486.

48. *Nazarov A. I., Nikitin Y. Y.* Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Probability Theory and Related Fields. — 2004. — T. 129, № 4. — C. 469—494.

49. *Stephens M. A.* Goodness of fit for the extreme value distribution // Biometrika. — 1977. — T. 64, № 3. — C. 583—588.

50. *Stephens M. A.* Tests of fit for the logistic distribution based on the empirical distribution function // Biometrika. — 1979. — T. 66, № 3. — C. 591—595.

51. *Sukhatme S.* Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application // The Annals of Mathematical Statistics. — 1972. — C. 1914—1926.

52. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Mathematische Zeitschrift. — 1928. — T. 27, № 1. — C. 1—54.

53. *Tamarkin J.* Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1912. — T. 34, № 1. — C. 345—382.

54. *van der Vaart A. W., van Zanten J. H.* Rates of contraction of posterior distributions based on Gaussian process priors // The Annals of Statistics. — 2008. — C. 1435—1463.

55. *Zolotarev V. M.* Gaussian measure asymptotic in L_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero // 12th European Meeting of Statisticians, Varna. — 1979. — C. 254.

56. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. — Наука, 1977.

57. *Бирман М. Ш.*, *Соломяк М. С.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Учебное пособие. — Издательство Ленинградского университета, 1980.

58. *Владимиров А. А.*, *Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47, № 4. — С. 18—29.

59. *Гихман И. И.* О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики // Украинский математический журнал. — 1953. — Т. 5, № 4.

60. *Гихман И. И.* Процессы Маркова в задачах математической статистики // Украинский математический журнал. — 1954. — Т. 6. — С. 28—36.

61. *Ибрагимов И. А.* О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1979. — Т. 85. — С. 75—93.

62. *Канторович Л. В.*, *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — 1950.

63. *Лифшиц М. А.* Лекции по гауссовским процессам. — СПб. Лань, 2016.

65. *Назаров А. И.* О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Т. Рожковская. — 2003. — Т. 26. — С. 179—214.

66. *Назаров А. И.* Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций // Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. 54, № 2. — С. 209—225.

67. *Назаров А. И.*, *Пусев Р. С.* Теоремы сравнения для вероятностей малых уклонений весовых L_2-норм гриновских гауссовских процессов // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 131—146.

68. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Т. 364. — С. 166—199.

69. *Никитин Я. Ю., Харинский П. А.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 214—221.

70. *Никитин Я. Ю., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений для ряда броуновских функционалов // Теория вероятностей и ее применения. — 2012. — Т. 57, № 1. — С. 98—123.

71. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции: Пер. с англ. — Наука, 1985.

73. *Сытая Г. Н.* О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1974. — Т. 2. — С. 93—104.

74. *Титчмарш Е.* Теория функций. — Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит, 1980.

75. *Фаталов В. Р.* Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, 4 (352). — С. 89—134.

76. *Фаталов В. Р.* Взвешенные L^p-нормы, $p \geqslant 2$, для винеровского процесса: точные асимптотики малых уклонений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2015. — № 2. — С. 17—22.

77. *Фаталов В. Р.* Гауссовские процессы Орнштейна–Уленбека и Боголюбова: асимптотики малых уклонений для L^p-функционалов, $0 < p < \infty$ // Проблемы передачи информации. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 79—99.

78. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.

79. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — Т. 9. — С. 190—229.

80. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Функциональный анализ и его приложения. — 1982. — Т. 16, № 4. — С. 92—93.