# Коммутирующие однородные локально нильпотентные дифференцирования

МАТВЕЕВ ДМИТРИЙ

Аннотация. Пусть $X$ – аффинное алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора $\mathbb{T}$ сложности один. Известно, что однородные локально нильпотентные дифференцирования алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ допускают описание в терминах собственного полиэдрального дивизора на кривой, отвечающего $\mathbb{T}$-многообразию $X$. В работе получены комбинаторные критерии коммутирования для пары однородных локально нильпотентных дифференцирований. Эти результаты использованы для изучения действий двумерной унипотентной группы на аффинных $\mathbb{T}$-многообразиях.

## 1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль, $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^n$ — алгебраический тор, $M = \mathfrak{X}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^n$ — решётка характеров тора, $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ — двойственная к $M$ решётка и $N_\mathbb{Q} = N \otimes \mathbb{Q}$.

Нормальное алгебраическое многообразие $X$ с регулярным эффективным действием тора $\mathbb{T}$ называется $\mathbb{T}$-многообразием. Сложностью действия тора $\mathbb{T}$ называют коразмерность типичной орбиты. Так как действие тора эффективно, в данных обозначениях сложность действия на $X$ равна $\dim X - \mathrm{rank}\, M$.

Если сложность действия равна нулю, то тор действует на $X$ с открытой орбитой и многобразие называется торическим. Хорошо известно комбинаторное описание торических многообразий (см. [5] и [3]). Описание аффинных $\mathbb{T}$-многообразий в случае действий произвольной сложности было получено К. Альтманом и Ю. Хаузеном (см. [1]). Они предложили задавать $\mathbb{T}$-многообразия в терминах так называемых собственных полиэдральных дивизоров (proper polyhedral divisors). В данной работе мы будем руководствоваться тем же подходом.

Любое аффинное торическое многообразие соответствует некоторому полиэдральному конусу $\sigma \subseteq N_\mathbb{Q}$. Для произвольного аффинного $\mathbb{T}$-многообразия аналогичное описание устроено более сложно. Ему соответствует тройка $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$, где $Y$ — нормальное полупроективное многообразие, $\sigma$ по-прежнему полиэдральный конус, а $\mathfrak{D}$ — дивизор на $Y$, коэффициентами которого являются полиэдры с конусом рецессии $\sigma$.

Пусть $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ — аддитивная группа поля, и пусть на аффинном $\mathbb{T}$-многообразии $X$ задано действие этой группы, нормализуемое тором $\mathbb{T}$ в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Если типичные орбиты $\mathbb{G}_a$-действия содержатся в замыканиях типичных орбит тора, то говорят, что действие *вертикального типа*, в противном случае — *горизонтального типа*.

Известно, что $\mathbb{G}_a$-действия на аффинном многообразии $X$ соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям алгебры $\mathbb{K}[X]$, а $\mathbb{G}_a$-действия, нормализуемые тором, соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям на $\mathbb{K}[X]$,

*Key words and phrases.* $\mathbb{T}$-многообразие, градуированная алгебра, локально нильпотентное дифференцирование, действие аддитивной группы.

однородным относительно градуировки, возникающей в результате действия тора $\mathbb{T}$. Описание последних в терминах некоторого обобщения корней Демазюра получено Льендо для действий вертикального типа произвольной сложности (см. [6]) и для действий горизонтального типа сложности 1 (см. [7], [2]). Также в работе [2] описаны пары $\mathbb{G}_a$-подгрупп, соответствующие корневым подгруппам для действий групп $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$.

Для следующего шага — описания в тех же терминах $\mathbb{G}_a^2$-действий на аффинном $\mathbb{T}$-многообразии $X$, нужно описать пары коммутирующих однородных локально нильпотентных дифференцирований.

Аналогично действиям, локально нильпотентные дифференцирования бывают вертикального и горизонтального типов. Если дифференцирование равно нулю на рациональных инвариантах действия тора, то оно вертикального типа, в противном случае — горизонтального. Тем самым задача описания пар коммутирующих дифференцирований распадается на три подзадачи:

(1) оба дифференцирования вертикального типа;
(2) одно дифференцирование вертикального типа, другое — горизонтального;
(3) оба дифференцирования горизонтального типа.

Случай (1) наиболее прост и уже был разобран, например, в [8]. В случае (2) и (3) рассматривается действие тора сложности 1, поскольку только для него известна классификация дифференцирований горизонтального типа. Существование однородных локально нильпотентных дифференцирований горизонтального типа накладывает существенные ограничения на $Y$ из тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ — многоообразие $Y$ должно быть изоморфно $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$. Тем самым выделяются два подслучая: аффинный и проективный.

Основным результатом данной работы является нахождение условий коммутирования однородных локально нильпотентных дифференцирований в случае (2), а также в аффинном подслучае случая (3).

Разделы 2-4 содержат необходимые предварительные сведения. Изложение в них ведётся в соответствии с работой [2]. Раздел 2 посвящен комбинаторному описанию аффинных $\mathbb{T}$-многообразий в терминах собственных полиэдральных дивизоров. В разделе 3 объясняется связь между локально нильпотентными дифференцированиями на алгебре регулярных функций аффинного $\mathbb{T}$-многообразия и $\mathbb{G}_a^2$-действиями на самом многообразии. Описание локально нильпотентных дифференцирований на языке собственных полиэдральных дивизоров приведено в разделе 4.

В разделах 5-7 излагаются основные результаты работы. Раздел 5 посвящен дифференцированиям вертикального типа, раздел 6 — условиям коммутирования дифференцировний разных типов, раздел 7 — дифференцированиям горизонтального типа.

Громоздкие технические выкладки и вспомогательные утверждения вынесены в приложение (раздел 8).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И.В. Аржанцеву за постановку задачи и поддержку, без которой работа не была бы написана.

## 2. Комбинаторное описание аффинных $\mathbb{T}$-многообразий

Полное комбинаторное описание нормальных аффинных многообразий с эффективным действием тора изложено в статье [1]. В данном разделе мы введём необходимые определения и приведём основные результаты этой работы.

Пусть $M = \mathbb{Z}^n$ — целочисленная решётка ранга $n$ и $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ — двойственная решётка. Рассмотрим пространства $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$ и $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes \mathbb{Q}$. На их декартовом произведении определена естественная операция спаривания $M_{\mathbb{Q}} \times N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, $(m, p) \mapsto \langle m, p\rangle = p(m)$.

Пусть $\sigma$ — полиэдральный конус в $N_{\mathbb{Q}}$. Множество полиэдров из $N_{\mathbb{Q}}$, которые можно представить в виде суммы Минковского конуса $\sigma$ и некоторого многогранника $\Pi$, будем обозначать $\mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$.

Конусом, двойственным к $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, называется конус

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle m, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in \sigma\} \subset M_{\mathbb{Q}}.$$

Каждому полиэдру $\Delta \in \mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ сопоставим опорную функцию $h_\Delta : \sigma^\vee \to \mathbb{Q}$, определённую следующим образом:

$$h_\Delta(m) = \min\langle m, \Delta\rangle := \min_{p\in\Delta}\langle m, p\rangle.$$

Минимум достигается в силу того, что $m$ неотрицательно на $\sigma$. Так как функция рассматривается на полиэдре, минимум всегда достигается в вершине. Обозначив $\{v_i\}$ множество вершин полиэдра $\Delta$, получим выражение

$$h_\Delta(m) = \min_i\{v_i(m)\} \quad \text{для всех } m \in \sigma^\vee.$$

В книге [10, Глава 4] вводится определение проективного многообразия над схемой. Если в качестве указанной схемы взято аффинное многообразие и построенное над ним тотальное многообразие $Y$ нормально, то будем называть это тотальное многообразие *полупроективным.*

Если $X$ — неприводимое многообразие, то его неприводимое подмногообразие коразмерности 1 называется простым дивизором. Элементы свободной абелевой группы, порождённой всеми простыми дивизорами многообразия $X$, называются дивизорами Вейля. Говорят, что дивизор главный, если он является дивизором некоторой рациональной функции на многообразии $X$. Дивизор Вейля называется дивизором Картье или локально главным дивизором, если существует покрытие многобразия $X$ такими открытыми множествами $U_i$, что ограничение дивизора на каждое из $U_i$ является главным дивизором. Дивизором $\mathbb{Q}$-Картье называется формальная сумма простых дивизоров с рациональными коэффициентами, некоторое кратное которой является дивизором Картье.

**Определение 1.** Будем называть *$\sigma$-полиэдральным дивизором* на $Y$ формальную сумму $\mathfrak{D} = \sum_{Z\subseteq Y} \Delta_Z \cdot Z$, где $Z$ — простые дивизоры на $Y$, полиэдры $\Delta_Z \in \mathrm{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ и $\Delta_Z = \sigma$ для всех $Z$ кроме, может быть, конечного числа. Для каждого $m \in \sigma^\vee$ можно вычислить дивизор $\mathfrak{D}$ в точке $m$:

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{Z\subseteq Y} h_Z(m) \cdot Z,$$

где $h_Z$ — опорная функция полиэдра $\Delta_Z$. Далее, $\sigma$-полиэдральный дивизор называется *собственным*, если выполнены следующие два условия:

(1) $\mathfrak{D}(m)$ полуобилен и $\mathbb{Q}$-Картье для любого $m \in \sigma^\vee$;
(2) $\mathfrak{D}(m)$ большой для любого $m \in \mathrm{rel.int}(\sigma^\vee)$.

Здесь $\mathrm{rel.int}(\sigma^\vee)$ обозначает относительную внутренность конуса $\sigma^\vee$. $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $D \subseteq Y$ называется *полуобильным*, если существует такое целое число $r > 0$, что $rD$ не имеет базисных точек (то есть точек, которые лежат в пересечении носителей всех дивизоров линейно эквивалентных $D$), и называется *большим*, если для некоторого $r > 0$ найдётся такой дивизор $D_0$, линейно эквивалентный $rD$, что $Y \setminus \operatorname{Supp} D_0$ аффинно.

Пусть $\mathbb{T} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[M]$ — $n$-мерный алгебраический тор с решёткой характеров $M$ и $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие. Морфизму действия $\mathbb{T} \times X \to X$ соответствует гомоморфизм алгебр $A \to A \otimes \mathbb{K}[M]$, задающий $M$-градуировку на $A$. Обратно, любой $M$-градуировке соответствует действие тора $\mathbb{T} = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[M]$. Далее будем обозначать $\sigma_M^\vee$ полугруппу $\sigma^\vee \cap M$ и $\chi^m$ — характер тора $\mathbb{T}$, соответствующий вектору $m$ решётки $M$.

Для рационального дивизора $D$ обозначим $H^0(U, \mathcal{O}_Y(D))$ его пространство сечений:

$$H^0(U, \mathcal{O}_Y(D)) = \{f \in \mathbb{K}(Y) \mid \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\}.$$

Теперь мы готовы сформулировать следующую теорему ([1, Section 3]), в которой приводится описание $\mathbb{T}$-многообразий на языке собственных полиэдральных дивизоров.

**Теорема 1.** *Любому собственному $\sigma$-полиэдральному дивизору $\mathfrak{D}$ на полупроективном многообразии $Y$ соответствует нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие $X[Y, \mathfrak{D}] = \operatorname{Spec} A[Y, \mathfrak{D}]$ размерности $\operatorname{rank} M + \dim Y$ , где*

$$A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m \chi^m \quad \text{и} \quad A_m = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\mathfrak{D}(m)) \subseteq \mathbb{K}(Y).$$

*Обратно, любое нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие изоморфно $\mathbb{T}$-многообразию $X[Y, \mathfrak{D}]$ для некоторого полупроективного многообразия $Y$ и некоторого собственного $\sigma$-полиэдрального дивизора $\mathfrak{D}$ на $Y$.*

Подобное задание не единственно, но единственности можно добиться, наложив некие условия минимальности на пару $(Y, \mathfrak{D})$ (см. [1, Section 8]).

**Следствие 1.** *Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ — собственные $\sigma$-полиэдральные дивизоры на нормальном полупроективном многообразии $Y$. Если для любого простого дивизора $Z$ в $Y$ существует такой вектор $v_Z \in N$, что*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \sum_Z (v_Z + \sigma) \cdot Z \quad \text{и} \quad \text{дивизор } \sum_Z \langle m, v_Z \rangle \cdot Z \text{ главный } \forall m \in \sigma_M^\vee,$$

*то многообразие $X[Y, \mathfrak{D}]$ эквивариантно изоморфно многообразию $X[Y, \mathfrak{D}']$.*

**Пример 1.** Рассмотрим одномерную решётку $\mathbb{Z}$ характеров тора $\mathbb{T} = \mathbb{K}^\times$, конус $\sigma = \{0\}$ и дивизор $\mathfrak{D} = [0, 1] \cdot \{0\}$ на аффинной прямой $Y = \mathbb{A}^1$. Тогда

$$\mathfrak{D}(m) = \begin{cases} 0 \cdot \{0\}, & m \geq 0 \\ m \cdot \{0\}, & m < 0; \end{cases}$$

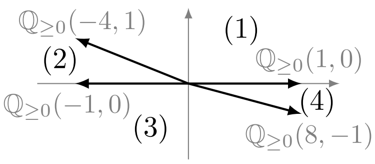
$$A_m = \begin{cases} \mathbb{K}[t], & m \geq 0 \\ t^{-m}\mathbb{K}[t], & m < 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x = \chi$ и $y = t\chi^{-1}$ являются образующими алгебры $A = \bigoplus_m A_m \chi^m$, на которые нет соотношений. Таким образом, указанные комбинаторные данные задают аффинную плоскость с действием тора $\mathbb{T}$ на $\mathbb{K}[x, y]$, где $\lambda \circ x = \lambda x$ и $\lambda \circ y = \lambda^{-1} y$.

**Пример 2.** Рассмотрим пример, предложенный Льендо в [7]. Пусть $N = \mathbb{Z}^2$ и $\sigma = \{(0, 0)\}$. В пространстве $N_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ возьмём треугольник $\Delta_0$ с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1/4, -1)$ и отрезок $\Delta_1 = \{0\} \times [0, 1]$ (рис. 1).


Рис. 1

Пусть $Y = \mathbb{A}^1$ и $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot \{0\} + \Delta_1 \cdot \{1\}$. На рисунке 2 показано, на какие области разбивается $M_{\mathbb{Q}}$ в зависимости от значений опорных функций $h_{\Delta_0}$ и $h_{\Delta_1}$ на $m = (m_1, m_2) \in \sigma^\vee = M_{\mathbb{Q}}$.




(1) $h_{\Delta_0}(m) = -\frac{1}{4}m_1 - m_2$, $h_{\Delta_1}(m) = 0$
(2) $h_{\Delta_0}(m) = 0$, $h_{\Delta_1}(m) = 0$
(3) $h_{\Delta_0}(m) = m_2$, $h_{\Delta_1}(m) = m_2$
(4) $h_{\Delta_0}(m) = -\frac{1}{4}m_1 - m_2$, $h_{\Delta_1}(m) = m_2$.

Рис. 2

Вычисляя для каждого случая $A_m = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\mathfrak{D}(m)))$, приходим к следующему набору порождающих алгебры $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}] = \bigoplus_m A_m \chi^m$:

$$u_1 = -t\chi^{(4,0)}, \quad u_2 = \chi^{(-1,0)}, \quad u_3 = -\chi^{(-4,1)}, \quad u_4 = t(t-1)\chi^{(8,-1)}.$$

Легко проверить, что порождающие удовлетворяют единственному неприводимому соотношению $u_1 + u_1^2 u_2^4 + u_3 u_4 = 0$. Таким образом, есть изоморфизм

$$A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}] \cong \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_1 + x_1^2 x_2^4 + x_3 x_4) \tag{1}$$

со следующей $\mathbb{Z}^2$-градуировкой на алгебре $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$:

$$\deg x_1 = (4,0),\ \deg x_2 = (-1,0),\ \deg x_3 = (-4,1),\ \deg x_4 = (8,-1).$$

## 3. Локально нильпотентные дифференцирования и $\mathbb{G}_a$-действия

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное многообразие над полем $\mathbb{K}$. Аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ будем обозначать $\mathbb{G}_a$. Дифференцирование $\partial$ алгебры $A$ называется локально нильпотентным, если для любого $a \in A$ существует такое $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\partial^n(a) = 0$. Каждому локально нильпотентному дифференцированию $\partial$ на $A$ соответствует действие группы $\mathbb{G}_a$ на $A$ определяемое отображением $\phi_\partial : \mathbb{G}_a \times A \to A$, $\phi_\partial : (t, f) \mapsto \exp(t\partial)(f)$. Следовательно, каждому локально нильпотентному дифференцированию соответствует действие $\mathbb{G}_a$ на $X = \operatorname{Spec} A$. Верно и обратное, любому действию группы $\mathbb{G}_a$ на $X$ соответствует некоторое локально нильпотентное дифференцирование на $A$ (см. [4, Section 1.5]).

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ — алгебра из теоремы 1 с $M$-градуировкой. Локально нильпотентное дифференцирование $\partial$ называется однородным относительно $M$-градуировки, если оно переводит однородные элементы в однородные. В таком случае у локально нильпотентного дифференцирования $\partial$ корректно определена степень $\deg \partial = \deg \partial(f) - \deg f$ для любого однородного элемента $f \in A \setminus \ker \partial$. Говорят, что $\mathbb{G}_a$-действие нормализуется тором $\mathbb{T}$, если группа $\mathbb{G}_a$ нормализуется тором как подгруппа в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X)$. $\mathbb{G}_a$-действие нормализуется тором $\mathbb{T}$ в том и только в том случае, когда соответствующее локально нильпотентное дифференцирование $\partial$ однородно относительно $M$-градуировки.

Далее, пусть на многообразии $X$ действует группа $\mathbb{G}_a^2$. Так как $\mathbb{G}_a^2 = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, задание действий этой группы равносильно заданию действий двух групп $\mathbb{G}_a$, коммутирующих между собой. Кроме того, если $\mathbb{G}_a^2$ нормализуется тором $\mathbb{T}$, то задано действие $\mathbb{T}$ на алгебре Ли $\operatorname{Lie}\mathbb{G}_a^2 = \mathfrak{g}$. Действие тора $\mathbb{T}$ диагонализуемо на $\mathfrak{g}$. Следовательно, в $\mathfrak{g}$ можно выбрать собственный базис $\{x_1, x_2\}$. Тогда $\mathfrak{g}$ распадётся в прямую сумму одномерных компонент: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle$, причём $\{\exp(tx_i) \mid t \in \mathbb{K}\}$ изоморфны $\mathbb{G}_a$ и нормализуются тором. Таким образом, задание $\mathbb{T}$-нормализуемого $\mathbb{G}_a^2$-действия на $X$ равносильно заданию пары коммутирующих однородных локально нильпотентных дифференцирований.

Всякое однородное локально нильпотентное дифференцирование $\partial$ на алгебре $A$ можно продолжить на её поле частных $\operatorname{Quot}(A)$. Аналогично продолжается действие тора $\mathbb{T}$ на $\operatorname{Quot}(A)$. Рассмотрим подполе рациональных инвариантов $\operatorname{Quot}(A)^{\mathbb{T}} = \mathbb{K}(Y)$. Говорят, что локально нильпотентное дифференцирование $\partial$ *вертикального типа*, если $\partial(\mathbb{K}(Y)) = 0$, и *горизонтального типа* иначе. То, что дифференцирование $\partial$ вертикального типа, геометрически означает, что типичные орбиты соответствующего $\mathbb{G}_a$-действия лежат в замыканиях типичных орбит действия тора $\mathbb{T}$.

## 4. Локально нильпотентные дифференцирования на аффинных $\mathbb{T}$-многообразиях

Сначала рассмотрим классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на $\mathbb{T}$-многообразиях произвольной сложности, описанную в [6]. Обозначим $\sigma(1)$ множество лучей (граней размерности 1) конуса $\sigma$. В дальнейшем для краткости будем понимать под $\rho \in \sigma(1)$ как луч, так и порождающий его примитивный вектор решётки.

**Определение 2.** Пусть $\sigma$ — острый конус в $N_{\mathbb{Q}}$. Вектор $e \in M$ называется *корнем Демазюра* конуса $\sigma$, если выполнены следующие условия:
(1) существует луч $\rho_e \in \sigma(1)$, такой что $\langle e, \rho_e \rangle = -1$;
(2) $\langle e, \rho \rangle \geq 0$ для всех $\rho \in \sigma(1) \setminus \{\rho_e\}$.
Множество всех корней Демазюра конуса $\sigma$ обозначается $\mathcal{R}(\sigma)$. Луч $\rho_e$ называют лучом, *ассоциированным* с корнем $e$. Чтобы не перегружать обозначения, мы иногда будем обозначать ассоциированный луч $\rho$.

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ и $\mathfrak{D} = \sum_Z \Delta_Z \cdot Z$ — собственный $\sigma$-полиэдральный дивизор на полупроективном многообразии $Y$. Обозначим $\{v_{i,Z}\}$ множество вершин полиэдра $\Delta_Z$ для простого дивизора $Z \subseteq Y$. Пусть $e$ — корень Демазюра конуса $\sigma$. Тогда рассмотрим

$$\mathfrak{D}(e) = \sum_Z \min_i \{v_{i,Z}(e)\} \cdot Z \quad \text{и} \quad \Phi_e^{\times} = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\mathfrak{D}(e))) \setminus \{0\}.$$

Для каждой функции $\varphi \in \Phi_e^{\times}$ определим

$$\partial_{e,\varphi}(f\chi^m) = \langle m, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot f\chi^{m+e} \quad \text{для любого } m \in \sigma_M^{\vee} \text{ и } f \in \mathbb{K}(Y). \tag{2}$$

Это выражение задаёт дифференцирование на алгебре $A$. В следующей теореме приводится классификация однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на многообразии $A[Y, \mathfrak{D}]$ (см. [6, Theorem 2.4], а также [2, Theorem 1.7]).

**Теорема 2.** *Для каждого корня Демазюра $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ и функции $\varphi \in \Phi_e^\times$ дифференцирование $\partial_{e,\varphi}$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ степени $e$ с ядром*

$$\ker \partial_{e,\varphi} = \bigoplus_{m \in \tau_e \cap M} A_m \chi^m,$$

*где $\tau_e \subseteq \sigma^\vee$ — грань $\sigma^\vee$, двойственная к ассоциированному лучу $\rho_e$. Обратно, если $\partial \neq 0$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на $A$, то $\partial = \partial_{e,\varphi}$ для некоторого корня $e \in \mathcal{R}(\sigma)$ и некоторой функции $\varphi \in \Phi_e^\times$.*

Классификация дифференцирований горизонтального типа более сложна и известна только в случае действий сложности 1. Здесь многообразие $Y$ из тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ является гладкой кривой. Как показано в работе [7], однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа существуют, только если $Y$ изоморфно $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$. В данной работе мы ограничимся аффинным случаем.

**Определение 3.** *Разметкой* $\sigma$-полиэдрального дивизора на кривой $Y$ называется набор $\widehat{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}; v_z \ \forall z \in Y\}$, где:

(1) $\mathfrak{D} = \sum_{z\in Y} \Delta_z \cdot z$ — собственный $\sigma$-полиэдральный дивизор на $Y$, и $v_z$ — вершина $\Delta_z$;

(2) $v_{\deg} := \sum_z v_z$ является вершиной $\deg \mathfrak{D} := \sum_z \Delta_z$;

(3) $v_z \in N$ за исключением быть может одной вершины в *отмеченной точке* $z_0$. В случае, когда все выбранные вершины $v_z$ лежат в $N$, в качестве отмеченной точки $z_0$ возьмём любую точку из носителя дивизора $\mathfrak{D}$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка $\sigma$-полиэдрального дивизора на кривой $Y$ и $\omega \subseteq N_\mathbb{Q}$ — конус, порождённый $\deg \mathfrak{D} - v_{\deg}$. Обозначим $\widehat{\omega} \subseteq (N \oplus \mathbb{Z})_\mathbb{Q}$ *расширенный конус* дивизора $\mathfrak{D}$, порождённый $(\omega, 0)$ и $(v_{z_0}, 1)$. Также обозначим $d$ такое минимальное натуральное число, что $d \cdot v_{z_0} \in N$.

**Определение 4.** Пара $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка $\sigma$-полиэдрального дивизора на кривой $Y$ и $e \in M$, называется *согласованной*, если выполнены следующие условия:

(1) существует такое $s \in \mathbb{Z}$, что $\hat{e} = (e, s) \in M \oplus \mathbb{Z}$ — корень Демазюра расширенного конуса $\widehat{\omega}$ с ассоциированным лучом $\hat{\rho} = (d \cdot v_{z_0}, d)$. В таком случае $s = -1/d - v_{z_0}(e)$;

(2) $v(e) \geq 1 + v_z(e)$ для любого $z \neq z_0$ и любой вершины $v \neq v_z$ полиэдра $\Delta_z$;

(3) $d \cdot v(e) \geq 1 + d \cdot v_{z_0}(e)$ для любой вершины $v \neq v_{z_0}$ полиэдра $\Delta_{z_0}$.

Положим $L = \{m \in M \mid v_{z_0}(m) \in \mathbb{Z}\}$. Так как функция минимума линейна относительно операции суммы по Минковскому, линеен и $\mathfrak{D}(m)$ для $m \in \omega^\vee$. И поскольку любой дивизор на прямой $Y = \mathbb{A}^1$ является главным, существуют такие рациональные функции $\varphi^m \in \mathbb{K}(Y)$, что $\operatorname{div}(\varphi^m) + \mathfrak{D}(m) = 0$ и $\varphi^m \cdot \varphi^{m'} = \varphi^{m+m'}$ для любых $m, m' \in \omega_L^\vee$.

Следующая теорема (см. [7, Theorem 3.28], а также [2, Theorem 1.10]) даёт классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований горизонтального типа на $A[Y, \mathfrak{D}]$.

**Теорема 3.** *Пусть $X = X[Y, \mathfrak{D}]$ — нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие и $Y = \mathbb{A}^1$. Тогда однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа на алгебре $A[Y, \mathfrak{D}]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка $\sigma$-полиэдрального дивизора и $e \in M$. Кроме* *того, однородное локально нильпотентное дифференцирование $\partial$, соответствующее паре $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, имеет степень $e$ и ядро*

$$\ker\partial = \bigoplus_{m\in\omega_L^\vee} \mathbb{K}\varphi^m.$$

Укажем явную формулу для однородного локально нильпотентного дифференцирования, соответствующую согласованной паре $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Так как на прямой любой дивизор является главным, по следствию 1 можно считать, что $v_z = 0 \in N$ для всех $z \neq 0$. Полагая $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[t]$, имеем следующую формулу для $\partial$ (см. [2, Section 1]):

$$\partial_e(t^r\chi^m) = d(v_0(m)+r)\cdot t^{r+s}\cdot\chi^{m+e} \quad \text{для любых } (m,r)\in M\oplus\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Заметим, что, обозначив $\hat{m} = (m,r)\in M\oplus\mathbb{Z}$ и $\chi^{\hat{m}} = \chi^m\cdot t^r$, можно записать формулу для $\partial$ как и в вертикальном случае:

$$\partial_e(\chi^{\hat{m}}) = \langle\hat{m},\hat{\rho}\rangle\cdot\chi^{\hat{m}+\hat{e}} \quad \text{для любых } \hat{m}\in M\oplus\mathbb{Z}.$$

**Пример 3.** Построим дифференцирования для многообразия из примера 1, определяемого дивизором $\mathfrak{D} = [0,1]\cdot\{0\}$ на аффинной прямой. Во-первых, в силу того, что $\sigma = \{0\}$, корней Демазюра нет. Следовательно, нет и дифференцирований вертикального типа. Для дифференцирований горизонтального типа возникает два случая:

*Случай 1.* $v_0 = \{0\}$.
Здесь $\omega = \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\widehat{\omega} = \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$, $d = 1$, $\hat{e} = (e,s)$, $s = -1$, $e \geq 0$. Условие 3 определения 4 даёт $e \geq 1$. Следовательно, $\partial(t^r\chi^m) = r\cdot t^{r-1}\chi^{m+1}$. У нас $x = \chi$, $y = t\chi^{-1}$, поэтому $\partial_e(x) = 0$, $\partial_e(y) = x^{e-1}$.

*Случай 2.* $v_0 = \{1\}$.
Здесь $\omega = \mathbb{Q}_{\leq 0}$, $\widehat{\omega} = \mathrm{Cone}\big((-1,0),(1,1)\big)$, $d = 1$, $\hat{e} = (e,s)$, $s = -1-e$, $e \geq 0$. Условие 3: $0 \geq 1+e$, т.е. $s \geq 0$ и $e \leq -1$. Следовательно, дифференцирование $\partial(t^r\chi^m) = (m+r)\cdot t^{r+s}\chi^{m+e}$. Значит, $\partial_e(x) = \partial_e(\chi) = t^s\chi^{e+1} = t^s\chi^{-s} = y^s$, $\partial_e(y) = \partial_e(t\chi^{-1}) = 0$.

Итак, показано, что все однородные локально нильпотентные дифференцирования $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры $\mathbb{K}[x,y]$, $\deg x = 1$, $\deg y = -1$, имеют вид

$$x^a\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad y^b\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{где } a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{4}$$

**Пример 4.** Построим дифференцирования для многообразия из примера 2. Всего существует 6 вариантов выбрать пару вершин для разметки дивизора $\mathfrak{D}$. Но в силу условия 2 определения разметки реализуются только 4:

$$\begin{array}{ll} (1)\ v_0 = (0,0), \tilde{v}_0 = (0,0) & (3)\ v_2 = (-1/4,-1), \tilde{v}_0 = (0,0) \\ (2)\ v_1 = (0,1), \tilde{v}_1 = (0,1) & (4)\ v_2 = (-1/4,-1), \tilde{v}_1 = (0,1). \end{array}$$

Отмеченной точкой во всех случаях считаем $z_0 = 0$. Имеем,

$$\begin{array}{l} (1)\ d = 1,\ \widehat{\omega} = \mathrm{Cone}\{(0,1,0),(-1/4,-1,0),(0,0,1)\} \\ (2)\ d = 1,\ \widehat{\omega} = \mathrm{Cone}\{(0,-1,0),(-1/8,-1,0),(0,1,1)\} \\ (3)\ d = 4,\ \widehat{\omega} = \mathrm{Cone}\{(0,1,0),(1/4,1,0),(-1/4,-1,1)\} \\ (4)\ d = 4,\ \widehat{\omega} = \mathrm{Cone}\{(0,1,0),(1/8,1,0),(-1/4,-1,1)\}. \end{array}$$

Учитывая неравенства на $\hat{e} = (e, s) = (a, b, s)$, $a, b, s \in \mathbb{Z}$, возникающие из определения корня Демазюра и из условий 2, 3 определения 4, получим

(1) $\partial_1(t^r\chi^m) = r \cdot t^{r-1}\chi^{m+e},\ s = -1,\ b \geq 1,\ a + 4b \leq -4$

(2) $\partial_2(t^r\chi^m) = (r + m_2) \cdot t^{r+s}\chi^{m+e},\ b + s = -1,\ b \leq -1,\ a + 8b \leq -4$

(3) $\partial_3(t^r\chi^m) = (4r - m_1 - 4m_2) \cdot t^{r+s}\chi^{m+e}$,
$a + 4b - 4s = 1,\ b \geq 1,\ a + 8b \geq 1$

(4) $\partial_4(t^r\chi^m) = (4r - m_1 - 4m_2) \cdot t^{r+s}\chi^{m+e}$,
$a + 4b - 4s = 1,\ b \leq -1,\ a + 4b \geq 1.$

Дифференцирования (1) и (3) можно сразу переписать в переменных $x_1, x_2, x_3, x_4$:

$$(1)\ \partial_1 = x_2^{-a-4b-4}x_3^b\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^{-a-4b-4}x_3^{b-1}(2x_1x_2^4 + 1)\frac{\partial}{\partial x_4},$$
$$b \geq 1,\ a + 4b \leq -4$$
$$(3)\ \partial_3 = x_1^{\frac{1}{4}(a+4b-1)}x_3^b\frac{\partial}{\partial x_2} - 4x_1^{\frac{1}{4}(a+4b+7)}x_2^3x_3^{b-1}\frac{\partial}{\partial x_4},$$
$$b \geq 1,\ a + 4b \geq 1,\ a = 4k + 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Для дифференцирований (2) и (4) аналогичные формулы получатся очень громоздкими. Поэтому, следуя Льендо (см. [7, Example 3.35]), выберем другие порождающие в алгебре, рассмотрев дивизор $\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot \{0\} + \Delta_1' \cdot \{1\}$, где $\Delta_1 = \{0\} \times [-1, 0]$. По следствию 3 этот дивизор задаёт изоморфную алгебру функций и $\mathbb{T}$-многообразие. В этом случае имеем

$$x_1 = -t\chi^{(4,0)}, \quad x_2 = \chi^{(-1,0)}, \quad x_3 = (1 - t)\chi^{(-4,1)}, \quad x_4 = t\chi^{(8,-1)}.$$

Заметим, что при такой замене расширенные конусы и выражения для дифференцирований $\partial_2$ и $\partial_4$ не меняется. Переходя к переменным $x_1, x_2, x_3, x_4$, получим:

$$(2)\ \partial_2 = -x_2^{-a-8b-4}x_4^{-b}\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2^{-a-8b-4}x_4^{-b-1} + 2x_1x_2^{-a-8b}x_4^{-b-1})\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$b \leq -1,\ a + 8b \leq -4$$
$$(4)\ \partial_4 = x_1^{\frac{1}{4}(a+8b-1)}x_4^{-b}\frac{\partial}{\partial x_2} - 4x_1^{\frac{1}{4}(a+8b+7)}x_2^3x_4^{-b-1}\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$b \leq -1,\ a + 8b \geq 1,\ a = 4k + 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

## 5. Коммутатор дифференцирований вертикального типа

Для удобства читателя в этом разделе мы напомним известные ранее условия коммутирования двух однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа.

**Лемма 1.** *Коммутатор дифференцирований вертикального типа $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}$ имеет вид*

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}] = \big(\langle m, \tilde{\rho}\rangle\langle\tilde{e}, \rho\rangle - \langle m, \rho\rangle\langle e, \tilde{\rho}\rangle\big) \cdot \varphi\tilde{\varphi} \cdot f\chi^{m+e+\tilde{e}},$$

*где $\rho$ и $\tilde{\rho}$ — лучи, ассоциированные с корнями $e$ и $\tilde{e}$ соответственно.*

*Доказательство.* Поскольку $\varphi, \tilde{\varphi} \in \Phi_e^\times \subseteq \mathbb{K}(Y) \subseteq \ker \partial_{e,\varphi} \cap \ker \partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}$, получаем $\partial_{e,\varphi}(\tilde{\varphi}) = \partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}(\varphi) = 0$. Поэтому согласно формуле (2)

$$\partial_{e,\varphi}\partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}(f\chi^m) = \partial_{e,\varphi}(\langle m, \rho_{\tilde{e}}\rangle \cdot \tilde{\varphi} \cdot f\chi^{m+\tilde{e}}) = \langle m, \rho_{\tilde{e}}\rangle \cdot \langle m, \rho_e\rangle \cdot \varphi\tilde{\varphi} \cdot f\chi^{m+e+\tilde{e}}.$$

Аналогично

$$\partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}\partial_{e,\varphi}(f\chi^m) = \langle m, \rho_e\rangle \cdot \langle m, \rho_{\tilde{e}}\rangle \cdot \varphi\tilde{\varphi} \cdot f\chi^{m+e+\tilde{e}},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

**Предложение 1.** *Пусть $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}$ — однородные локально нильпотентные дифференцирования вертикального типа на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$, где $Y$ — произвольное полупроективное многообразие и $\mathfrak{D}$ — произвольный собственный полиэдральный дивизор. Тогда $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e},\tilde{\varphi}}$ коммутируют тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

*(1) $\langle \tilde{e}, \rho\rangle = \langle e, \tilde{\rho}\rangle = 0$, где $\rho$ и $\tilde{\rho}$ — лучи, ассоциированные с корнями $e$ и $\tilde{e}$ соответственно;*
*(2) $\rho = \tilde{\rho}$.*

*Доказательство.* В силу леммы 1 условие равенства коммутатора нулю имеет вид:

$$\langle m, \tilde{\rho}\rangle\langle \tilde{e}, \rho\rangle - \langle m, \rho\rangle\langle e, \tilde{\rho}\rangle = 0 \quad \text{для любого } m \in M.$$

В силу линейности спаривания по каждому из аргументов имеем:

$$\big\langle m, \langle \tilde{e}, \rho\rangle \cdot \tilde{\rho} - \langle e, \tilde{\rho}\rangle \cdot \rho \big\rangle = 0 \quad \text{для любого } m \in M.$$

Следовательно, $\langle \tilde{e}, \rho\rangle \cdot \tilde{\rho} = \langle e, \tilde{\rho}\rangle \cdot \rho$. Вычисляя спаривания этого вектора с $e$ и $\tilde{e}$ получим систему

$$\begin{cases} \langle \tilde{e}, \rho\rangle \cdot \big(\langle e, \tilde{\rho}\rangle + 1\big) = 0 \\ \langle e, \tilde{\rho}\rangle \cdot \big(\langle \tilde{e}, \rho\rangle + 1\big) = 0. \end{cases}$$

Значит, либо $\langle \tilde{e}, \rho\rangle = 0$, откуда следует первое условие предложения, либо $\langle e, \tilde{\rho}\rangle = -1$, откуда следует второе условие. Предложение доказано.

□

*Замечание* 1. Для лучей $\rho$ и $\tilde{\rho}$ найдутся корни $e$ и $\tilde{e}$, такие что $\langle e, \rho\rangle = \langle \tilde{e}, \tilde{\rho}\rangle = -1$ и $\langle \tilde{e}, \rho\rangle = \langle e, \tilde{\rho}\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда вектора $\rho$ и $\tilde{\rho}$ можно дополнить до базиса решётки $N$.

*Замечание* 2. $\mathbb{G}_a^2$-действия, отвечающие парам коммутирующих однородных локально нильпотентных дифференцирований из пункта 2 предложения 1, имеют одномерные типичные орбиты. В самом деле, в этом случае ядра двух локально нильпотентных дифференцирований совпадают, и нужно воспользоваться тем, что типичные орбиты действия унипотентной группы на аффинном многообразии разделяются регулярными инвариантами (см. [9, Предложение 3.4]). Напротив, в пункте 1 коммутирующие дифференцирования имеют разные ядра, и поэтому типичные $\mathbb{G}_a^2$-орбиты двумерны.

## 6. Коммутатор дифференцирований вертикального и горизонтального типа

В этом разделе мы предполагаем, что $Y = \mathbb{A}^1$. По теореме 3 любое однородное дифференцирование горизонтального типа задается согласованной парой $(\widehat{\mathfrak{D}}, \tilde{e})$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — размеченный собственный полиэдральный дивизор, а для $\tilde{e} \in M$ существует такое целое число $\tilde{s}$, что $\hat{e} = (\tilde{e}, \tilde{s}) \in M \oplus \mathbb{Z}$ — корень расширенного конуса $\widehat{\omega}$. В подходящей системе порождающих

$$\partial_{\tilde{e}}(t^r \chi^m) = d(v_0(m) + r) \cdot t^{r+\tilde{s}} \cdot \chi^{m+\tilde{e}} \quad \text{для любых } (m, r) \in M \oplus \mathbb{Z}.$$

**Лемма 2.** *Пусть на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ заданы $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e}}$ — однородные локально нильпотентные дифференцирования вертикального и горизонтального типа соответственно. Тогда выполнены соотношения:*

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e}}](t) = d \cdot \langle \tilde{e}, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^{s+1} \chi^{e+\tilde{e}}$$

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) = d \cdot \Big( v_0(m) \cdot \langle \tilde{e}, \rho_e \rangle \cdot \varphi - \langle m, \rho_e \rangle \cdot \big( \varphi' \cdot t + \varphi \cdot v_0(e) \big) \Big) \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}}.$$

*Доказательство.* Первое соотношение следует из цепочки равенств:

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e}}](t) = \partial_{e,\varphi}(\partial_{\tilde{e}}(t)) - \partial_{\tilde{e}}(\partial_{e,\varphi}(t)) = \partial_{e,\varphi}(d \cdot t^{s+1} \chi^{\tilde{e}}) - 0 = d \cdot \langle \tilde{e}, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^{s+1} \chi^{e+\tilde{e}}.$$

Для доказательства второго соотношения вычислим $\partial_{e,\varphi}(\partial_{\tilde{e}}(\chi^m))$ и $\partial_{\tilde{e}}(\partial_{e,\varphi}(\chi^m))$:

$$\begin{aligned} \partial_{e,\varphi}(\partial_{\tilde{e}}(\chi^m)) &= \partial_{e,\varphi}(d \cdot v_0(m) \cdot t^s \chi^{m+\tilde{e}}) = d \cdot v_0(m) \cdot \langle m + \tilde{e}, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}} = \\ &= d \cdot v_0(m) \cdot \big( \langle m, \rho_e \rangle + \langle \tilde{e}, \rho_e \rangle \big) \cdot \varphi \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}} \\ \partial_{\tilde{e}}(\partial_{e,\varphi}(\chi^m)) &= \partial_{\tilde{e}}(\langle m, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot \chi^{m+e}) = \\ &= \langle m, \rho_e \rangle \cdot \big( \partial_{\tilde{e}}(\varphi) \cdot \chi^{m+e} + \varphi \cdot d \cdot v_0(m+e) \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}} \big). \end{aligned}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\partial_{\tilde{e}}(\varphi) = \varphi' \cdot \partial_{\tilde{e}}(t) = \varphi' \cdot d \cdot t^{s+1} \chi^{\tilde{e}},$$

где штрих обозначает производную по $t$. Вынося общие множители за скобку в последнем выражении, получим:

$$\partial_{\tilde{e}}(\partial_{e,\varphi}(\chi^m)) = d \cdot \langle m, \rho_e \rangle \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}} \cdot \big( \varphi' \cdot t + \varphi \cdot v_0(m+e) \big).$$

Осталось вычислить разность полученных выражений, заметив, что при вычитании слагаемое $d \cdot v_0(m) \cdot \langle m, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}}$ сократится.

$\square$

**Теорема 4.** *Пусть на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ заданы $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e}}$ — однородные локально нильпотентные дифференцирования вертикального и горизонтального типа соответственно. Тогда $\partial_{e,\varphi}$ и $\partial_{\tilde{e}}$ коммутируют если и только если одновременно выполнены два условия:*

*(1)* $\langle \tilde{e}, \rho_e \rangle = 0$
*(2)* $\varphi = ct^{-v_0(e)} \in \Phi_e^\times, \quad c \in \mathbb{K}, v_0(e) \in \mathbb{Z}.$

*Доказательство.* Если коммутатор обращается в ноль, то равно нулю и первое соотношение леммы 2:

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e}}](t) = d \cdot \langle \tilde{e}, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^{s+1} \chi^{e+\tilde{e}} = 0.$$

Если $\varphi \equiv 0$, то дифференцирование вертикального типа есть тождественно нулевое отображение и утверждение теоремы тривиально. В противном случае $\varphi$, $t$, $\chi$ — не тождественно нулевые функции, а число $d$ положительно по определению. Значит, равенство нулю коммутатора на функции $t$ эквивалентно равенству нулю спаривания $\langle \tilde{e}, \rho_e \rangle$.

Далее, с учётом вышесказанного, второе соотношение леммы 2 примет вид:

$$[\partial_{e,\varphi}, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) = -d \cdot \langle m, \rho_e \rangle \cdot t^s \chi^{m+e+\tilde{e}} \cdot \big( \varphi' \cdot t + \varphi \cdot v_0(e) \big).$$

Последнее равно нулю если и только если

$$\varphi' \cdot t + \varphi \cdot v_0(e) = 0.$$

Но это дифференциальное уравнение относительно $\varphi$ с разделяющимися переменными, решением которого является семейство степенных функций $ct^{-v_0(e)}$, где $c \in \mathbb{K}$. Значит, функция $\varphi$ должна, во-первых, по определению быть в пространстве $\Phi_e^\times$, а во-вторых, принадлежать семейству решений указанного дифференциального уравнения. Теорема доказана. □

*Замечание* 3. Условие $ct^{-v_0(e)} \in \Phi_e^\times$ теоремы по определению означает, что дивизор $\mathfrak{D}(e) - v_0(e) \cdot \{0\} \geq 0$.

*Замечание* 4. В условиях теоремы 4 ядра коммутирующих однорордных локально нильпотентных дифференцирований различны и типичные $\mathbb{G}_a^2$-орбиты двумерны.

## 7. Коммутатор дифференцирований горизонтального типа

По-прежнему считаем, что $Y = \mathbb{A}^1$. Основная трудность в работе с дифференцированиями горизонтального типа заключается в том, что разные дифференцирования приводятся к каноническому виду в разных системах порождающих. Пусть $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ — однородные дифференцирования горизонтального типа, соответствующие согласованным парам $(\widehat{\mathfrak{D}}_v, e)$ и $(\widehat{\mathfrak{D}}_{\tilde{v}}, \tilde{e})$, где

$$\widehat{\mathfrak{D}}_v = \{\mathfrak{D} = \sum_{z \in \mathbb{A}^1} \Delta_z \cdot z; v_z\} \text{ и } \widehat{\mathfrak{D}}_{\tilde{v}} = \{\mathfrak{D} = \sum_{z \in \mathbb{A}^1} \Delta_z \cdot z; \tilde{v}_z\},$$

а $z_0$ и $\tilde{z}_0$ — соответствующие отмеченные точки. В дальнейшем мы полагаем $\tilde{z}_0 = 0$. По следствию 1 можно считать, что $v_z = 0$ для всех $z \neq z_0$. Тогда, вводя новую переменную $q = t - z_0$, получим следующее выражение для $\partial_e$:

$$\partial_e(q^r \chi^m) = d(v_{z_0}(m) + r) \cdot q^{r+s} \cdot \chi^{m+e} \quad \text{для любых } (m, r) \in M \oplus \mathbb{Z}.$$

Чтобы получить аналогичное выражение для $\partial_{\tilde{e}}$, рассмотрим дивизор $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} - \sum_{z \neq 0} (\tilde{v}_z + \sigma) \cdot z$. По следствию 1 существует изоморфизм многообразий $X[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}] \to X[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}']$, задаваемый семейством рациональных функций $\varphi^m \in \mathbb{K}(t)$ с дивизорами $\mathfrak{D}'(m) - \mathfrak{D}(m)$, причём $\varphi^m \cdot \varphi^{m'} = \varphi^{m+m'}$. Тогда у нового собственного полиэдрального дивизора $\mathfrak{D}'$ все выбранные вершины $\tilde{v}'_z = 0$ при $z \neq 0$. Таким образом,

$$\partial_{\tilde{e}}(t^r \cdot \varphi^m \chi^m) = \tilde{d}(\tilde{v}_0(m) + r) \cdot t^{r+\tilde{s}} \cdot \varphi^{m+\tilde{e}} \chi^{m+\tilde{e}} \quad \text{для любых } (m, r) \in M \oplus \mathbb{Z}.$$

На рисунке 3 отмеченные вершины обозначены звёздочками.

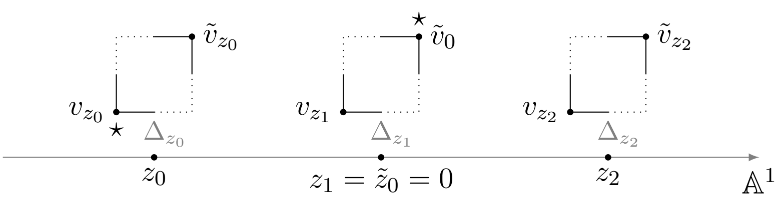



Рис. 3

Зафиксируем полученный результат в следующем определении.

**Определение 5.** Система порождающих алгебры $A$ называется *согласованной* с дифференцированиями $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$, если в ней они имеют следующий вид:

$$\partial_e(q^r\chi^m) = d(v_{z_0}(m) + r) \cdot q^{r+s} \cdot \chi^{m+e}, \quad q = t - z_0$$
$$\partial_{\tilde{e}}(t^r \cdot \varphi^m \chi^m) = \tilde{d}(\tilde{v}_0(m) + r) \cdot t^{r+\tilde{s}} \cdot \varphi^{m+\tilde{e}}\chi^{m+\tilde{e}}.$$

**Определение 6.** Назовём дифференцирование $\partial$ *простым* в заданной системе порождающих алгебры $A$, если в соответствующей ему паре $(\widehat{\mathfrak{D}}_v, e)$ все вершины $v$ равны нулю за исключением отмеченной вершины и, быть может, ещё одной.

Заметим, что определение согласованной системы порождающих не симметрично относительно $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$. Кроме того, в согласованной системе порождающих дифференирование $\partial_e$ всегда простое.

Доказательство следующей леммы вынесено в приложение, поскольку оно довольно громоздко и носит технический характер. Также предварительно введём обозначение $\alpha_m$ для величины $t(\varphi^m)'/\varphi^m$.

**Лемма 3.** *Пусть на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ заданы $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ — однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа, определяемые комбинаторными данными $(e, v_{z_0}, v_z, d)$, $z \neq z_0$, и $(\tilde{e}, \tilde{v}_0, \tilde{v}_z, \tilde{d})$, $z \neq 0$, соответственно. Тогда в согласованной с $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ системе порождающих $A$ выполнены следующие соотношения:*

$$[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](t) = d\tilde{d} \cdot t^{\tilde{s}} q^s \cdot \varphi^{\tilde{e}}\chi^{e+\tilde{e}} \cdot B, \tag{5}$$
$$[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) = d\tilde{d} \cdot t^{\tilde{s}-1} q^{s-1} \cdot \varphi^{\tilde{e}} \cdot \chi^{m+e+\tilde{e}}\big(C_0 + C_1 + C_2\big), \tag{6}$$

*где*

$$B = (\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - v_{z_0}(\tilde{e}) + s)t - (\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - 1)z_0 - (\alpha_e + \alpha_{\tilde{e}})q \tag{7}$$
$$C_0 = \tilde{s}\tilde{v}_0(m)q^2 - s v_{z_0}(m)t^2 + \big(\tilde{v}_0(m)v_{z_0}(\tilde{e}) - v_{z_0}(m)\tilde{v}_0(e)\big)tq \tag{8}$$
$$C_1 = \tilde{v}_0(m)\alpha_{\tilde{e}}q^2 - \tilde{s}\alpha_m q^2 - v_{z_0}(\tilde{e})\alpha_m tq + v_{z_0}(m)\alpha_e tq \tag{9}$$
$$C_2 = -t\alpha_m' q^2 - \alpha_m \alpha_{\tilde{e}} q^2. \tag{10}$$

В дальнейшем нам будет нужен явный вид функции $\alpha_m$. По следствию 1 дивизор $\operatorname{div}(\varphi^m) = \mathfrak{D}'(m) - \mathfrak{D}(m) = -\sum_{z\neq 0}(\tilde{v}_z + \sigma)\cdot z$. Отсюда следует, что $\varphi^m = \prod_{z\neq 0}(t-z)^{-\tilde{v}_z(m)}$ и

$$\alpha_m = -\sum_{z\neq 0} \tilde{v}_z(m)\frac{t}{t-z}, \quad \alpha_m' = \sum_{z\neq 0}\tilde{v}_z(m)\frac{z}{(t-z)^2}. \tag{11}$$

Для удобства пронумеруем все точки $z$, для которых $\Delta_z \neq \sigma$, индексами от 1 до $l$, $z_k \neq 0$, $z_k \neq z_0$ и введём следующие обозначения: $\mu(t) = \prod_{k=1}^{l}(t - z_k)$, $\mu_k(t) = \prod_{i\neq k}(t - z_i)$. Тогда (11) примет вид

$$\alpha_m = -t \cdot \sum_{z_k \neq 0} \tilde{v}_{z_k}(m)\frac{\mu_k(t)}{\mu(t)}, \quad \alpha_m' = \sum_{z_k\neq 0} z_k \tilde{v}_{z_k}(m)\frac{\mu_k(t)^2}{\mu(t)^2}. \tag{12}$$

Кроме того, из пункта 1 определения 4 следует, что

$$s = -1/d - v_{z_0}(e), \quad \tilde{s} = -1/\tilde{d} - \tilde{v}_0(\tilde{e}). \tag{13}$$

Поскольку $v_z = 0$ для всех $z \neq z_0$, для $\tilde{v}_z \neq 0$ выражения $\tilde{v}_z(e) \geq 1 + v_z(e)$ и $v_z(\tilde{e}) \geq 1 + \tilde{v}_z(\tilde{e})$ пункта 2 того же определения примут вид

$$\tilde{v}_z(e) \geq 1, \quad \tilde{v}_z(\tilde{e}) \leq -1. \tag{14}$$

Наша цель — выяснить, когда вычисленные в лемме 3 коммутаторы обращаются в ноль. Рассмотрим сначала более простой случай, введя следующее определение.

**Определение 7.** Однородные локально нильпотентные дифференцирования $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ называются *смежными*, если в соответствующих им парах $(\widehat{\mathfrak{D}}_v, e)$ и $(\widehat{\mathfrak{D}}_{\tilde{v}}, \tilde{e})$ отмеченные точки и отмеченные вершины совпадают.

Заметим, что в таком случае можно считать, что в согласованной системе порождающих $z_0 = \tilde{z}_0 = 0$ и $v_{z_0} = \tilde{v}_{\tilde{z}_0} = v_0$.

**Предложение 2.** *Пусть $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ — смежные однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$.*

*Тогда $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ коммутируют если и только если в согласованной с ними системе порождающих выполнено одно из следующих условий:*

*(1) $\tilde{v}_z = 0$ для всех $z \neq 0$;*

*(2) $v_0 \in N$, $\tilde{v}_0 \in N$, существует такая точка носителя дивизора $z_1$, что $\tilde{v}_{z_1}(e) = 1$, $\tilde{v}_{z_1}(\tilde{e}) = -1$ и все $\tilde{v}_z = 0$ при $z \neq 0$, $z \neq z_1$.*

*Доказательство.* В условиях предложения можно существенно упростить выражения для коммутаторов, полученные в лемме 3. Во-первых, заметим, что из определения $d = \tilde{d}$ и, значит, в силу (13) $\tilde{s} + v_0(\tilde{e}) = s + v_0(e) = -1/d$. Тогда из (7) леммы получим, что $B = -(\alpha_e + \alpha_{\tilde{e}})t$. По лемме 4 выражение $B = 0$ если и только если $\tilde{v}_z(e) + \tilde{v}_z(\tilde{e}) = 0$ для всех $z \neq 0$. С учётом этого условия выражения (8–10) примут вид:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 1/d \cdot \alpha_m t^2 \\ C_2 &= -t\alpha_m' t^2 - \alpha_m \alpha_{\tilde{e}} t^2. \end{aligned}$$

Коммутатор равен нулю, если $C_0 + C_1 + C_2 = 0$. Распишем все выражения с $\alpha$ в последнем равенстве согласно (12):

$$1/d \cdot t \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(m) \frac{\mu_k(t)}{\mu(t)} - t \cdot \sum_{k=1}^{l} z_k \tilde{v}_{z_k}(m) \frac{\mu_k(t)^2}{\mu(t)^2} - \\ -t^2 \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(m) \frac{\mu_k(t)}{\mu(t)} \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}) \frac{\mu_k(t)}{\mu(t)} = 0.$$

Это эквивалентно равенству нулю числителя:

$$1/d \cdot t \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(m) \mu_k(t) \mu(t) - t \cdot \sum_{k=1}^{l} z_k \tilde{v}_{z_k}(m) \mu_k(t)^2 - \\ -t^2 \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(m) \mu_k(t) \cdot \sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}) \mu_k(t) = 0.$$

Вычисляя значения этого многочлена в точке $z_j$, имеем $\tilde{v}_{z_j}(m)(1 + \tilde{v}_{z_j}(\tilde{e})) = 0$. А приравняв к нулю коэффициент при старшем мономе числителя, получим $\sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_j}(m)\big(1 + d\sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_{z_j}(\tilde{e})\big) = 0$. Но согласно (14) имеем $\tilde{v}_{z_j}(\tilde{e}) \leq -1$, если $\tilde{v}_{z_j} \neq 0$.

Тогда остаётся только две возможности. Первая — все $\tilde{v}_{z_j} = 0$, что соответствует условию 1 предложения. Вторая — существует такая точка $z_1 \neq 0$, что $\tilde{v}_{z_1}(\tilde{e}) = -1$, $d = 1$, $\tilde{v}_{z_j} = 0$ при $j \neq 1$. Кроме того, из ранее полученного соотношения $\tilde{v}_z(e) + \tilde{v}_z(\tilde{e}) = 0$

следует, что $\tilde{v}_{z_1}(e) = 1$. Тем самым получены все пункты условия 2 предложения. Достаточность полученных условий проверяется прямой подстановкой. □

Рассмотрим условия 2 и 3 согласованности пары $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$ из определения 4. Пусть даны два дифференцирования $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$, заданные на вершинах $V = \{v_{z_0}, \dots, v_{z_l}\}$ и $\tilde{V} = \{\tilde{v}_{z_0}, \dots, \tilde{v}_{z_l}\}$, где $z_0$ и $\tilde{z}_0$ — соответствующие отмеченные вершины ($\tilde{z}_0 = z_k$ для некоторого $k$). Тогда указанные условия можно записать в виде соотношений на комбинаторные данные, определяющие дифференцирования:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{z_k}(e) &\geq 1 + v_{z_k}(e), \quad \text{где } \tilde{v}_{z_k} \neq v_{z_k},\ k \neq 0 \\ v_{z_k}(\tilde{e}) &\geq 1 + \tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}), \quad \text{где } v_{z_k} \neq \tilde{v}_{z_k},\ k \neq 0 \\ d\tilde{v}_{z_0}(e) &\geq 1 + dv_{z_0}(e), \quad \text{где } \tilde{v}_{z_0} \neq v_{z_0} \\ \tilde{d}v_{\tilde{z}_0}(\tilde{e}) &\geq 1 + \tilde{d}\tilde{v}_{\tilde{z}_0}(\tilde{e}), \quad \text{где } v_{\tilde{z}_0} \neq \tilde{v}_{\tilde{z}_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, каждой точке $z_k$ носителя дивизора соответствуют два *согласующих неравенства*: одно с $e$, другое с $\tilde{e}$. Если точка — отмеченная для соответствующего дифференцирования, то это будет неравенство из второй пары, если не отмеченная, то из первой.

**Определение 8.** Однородные локально нильпотентные дифференцирования $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$, соответствующие парам $(\widehat{\mathfrak{D}}_v, e)$ и $(\widehat{\mathfrak{D}}_{\tilde{v}}, \tilde{e})$ с указанными наборами вершин $V = \{v_{z_0}, \dots, v_{z_l}\}$ и $\tilde{V} = \{\tilde{v}_{z_0}, \dots, \tilde{v}_{z_l}\}$, называются *связанными*, если для любой точки $z_k$ носителя дивизора $\widehat{\mathfrak{D}}$ выполнено одно из двух условий: либо вершины дифференцирований $v_{z_k}$ и $\tilde{v}_{z_k}$ совпадают, либо оба согласующих неравенства в точке $z_k$ обращаются в равенства.

На рисунке 4 обращение согласующего неравенства в равенство показано стрелкой, выходящей из соответствующей вершины. Стрелки неравенств для отмеченных вершин выделены пунктиром.

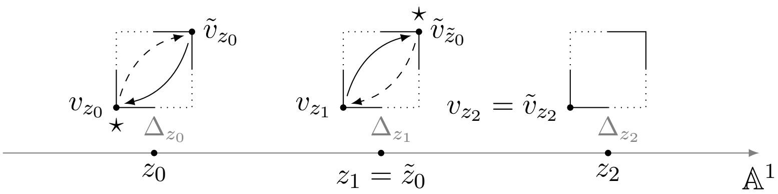



Рис. 4

Из предложения 2 следует следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Смежные однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ на алгебре $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ коммутируют тогда и только тогда, когда они связанные и в согласованных по $\partial_e$ порождающих $\partial_{\tilde{e}}$ просто.*

*Доказательство.* Так как $\partial_{\tilde{e}}$ просто, то либо $\tilde{v}_z = 0$ для всех $z \neq 0$, что является первым условием предложения, либо существует такая точка носителя дивизора $z_1$, что $\tilde{v}_{z_1} \neq 0$. При этом в силу выбора системы порождающих $v_{z_1} = 0$. Тогда запишем условия связанности для точки $z_1$: $\tilde{v}_{z_1}(e) = 1 + 0$, $0 = 1 + \tilde{v}_{z_1}(\tilde{e})$. Легко видеть, что это условия 2 предложения 2. □

Следующая техническая лемма используется в дальнейшем. Её доказательство не имеет отношения к обсуждаемой теме и вынесено в приложение.

**Лемма 4.** *Пусть* $z_i \in \mathbb{K}$, $z_i \neq z_j$ *при* $i \neq j$, $a_k \in \mathbb{Z}$. *Тогда сумма*

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{a_k}{t - z_k} = \lambda = const$$

*в том и только в том случае, когда* $\lambda = 0$ *и* $a_k = 0$ *для всех* $k$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

**Теорема 5.** *Однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа* $\partial_e$ *и* $\partial_{\tilde{e}}$ *на алгебре* $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ *коммутируют тогда и только тогда, когда они связанные и в согласованной с ними системе порождающих дифференцирование* $\partial_{\tilde{e}}$ *просто.*

*Доказательство.* Доказательство состоит из двух частей, соответствующих двум случаям. Наиболее трудным является первый из них. В обоих случаях доказывается необходимость, достаточность следует из повторения выкладок в обратном порядке.

*Случай 1:* $z_0 \neq 0$.

Здесь предполагаем, что $v_{z_0} \notin N$ и $\tilde{v}_0 \notin N$ (в частности, вершина $v_{z_0} \neq 0$ и $\tilde{v}_0 \neq 0$). В противном случае по крайней мере у одного из дифференцирований нет отмеченных точек, и в качестве таковой можно выбрать любую точку из носителя дивизора. И тогда можно положить $z_0 = 0$.

Равенство коммутатора двух дифференцирований нулю эквивалентно его равенству нулю на функциях $t$ и $\chi$. В силу леммы 3 равенство коммутатора нулю на функции $t$ эквивалентно тому, что выражение (7) как полином от $t$ есть ноль.

Сначала выделим из $-(\alpha_e + \alpha_{\tilde{e}})q$ в равенстве (7) те слагаемые, у которых $z = z_0$:

$$\Big(\tilde{v}_{z_0}(e + \tilde{e}) \frac{t}{t - z_0}\Big)(t - z_0) = t \cdot \tilde{v}_{z_0}(e + \tilde{e}).$$

То, что из суммы $\alpha_e$ изъято слагаемое с $z = z_0$, будем далее показывать горизонтальной чертой:

$$\bar{\alpha}_e = -t \cdot \sum_{z_k \neq 0,\, z_0} \tilde{v}_{z_k}(e) \frac{\mu_k(t)}{\mu(t)}.$$

Тогда равенство (7) примет вид:

$$B \ = (\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - v_{z_0}(\tilde{e}) + s + \tilde{v}_{z_0}(e + \tilde{e}))t - (\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - 1)z_0 - (\bar{\alpha}_e + \bar{\alpha}_{\tilde{e}})q.$$

Если $B$ есть ноль, то, очевидно, $B(0) = 0$ и $B(z_0) = 0$. С учётом того, что $\bar{\alpha}_e(0) = 0$, это приводит к следующим условиям:

$$\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - 1 = 0 \qquad (15)$$

$$1 - v_{z_0}(\tilde{e}) + s + \tilde{v}_{z_0}(e + \tilde{e}) = 0. \qquad (16)$$

Теперь рассмотрим равенство $[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) = 0$. Проведём аналогичную процедуру с выражениями (9) и (10). Тогда $C_1, C_2$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} C_1 = &-\tilde{v}_0(m)\tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})tq + \tilde{s}\tilde{v}_{z_0}(m)tq + v_{z_0}(\tilde{e})\tilde{v}_{z_0}(m)t^2 - v_{z_0}(m)\tilde{v}_{z_0}(e)t^2 + \\ &\tilde{v}_0(m)\bar{\alpha}_{\tilde{e}}q^2 - \tilde{s}\bar{\alpha}_m q^2 - v_{z_0}(\tilde{e})\bar{\alpha}_m tq + v_{z_0}(m)\bar{\alpha}_e tq \\ C_2 = &-tz_0\tilde{v}_{z_0}(m) - \tilde{v}_{z_0}(m)\tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})t^2 - t\bar{\alpha}'_m q^2 - \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{\tilde{e}} q^2. \end{aligned}$$

Условие $[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) = 0$ эквивалентно тому, что $F(t) := C_0 + C_1 + C_2 = 0$. Далее, $F(0) = 0$ и $F(z_0) = 0$ дают следующие условия:

$$\tilde{s}\tilde{v}_0(m) = 0 \tag{17}$$

$$-v_{z_0}(m)\big(\tilde{v}_{z_0}(e) + s\big) - \tilde{v}_{z_0}(m)\big(-v_{z_0}(\tilde{e}) + 1 + \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})\big) = 0. \tag{18}$$

Из (17) следует, что $\tilde{s} = 0$. Тогда, подставив $\tilde{s} = 0$ в (13) и (15), соответственно получим

$$\tilde{v}_0(\tilde{e}) = -1/\tilde{d}, \quad \tilde{v}_0(e) = 1. \tag{19}$$

Заметим, что в (18) выражения в скобках при $v_{z_0}(m)$ и $\tilde{v}_{z_0}(m)$ равны в силу (16), а значит, общий множитель можно вынести за скобку: $\big(v_{z_0}(m) - \tilde{v}_{z_0}(m)\big)\big(\tilde{v}_{z_0}(e) + s\big) = 0$. В итоге, из (16) и (18) получим:

$$\tilde{v}_{z_0}(e) + s = 0, \quad v_{z_0}(\tilde{e}) - \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e}) = 1. \tag{20}$$

С помощью выведенных соотношений можно существенно упростить условие $C_0+C_1+C_2 = 0$. Сгруппируем слагаемые, которые не содержат $\bar{\alpha}$, следующим образом:

$$\begin{aligned} -v_{z_0}(m)\big(st^2 + tq + \tilde{v}_{z_0}(e)t^2\big) + \tilde{v}_{z_0}(m)\big(v_{z_0}(\tilde{e})t^2 - \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})t^2 - tz_0\big) \\ +\tilde{v}_0(m)\big(v_{z_0}(\tilde{e})tq - \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})tq\big) = -v_{z_0}(m)tq + \tilde{v}_{z_0}(m)\big(t^2 - tz_0\big) + \tilde{v}_0(m)tq = \\ = \big(\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m)\big)tq. \end{aligned}$$

В итоге равенство $C_0 + C_1 + C_2 = 0$ примет вид:

$$\begin{aligned} \big(\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m)\big)tq + \tilde{v}_0(m)\bar{\alpha}_{\tilde{e}}q^2 - v_{z_0}(\tilde{e})\bar{\alpha}_m tq+ \\ + v_{z_0}(m)\bar{\alpha}_e tq - t\bar{\alpha}'_m q^2 - \bar{\alpha}_m\bar{\alpha}_{\tilde{e}}q^2 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\bar{\alpha}_m$ можно представить в виде $\bar{\alpha}_m = t \cdot \bar{\bar{\alpha}}_m$, где $\bar{\bar{\alpha}}_m$ есть сумма $-\sum_{z\neq 0,\, z_0} \tilde{v}_z(m)\dfrac{1}{t-z}$. Распишем подобным образом все слагаемые с $\bar{\alpha}$ в последнем равенстве и разделим его на $tq$:

$$\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m) + \tilde{v}_0(m)\bar{\bar{\alpha}}_{\tilde{e}}q - v_{z_0}(\tilde{e})\bar{\bar{\alpha}}_m t + v_{z_0}(m)\bar{\bar{\alpha}}_e t - \bar{\alpha}'_m q - \bar{\bar{\alpha}}_m\bar{\bar{\alpha}}_{\tilde{e}}q = 0.$$

Вычисляя значения полученного выражения в точках 0 и $z_0$, получим следующие соотношения:

$$\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m) - z_0\tilde{v}_0(m)\bar{\bar{\alpha}}_{\tilde{e}} + z_0\bar{\alpha}'_m = 0 \tag{21}$$

$$\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m) - z_0 v_{z_0}(\tilde{e})\bar{\bar{\alpha}}_m + v_{z_0}(m)\bar{\bar{\alpha}}_e z_0 = 0. \tag{22}$$

Если перенести в равенстве (22) все слагаемые с $\alpha$ направо и воспользоваться леммой 4, получим, что $\tilde{v}_{z_0}(m) - v_{z_0}(m) + \tilde{v}_0(m) = 0$ для любого $m \in M$. То есть $v_{z_0} - \tilde{v}_{z_0} = \tilde{v}_0$. Заметим, что из последнего следует соотношение $d = \tilde{d}$.

Тогда (21) примет вид $z_0 \cdot \tilde{v}_0(m)\bar{\bar{\alpha}}_{\tilde{e}} - z_0 \cdot \bar{\alpha}'_m = 0$. С использованием выражения (12) это равенство можно записать, поделив на $z_0$, следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_0(m)\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e})\frac{\mu_k(t)}{\mu(t)} - \sum_{k=1}^{l} z_k\tilde{v}_{z_k}(m)\frac{\mu_k(t)^2}{\mu(t)^2} = 0.$$

Равенство нулю дроби эквивалентно равенству нулю числителя:

$$\sum_{k=1}^{l} \tilde{v}_0(m)\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e})\mu_k(t)\mu(t) - \sum_{k=1}^{l} z_k\tilde{v}_{z_k}(m)\mu_k(t)^2 = 0.$$

Подстановка $t = z_j$ приводит к условию:

$$z\tilde{v}_{z_k}(m)\mu_j(z_j)^2 = 0.$$

Так как $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, $\mu_j(z_j) \neq 0$. То есть, $\tilde{v}_z = 0$ при $z \neq 0, z_0$. Тем самым выполнено условие простоты для $\partial_{\tilde{e}}$.

Наконец, объединяя (19) и (20), получим следующий набор необходимых условий коммутирования:

$$\tilde{v}_0(\tilde{e}) = -1/d; \quad \tilde{v}_0(e) = 1; \quad \tilde{v}_{z_0}(e) - v_{z_0}(e) = 1/d; \quad v_{z_0}(\tilde{e}) - \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e}) = 1.$$

Легко видеть, что это на самом деле условия связанности дифференцирований в точках $z_0$ и $\tilde{z}_0 = 0$. Подстановка полученных условий в (5) и (6) доказывает их достаточность.

*Случай 2: $z_0 = 0$.*

При $z_0 = 0$ выражения (5) и (6) примут вид:

$$\begin{aligned}
[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](t) &= d\tilde{d} \cdot \varphi^{\tilde{e}} \chi^{e+\tilde{e}} \cdot (\tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - v_0(\tilde{e}) + s - \alpha_e - \alpha_{\tilde{e}})t \\
[\partial_e, \partial_{\tilde{e}}](\chi^m) &= d\tilde{d} \cdot t^{s+\tilde{s}} \cdot \varphi^{\tilde{e}} \cdot \chi^{m+e+\tilde{e}} \big(C_0 + C_1 + C_2\big),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_0 &= \tilde{s}\tilde{v}_0(m) - sv_0(m) + \tilde{v}_0(m)v_0(\tilde{e}) - v_0(m)\tilde{v}_0(e) \\
C_1 &= \tilde{v}_0(m)\alpha_{\tilde{e}} - \tilde{s}\alpha_m - v_0(\tilde{e})\alpha_m + v_0(m)\alpha_e \\
C_2 &= -t\alpha_m' - \alpha_m\alpha_{\tilde{e}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, коммутатор равен нулю тогда и только тогда, когда выполнена система

$$\begin{cases} \tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - v_0(\tilde{e}) + s - \alpha_e - \alpha_{\tilde{e}} = 0 \\ C_0 + C_1 + C_2 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Положив $t = 0$ в обоих равенствах, получим необходимые условия коммутирования:

$$\begin{cases} \tilde{v}_0(e) - \tilde{s} - v_0(\tilde{e}) + s = 0 \\ \tilde{s}\tilde{v}_0(m) - sv_0(m) + \tilde{v}_0(m)v_0(\tilde{e}) - v_0(m)\tilde{v}_0(e) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда, из первых равенств в системах (23) и (24), получим, что $\alpha_e + \alpha_{\tilde{e}} = 0$. По лемме 4 это эквивалентно условию

$$\tilde{v}_z(e + \tilde{e}) = 0, \quad z \neq 0. \tag{25}$$

Преобразуем второе выражение из (24)

$$\tilde{s}\tilde{v}_0(m) - sv_0(m) + \tilde{v}_0(m)v_0(\tilde{e}) - v_0(m)\tilde{v}_0(e) = \tilde{v}_0(m)\big(v_0(\tilde{e}) + \tilde{s}\big) - v_0(m)\big(\tilde{v}_0(e) + s\big).$$

В силу первого соотношения системы (24) выражения в скобках при $\tilde{v}_0(m)$ и $v_0(m)$ равны. Подставив в первое равенство (24) вместо $s$ и $\tilde{s}$ их значения (13) и воспользовавшись линейностью спаривания, окончательно получим

$$\begin{cases} \langle v_0 - \tilde{v}_0, e + \tilde{e}\rangle = 1/\tilde{d} - 1/d \\ \langle \tilde{v}_0 - v_0, m\rangle \cdot \big(\tilde{v}_0(e) + s\big) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Далее из второго соотношения в (26) возникает два подслучая: $\tilde{v}_0 = v_0$ и $\tilde{v}_0(e) + s = 0$. Но первый из них соответствует пункту 1 предложения 2. Значит, для завершения доказательства достаточно рассмотреть второй.

Из первого равенства в (24) получаем $v_0(\tilde{e}) + \tilde{s} = 0$. Подставляя вместо $s$ и $\tilde{s}$ их значения из (13) получим

$$d\tilde{v}_0(e) = 1 + dv_0(e), \quad \tilde{d}v_0(\tilde{e}) = 1 + \tilde{d}v_0(\tilde{e}). \tag{27}$$

Кроме того, второе условие коммутирования (23) принимает вид:

$$\tilde{v}_0(m)\alpha_{\tilde{e}} - v_0(m)\alpha_e - t\alpha'_m - \alpha_m\alpha_{\tilde{e}} = 0.$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрев числитель этого выражения и его значения в $t = z_j$, получим $\tilde{v}_{z_j}(m)(1 + \tilde{v}_{z_j}(\tilde{e})) = 0$. Следовательно, в силу (14) $\tilde{v}_{z_j}(\tilde{e}) = -1$. А приравнивая к нулю коэффициент при старшем члене, получим следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{l}\big(\tilde{v}_0(m)\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}) + v_0(m)\tilde{v}_{z_k}(e)\big) = \sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k}(m)\sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}).$$

Ранее мы показывали, что $\tilde{v}_{z_k}(e + \tilde{e}) = 0$, то есть $\tilde{v}_{z_k}(e) = -\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}) = 1$. Тогда

$$l \cdot \Big(\tilde{v}_0(m) - v_0(m) - \sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k}(m)\Big) = 0. \tag{28}$$

Значит, или $l = 0$, что приводит к пункту 1 теоремы 2, или выражение в скобках в (28) равно нулю. Но тогда $\tilde{v}_0 - v_0 = \sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k} \in N$, и значит, во-первых, $d = \tilde{d}$, а во-вторых:

$$-1/d = \langle\tilde{v}_0 - v_0, \tilde{e}\rangle = \langle\sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k}, \tilde{e}\rangle = \sum_{k=1}^{l}\tilde{v}_{z_k}(\tilde{e}) \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $d = 1$ и существует только одна точка $z_1$, что $\tilde{v}_{z_1} \neq 0$, при этом $\tilde{v}_{z_1}(\tilde{e}) = -1$. Тем самым дифференцирование $\partial_{\tilde{e}}$ просто. С учётом полученного выше $\tilde{v}_{z_1}(e) = 1$. Соединяя последние два равенства, убеждаемся в том, что это условия связанности в точке $z_1$, а условия связанности в точке $\tilde{z}_0 = 0$ — в точности соотношение (27). Теорема доказана. □

Выписывая явно все встретившиеся в процессе доказательства случаи, получим:

**Следствие 3.** *Однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа $\partial_e$ и $\partial_{\tilde{e}}$ коммутируют тогда и только тогда, когда в согласованной с ними системе порождающих выполнено одно из следующих пяти условий:*

*(1)* $\tilde{v}_z = 0$ *при* $z \neq 0$, $z_0 = 0$, $\tilde{z}_0 = 0$ *и*
  1.1. $v_0 = \tilde{v}_0$; *или*
  1.2. $d\tilde{v}_0(e) = 1 + dv_0(e)$, $\tilde{d}v_0(\tilde{e}) = 1 + \tilde{d}\tilde{v}_0(\tilde{e})$;

*(2)* $\tilde{v}_z = 0$ *при* $z \neq 0$ *и* $z \neq z_1$, $z_0 = 0$, $\tilde{z}_0 = 0$
$v_0 \in N$, $\tilde{v}_0 \in N$, $\tilde{v}_{z_1}(e) = 1$, $\tilde{v}_{z_1}(\tilde{e}) = -1$; *и*
  2.1. $v_0 = \tilde{v}_0$; *или*
  2.2. $\tilde{v}_0(e) = 1 + v_0(e)$, $v_0(\tilde{e}) = 1 + \tilde{v}_0(\tilde{e})$;

*(3)* $\tilde{v}_z = 0$ *при* $z \neq 0$ *и* $z \neq z_0$, $z_0 \neq 0$, $\tilde{z}_0 = 0$ *и*
$d\tilde{v}_{z_0}(e) = 1 + dv_{z_0}(e)$, $v_{z_0}(\tilde{e}) = 1 + \tilde{v}_{z_0}(\tilde{e})$, $\tilde{v}_0(e) = 1$, $d\tilde{v}_0(\tilde{e}) = -1$, $d = \tilde{d}$.

**Пример 5.** Проиллюстрируем полученный результат на дифференцированиях из примера 3. Напомним, что речь идёт о многообразии, определяемым дивизором на аффинной прямой $\mathfrak{D} = [0, 1] \cdot \{0\}$, а полученные дифференцирования горизонтального типа, соответствующие вершинам 0 и 1, образуют два класса:

$$\partial_0(t^r\chi^m) = rt^{r-1}\chi^{m+e}$$
$$\partial_1(t^r\chi^m) = (m+r)t^{r+\tilde{s}}\chi^{m+\tilde{e}}.$$

Поскольку $z_0 = \tilde{z}_0 = 0$, мы находимся в рамках пункта 1 следствия 3. Рассматриваемые дифференцирования соответствуют разным отмеченным вершинам, поэтому если они коммутируют, то должно быть выполнено условие связанности. Имеем, $e = 1 + 0$ и $0 = 1 + \tilde{e}$, т.е. $e = 1$, $\tilde{e} = -1$ и $\tilde{s} = 0$. Таким образом, переходя к переменным $x, y$, получим, что дифференцирования из разных классов коммутируют если и только если в представлении (4) $a = b = 0$. Кроме того, внутри одного класса дифференцирования коммутируют, поскольку их отмеченные вершины совпадают и тем самым выполнены условия согласованности. Соответствующие $\mathbb{G}_a^2$-действия имеют вид:

$$(1)\quad x \mapsto x + \lambda, \quad y \mapsto y + \mu$$
$$(2)\quad x \mapsto x, \quad y \mapsto y + \lambda x^{a_1} + \mu x^{a_2}$$
$$(3)\quad x \mapsto x + \lambda y^{b_1} + \mu y^{b_2}, \quad y \mapsto y.$$

**Пример 6.** Рассмотрим теперь дифференцирования из примера 4. Снова оговорим, что все дифференцирования, принадлежащие одному классу, коммутируют между собой, потому что их вершины совпадают. В случае дифференцирований из классов (1) и (3) вершины у полиэдра $\Delta_1$ совпадают, а для полиэдра $\Delta_0$ нужно выписать соответствующие условия связанности: $a_1 + 4b_1 = -4, a_3 + 4b_3 = 1$. Тогда дифференцирования примут вид:

$$(1)\ \partial_1 = x_3^{b_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3^{b_1-1}(2x_1x_2^4 + 1)\frac{\partial}{\partial x_4}, b_1 \geq 1$$
$$(3)\ \partial_3 = x_3^{b_3}\frac{\partial}{\partial x_2} - 4x_1^2x_2^3x_3^{b_3-1}\frac{\partial}{\partial x_4}, b_3 \geq 1.$$

Соответствующее $\mathbb{G}_a^2$-действие записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 \mapsto x_1 + \lambda\cdot x_3^{b_1}, \quad x_2 \mapsto x_2 + \mu\cdot x_3^{b_3}, \quad x_3 \mapsto x_3\\
&x_4 \mapsto x_4 - \mu\cdot 4x_1^2x_2^3x_3^{b_3-1} - \lambda\cdot x_3^{b_1-1}\big(2x_1x_2^4 + 1 +\\
&+ 8\mu\cdot x_1x_2^3x_3^{b_3} + 12\mu^2\cdot x_1x_2^2x_3^{2b_3} + 4\mu^3\cdot x_1x_2x_3^{3b_3} + \frac{\mu^4}{6}\cdot x_1x_3^{4b_3}\big),\\
&b_1 \geq 1,\ b_3 \geq 1.
\end{aligned}$$

Для второй пары дифференцирований (2) и (4) условия связанности примут вид: $a_2 + 8b_2 = -4, a_4 + 8b_4 = 1$. Соответствующее $\mathbb{G}_a^2$-действие записывается так:

$$\begin{aligned}
&x_1 \mapsto x_1 - \lambda\cdot x_4^{-b_2}, \quad x_2 \mapsto x_2 + \mu\cdot x_4^{-b_4}, \quad x_4 \mapsto x_4,\\
&x_3 \mapsto x_3 + 4\mu\cdot x_1x_2x_3^{-b_4-1} + \lambda\cdot x_4^{-b_2-1}\big(2x_1x_2^4 + 1 +\\
&+ 8\mu\cdot x_1x_2^3x_4^{-b_4} + 12\mu^2\cdot x_1x_2^2x_4^{-2b_4} + 4\mu^3\cdot x_1x_2x_4^{-3b_4} + \frac{\mu^4}{6}\cdot x_1x_4^{-4b_4}\big),\\
&b_2 \leq -1,\ b_4 \leq -1.
\end{aligned}$$

Применив теорему 5 к оставшимся парам (1) и (2), (1) и (4), (2) и (3), (3) и (4), получим, что в случае (1) и (4), (2) и (3) дифференцирования не коммутируют. Для двух других пар можно проделать аналогичные вычисления. Таким образом, мы получаем действия группы $\mathbb{T}^2 \leftthreetimes \mathbb{G}_a^2$ на гиперповерхности (1) с открытой орбитой.

## 8. Приложение

**Доказательство 1** (леммы 4)**.** Достаточность очевидна, покажем необходимость. Введём обозначения: $\mu(t) = \prod_{k=1}^{l}(t-z_k)$, $\mu_k(t) = \prod_{i\neq k}(t-z_i)$. Тогда выражение примет вид:

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \frac{\mu_k(t)}{\mu(t)} - \lambda = 0.$$

Дробь равна нулю если и только если её числитель равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \mu_k(t) - \lambda \cdot \mu(t) = 0.$$

Вычислим значение выражения в точке $t = z_j$ с учётом того, что $\mu_k(z_j) = 0$, при $j \neq k$:

$$a_j \mu_j(z_j) = a_j \prod_{j\neq i}(z_j - z_i) = 0.$$

$z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. Следовательно, $a_j = 0$ для всех $j$ и тогда $\lambda = 0$. Лемма доказана.

**Доказательство 2** (леммы 3)**.** Вычислим значения дифференцирований на функциях $t$, $q$, $\chi^m$, $\varphi^m$. Прямой подстановкой $m = 0$ и $r = 0$ в (3) получим:

$$\begin{aligned}
\partial_e(t) = \partial_e(q) &= dq^{s+1}\chi^e \\
\partial_{\tilde e}(t) = \partial_{\tilde e}(q) &= \tilde d t^{\tilde s+1}\varphi^{\tilde e}\chi^{\tilde e} \\
\partial_e(\chi^m) &= dv_{z_0}(m) q^s \chi^{m+e}.
\end{aligned}$$

По правилу дифференцирования сложной функции с учётом принятого обозначения $\alpha_m = t\dfrac{(\varphi^m)'}{\varphi^m}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\partial_e(\varphi^m) &= (\varphi^m)'\partial_e(t) = d(\varphi^m)' q^{s+1}\chi^e \\
\partial_{\tilde e}(\varphi^m) &= (\varphi^m)'\partial_{\tilde e}(t) = (\varphi^m)' \cdot \tilde d t^{\tilde s+1}\varphi^{\tilde e}\chi^{\tilde e} = \tilde d \alpha_m t^{\tilde s}\varphi^{m+\tilde e}\chi^{\tilde e}.
\end{aligned}$$

По правилу Лейбница $\partial_{\tilde e}(\varphi^m\chi^m) = \partial_{\tilde e}(\varphi^m)\chi^m + \varphi^m\partial_{\tilde e}(\chi^m) = \tilde d \tilde v_0(m) \cdot t^{\tilde s} \cdot \varphi^{m+\tilde e}\chi^{m+\tilde e}$. Отсюда

$$\partial_{\tilde e}(\chi^m) = \tilde d(\tilde v_0(m) - \alpha_m) t^{\tilde s}\varphi^{\tilde e}\chi^{m+\tilde e}.$$

Вычислим значение коммутатора дифференцирований на функции $t$:

$$\begin{aligned}
[\partial_e, \partial_{\tilde e}](t) = \partial_e(\partial_{\tilde e}(t)) - \partial_{\tilde e}(\partial_e(t)) = \partial_e(\tilde d t^{\tilde s+1}\varphi^{\tilde e}\chi^{\tilde e}) - \partial_{\tilde e}(dq^{s+1}\chi^e) = \\
\tilde d(\tilde s+1)t^{\tilde s} \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{\tilde e} \cdot \partial_e(t) + \tilde d t^{\tilde s+1} \cdot \chi^{\tilde e} \cdot \partial_e(\varphi^{\tilde e}) + \tilde d t^{\tilde s+1} \cdot \varphi^{\tilde e} \cdot \partial_e(\chi^{\tilde e}) + \\
- d(s+1) \cdot q^s \cdot \chi^e \cdot \partial_{\tilde e}(q) - d \cdot q^{s+1} \cdot \partial_{\tilde e}(\chi^e).
\end{aligned}$$

Теперь подставим полученные ранее выражения для дифференцирований:

$$\begin{aligned}
[\partial_e, \partial_{\tilde e}](t) = d\tilde d \cdot (\tilde s+1) \cdot t^{\tilde s} q^{s+1} \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{e+\tilde e} + d\tilde d \cdot t^{\tilde s} q^{s+1} \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{\tilde e} \cdot \alpha_{\tilde e} + \\
+ d\tilde d \cdot v_{z_0}(\tilde e) \cdot t^{\tilde s+1} q^s \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{e+\tilde e} - d\tilde d \cdot (s+1) \cdot t^{\tilde s+1} \cdot q^s \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{e+\tilde e} \cdot \partial_{\tilde e}(q) + \\
- d\tilde d \cdot (\tilde v_0(e) - \alpha_e) \cdot t^{\tilde s} q^{s+1} \cdot \varphi^{\tilde e}\chi^{e+\tilde e}.
\end{aligned}$$

После вынесения за скобки общего множителя $d\tilde{d}\cdot t^{\tilde{s}}q^s\cdot\varphi^{\tilde{e}}\chi^{e+\tilde{e}}$ получим искомое выражение. Аналогично по правилу Лейбница вычислим $[\partial_e,\partial_{\tilde{e}}](\chi^m)$ и подставим полученные ранее выражения:

$$\begin{aligned}
&[\partial_e,\partial_{\tilde{e}}](\chi^m)=\partial_e(\partial_{\tilde{e}}(\chi^m))-\partial_{\tilde{e}}(\partial_e(\chi^m))\\
&=\partial_e(\tilde{d}(\tilde{v}_0(m)-\alpha_m)t^{\tilde{s}}\varphi^{\tilde{e}}\chi^{m+\tilde{e}})-\partial_{\tilde{e}}(dv_{z_0}(m)q^s\chi^{m+e})=\\
&\qquad=\tilde{d}\tilde{v}_0(m)\Big(\tilde{s}t^{\tilde{s}-1}dq^{s+1}\chi^e\Big)\varphi^{\tilde{e}}\chi^{m+\tilde{e}}+\tilde{d}\tilde{v}_0(m)t^{\tilde{s}}\Big((\varphi^{\tilde{e}})'dq^{s+1}\chi^e\Big)\chi^{m+\tilde{e}}+\\
&\qquad+\tilde{d}\tilde{v}_0(m)t^{\tilde{s}}\varphi^{\tilde{e}}\Big(dv_{z_0}(m+\tilde{e})q^s\chi^{m+e+\tilde{e}}\Big)-\tilde{d}\alpha_m\Big(\tilde{s}t^{\tilde{s}-1}dq^{s+1}\chi^e\Big)\varphi^{\tilde{e}}\chi^{m+\tilde{e}}+\\
&\qquad-\tilde{d}\alpha_m t^{\tilde{s}}\Big((\varphi^{\tilde{e}})'dq^{s+1}\chi^e\Big)\chi^{m+\tilde{e}}-\tilde{d}\alpha_m t^{\tilde{s}}\varphi^{\tilde{e}}\Big(dv_{z_0}(m+\tilde{e})q^s\chi^{m+e+\tilde{e}}\Big)+\\
&\qquad-\tilde{d}\Big(\alpha_m' dq^{s+1}\chi^e\Big)t^{\tilde{s}}\varphi^{\tilde{e}}\chi^{m+\tilde{e}}-dv_{z_0}(m)\Big(sq^{s-1}\tilde{d}t^{\tilde{s}+1}\varphi^{\tilde{e}}\chi^{\tilde{e}}\Big)\chi^{m+e}+\\
&\qquad-dv_{z_0}(m)q^s\Big(\tilde{d}(\tilde{v}_0(m+e)-\alpha_{m+e})t^{\tilde{s}}\varphi^{\tilde{e}}\chi^{m+e+\tilde{e}}\Big).
\end{aligned}$$

После вынесения за скобки общего множителя $d\tilde{d}\cdot t^{\tilde{s}-1}q^{s-1}\cdot\varphi^{\tilde{e}}\cdot\chi^{m+e+\tilde{e}}$ и с учётом того, что слагаемые вида $d\tilde{d}\cdot t^{\tilde{s}}q^s\cdot\varphi^{\tilde{e}}\cdot\chi^{m+e+\tilde{e}}\cdot\tilde{v}_0(m)v_{z_0}(m)$ и $d\tilde{d}\cdot t^{\tilde{s}}q^s\cdot\varphi^{\tilde{e}}\cdot\chi^{m+e+\tilde{e}}\cdot\alpha_m v_{z_0}(m)$ сократятся, получим искомое выражение. Лемма доказана.

## Список литературы

[1] K. Altmann, J. Hausen, *Polyhedral divisors and algebraic torus action*, Math. Ann., 334, 2006, 215–242

[2] I. Arzhantsev, A. Liendo, *Polyhedral Divisors and* $\mathrm{SL}_2$*-Actions on Affine* $\mathbb{T}$*-Varieties*, Michigan Math. J., 56, 2012, 731–762

[3] D. Cox, J. Little, and H. Schenck. *Toric Varieties*. Graduate Studies Math. 124, AMS, Providence, RI, 2011

[4] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia Math. Sci., Springer-Verlag, Berlin, 136, 2006

[5] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*. Annales of Math. Studies 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993

[6] A. Liendo, $\mathbb{G}_a$*-actions of fiber type on affine* $\mathbb{T}$*-varieties*, J. Algebra, 324, 2010, 3653–3665

[7] A. Liendo, *Affine* $\mathbb{T}$*-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*, Transform. Group, 15, 2010, 389–425

[8] E. Romaskevich, *Sums and commutators of homogeneous locally nilpotent derivations of fiber type*, J. Pure Appl. Algebra, 218, 2014, 448–455

[9] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1989, 55, 137–309, ВИНИТИ

[10] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, М, Мир, 1981

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Факультет компьютерных наук

*E-mail address*: dmitry.a.matveev@yandex.ru