КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АССОЦИАТИВНОЙ КОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ $\mathrm{Cend}_{1,x}$

Р. А. Козлов

В работе установлено, что вторая группа когомологий Хохшильда ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{1,x}$ со значениями в любом бимодуле тривиальна. Как следствие, данная алгебра отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром.
Ключевые слова: *ассоциативная конформная алгебра, отщепляющийся радикал, когомологии Хохшильда.*

1 Введение и предварительные сведения

1.1 Введение

Аксиоматическая квантовая теория поля зародилась в 50-х годах прошлого столетия в работах А. Уайтмана и др. В работе [6] рассматривался вариант этой теории, в которой поля обладают конформной симметрией. В этой теории поля могут быть представлены формальными степенными рядами (бесконечными в обе стороны), коэффициенты которых являются линейными операторами. Ключевую роль в конформной теории поля играет конструкция разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE), алгебраическое описание которой приводит к понятию вертексной алгебры (vertex operator algebra, VOA). Аксиоматическое определение вертексной алгебры было введено Р. Борчердсом [7].

В.Г. Кац установил [10], что коэффициенты сингулярной части OPE позволяют описать коммутатор формальных степенных рядов, отвечающих за операторы умножения в VOA. Алгебраическое описание структур, возникающих при рассмотрении этих коммутаторов, приводит к понятию конформной алгебры Ли. Структурная теория конформных алгебр Ли была построена в работе [9], а теория представлений этих алгебр — в [8]. При изучении представлений конечного типа (аналогов конечномерных) естественно возникают алгебраические структуры, играющие по отношению к конформным алгебрам Ли ту же роль, что обычные ассоциативные алгебры — к алгебрам Ли. Эти системы называются ассоциативными конформными алгебрами [8].

Пусть $H = \mathbb{F}[D]$ — алгебра многочленов от одной переменной над полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль, $\mathbb{Z}_+$ — неотрицательные целые числа, $D^{(n)}$ обозначает $\frac{1}{n!}D^n$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, при этом $D^{(n)} = 0$ для $n < 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Конформной алгеброй* называется левый H-модуль A, снабжённый счётным числом $\mathbb{F}$-линейных отображений $\circ_n : A \otimes A \to A$, $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих следующим аксиомам:

1. $a \circ_n b = 0$ при достаточно больших n,
2. $Da \circ_n b = -na \circ_{n-1} b$,
3. $a \circ_n Db = D(a \circ_n b) + na \circ_{n-1} b$,

где $a, b \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Аксиома 1 позволяет задать на A функцию локальности N: $A \times A \to \mathbb{Z}_+$ по следующему правилу: $N(a,b) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid a \circ_k b = 0\ \forall k \geq n\}$, $a, b \in A$.

Конформная алгебра называется *ассоциативной*, если для всех $a, b, c \in A$ выполняются равенства

$$(a \circ_n b) \circ_m c = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} a \circ_{n-s} (b \circ_{m+s} c),\ \ m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

либо равносильные им равенства

$$a \circ_n (b \circ_m c) = \sum_{t \geq 0} \binom{n}{t} (a \circ_{n-t} b) \circ_{m+t} c,\ \ m, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Строение простых и полупростых ассоциативных конформных алгебр конечного типа было описано в [9] (см. также [13]). В работе [14] было также установлено, что для ассоциативных конформных алгебр конечного типа выполняется аналог теоремы Веддерберна об отщеплении радикала (для конформных алгебр Ли аналогичное утверждение — аналог теоремы Леви — Мальцева — неверен [5]).

Ассоциативные конформные алгебры с точным представлением конечного типа образуют более широкий класс, чем алгебры конечного типа. Все такие алгебры являются подалгебрами в алгебре Cend_n конформных линейных преобразований свободного n-порожденного H-модуля:

$$\mathrm{Cend}_n = M_n(\mathbb{F}[D, x]),$$

где $\circ_m : \mathrm{Cend}_n \otimes \mathrm{Cend}_n \to \mathrm{Cend}_n$ определяется через обычное дифференцирование на матрицах, т.е. $A(x) \circ_m B(x) = A(x) \cdot \frac{\mathrm{d}^m B(x)}{\mathrm{d}x^m}$.

Простые и полупростые подалгебры в Cend_n были описаны в [11], там же было установлено, что любая такая алгебра C имеет нильпотентный идеал (радикал), фактор по которому полупрост и имеет точное представление конечного типа.

Задача отщепления радикала в данном классе алгебр рассматривалась в [12], а также в [1, 2]. В двух последних работах было введено понятие когомологий Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр в контексте псевдоалгебр [4] (отличающееся от введенного в [5]), которое играет ключевую роль в исследовании задачи отщепления радикала. Именно, для того, чтобы доказать аналог теоремы Веддерберна об отщеплении нильпотентного радикала R в конформной алгебре C достаточно показать, что для конформной алгебры $A = C/R$ и любого (конформного) A-бимодуля M вторая группа когомологий Хохшильда $H^2(A, M)$ равна нулю.

В частности, в [1] было показано, что для $A = \mathrm{Cend}_1$ условие $H^2(A, M) = 0$ выполняется для любого бимодуля M. С другой стороны, из примера, приведенного в [12], следует, что для $A = \mathrm{Cend}_{1,x^2} = x^2\mathrm{Cend}_1$ существует A-бимодуль M, для которого $H^2(A, M) \neq 0$.

В данной работе мы рассматриваем промежуточный случай: $A = \mathrm{Cend}_{1,x} = x\mathrm{Cend}_1$. Эта ассоциативная конформная алгебра является универсальной ассоциативной обертывающей для простой конформной алгебры Вирасоро с локальностью 2 [см. 3].

Основным результатом работы является следующее утверждение: для любого конформного бимодуля M над $\mathrm{Cend}_{1,x}$ вторая группа когомологий Хохшильда $H^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ тривиальна.

1.2 Модули над конформными алгебрами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Левым модулем* над ассоциативной конформной алгеброй A называется H-модуль V, снабжённый операциями левого действия элементов из A. Именно, определены такие линейные отображения $\circ_n : A \otimes V \to V,\ n \in \mathbb{Z}_+$, что для всех $a, b \in A$, $v \in V$, $m \in \mathbb{Z}_+$

(1) $a \circ_n v = 0$ при достаточно больших n,

(2) $Da \circ_n v = -na \circ_{n-1} v$,

(3) $a \circ_n Dv = D(a \circ_n v) + na \circ_{n-1} v$,

(4) $(a \circ_m b) \circ_n v = \sum\limits_{s\geq 0}(-1)^s \binom{m}{s} a \circ_{m-s} (b \circ_{n+s} v)$.

Для краткости везде в дальнейшем будем называть левый модуль над ассоциативной конформной алгеброй A просто левым A-модулем. Аналогично можно определить правый A-модуль.

Бимодулем над конформной ассоциативной алгеброй A называется H-модуль V, являющийся одновременно левым и правым A-модулем, удовлетворяющим ещё одной аксиоме

$$(a \circ_m v) \circ_n b = \sum_{s\geq 0}(-1)^s \binom{m}{s} a \circ_{m-s} (v \circ_{n+s} b).$$

2 Основные определения и постановка проблемы

2.1 Связь с псевдоалгебрами

Алгебра $H = \mathbb{F}[D]$ является алгеброй Хопфа с коумножением $\Delta : H \to H \otimes H,\ \Delta(D) = D \otimes 1 + 1 \otimes D$, коединицей $\varepsilon : H \to \mathbb{F},\ \varepsilon(D) = 0$, и антиподом $S : H \to H,\ S(D) = -D$, где Δ, ε и S — гомоморфизмы алгебр. Полагая $\Delta_1 = \Delta$, индуктивно определим $\Delta_n = (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id})\Delta_{n-1}$, где $n > 1$.

Конформные алгебры являются объектами псевдотензорной категории левых H-модулей [4], поэтому их структуру можно задать, используя язык псевдопроизведений.

Действительно, зададим правое действие H на $H^{\otimes n}$ следующим образом:

$$(h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)h = (h_1 \otimes h_2 \otimes \cdots \otimes h_n)\Delta_{n-1}(h).$$

Тогда $H^{\otimes n}$ правый H-модуль.

Пусть A — левый унитальный H-модуль, для которого задана H-билинейная операция $*: A \otimes A \to (H \otimes H) \otimes_H A$. Такой H-модуль A называют *H-псевдоалгеброй*, а операцию $*$ — *псевдопроизведением.*

Любая конформная алгебра A является H-псевдоалгеброй, и равенство

$$a * b = \sum_{n \geq 0} (-D)^{(n)} \otimes 1 \otimes_H (a \circ_n b), \quad a, b \in A,$$

задаёт соответствие между псевдопроизведением $*$ и операциями $\circ_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Понятия модуля (бимодуля) над ассоциативной конформной алгеброй, а также само свойство ассоциативности могут быть выражены на языке операций, подобных псевдопроизведению, см. детали в [1, 4]. Для целей нашего исследования мы переведем основные понятия из [1] (коцепи, коцикла и кограницы) с языка псевдоалгебр на язык операций $\circ_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

2.2 Определение группы когомологий Хохшильда

Пусть A — ассоциативная конформная алгебра и V — конформный бимодуль над A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\varphi : A^{\otimes n} \to (H^{\otimes n}) \otimes_H V$ называется *n-коцепью с коэффициентами в V*, если оно H-полилинейно, т.е.

$$\varphi(h_1 a_1 \otimes \dots \otimes h_n a_n) = (h_1 \otimes \dots \otimes h_n \otimes_H 1)\varphi(a_1 \otimes \dots \otimes a_n).$$

Обозначим через $C^n(A, V)$ множество всех n-коцепей алгебры A с коэффициентами в бимодуле V. В данной работе нам интересны лишь 1- и 2-коцепи. Очевидно, что 1-коцепь τ — это произвольное H-линейное отображение $\tau : A \to V$. Для 2-коцепей введём следующее естественное представление:

$$\varphi(a, b) = \sum_{s \geq 0} ((-D)^{(s)} \otimes 1) \otimes_H \varphi_s(a, b), \text{ где } \varphi_s(a, b) \in V. \tag{1}$$

Таким образом, 2-коцепь φ — это набор билинейных отображений $\varphi_s : A \otimes A \to V$, $s \in \mathbb{Z}_+$, таких, что

1. $\varphi_s(Da, b) = -s\varphi_{s-1}(a, b)$,

2. $\varphi_s(a, Db) = D\varphi_s(a, b) + s\varphi_{s-1}(a, b)$,

3. $\varphi_s(a, b) = 0$ при достаточно больших s.

Аналогично, 3-коцепь ψ представляет собой 2-параметрическое семейство линейных отображений $\psi_{mn} : A \otimes A \otimes A \to V$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, с аналогичными свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $\delta_n : C^n(A, V) \to C^{n+1}(A, V)$ заданное правилом $(\delta_n \varphi)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 * \varphi(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(a_1, \ldots, a_i * a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \ldots, a_n) * a_{n+1}$ называется *дифференциалом*.

Переводя это определение на язык операций $\circ_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем, что для 1-коцепи τ её дифференциал задан правилом

$$(\delta_1 \tau)_n(a, b) = \tau(a) \circ_n b - \tau(a \circ_n b) + a \circ_n \tau(b),$$

а для 2-коцепи φ —

$$(\delta_2 \varphi)_{mn}(a, b, c) = a \circ_m \varphi_n(b, c) + \varphi_m(a, b \circ_n c) -$$
$$\sum_{s \geq 0} \binom{m}{s} (\varphi_{n+s}(a \circ_{m-s} b, c) + \varphi_{m-s}(a, b) \circ_{n+s} c), \; a, b, c \in M, \; n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $\delta_n \varphi = 0$, то n-коцепь φ называется *n-коциклом*. Коцикл $\varphi \in Z^n(A, V)$ называется *n-кограницей*, если существует $(n-1)$-коцепь ψ такая, что $\varphi = \delta_{n-1}\psi$. Обозначим множество n-коциклов через $Z^n(A, V)$, множество n-кограниц — $B^n(A, V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Группой когомологий Хохшильда* ассоциативной конформной алгебры A на A-бимодуле V называется пространство $H^n(A, V) = Z^n(A, V)/B^n(A, V)$.

2.3 Расширения. Связь со второй группой когомологий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расширением* конформной алгебры A называется пара (B, σ), где B — конформная алгебра, σ — гомоморфизм B на A.

Любое расширение можно отождествить с точной последовательностью

$$0 \to \operatorname{Ker} \sigma \to B \to A \to 0.$$

Конформная алгебра A называется *отщепляемой* в расширении (B, σ), если существует гомоморфизм $\rho : A \to B$ такой, что $\sigma \circ \rho = \mathrm{id}_A$. Образ $\rho(A) = A'$ тогда является подалгеброй, изоморфной A.

Расширение B назовём сингулярным, если $(\operatorname{Ker}\sigma \circ_n \operatorname{Ker}\sigma) = 0$ для произвольного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть M — бимодуль над конформной алгеброй A и $\varphi \in Z^2(A, M)$. Тогда прямая сумма H-модулей $A \oplus M$ с операцией

$$(a_1 + u_1) * (a_2 + u_2) = a_1 * a_2 + a_1 * u_2 + u_1 * a_2 + \varphi(a_1, a_2), \quad a_i \in A,\ u_i \in M,$$

является сингулярным расширением A с ядром M, которое обозначается $(A; M, \varphi)$. Обратно, любое сингулярное расширение (B, σ) конформной алгебры A эквивалентно $(A; M, \varphi)$ для $M = \operatorname{Ker}\sigma$ и некоторого $\varphi \in Z^2(A, M)$.

В работе [1] доказаны следующие результаты:

Лемма. *Если $\varphi \in Z^2(A, M)$, то $B = (A; M, \varphi)$ – ассоциативная конформная алгебра.*

Теорема. *Конформная алгебра A отщепляема в сингулярном расширении (B, σ) тогда и только тогда, когда соответствующий коцикл φ тривиален в $H^2(A, \operatorname{Ker}\sigma)$.*

2.4 Постановка проблемы

Выше была определена серия ассоциативных конформных алгебр Cend_n, $n \geq 1$. Рассмотрим первую алгебру этой серии, т. е. случай $n = 1$. Конформная подалгебра $\mathrm{Cend}_{1,x} = x\mathrm{Cend}_1 \subset \mathrm{Cend}_1$ является свободным H-модулем с базисом $x^k = x \circ_0 x \circ_0 \cdots \circ_0 x$ (k раз), $k \geq 1$.

Вопрос, исследуемый в данной работе, состоит в следующем: отщепляема ли конформная алгебра $\mathrm{Cend}_{1,x}$ в любом сингулярном расширении? Иначе говоря, возможно ли для любой точной последовательности

$$0 \to M \to C \to \mathrm{Cend}_{1,x} \to 0,$$

где $M^2 = 0$ (в смысле $\circ$-умножения) построить сечение $\rho : \mathrm{Cend}_{1,x} \to C$, являющееся гомоморфизмом конформных алгебр.

3 Основной результат

Как показано в п. 2.3, проблема отщепляемости конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{1,x}$ в сингулярном расширении с ядром M тесно связана со второй группой когомологий Хохшильда данной алгебры с коэффициентами в M. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть M —произвольный бимодуль над $\mathrm{Cend}_{1,x}$. Тогда $H^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M) = 0$.*

Доказательство. Проведём доказательство теоремы в несколько шагов.

Лемма 1. *Произвольный 2-коцикл $\varphi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ полностью определяется элементами $\varphi_t(x,x)$ и $\varphi_0(x,x^l)$, $t,l \geq 1$, принадлежащими бимодулю M.*

Доказательство. Воспользуемся определением 2-коцикла:

$$x^k \circ_n \varphi_m(x^l, x^q) + \varphi_n(x^k, x^l \circ_m x^q) = \sum_{s\geq 0} \binom{n}{s} (\varphi_{m+s}(x^k \circ_{n-s} x^l, x^q) + \varphi_{n-s}(x^k, x^l) \circ_{m+s} x^q), \quad (2)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $k, l, q \geq 1$.

При $n = 0$, $k = 1$ имеем:

$$\varphi_m(x^{l+1}, x^q) = x \circ_0 \varphi_m(x^l, x^q) + m! \binom{q}{m} \varphi_0(x, x^{l+q-m}) - \varphi_0(x, x^l) \circ_m x^q. \quad (3)$$

Отсюда применением индукции можно выразить все значения коцикла через $\varphi_m(x, x^q)$, $m \geq 0$, $q \geq 1$.

Рассмотрим (2) при $m = 0$, $k = l = 1$:

$$x \circ_n \varphi_0(x, x^q) + \varphi_n(x, x^{q+1}) = \varphi_n(x^2, x^q) + n\varphi_{n-1}(x, x^q) - \sum_{s\geq 0} \binom{n}{s} \varphi_{n-s}(x,x) \circ_s x^q. \quad (4)$$

Из (3) видно, что $\varphi_n(x^2, x^q) = x \circ_0 \varphi_n(x, x^q) + n!\binom{q}{n}\varphi_0(x, x^{q-n+1}) - \varphi_0(x,x) \circ_n x^q$. Подставим получившееся выражение в (4):

$$\varphi_n(x, x^{q+1}) = x \circ_0 \varphi_n(x, x^q) + n!\tbinom{q}{n}\varphi_0(x, x^{q-n+1}) - \varphi_0(x,x) \circ_n x^q + n\varphi_{n-1}(x, x^q) - \sum_{s\geq 0} \tbinom{n}{s} \varphi_{n-s}(x,x) \circ_s x^q - x \circ_n \varphi_0(x, x^q).$$

Таким образом, $\varphi_n(x, x^{q+1})$ может быть выражено при помощи $\varphi_n(x, x^q)$, $\varphi_{n-1}(x, x^q)$, $\varphi_0(x, x^l)$, $l \geq 1$. Следовательно, все значения коцикла $\varphi_n(x, x^{q+1})$, $n, q \geq 1$, выражаются через $\varphi_t(x, x)$ и $\varphi_0(x, x^l)$, $t, l \geq 1$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_1(x, x) = 0$ *и* $\varphi_0(x, x^l) = 0$ *для всех* $l \geq 1$. *Тогда* $\varphi = 0$.

Доказательство. Ввиду леммы 1 достаточно установить, что из $\varphi_1(x, x) = 0$ следует $\varphi_l(x, x) = 0$ для всех $l \geq 1$.

Здесь и далее введём следующие обозначения: $\varphi_m(x, x) = \varphi_m$, $(x \circ_m \cdot) = L_m \in \mathrm{End}(M)$, $(\cdot \circ_m x) = R_m \in \mathrm{End}(M)$.

Применяя тождества ассоциативности, выпишем в новых обозначениях некоторые часто используемые в дальнейшем формулы:

$$L_n L_m(u) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} ((x \circ_{n-s} x) \circ_{m+s} u) = L_0 L_{m+n}(u) + n L_{m+n-1}(u), \tag{5}$$

$$R_n R_m(u) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (u \circ_{m-s} (x \circ_{n+s} x)) = \begin{cases} R_m(u), & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases} \tag{6}$$

$$R_n L_m(u) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (x \circ_{m-s} (u \circ_{n+s} x)) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} L_{m-s} R_{n+s}(u), \tag{7}$$

для $u \in M$.

Пользуясь тождеством для 2-коциклов (2) и соотношением (3) получим следующее равенство:

$$(x \circ_1 \varphi_m(x, x) - x \circ_0 \varphi_{m+1}(x, x)) - \varphi_m(x \circ_1 x, x) + (\varphi_1(x, x \circ_m x) - \varphi_0(x, x \circ_{m+1} x)) - \varphi_1(x, x) \circ_m x = 0.$$

Приведя подобные и воспользовавшись тем, что $x \circ_1 x = 0$, $x \circ_m x = 0$ при $m > 1$, получим равенства

$$x \circ_0 \varphi_2 = x \circ_1 \varphi_1 - \varphi_1 \circ_1 x, \tag{8}$$

$$x \circ_0 \varphi_{m+1} = x \circ_1 \varphi_m - \varphi_m - \varphi_1 \circ_m x, \quad m > 1. \tag{9}$$

Из предположения $\varphi_1 = 0$ следует, что правая часть в (8) и последнее слагаемое в (9) отсутствуют.

Допустим, $\varphi \neq 0$. Тогда найдется $\varphi_s \neq 0$ при некотором $s > 1$. Выберем наименьшее такое s. Из (8) и (9) следует, что $L_0\varphi_s = 0$. Кроме того, по определению коцепи существует $N > s$ такое, что $\varphi_m = 0$ при всех $m \geq N$.

Из формулы (5) при $n = 1$, $m = 0$ имеем $L_0L_1 = (L_1 - 1)L_0$. Применяя это соотношение к (9) k раз ($k \geq 1$), получим

$$L_0^k\varphi_m = (L_1 - k)\dots(L_1 - 1)\varphi_{m-k}, \quad m \geq k + s.$$

Заметим также, что $L_0^k\varphi_m = 0$ при $m < k + s$.

Обозначим

$$\chi_k = \prod_{l=1}^{N-s-k}(L_1 - l)\varphi_s, \quad k = 0, 1, \dots, N - s.$$

В частности, $\chi_0 = L_0^{N-s}\varphi_N = 0$, $\chi_{N-s} = \varphi_s$. Кроме того, $L_0\chi_k = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots, N - s$.

Допустим, что $\chi_k = 0$ для некоторого $0 \leq k < N - s$. Тогда $\chi_k = (L_1 - (N - s - k))\chi_{k+1} = 0$, т.е.

$$L_1\chi_{k+1} = (N - s - k)\chi_{k+1}.$$

Соотношение конформной ассоциативности влечет

$$0 = (x \circ_2 x) \circ_0 \chi_{k+1} = L_2L_0\chi_{k+1} - 2L_1L_1\chi_{k+1} + L_0L_2\chi_{k+1}.$$

С другой стороны,

$$L_1L_1\chi_{k+1} = (x \circ_1 x) \circ_1 \chi_{k+1} + (x \circ_0 x) \circ_2 \chi_{k+1} = L_1\chi_{k+1} + L_0L_2\chi_{k+1}.$$

Отсюда

$$L_0L_2\chi_{k+1} = 2(N - s - k)^2\chi_{k+1} = (N - s - k)^2\chi_{k+1} - (N - s - k)\chi_{k+1},$$

т.е. $(N - s - k)(N - s - k + 1)\chi_{k+1} = 0$.

Следовательно, $\chi_k = 0$ влечет $\chi_{k+1} = 0$. Поскольку $\chi_0 = 0$, то, по индукции, $\chi_{N-s} = \chi_s = 0$, — противоречие. □

Лемма 3. *Рассмотрим некоторый коцикл $\varphi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Допустим, существует $\psi_1 \in M$ такое, что*

$$\varphi_1(x, x) = x \circ_1 \psi_1 - \psi_1 + \psi_1 \circ_1 x. \tag{10}$$

Тогда $\varphi \in B^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$.

Доказательство. Определим по индукции ψ_l, $l \geq 2$, соотношением

$$\psi_{l+1} = -\varphi_0(x, x^l) + x \circ_0 \psi_l + \psi_1 \circ_0 x^l, \quad l \geq 1. \tag{11}$$

Построим 1-коцепь ψ со значениями $\psi(x^l) = \psi_l$. Рассмотрим $\delta\psi = \varphi' \in B^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Тогда (10) влечёт $\varphi_1'(x, x) = \varphi_1(x, x)$, а из (11) следует $\varphi_0'(x, x^l) = \varphi_0(x, x^l)$.

Обозначим $\varphi - \varphi' = \pi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Но тогда $\pi_1(x, x) = 0$ по условию, $\pi_0(x, x^l) = 0$ в силу выбора ψ_l, и поэтому из леммы 2 следует $\pi = 0$, т. е. $\varphi = \delta\psi$. □

Осталось лишь доказать существование элемента ψ_1, удовлетворяющего (10). Сперва мы выведем формулу для $L_0^m \varphi_{m+1}$, $m \geq 1$.

Лемма 4. *Если* $\varphi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$, *то*

$$L_0^m \varphi_{m+1} = (L_1 - m) \ \ldots \ (L_1 - 2) L_1 \varphi_1 - \sum_{s=1}^{m} (L_1 - m) \ \ldots \ (L_1 - (s+1)) L_0^{s-1} R_s \varphi_1. \tag{12}$$

Доказательство. Индукцией по m. При $m = 1$, воспользовавшись (8), получим $L_0 \varphi_2 = (L_1 - R_1)\varphi_1$. Далее, умножаем слева на $(L_1 - 2)$ и пользуемся (5):

$$(L_1 - 2)(L_1 - R_1)\varphi_1 = (L_1 - 2) L_0 \varphi_2 = L_0 (L_1 - 1) \varphi_2.$$

Подставляя полученное в (9), умноженное на L_0, имеем

$$L_0^2 \varphi_3 = (L_1 - 2)(L_1 - R_1)\varphi_1 - L_0 R_2 \varphi_1.$$

$m \to m+1$: Пусть для $L_0^{m-1} \varphi_m$ формула верна, тогда

$$\begin{aligned}
L_0^m \varphi_{m+1} &= L_0^{m-1}(L_0 \varphi_{m+1}) = L_0^{m-1}((L_1 - 1)\varphi_m - R_m \varphi_1) \\
&= (L_1 - m) L_0^{m-1} \varphi_m - L_0^{m-1} R_m \varphi_1 = (L_1 - m)\Big((L_1 - (m-1)) \ldots (L_1 - 2) L_1 \varphi_1 \\
&\qquad - \sum_{s=1}^{m-1} (L_1 - (m-1)) \ldots (L_1 - (s+1)) L_0^{s-1} R_s \varphi_1\Big) - L_0^{m-1} R_m \varphi_1 \\
&\qquad\qquad = (L_1 - m) \ldots (L_1 - 2) L_1 \varphi_1 - \sum_{s=1}^{m} (L_1 - m) \ldots (L_1 - (s+1)) L_0^{s-1} R_s \varphi_1,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Рассмотрим теперь произведения вида $L_0^{k-1}L_k$. Индукцией по k покажем, что для них выполняется равенство

$$L_0^{k-1}L_k = L_1(L_1-1)\ \dots\ (L_1-(k-1)) \tag{13}$$

Использовав формулу (5), получим

$k=2:\ L_0L_2 = L_1^2 - L_1 = L_1(L_1-1)$;

$k\to k+1:\ L_1(L_1-1)...(L_1-k) = L_0^{k-1}L_k(L_1-k) = L_0^{k-1}(L_0L_{k+1}+kL_k-kL_k) = L_0^kL_{k+1}$.

Теперь легко доказать следующий результат.

Лемма 5. *Пусть $V\subset M$ — конечномерное подпространство, инвариантное относительно L_1. Тогда существует разложение в прямую сумму L_1-инвариантных подпространств $V=V_0\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_k$, где $L_1v=iv$ для $v\in V_i$.*

Доказательство. Поскольку $\dim V<\infty$, то существует конечное число базисных элементов $v_1,\dots,v_n$. На основании формулы (13) для каждого v_i имеем:

$$L_0^kL_{k+1}v_i = L_1(L_1-1)\dots(L_1-k)v_i.$$

Для каждого v_i левая часть равенства обращается в нуль при достаточно большом k_i ввиду аксиомы локальности. Выберем $k=\max(k_1,\dots,k_n)$. Тогда многочлен $P_k = t(t-1)\dots(t-k)$ таков, что $P_k(L_1)V=0$, т.е. $P_k(L_1)$ — аннулятор пространства V. Он не имеет кратных корней, следовательно, минимальный многочлен оператора L_1 на V не имеет кратных корней, т.е. L_1 полупрост и все его собственные значения лежат в $\mathbb{Z}_+$.

Тогда существует искомое разложение $V=V_0\oplus V_1\oplus\ \dots\ \oplus V_k$, где $L_1v=lv$ для $v\in V_l$, $l=0,\dots,k$, некоторые слагаемые которого, вообще говоря, могут быть нулевыми (как подпространства). $\square$

Рассмотрим подалгебру алгебры линейных преобразований $\operatorname{End} M$, порожденную операторами L_1 и $L_0^mR_{m+1}$, $m\geq 0$:

$$A = \operatorname{sub}\langle L_1, L_0^mR_{m+1}\mid m\geq 0\rangle.$$

Лемма 6. *Для произвольного $u \in M$ построим A-модуль $W = Au = \{au \mid a \in A\}$. Тогда* $\dim W < \infty$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что W содержится в линейной оболочке W' элементов вида $L_0^s L_1^m R_{n+s}(u)$, $m, s \geq 0$, $n \geq 1$. Действительно, из формул (5), (6), (7) следует, что W' замкнута относительно действий порождающих элементов алгебры A. Покажем, что $\dim W' < \infty$.

Сперва заметим, что в силу аксиомы локальности размерность пространства V', порожденного $R_{n+s}(u)$, $s \geq 0$, $n > 0$, конечна. Далее,

$$L_1^m = L_1 + F_m(L_0 L_2, \ldots, L_0^{m-2} L_{m-1}) + L_0^{m-1} L_m,$$

где F_m — линейная функция. Данное соотношение нетрудно показать индукцией по m с использованием (5).

Следовательно элементы вида $L_1^m V'$ порождают то же линейное пространство, что $L_0^k L_{k+1} V'$, а оно конечномерно ввиду аксиомы локальности. □

Завершим доказательство теоремы. Пусть $\varphi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$, тогда его значение $\varphi_1 = \varphi_1(x, x) \in M$ удовлетворяет соотношению (12), где при достаточно больших m левая часть обращается в нуль:

$$(L_1 - m) \ \ldots \ (L_1 - 2) L_1 \varphi_1 = \sum_{s=1}^{m} (L_1 - m) \ \ldots \ (L_1 - (s+1)) L_0^{s-1} R_s \varphi_1. \tag{14}$$

Рассмотрим определенную выше алгебру $A \subseteq \mathrm{End}(M)$ и A-модуль $V = A\varphi_1$. Как показано выше, оператор L_1 разбивает пространство V на конечное число инвариантных подпространств, из чего мы получаем представление

$$\varphi_1 = v_0 + \cdots + v_m,$$

где $L_1 v_i = i v_i$. Подставляя это разложение в формулу (14), получим в результате действия цепочки нильпотентных операторов в левой части лишь собственный вектор v_1:

$$(-1)^{m-1}(m-1)! v_1 = \sum_{s=1}^{m} (L_1 - m) \ \ldots \ (L_1 - (s+1)) L_0^{s-1} R_s \varphi_1.$$

Освободим v_1 от константы и подействуем оператором R_k, $k \geq 2$. Получим $R_k v_1 = Const \cdot R_k(\sum_{s=2}^{m}(L_1 - m)\dots(L_1 - s)L_0^{s-2}R_{s-1} - L_0^{m-1}R_m)\varphi_1$.

Из соотношений (6) и (7) непосредственно вытекает, что $R_k v_1 = 0$ при $k \geq 2$.

Найдём сперва такой элемент $z \in V$, что $(L_1 - 1)z = v_0 + v_2 + v_3 \dots + v_m = \varphi_1 - v_1$. Такой обязательно есть, т.к. $(L_1 - 1)$ аннулирует лишь собственное подпространство V_1 и невырожден на других. Выберем 1-коцепь ξ, значением которой является z, т. е. $\xi(x) = z$. Обозначим $\varphi' = \varphi - \delta\xi \in Z^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Полученный коцикл φ' благодаря (6) и (7) обладает следующим свойством:

$$R_k\varphi_1' = R_k(\varphi_1 - (L_1 + R_1 - 1)z) = R_k(\varphi_1 - (L_1 - 1)z - R_1 z) = R_k(v_1 - R_1 z) = 0$$

для $k \geq 2$.

Отсюда без ограничения общности можно положить

$$R_k\varphi_1 = 0, \;\; k \geq 2. \tag{15}$$

Пользуясь (5), (6), (7), получаем $V = A\varphi_1 \subseteq \mathbb{F}[L_1, L_0]R_1\varphi_1$ (см. доказательство леммы 6). Из такого представления с помощью (7), (15) легко понять, что $R_k V = 0$ для всех $k \geq 2$.

Теперь, опираясь на этот результат, покажем существование такого ψ_1, что выполняется равенство $(L_1 + R_1 - 1)\psi_1 = \varphi_1$.

Заметим, что в $\mathrm{End}(V)$ выполняется тождество

$$[L_k, R_1] = L_k R_1 - R_1 L_k = 0, \quad k \geq 0. \tag{16}$$

Это вытекает из (7) и $R_k V = 0$ при $k \geq 2$.

Также из (6) следует, что эндоморфизм R_1 действует на M оператором проектирования, т. е. $R_1^2 = R_1$. По свойству проектора, пространство V раскладывается в прямую сумму ядра $V^{(0)}$ и неподвижных элементов $V^{(1)}$, замкнутых, кроме того, относительно действия на них L_1, что следует из (16).

Ввиду имеющегося разложения $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)}$, нам теперь необходимо показать существование таких $\psi^{(0)}, \; \psi^{(1)}$, что:

$$\begin{gathered}(L_1 + R_1 - 1)\psi^{(0)} = (L_1 - 1)\psi^{(0)} = \varphi_1^{(0)},\\ (L_1 + R_1 - 1)\psi^{(1)} = L_1\psi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Вспомним, что рассматриваемое нами значение коцикла φ_1 удовлетворяет (12) и (15), откуда

$$\begin{aligned}0 &= (L_1 - m)\dots(L_1-2)(L_1-R_1)\varphi_1\\ &= (L_1 - m)\dots(L_1-2)(L_1-R_1)\varphi_1^{(0)} + (L_1 - m)\dots(L_1-2)(L_1-R_1)\varphi_1^{(1)}\\ &= (L_1 - m)\dots(L_1-2)L_1\varphi_1^{(0)} + (L_1 - m)\dots(L_1-2)(L_1-1)\varphi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Ввиду того, что первое итоговое слагаемое есть элемент $V^{(0)}$, а второе слагаемое есть элемент $V^{(1)}$, их равенство нулю возможно в том и только том случае, когда каждое из них тождественно нулевое:

$$(L_1 - m)\dots(L_1-2)L_1\varphi_1^{(0)} = 0,$$
$$(L_1 - m)\dots(L_1-2)(L_1-1)\varphi_1^{(1)} = 0.$$

Поэтому $\varphi_1^{(0)} \in V_0 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, а оператор $L_1 - 1$ невырожден на этом пространстве. Отсюда следует, что найдется $\psi^{(0)} \in V$ такое, что $(L_1 - 1)\psi^{(0)} = \varphi_1^{(0)}$.

Аналогично, $\varphi_1^{(1)} \in V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, L_1 невырожден на этом пространстве и, следовательно, найдется такое $\psi^{(1)} \in V$, что $L_1\psi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$.

Таким образом, мы доказали существование необходимого в лемме 3 элемента $\psi_1 = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$, что полностью завершает доказательство теоремы. □

Список литературы:

1. *Долгунцева И.А.* Когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, №6. С. 688–706.

2. *Долгунцева И.А.* Тривиальность второй группы когомологий конформных алгебр Cend_n и Cur_n // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, выпуск 1. С. 74–89.

3. *Бокуть Л.А., Фонг Ю., Ке В.-Ф., Колесников П.С.* Базисы Грёбнера и Грёбнера-Ширшова в алгебре и конформные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6, выпуск 3. С. 669-706.

4. *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. 2001. V.162, №1. P. 1-140.

5. *Bakalov B., Kac V. G., Voronov A.* Cohomology of conformal algebras // Comm. Math. Phys. 1999. V. 200, №3. P.561-598.

6. *Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry in two-dimansional quantum field theory // Nucl. Phis. B. 1984. V. 241. P. 333-380.

7. *Borcherds R. E.* Vertex algebras, Kac - Moody algebras, and the Monster // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1986. V. 83. P. 3068-3071.

8. *Cheng S.-J., Kac V. G.* Conformal modules // Asian J. Math. 1997. V. 1. P. 181-193.

9. *D'Andrea A., Kac V. G.* Structure theory of finite conformal algebras // Selecta Math. New. Ser.1998. V. 4. P. 377-418.

10. *Kac V. G.* Vertex algebras for beginners. Second edition. Providence, RI: AMS,1998. (University Lecture Series, vol. 10).

11. *Kolesnikov P. S.* Associative conformal algebras with finite faithful representation // Adv. Math. 2006. V. 202, №1. P. 602-637.

12. *Kolesnikov P. S.* On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras // Journal of Algebra and Its Applications. 2007. V. 6, №1. P. 119-134.

13. *Zelmanov E. I.* On the structure of conformal algebras // Proc. / Intern. Conf. on Combinatorial and Computational Algebra. Hong Kong, China. May 24-29, 1999. Providence, RI: AMS, 2000. P. 139-153. (Cont. Math., vol. 264).

14. *Zelmanov E. I.* Idempotentns in conformal algebras // Proc. / Third Intern. Alg. Conf. Tainan, Taiwan. June 16-July 1, 2002. Ed. by Y. Fong et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. P. 257-266.