ИТЕРИРОВАННЫЕ ВЫСШИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ УАЙТХЕДА В ТОПОЛОГИИ МОМЕНТ-УГОЛ-КОМПЛЕКСОВ

СЕМЁН АБРАМЯН

Содержание

1. Введение

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет собой клеточный комплекс, составленный из произведений полидисков и торов, параметризованных симплексами в конечном симплициальном комплексе $\mathcal{K}$. На $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ имеется действие тора, которое играет важную роль в торической топологии (см. [BP]). В случае когда симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ является триангуляцией сферы, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — топологическое многообразие с богатыми геометрическими структурами. Момент-угол-комплекс является частным случаем полиэдральных произведений, которые интересны сами по себе. Полиэдральные произведения представляют замечательный «полигон» для применения методов нестабильной теории гомотопий.

В этой работе мы занимаемся изучением топологической структуры момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Мы рассматриваем два класса симплициальных комплексов. Первый класс B_Δ состоит из симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентно букету сфер. Второй класс W_Δ состоит из таких $\mathcal{K} \in B_\Delta$, что каждая сфера в букете реализуется интерированным высшим произведением Уайтхеда (см. §2). В.М. Бухштабер и Т.Е. Панов в [BP, Problem 8.4.5] поставили проблему: верно ли, что $B_\Delta = W_\Delta$. В данной работе мы показываем, что это не так (см. §7). А именно, мы приводим пример симплициального комплекса, момент-угол-комплекс которого гомотопически эквивалентен букету сфер, но существует сфера, не реализующаяся никакой линейной комбинацией итерированных высших произведений Уайтхеда.

С другой стороны, мы показываем, что класс W_Δ достаточно велик: класс W_Δ замкнут относительно двух операций на симплициальных комплексах, определённых в §5 (см. предл. 5.1 и теор. 5.2). Используя эти операции мы доказываем существование симплициального комплекса, реализующего произвольное данное итерированное высшее произведение Уайтхеда (см. теор. 5.3). Также мы описываем наименьший комплекс, реализующий дважды итерированное высшее произведение (см. теор. 6.1).

Я хочу выразить свою благодарность моему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задачи, ценные советы и вдохновляющие беседы. Также я хочу поблагодарить Антона Айзенберга за ценные советы и Аксёнова Марию внимательный поиск опечаток.

2. Предварительные понятия и конструкции

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m] \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, m\}$ — семейство подмножеств (*симплексов*), $I \subset [m]$, замкнутое относительно взятия любых подмножеств. Симплициальный комплекс, который содержит множество $\{1, 2, \ldots, m\}$ вместе со всеми его подмножествами, называется *полным симплексом* и обозначается Δ^{m-1} или $\Delta(1, \ldots, m)$.

Пусть даны m пар топологических пространств

$$(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\},$$

где $A_i \subset X_i$. Для любого симплекса $I \in \mathcal{K}$ положим

$$(\underline{X}, \underline{A})^I = \{(x_1, \ldots, x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m \mid x_j \in A_j \text{ для } j \notin I\}.$$

Полиэдральным произведением пар $(\underline{X}, \underline{A})$ соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ называется следующее подмножество $X_1 \times \cdots \times X_m$

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\underline{X}, \underline{A})^I \qquad (\subset X_1 \times \ldots \times X_n).$$

В случае когда каждая из пар (X_i, A_i) есть (D^2, S^1), мы используем обозначение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ для $(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$ и называем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ *момент-угол-комплексом*. Когда все пары (X_i, A_i) суть (X, pt) мы будем использовать сокращённое обозначение $X^{\mathcal{K}}$ для полиэдрального произведения $(X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Теорема 2.1 ([BP, Ch.4])**.** Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является гомотопическим слоем канонического вложения $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m$.

Замечание. В дальнейшем нам понадобится явное описание отображения $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Отображение пар $(D^2, S^1) \to (\mathbb{C}P^\infty, pt)$, при котором внутренность диска гомеоморфно отображается на дополнение к отмеченной точке $\mathbb{C}P^1$, в силу функториальности полиэдрального произведения индуцирует каноническое отображение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Пусть $f\colon (D^p, S^{p-1}) \to (X, pt)$, $g\colon (D^q, S^{q-1}) \to (X, pt)$ — два сфероида в пространстве X с отмеченной точкой. Класс отображения

$$S^{p+q-1} \cong \partial D^{p+q} \cong \partial(D^p \times D^q) \cong D^p \times S^{q-1} \cup S^{p-1} \times D^q \xrightarrow{[f,g]} X,$$

где

$$[f, g](x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{при } y \in S^{q-1}; \\ g(y) & \text{при } x \in S^{p-1} \end{cases}$$

для $x \in D^p$, $y \in D^q$, зависит только от классов сфероидов f, g и называется их *произведением* или *скобкой Уайтхеда* (более подробно см. [Wh, Ch. X]).

Отметим, что из тривиальности произведения Уайтхеда двух сфероидов f, g следует, что отображение из $D^p \times S^{q-1} \cup S^{p-1} \times D^q$ продолжается до отображения из $D^p \times D^q$.

Высшие произведения Уайтхеда определяются индуктивно следующим образом.

Пусть $f_j\colon (D^{p_j}, S^{p_j-1}) \to (X, pt)$, $j = 1, \ldots, n$ — такой набор сфероидов, что для любого собственного подмножества в $[n]$, соответствующее высшее произведение Уайтхеда тривиально. Множество гомотопических классов отображений

$$S^{p_1+\ldots+p_n-1} \cong \partial(D^{p_1+\ldots+p_n}) \cong \partial(D^{p_1} \times \ldots \times D^{p_n}) \cong \bigcup_{j=1}^{n} D^{p_1} \times \ldots \times S^{p_j-1} \times \ldots \times D^{p_n} \xrightarrow{[f_1,\ldots,f_n]} X,$$

определяемых следующим образом:

$$[f_1,\ldots,f_n](x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\overline{[f_1,\ldots,f_{n-1}]}(x_1,\ldots,x_{n-1}) & \text{при } x_n\in S^{p_n-1};\\ \ldots & \\ \overline{[f_1,\ldots,\widehat{f_j},\ldots,f_n]}(x_1,,\ldots,\widehat{x}_j,\ldots,x_n) & \text{при } x_j\in S^{p_j-1};\\ \ldots & \\ \overline{[f_2,\ldots,f_n]}(x_2,\ldots,x_n) & \text{при } x_1\in S^{p_1-1},\end{cases}$$

где $\overline{[f_1,\ldots\widehat{f_j},\ldots,f_n]}$ — продолжение $(n-1)$-кратного произведения на произведение соответствующих шаров («крышка» обозначает пропущенный сфероид или координату), называется *n-кратным произведением Уайтхеда.* Высшее произведение называется тривиальным, если оно продолжается до отображения из произведения дисков $D^{p_1}\times\ldots\times D^{p_n}$.

Неоднозначность в определении высшего произведения возникает из-за отсутствия канонического выбора продолжения отображения со сферы на диск.

Пусть μ_i — сфероид $S^2\cong\mathbb{C}P^1\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^{\vee m}\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, где первое отображение — каноническое вложение $\mathbb{C}P^1$ в i-ое слагаемое букета, а второе индуцировано вложением комплекса, состоящего из m отдельных точек, в $\mathcal{K}$. Рассмотрим итерированное высшее произведение Уайтхеда

$$w=\Big[\mu_{i_{01}},\ldots,\mu_{i_{0p_0}},\Big[\ldots\big[\mu_{i_{q1}},\ldots,\mu_{i_{qp_q}}\big]\Big]\Big]:S^{d(w)}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}.$$

Здесь и далее $d(w)$ обозначает размерность сфероида w. Когда прозведение w существует, его композиция с вложением $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}\hookrightarrow(\mathbb{C}P^\infty)^m\simeq K(Z^m,2)$ гомотопически тривиальна. Отсюда, сфероид $w\colon S^{d(w)}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ поднимается до отображения $\widetilde{w}\colon S^{d(w)}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$:

$$\begin{tikzcd}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^m \\ & S^{d(w)} \arrow[ul, dashed, "\widetilde{w}"] \arrow[u, "w"] & \end{tikzcd}$$

Мы будем использовать одно и то же обозначение w для произведения Уайтхеда $w\colon S^{d(w)}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ и его поднятия $S^{d(w)}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Замечание. В случае момент-угол-комплексов от неоднозначности в определении произведений Уайтхеда можно избавиться за счёт канонического выбора отображения $[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_n}]\colon S^{2n-1}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ и $S^{d(w)}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Это связано с тем, что если произведение Уайтхеда $[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_n}]$ тривиально, то оно канонически продолжается до отображения из произведения дисков:

$$D^2_{i_1}\times\ldots\times D^2_{i_n}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\to(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}.$$

Определение 2.2. Будем говорить, что симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *реализует произведение Уайтхеда* w, если $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно букету сфер, одна из которых реализуется поднятием $S^{d(w)}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ произведения w.

Обозначим через W_Δ класс симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — букет сфер, каждая из которых является поднятием итерированных высших произведений Уайтхеда. Сразу отметим, что этот класс не пуст, например, ему принадлежит граница симплекса $\partial\Delta^n$ для любого $n>0$. (Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующий $\partial\Delta^n$, гомотопически эквивалентен сфере S^{2n+1}, которая реализуется произведением $[\mu_0,\ldots,\mu_n]$.)

Введём на двумерном диске клеточную структуру, состоящую из трёх клеток: 0-клетка — точка $1\in D^2$, 1-клетка S — дополнение до 1 на граничной окружности, 2-клетка D — внутренность D^2. Перемножая клетки, получаем клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, клетки которого параметризуются парами непересекающихся подмножеств $J, I \subset [m]$. Рассмотрим клетку в $(D^2)^m$, соответствующую паре J, I:

$$\chi(J,I) = \big\{(x_1,\ldots,x_m) \in (D^2)^m \big| x_j \in S \text{ при } j \in J \text{ и } x_l = 1 \text{ при } l \notin J \cup I\big\}.$$

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ вкладывается в $(D^2)^m$ как клеточный подкомплекс, состоящий из клеток: $\chi(J,I) \subset \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с $I \in \mathcal{K}$.

Напомним, что коумножение в гомологиях клеточного пространства X определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{C}_*(X)$ — клеточный цепной комплекс. Рассмотрим композицию отображений:

$$\mathcal{C}_*(X) \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_*} \mathcal{C}_*(X \times X) \xrightarrow{P} \mathcal{C}_*(X) \otimes \mathcal{C}_*(X), \tag{1}$$

где $\widetilde{\Delta}_*$ — отображение, индуцированное клеточной аппроксимацией диагонали $\Delta\colon X \xrightarrow{x \mapsto (x,x)} X \times X$, а P — линейное продолжение отображения, заданного на базисных клетках как $e^i \times e^j \mapsto e^i \otimes e^j$. Отображение (1) индуцирует отображение в клеточных гомологиях $H_*(X) \to H_*(X) \otimes H_*(X)$, которое функториально и не зависит от выбора клеточной аппроксимации $\widetilde{\Delta}$. При этом отображение (1) на цепях не является функториальным из-за неканоничности выбора клеточной аппроксимации.

В случае момент-угол-комплексов $X = \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с клеточной структурой, описанной выше, имеется клеточная аппроксимация диагонали, которая функториальна относительно морфизмов $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{L}$, индуцированных симплициальными отображениями $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$. Ниже мы описываем эту аппроксимацию, следуя [BP, Ch. 4].

Конструкция 1. Отображение $\widetilde{\Delta}\colon D^2 \to D^2 \times D^2$, которое задаётся в полярных координатах на диске формулой

$$\rho e^{i\varphi} \mapsto \begin{cases} (1-\rho+\rho e^{2i\varphi}, 1) & \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ (1, 1-\rho+\rho e^{2i\varphi}) & \text{при } \pi \leqslant \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

является клеточной аппроксимацией диагонали $\Delta\colon D^2 \to D^2 \times D^2$, ограничение которой на граничную окружность S^1 — клеточная аппроксимация для S^1, как показывает следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\Delta}"'] & D^2 \arrow[d, "\widetilde{\Delta}"] \\ S^1 \times S^1 \arrow[r] & D^2 \times D^2. \end{tikzcd}$$

Клеточная аппроксимация $\widetilde{\Delta}\colon (D^2)^m \to (D^2)^m \times (D^2)^m$ m-кратных произведений ограничивается до клеточной аппроксимации диагонального отображения $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\Delta}"'] & (D^2)^m \arrow[d, "\widetilde{\Delta}"] \\ \mathcal{Z}_\mathcal{K} \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] & (D^2)^m \times (D^2)^m. \end{tikzcd}$$

При этом описанная клеточная аппроксимация $\widetilde{\Delta}\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \times \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ функториальна по отношению к отображениям, индуцированным симплициальными отображениями соответствующих комплексов.

3. Алгебраические конструкции

Пусть $\Lambda\langle u_1,\ldots,u_m\rangle$ и $\mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle$ обозначают соответственно внешнюю коалгебру и коалгебру Стенли-Райснера симплициального комплекса $\mathcal{K}$ [BP, §8.4]. Рассмотрим в $\Lambda\langle u_1,\ldots,u_m\rangle \otimes \mathbb{Z}\langle\mathcal{K}\rangle$ подкоалгебру $\mathcal{R}_*(\mathcal{K})$, порождённую мономами, не содержащими u_iv_i и v_i^2, с дифференциалом $\partial = \sum\limits_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial v_i}$.

Следующие утверждения получаются дуализацией утверждений из [BP, §4.5] для клеточных коцепей и когомологий.

Лемма 3.1. Отображение

$$g\colon \mathcal{R}_*(\mathcal{K}) \xrightarrow{u_J v_I \mapsto \chi(J,I)} \mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

является изоморфизмом цепных комплексов.

Лемма 3.2. Клеточная коалгебра $\mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ с копроизведением, индуцированным клеточной аппроксимацией диагонали $\widetilde{\Delta}\colon \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \times \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (см. констр. 1), изоморфна коалгебре $\mathcal{R}_*(\mathcal{K})$. Таким образом, имеет место изоморфизм коалгебр:

$$H\big((\mathcal{R}_*(\mathcal{K}), \partial)\big) \cong H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Теорема 3.3. Отображения

$$C_{p-1}(\mathcal{K}_J) \xrightarrow{L \mapsto \varepsilon(L,J)\chi(J\setminus L, L)} \mathcal{C}_{p+|J|}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),$$

где L — симплекс, а $\varepsilon(L,J)$ — некоторый знак, индуцируют функториальные по отношению к симплициальным отображениям вложения

$$\widetilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J) \hookrightarrow H_{p+|J|}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),$$

которые в свою очередь индуцируют изоморфизм

$$h\colon \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J) \xrightarrow{\cong} H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

4. Гомоморфизм Гуревича в момент-угол-комплексах

Будем обозначать S_i и D_i одномерную и двумерную клетки, в i-м множителе $(D^2)^m$. Произведения клеток в $(D^2)^m$ обозначаем словами вида $D_iS_jD_k$.

В этом параграфе мы будем рассматривать итерированные высшие произведения Уайтхеда вида:

$$\Big[\mu_{i_{01}}, \ldots, \mu_{i_{0p_0}}, [\ldots[\mu_{i_{n1}}, \ldots, \mu_{i_{np_n}}]\ldots\Big].$$

Существование симплициального комплекса $\mathcal{K} \in W_\Delta$, реализующего данное произведение, будет доказано в следующем параграфе (см. теор. 5.3).

Следующая лемма является обобщением леммы 3.1 из [Ve].

Лемма 4.1. Образ гомоморфизма Гуревича

$$h\left(\Big[\mu_{i_{01}}, \ldots, \mu_{i_{0p_0}}, \Big[\ldots, \big[\mu_{i_{(n-1)1}}, \ldots, \mu_{i_{(n-1)p_{n-1}}}, [\mu_{i_{n1}}, \ldots, \mu_{i_{np_n}}]\big]\ldots\Big]\Big]\right) \in H_{2(p_0+\ldots+p_n)-(n+1)}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

представляется клеточной цепью

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p_k} D_{i_{k1}}\ldots D_{i_{k(j-1)}} S_{i_{kj}} D_{i_{k(j+1)}}\ldots D_{i_{kp_k}}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Будем вести индукцию по числу n вложенных высших произведений.

При $n=0$ имеем высшее произведение

$$\begin{aligned}[]
[\mu_1, \ldots, \mu_k]\colon S^{2k-1} &\cong \partial(D_1^2 \times \ldots \times D_k^2) \cong \\
&\cong D_1^2 \times \ldots \times D_{k-1}^2 \times S_k^1 \cup \ldots \cup S_1^1 \times D_2^2 \times \ldots \times D_k^2 \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K},
\end{aligned}$$

где объединение происходит в произведении $D_1^2 \times \ldots \times D_k^2$, которое поднимается до включения подкомплекса

$$[\mu_1, \ldots, \mu_k]\colon D_1^2 \times \ldots \times D_{k-1}^2 \times S_k^1 \cup \ldots \cup S_1^1 \times D_2^2 \times \ldots \times D_k^2 \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

Таким образом, образ гомоморфизма Гуревича представляется клеточной цепью (2).

Пусть $n=1$, т. е. имеем скобку вида $\big[\mu_{i_1}, \ldots \mu_{i_p}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]\big]$, где $q>1$.

Композиция

$$
\begin{aligned}
&S^{2(p+q-1)} \cong \\
&\cong D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times \partial D^{2q-1}_{j_1\ldots j_q} \cup \left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_{k-1}} \times S^1_{i_k} \times D^2_{i_{k+1}} \times \ldots \times D^2_{i_p} \right) \times D^{2q-1}_{j_1\ldots j_q} \right) \to \\
&\to D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times pt \cup \left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_{k-1}} \times S^1_{i_k} \times D^2_{i_{k+1}} \times \ldots \times D^2_{i_p} \right) \times S^{2q-1}_{j_1\ldots j_q} \right) \to \\
&\to S^2_{i_1} \times \ldots \times S^2_{i_p} \times pt \cup \left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} S^2_{i_1} \times \ldots \times S^2_{i_{k-1}} \times pt \times S^2_{i_{k+1}} \times \ldots \times S^2_{i_p} \right) \times S^{2q-1}_{j_1\ldots j_q} \right) \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}
\end{aligned}
$$

представляет класс $\big[\mu_{i_1}, \ldots \mu_{i_p}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]\big] \in \pi_{2(p+q-1)}((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}})$.

По теор. 2.1 композиция выше подниается до включения подкомплекса, замыкающего коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[rr] & & (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \\
& D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times pt \cup \left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} D^2_{i_1} \times \ldots \times S^1_{i_k} \times \ldots \times D^2_{i_p} \right) \times \left(\bigcup\limits_{k=1}^{q} D^2_{j_1} \times \ldots \times S^1_{j_k} \times \ldots \times D^2_{j_q} \right) \right) \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "{\big[\mu_{i_1}, \ldots \mu_{i_p}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]\big]}"'] \arrow[d, equal] & \\
& D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times pt \cup \left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} D^2_{i_1} \times \ldots \times S^1_{i_k} \times \ldots \times D^2_{i_p} \right) \times S^{2q-1}_{j_1\ldots j_q} \right). &
\end{tikzcd}
$$

Все клетки объединения в центре диаграммы, кроме $D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times pt$, имеют размерность $2(p+q-1)$, а размерность $D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_p} \times pt$ равна $2p < 2(p+q-1)$. Отсюда, образ поднятия итерированного произведения Уайтхеда в $H_{2(p+q-1)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ представляется клеточной цепью

$$
\left(\sum_{k=1}^{p} D_{i_1} \ldots D_{i_{k-1}} S_{i_k} D_{i_{k+1}} \ldots D_{i_p} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{q} D_{j_1} \ldots D_{j_{k-1}} S_{j_k} D_{j_{k+1}} \ldots D_{j_p} \right).
$$

В общем случае рассуждение аналогично. Рассмотрим итерированное высшее произведение Уайтхеда $[\mu_{i_{01}}, \ldots, \mu_{i_{0p_0}}, w]\colon S^{2p_0+d(w)-1} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, где

$$
w = \Big[\mu_{i_{11}}, \ldots, \mu_{i_{1p_1}}, \Big[\ldots, \big[\mu_{i_{(n-1)1}}, \ldots, \mu_{i_{(n-1)p_{n-1}}}, [\mu_{i_{n1}}, \ldots, \mu_{i_{np_n}}]\big] \ldots\Big]\Big].
$$

Сферу $S^{2p_0+d(w)-1}$ можно представить в виде объединения

$$
D^2_{i_{01}} \times \ldots \times D^2_{i_{0p_0}} \times \partial D^{d(w)} \cup \left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} D^2_{i_{01}} \times \ldots \times D^2_{i_{0(k-1)}} \times S^1_{i_{0k}} \times D^2_{i_{0(k+1)}} \times \ldots \times D^2_{i_{0p_0}} \right) \times D^{d(w)}_w \right),
$$

которое после стягивания границы $\partial D^{d(w)}$ в точку превратится в клеточный подкомплекс в $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, вложение которого является поднятием данного произведения Уайтхеда. По предположению индукции Гуревич-образ сфероида $S^{d(w)}_w \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ представляется клеточной цепью

$$
\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p_k} D_{i_{k1}} \ldots D_{i_{k(j-1)}} S_{i_{kj}} D_{i_{k(j+1)}} \ldots D_{i_{kp_k}} \right).
$$

Из соображений размерности $h([\mu_{i_{01}},\ldots,\mu_{i_{0p_0}},w]|_{D^2_{i_{01}}\times\ldots\times D^2_{i_{0p_0}}\times pt})=0\in H_{2p_0+d(w)-1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Отсюда получаем

$$h([\mu_{i_{01}},\ldots,\mu_{i_{0p_0}},w])=\prod_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p_k}D_{i_{k1}}\ldots D_{i_{k(j-1)}}S_{i_{kj}}D_{i_{k(j+1)}}\ldots D_{i_{kp_k}}\right).$$

$\square$

Пример 4.2. Рассмотрим произведение Уайтхеда $[\mu_1,\mu_2,[\mu_3,\mu_4,\mu_5]]$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}\in W_\Delta$, в котором реализуется данное произведение, описан в прим. 5.4. Из леммы 4.1 вытекает, что класс $h\left([\mu_1,\mu_2,[\mu_3,\mu_4,\mu_5]]\right)\in H_8(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ представляется клеточной цепью

$$\begin{gathered}D_1S_2D_3D_4S_5+D_1S_2D_3S_4D_5+D_1S_2S_3D_4D_5+\\+S_1D_2D_3D_4S_5+S_1D_2D_3S_4D_5+S_1D_2S_3D_4D_5.\end{gathered}$$

5. Операции на W_Δ и реализация произвольных произведений Уайтхеда

Для данных симплициальных комплексов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ рассмотрим комплекс $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\cup_I\mathcal{K}_2$, получаемый склеиванием по общей грани I (мы допускаем $I=\varnothing$, тогда $\mathcal{K}_1\cup_I\mathcal{K}_2=\mathcal{K}_1\sqcup\mathcal{K}_2$).

Предложение 5.1 (ср. [BP, Th. 8.2.1])**.** Если $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\in W_\Delta$, то $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\cup_I\mathcal{K}_2\in W_\Delta$ для любого I.

Доказательство. Рассмотрим полный подкомплекс $\mathcal{K}_J$ в $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\cup_I\mathcal{K}_2$. Пусть $V(\mathcal{K}_1)$, $V(\mathcal{K}_2)$ — множества вершин симплициальных комплексов $\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2$. Положим $J_1=V(\mathcal{K}_1)\cap J$, $J_2=V(\mathcal{K}_2)\cap J$. Рассмотрим два случая. Если $J\cap I=\varnothing$, то $\mathcal{K}_J$ является несвязным объединением $(\mathcal{K}_1)_{J_1}\sqcup(\mathcal{K}_2)_{J_2}$, в этом случае

$$H_p(\mathcal{K}_J)\cong H_p((\mathcal{K}_1)_{J_1})\oplus H_p((\mathcal{K}_2)_{J_2}).$$

Если же $J\cap I\neq\varnothing$, то $\mathcal{K}_J$ гомотопически эквивалентно букету $(\mathcal{K}_1)_{J_1}\vee(\mathcal{K}_2)_{J_2}$, тогда

$$\widetilde{H}_p(\mathcal{K}_J)\cong\widetilde{H}_p((\mathcal{K}_1)_{J_1})\oplus\widetilde{H}_p((\mathcal{K}_2)_{J_2}).$$

Причём в обоих случаях образующие каждого из слагаемых переходят при отображении из теор. 3.3 в образующие соответствующих групп гомологий $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Пусть $\{\sigma_\alpha(J_1,p)\}_{\alpha\in A}$, $\{\sigma_\beta(J_2,p)\}_{\beta\in B}$ — симплициальные цепи, представляющие базисы свободных абелевых групп $\widetilde{H}_p\big((\mathcal{K}_1)_{J_1}\big)$, $\widetilde{H}_p\big((\mathcal{K}_2)_{J_2}\big)$ соответственно, и $\{\chi_\alpha(J_1,p)\}_{\alpha\in A}$, $\{\chi_\beta(J_2,p)\}_{\beta\in B}$ — клеточные цепи, в которые переходят элементы этих базисов при отображении $C_{p-1}((\mathcal{K}_l)_{J_l})\to\mathcal{C}_{p+|J_l|}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_l})$, $l=1,2$ из теор. 3.3. Рассматривая те же базисы как элементы группы $\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J)$, получаем, что при отображении $C_{p-1}\to\mathcal{C}_{p+|J|}$ они переходят в клеточные цепи

$$\prod_{j\in J\setminus J_2}S_j\cdot\{\chi_\alpha(J_1,p)\}_{\alpha\in A}\quad\text{и}\quad\prod_{j\in J\setminus J_1}S_j\{\chi_\beta(J_2,p)\}_{\beta\in B}\tag{3}$$

соответственно. В случае когда $J_1\neq\varnothing,J_2\neq\varnothing$, но $J\cap I=\varnothing$, в гомологиях $\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ появляется образующая, которая представлена симплициальной цепью j_1+j_2 с $j_1\in J_1,j_2\in J_2$, отличная от образующих гомологий $(\mathcal{K}_1)_{J_1}$ и $(\mathcal{K}_2)_{J_2}$. Соответствующая клеточная цепь в $\mathcal{C}_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть

$$\prod_{j\neq j_1,j_2}S_j\cdot(D_{j_1}S_{j_2}+S_{j_1}D_{j_2}).\tag{4}$$

Пусть образующим $\{\sigma_\alpha(J_1,p)\}_{\alpha\in A}$, $\{\sigma_\beta(J_2,p)\}_{\beta\in B}$ соответствуют скобки Уайтхеда $\{w_\alpha(J_1,p)\}_{\alpha\in A}$, $\{w_\beta(J_2,p)\}_{\beta\in B}$. Тогда Гуревич-образы произведений

$$\Big[\mu_{k_1},\big[\mu_{k_2},\big[\ldots\big[\mu_{k_{r-1}},[\mu_{k_r},w_\alpha(J_1,p)]\big]\ldots\Big]\quad\text{и}\quad\Big[\mu_{l_1},\big[\mu_{l_2},\big[\ldots\big[\mu_{l_{s-1}},[\mu_{l_s},w_\beta(J_2,p)]\big]\ldots\Big]$$

для $J\setminus J_2=\{k_1,\ldots,k_r\}$ и для $J\setminus J_1=\{l_1,\ldots,l_s\}$

представляются цепями (3). Цепи (4) представляют Гуревич-образы произведений $\Big[\mu_{j_3},\big[\mu_{j_4},\big[\ldots\big[\mu_{j_{|J|}},[\mu_{j_1},\mu_{j_2}]\big]\ldots\Big]$, $J=\{j_1,\ldots,j_{|J|}\}$.

Букет отображений, задаваемых описанными выше произведениями Уайтхеда, т. е.

$$\Big(\bigvee_{\substack{J_1,J_2\\ J_1\cap I=J_2\cap I}}\Big(\bigvee_{p\geqslant 0}\big(\bigvee_{\alpha\in A}S^{p+|J|+1}\vee\bigvee_{\beta\in B}S^{p+|J|+1}\big)\Big)\Big)\vee\bigvee_{\substack{J_1,J_2\neq\varnothing\\ J_1\cap I=J_2\cap I=\varnothing}}S^{|J|+1}\to\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$$

индуцирует изоморфизм гомологий и поэтому, в силу односвязности пространств, является гомотопической эквивалентностью. □

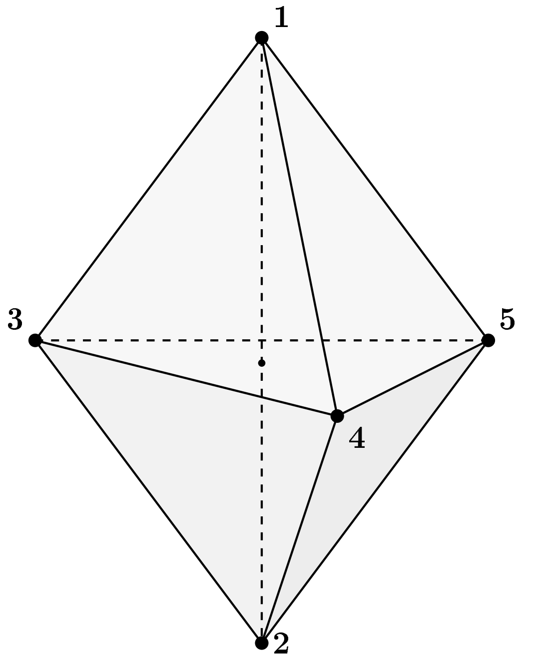

Рис. 1. $\mathcal{K}=\mathcal{J}_1(\partial\Delta^2)$

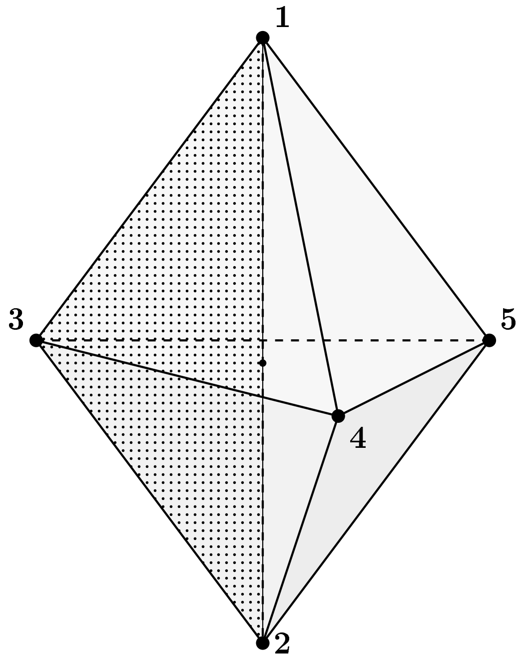

Рис. 2. $\mathcal{L}=\mathcal{J}_1(\partial\Delta(3,4,5))\cup\{1,2,3\}$

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{K}\in W_\Delta$ — симплициальный комплекс. Тогда симплициальный комплекс

$$\mathcal{J}_n(\mathcal{K})=(\partial\Delta^n*\mathcal{K})\cup\Delta^n$$

снова принадлежит классу W_Δ.

Заметим, что $\mathcal{J}_n(\mathcal{K})\simeq\Sigma^n(\mathcal{K})\vee S^n$.

Случай, когда комплекс $\mathcal{K}$ — граница треугольника $\partial\Delta^2$, а $n=1$, изображён на рис. 1.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}=\mathcal{J}_n(\mathcal{K})$ и $V(\mathcal{K})=I$, $V(\Delta^n)=I_1$ — множества вершин. Согласно теор. 3.3, гомологии $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}$ происходят из гомологий всевозможных полных подкомплексов $\mathcal{L}_{J_1,J}=((\partial\Delta^n)_{J_1}*\mathcal{K}_J)\cup\Delta^n_{J_1}$, где $J_1\subset I_1$, $J\subset I$.

Если $J_1\subset I_1$ — непустое собственное подмножество, то комплекс $\mathcal{L}_{J_1,J}$ топологически стягиваем, поэтому в этом случае $\widetilde{H}_*(\mathcal{L}_{J_1,J})=0$. Для $J_1=\varnothing$ соответствующий полный подкомплекс $\mathcal{L}_{\varnothing,J}=\mathcal{K}_J$, следовательно, $\widetilde{H}_*(\mathcal{L}_{\varnothing,J})\cong\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J)$. Наконец, в случае $J_1=I_1$ имеем

$$\mathcal{L}_{I_1,J}=(\partial\Delta^n*\mathcal{K}_J)\cup\Delta^n\simeq\Sigma^n(\mathcal{K}_J)\vee S^n. \tag{5}$$

Отсюда получаем $\widetilde{H}_*(\mathcal{L}_{I_1,J})\cong\widetilde{H}_{*-n}(\mathcal{K}_J)\oplus\widetilde{H}_*(S^n)$, причём образующая второго слагаемого представляется границей $(n+1)$-мерного симплекса $\Delta(I_1,j)$.

Теперь покажем, что все образующие $H_*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}})$ представляются клеточными цепями (2) и, таким образом, являются Гуревич-образами итерированных высших произведений Уайтхеда по лемме 4.1. Образующая, соответствующая сфере S^n в букете (5) представляется клеточной цепью

$$\prod_{k=1}^{m-1}S_{j_k}\cdot\Big(D_{i_1}\ldots D_{i_{n+1}}S_j+(\sum_{k=1}^{n+1}D_{i_1}\ldots S_{i_k}\ldots D_{i_{n+1}})D_j\Big),$$

где $I_1 = \{i_1, \dots, i_{n+1}\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_{m-1}, j\}$. Это — Гуревич-образ произведения

$$\Big[\mu_{j_1}, [\mu_{j_2}, [\dots [\mu_{j_{m-1}}, [\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{n+1}}, \mu_j]] \dots \Big].$$

Наконец, всякая образующая $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{L})$, соответствующая слагаемому $\Sigma^n(\mathcal{K}_J)$ в букете (5), представляется клеточной цепью

$$\Big(\sum_{k=1}^{n+1} D_{i_1} \dots S_{i_k} \dots D_{i_{n+1}}\Big) h(w), \tag{6}$$

где w — произведение Уайтхеда, отображающееся в соответствующую образующую группы $\widetilde{H}_{*-n}(\mathcal{K}_J) \subset H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Цепь (6) является представителем класса $h([\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{n+1}}, w])$.

Букет описанных выше произведений Уайтхеда — отображение из букета сфер в $\mathcal{Z}_\mathcal{L}$, индуцирующее изоморфизм в гомологиях. Таким образом, это гомотопическая эквивалентность. □

Теорема 5.3. Для произвольного итерированного высшего произведения Уайтхеда

$$w = \Big[\mu_{i_{01}}, \dots, \mu_{i_{0p_0}}, [\dots [\mu_{i_{n1}}, \dots, \mu_{i_{np_n}}] \dots \Big] \tag{7}$$

существует симплициальный комплекс $\mathcal{K} \in W_\Delta$, реализующий w.

Доказательство. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{L} = \mathcal{J}_{p_0-1} \circ \mathcal{J}_{p_1-1} \circ \dots \circ \mathcal{J}_{p_{n-1}-1}(\partial\Delta^{p_n-1})$. Согласно теор. 5.2 комплекс $\mathcal{L}$ лежит в классе W_Δ. При гомоморфизме Гуревича поднятие произведения w попадает в образующую гомологий сферы максимальной размерности $2(p_0 + \dots + p_n) - (n + 1)$. □

$H_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$D_3D_4S_5 + D_3S_4D_5 + S_3D_4D_5$	$[\mu_3, \mu_4, \mu_5]$
	$\mathbb{Z}$	$D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3$	$[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$
	$\mathbb{Z}$	$D_1D_2S_4 + D_1S_2D_4 + S_1D_2D_4$	$[\mu_1, \mu_2, \mu_4]$
	$\mathbb{Z}$	$D_1D_2S_5 + D_1S_2D_5 + S_1D_2D_5$	$[\mu_1, \mu_2, \mu_5]$
$H_6(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$S_4(D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)$	$\big[\mu_4, [\mu_1, \mu_2, \mu_3]\big]$
	$\mathbb{Z}$	$S_5(D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)$	$\big[\mu_5, [\mu_1, \mu_2, \mu_3]\big]$
	$\mathbb{Z}$	$S_5(D_1D_2S_4 + D_1S_2D_4 + S_1D_2D_4)$	$\big[\mu_5, [\mu_1, \mu_2, \mu_4]\big]$
$H_7(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$S_5S_4(D_1D_2S_3 + D_1S_2D_3 + S_1D_2D_3)$	$\Big[\mu_4, \big[\mu_5, [\mu_1, \mu_2, \mu_3]\big]\Big]$
$H_8(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$(D_1S_2 + S_1D_2)(D_3D_4S_5 + D_3S_4D_5 + S_3D_4D_5)$	$\big[\mu_1, \mu_2, [\mu_3, \mu_4, \mu_5]\big]$

Таблица 1. Гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для $\mathcal{K} = \mathcal{J}_1(\partial\Delta^2)$ (см. рис. 1)

Пример 5.4. Комплекс $\mathcal{K}$, в котором реализуется произведение $\big[\mu_1, \mu_2, [\mu_3, \mu_4, \mu_5]\big]$, — минимальная триангуляция двумерной сферы с диаметром (см. рис. 1). Отметим, что $\mathcal{K} = \mathcal{J}_1\big(\partial\Delta(3, 4, 5)\big)$, значит $\mathcal{K} \in W_\Delta$.

С помощью теор. 3.3 и леммы 4.1 опишем гомологии соответствующего момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, клеточные цепи, представляющие образующие соответствующих групп, и произведения Уайтхеда, которые отображаются в образующие при гомоморфизме Гуревича (см. табл. 1).

Букет произведений Уайтхеда из правого столбца табл. 1 задаёт отображение из букета сфер $(S^5)^{\vee 4} \vee (S^6)^{\vee 3} \vee S^7 \vee S^8$ в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, индуцирующее изоморфизм групп гомологий. Таким образом, $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq (S^5)^{\vee 4} \vee (S^6)^{\vee 3} \vee S^7 \vee S^8$.

Отметим, что данный пример является первым нетривиальным примером, в котором обе вложенные скобки — высшие произведения Уайтхеда.

6. Наименьший комплекс, реализующий данное произведение Уайтхеда

Рассмотрим следующий вопрос:

Вопрос 1. Описать наименьший по включению симплициальный комплекс $\mathcal{K} \in W_\Delta$, реализующий данное произведение Уайтхеда (7).

Теорема 6.1. Симплициалный комплекс $\mathcal{J}_{p-1}(\partial\Delta^{q-1}) \in W_\Delta$ (см. теор. 5.2) является наименьшим, реализующим скобку

$$[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_p}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]]. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ реализует произведение (8).

Для того, чтобы произведение (8) было определено, необходимо, чтобы скобка $[\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]$ была определена, а произведения $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_p}]$ и

$$[\mu_{i_1}, \ldots \widehat{\mu}_{i_k}, \ldots, \mu_{i_p}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]], \quad \text{при } k = 1, \ldots, p \tag{9}$$

были тривиальны.

Для того, чтобы произведение $[\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]$ существовало, необходимо, чтобы всякое произведение $[\mu_{j_1}, \ldots \widehat{\mu}_{j_k}, \ldots, \mu_{j_q}]$ при $k = 1, \ldots, q$ было тривиально, что равносильно тому, что на всякое множество $\{j_1, \ldots \widehat{j_k}, \ldots, j_q\}$ натянут симплекс. Таким образом, существование произведения $[\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]$ даёт вложение $\partial\Delta^{q-1} \hookrightarrow \mathcal{K}$, а тривиальность произведения $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_p}]$ даёт вложение $\Delta^p \hookrightarrow \mathcal{K}$.

Остаётся показать, что тривиальность произведений (9) равносильна существованию вложений

$$\{i_1, \ldots \widehat{i_k}, \ldots, i_p\} * \partial\Delta^{q-1} \hookrightarrow \mathcal{K}, \quad \text{при } k = 1, \ldots, p. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, будем считать $k = p$. Тривиальность скобки $\big[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_{p-1}}, [\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_q}]\big]$ равносильна существованию вложения (см. случай $n = 1$ в лемме 4.1)

$$D^2_{i_1} \times \ldots \times D^2_{i_{p-1}} \times \left(\bigcup_{k=1}^{q} D^2_{j_1} \times \ldots \times S^1_{j_k} \times \ldots \times D^2_{j_q} \right) \hookrightarrow \mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

По определению, последнее равносильно существованию вложения (10) для $k = p$.

Тем самым доказано, что $\mathcal{J}_{p-1}(\partial\Delta^{q-1})$ вкладывается в любой симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, реализующий произведение (8). С другой стороны, из теор. 5.3, комплекс $\mathcal{K} = \mathcal{J}_{p-1}(\partial\Delta^{q-1})$ реализует произведение (8), т. ч. он наименьший. $\square$

Как показано в теор. 6.1, если произведение (8) реализуется в симплициальном комплексе $\mathcal{L}$, то имеет место вложение $\mathcal{J}_{p-1}(\partial\Delta^{q-1}) \hookrightarrow \mathcal{L}$. При этом, однако, следующий пример показывает, что $\mathcal{J}_{p-1}(\Delta^{q-1})$ может не быть полным подкомплексом в $\mathcal{L}$.

$H_5(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$D_3D_4S_5 + D_3S_4D_5 + S_3D_4D_5$	$[\mu_3, \mu_4, \mu_5]$
	$\mathbb{Z}$	$D_1D_2S_4 + D_1S_2D_4 + S_1D_2D_4$	$[\mu_1, \mu_2, \mu_4]$
	$\mathbb{Z}$	$D_1D_2S_5 + D_1S_2D_5 + S_1D_2D_5$	$[\mu_1, \mu_2, \mu_5]$
$H_6(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$S_5(D_1D_2S_4 + D_1S_2D_4 + S_1D_2D_4)$	$[\mu_5, [\mu_1, \mu_2, \mu_4]]$
$H_8(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$	$(D_1S_2 + S_1D_2)(D_3D_4S_5 + D_3S_4D_5 + S_3D_4D_5)$	$\big[\mu_1, \mu_2, [\mu_3, \mu_4, \mu_5]\big]$

Таблица 2. Гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{L}$ для $\mathcal{L} = \mathcal{J}_1\big(\partial\Delta(3,4,5)\big) \cup \{1,2,3\}$ (см. рис. 2)

Пример 6.2. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{L} = \mathcal{J}_1\big(\partial\Delta(3,4,5)\big) \cup \Delta(1,2,3)$ (см. рис. 2).

Рассуждения аналогичные прим. 5.4 показывают, что $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq (S^5)^{\vee 3} \vee S^6 \vee S^8$ (см. табл. 2). Здесь S^8 — поднятие произведения $\big[\mu_1, \mu_2, [\mu_3, \mu_4, \mu_5]\big]$. Очевидно, $\mathcal{J}_1\big(\partial\Delta(3,4,5)\big)$ (см. рис. 1) не является полным подкомплексом в $\mathcal{L}$.

7. Пример нереализуемости

Здесь мы приводим пример симплициального комплекса $\mathcal{K}$, для которого момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентен букету сфер, но при этом $\mathcal{K} \notin W_\Delta$. Другими словами, не все сферы в букете реализуются линейной комбинацией итерированных высших произведений Уайтхеда (в смысле опр. 2.2). Тем самым мы показываем, что ответ на вопрос [BP, Problem 8.4.5] отрицателен.

Предложение 7.1. Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующий симплициальному комплексу $\mathcal{K} = (\partial\Delta^2 * \partial\Delta^2) \cup \Delta^2 \cup \Delta^2$, гомотопически эквивалентен букету сфер.

Доказательство. Обратим внимание, что 2-остов комплекса $\mathcal{K}$ совпадает с 2-остовом 5-мерного симплекса, поэтому $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является 6-связным. С помощью теор. 3.3 опишем гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ (см. табл. 3).

$H_7(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}^6$
$H_8(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}^6$
$H_9(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}^2$
$H_{10}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$	$\mathbb{Z}$

Таблица 3. Гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для $\mathcal{K} = (\partial\Delta^2 * \partial\Delta^2) \cup \Delta^2 \cup \Delta^2$

Согласно [BBCG] (также см. [BP, Corollary 8.3.6]) существует гомотопическая эквивалентность

$$f\colon (S^8)^{\vee 6} \vee (S^9)^{\vee 6} \vee (S^{10})^{\vee 2} \vee S^{11} \xrightarrow{\simeq} \Sigma\mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

Обозначим $X = (S^7)^{\vee 6} \vee (S^8)^{\vee 6} \vee (S^9)^{\vee 2} \vee S^{10}$. Так как оба пространства X и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ являются 6-связными, по теореме Фрейденталя гомоморфизм надстройки $\Sigma\colon \pi_n \to \pi_{n+1}$ для X и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является изоморфизмом при $n < 13$. Рассмотрим для $n < 13$ коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(\Sigma X) \arrow[r, "f_*"] & \pi_{n+1}(\Sigma\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \\
\pi_n(X) \arrow[u, "\cong"', "\Sigma_X"] \arrow[r, dashed, "\Sigma_{\mathcal{Z}_\mathcal{K}}^{-1} \circ f_* \circ \Sigma_X"] & \pi_n(\mathcal{Z}_\mathcal{K}). \arrow[u, "\cong"', "\Sigma_{\mathcal{Z}_\mathcal{K}}"]
\end{tikzcd}$$

Класс $[i_j^n]$ вложения j-ой n-мерной сферы $i_j^n\colon S^n \hookrightarrow X$ при композиции $\Sigma_{\mathcal{Z}_\mathcal{K}}^{-1} \circ f_* \circ \Sigma_X$ переходит в класс отображения $S^n \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Букет этих сфероидов задаёт отображение $g\colon X \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$. По построению, $\Sigma g\colon \Sigma X \to \Sigma\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ индуцирует изоморфизм в группах гомологий. Следовательно, g тоже индуцирует изоморфизм групп гомологий, а, значит, является гомотопической эквивалентностью. □

Предложение 7.2. Сфера $S^{10} \subset \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ не может быть реализована линейной комбинацией высших итерированных произведений Уайтхеда.

Обратим внимание, что $|\mathcal{K}| \simeq S^3 \vee S^2 \vee S^2$.

Доказательство. Имеем $H_3(\mathcal{K}) = \ker\big(d\colon C_3(\mathcal{K}) \to C_2(\mathcal{K})\big) \cong \mathbb{Z}$. Образующая группы $H_3(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$ представляется симплициальным циклом

$$\begin{aligned}
\sigma =& (\{2,3\} - \{1,3\} + \{1,2\}) * (\{5,6\} - \{4,6\} + \{4,5\}) = \\
=& \{2,3,5,6\} + \{2,3,6,4\} + \{2,3,4,5\} + \\
&+ \{3,1,5,6\} + \{3,1,6,4\} + \{3,1,4,5\} + \\
&+ \{1,2,5,6\} + \{1,2,6,4\} + \{1,2,4,5\}.
\end{aligned}$$

При изоморфизме из теор. 3.3, цикл σ переходит в клеточный цикл

$$(S_1D_2D_3 + D_1S_2D_3 + D_1D_2S_3)(S_4D_5D_6 + D_4S_5D_6 + D_4D_5S_6),$$

представляющий образующую группы $H_{10}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, соответствующую сфере S^{10} в букете.

Если $\mathcal{K}$ лежит в классе W_Δ, то сфера S^{10} реализуется как линейная комбинация произведений вида

$$[\mu_{i_1}, [\mu_{i_2}, \mu_{i_3}, \mu_{i_4}, \mu_{i_5}, \mu_{i_6}]], \quad [\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, [\mu_{i_3}, \mu_{i_4}, \mu_{i_5}, \mu_{i_6}]], \quad [\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \mu_{i_3}, [\mu_{i_4}, \mu_{i_5}, \mu_{i_6}]].$$

Однако, первое из этих трёх произведений не определено, т. к. $\mathcal{K}$ не содержит $\partial\Delta(i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$. Рассмотрим теперь второе произведение. Без ограничения общности можно рассмотреть два случая: $\{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$ и $\{i_1, i_2\} = \{1, 4\}$. В обоих случаях произведение не определено, т. к. $\mathcal{K}$ не содержит $\Delta(2, 4, 5, 6)$. Наконец, для третьего типа, если произведение Уайтхеда определено (например, $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, [\mu_4, \mu_5, \mu_6]]$), то оно равно нулю, т. к. уже любое тройное произведение Уайтхеда тривиально. □

Список литературы

[BBCG] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, S. Gitler. *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces.* Adv. Math. 225 (2010), no. 3, 1634–1668.

[BP] V. Buchstaber, T. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[GPTW] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, J. Wu. *Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes* Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 9, 6663–6682.

[Ve] Ya. Veryovkin. *Pontryagin algebras of some moment-angle-complexes.* Dal'nevost. Mat. Zh. (2016), no. 1, 9–23 (in Russian); arXiv:1512.00283.

[Wh] G.W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

E-mail address: semyon.abramyan@gmail.com