О нормальности элементарной подгруппы в $\mathrm{Sp}(2, A)$

Е. Ю. Воронецкий

В настоящей статье доказывается нормальность элементарной подгруппы $\mathrm{Ep}(2, A)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2, A)$, где A — кольцо с инволюцией, удовлетворяющее естественным ограничениям на ранг, формулируемым в терминах существования системы ортогональных идемпотентов.

Этот результат является первым шагом, необходимым для решения задачи описания подгрупп в $\mathrm{Sp}(2, A)$, нормализуемых $\mathrm{Ep}(2, A)$. Сама задача была поставлена в статье Николая Вавилова и Виктора Петрова [1], проблема 2 (см. также обзор [2], проблема 19). Кроме того, доказываемый результат служит обобщением результата Вячеслава Копейко [3] и Джованни Таддеи [14] о нормальности элементарной симплектической группы $\mathrm{Ep}(2l, R)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2l, R)$, где $l \geqslant 3$ и R — коммутативное кольцо. А именно, их результат является частным случаем нашего при $A = \mathrm{M}(l, R)$, $l \geqslant 3$, где инволюция на A задаётся транспонированием.

Вопрос о нормальности элементарной подгруппы в группе точек редуктивной алгебраической группы над коммутативным кольцом был одним из важнейших для алгебраической K-теории. Мы ограничимся ссылками на несколько ключевых работ и обзоров по этой теме, в которых можно найти более подробную историю и дальнейшие ссылки.

Первым общим результатом о нормальности была теорема Андрея Суслина, относившаяся к случаю группы $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \geqslant 3$, R — коммутативное кольцо, [13]. Вскоре А. Суслин и В. Копейко обобщили этот результат на симплектический и ортогональный случаи [5], посвящённые полной линейной и ортогональной группам. Чуть более слабый результат был получен Дж. Таддеи [14]. В дальнейшем эти результаты (теоремы о нормальности элементарной подгруппы) были обобщены на обобщённые унитарные группы [6, 16], также подробное изложение этих результатов можно найти в [8]. В работе [12] предложены новые элементарные доказательства, основанные на методе разложения унипотентов.

При помощи локализационных методов теоремы о нормальности (и даже более сильные результаты) были получены в контексте групп Шевалле [9, 15]. Наиболее общий известный сегодня результат собственно о нормальности элементарной подгруппы — это теорема В. Петрова и А. Ставровой, в которой установлена нормальность $\mathrm{E}(R)$ для любой достаточно изотропной редуктивной группы. Вопрос о нормальности элементарной подгруппы теснейшим образом связан с вопросом центральности K_2, где в самое последнее время был получен значительный прогресс.

Точная формулировка результата, доказываемого в этой статье, приведена в конце §1 (теорема 1), после введения определений. В §2 доказываются коммутационные соотношения в $\mathrm{Sp}(2, A)$ и некоторые следствия из них, а §3 посвящён доказательству теоремы 1.

1 Определения

Будем предполагать, что все рассматриваемые кольца ассоциативные и имеют единицу. Под инволюцией в кольце R мы понимаем антиавтоморфизм порядка 2. Через $\mathrm{M}(n, R)$ будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над кольцом R, через $\mathrm{GL}(n, R)$ — группу обратимых матриц размера $n \times n$ над кольцом R. Другими словами, $\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{M}(n, R)^*$, где через R^* обозначаена группа обратимых элементов кольца R.

Для кольца R с инволюцией $r \mapsto \overline{r}$ положим $\mathrm{H}(R) = \{r \in R \mid r = \overline{r}\}$ и $\mathrm{AH}(R) = \{r \in R \mid r + \overline{r} = 0\}$ — множества эрмитовых и антиэрмитовых элементов, для идеала $I \trianglelefteq R$ с $\overline{I} = I$ аналогично определим $\mathrm{H}(I)$ и $\mathrm{AH}(I)$. Для произвольного кольца R через $\mathrm{C}(R)$ обозначим его центр, это же обозначение будем использовать для центра группы. Через $\mathrm{N}_G(H)$ и $\mathrm{C}_G(H)$ будем обозначать нормализатор и централизатор подгруппы H в группе G соответственно.

Зафиксируем кольцо A с инволюцией $a \mapsto \overline{a}$. Будем рассматривать его как подкольцо в $R = \mathrm{M}(2, A)$ (вложение $A \hookrightarrow R$ задаётся стандартным образом, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$). Распространим инволюцию на R, положив

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

при $a, b, c, d \in A$.

Лемма 1. *Операция $g \mapsto \overline{g}$, $g \in \mathrm{GL}(2, A) = R^*$, является инволюцией.*

Доказательство. Ясно, что отображение $g \mapsto \overline{g}$ аддитивно и удовлетворяет тождеству $\overline{\overline{g}} = g$. Так как $\overline{1} = 1$, то осталось проверить, что $\overline{gg'} = \overline{g'}\,\overline{g}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} &= \overline{\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{cb'} + \overline{dd'} & -\overline{ab'} - \overline{bd'} \\ -\overline{ca'} - \overline{dc'} & \overline{aa'} + \overline{bc'} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \overline{d'}\,\overline{d} + \overline{b'}\,\overline{c} & -\overline{d'}\,\overline{b} - \overline{b'}\,\overline{a} \\ -\overline{c'}\,\overline{d} - \overline{a'}\,\overline{c} & \overline{c'}\,\overline{b} + \overline{a'}\,\overline{a} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \overline{d'} & -\overline{b'} \\ -\overline{c'} & \overline{a'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} \cdot \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

□

Теперь определим группу

$$\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(2, A) = \{g \in \mathrm{GL}(2, A) \mid g^{-1} = \overline{g}\}.$$

То, что $\mathrm{Sp}(R)$ является группой, следует из предыдущей леммы и из $\overline{g}\,\overline{h} = \overline{h}\,\overline{g} = 1$ при условии, что $gh = hg = 1$. Положим

$$\mathrm{GSp}(R) = \mathrm{GSp}(2, A) = \{g \in R^* \mid g\overline{g} = \overline{g}g \in \mathrm{C}(R)\}.$$

Ясно, что это подгруппа в R^*, содержащая $\mathrm{Sp}(R)$.

С этого момента будем предполагать выполнение следующих условий:

1. Найдётся полный набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ попарно ортогональных самосопряжённых идемпотентов в A при некотором $n \geqslant 3$. Иными словами, $\sum_{i=1}^n e_i = 1$, $e_i^2 = e_i$, $e_ie_j = 0$ при $i \neq j$ и $\overline{e_i} = e_i$. Этот набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ мы зафиксируем вместе с кольцом A.

2. Каждый из элементов e_i порождает A как двусторонний идеал, то есть для каждого e_i найдутся $\{a_k\}_{k=1}^{m_k}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{m_k}$ из A, удовлетворяющие соотношению $1 = \sum_{k=1}^{m_i} a_ke_ib_k$.

Положим $E_i = \left(\begin{smallmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ при $0 < i \leqslant n$ и $E_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{-i} \end{smallmatrix}\right)$ при $-n \leqslant i < 0$. Ясно, что это тоже попарно ортогональные идемпотенты с суммой 1, причём $\overline{E_i} = E_{-i}$. Кроме того, все эти элементы порождают R как двусторонний идеал. Определим элементарные трансвекции

$$\begin{aligned} T_{i,j}(a) &= 1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} \text{ при } a \in R,\ i \neq \pm j; \\ T_i(a) &= 1 + E_iaE_{-i} \text{ при } a \in \mathrm{AH}(R). \end{aligned}$$

Ясно, что $\overline{T_{i,j}(a)} = T_{i,j}(a)^{-1} = T_{-j,-i}(\overline{a}) = T_{i,j}(-a)$ и $\overline{T_i(b)} = T_i(b)^{-1} = T_i(-b)$ при условии, что $i \neq \pm j$ и $a \in R, b \in \mathrm{AH}(R)$.

Определим теперь элементарную симплектическую группу

$$\mathrm{Ep}(R) = \mathrm{Ep}(2, A) = \langle T_{i,j}(a), T_i(b) \mid i \neq \pm j, a \in R, b \in \mathrm{AH}(R)\rangle \leqslant R^*.$$

Заметим, что это подгруппа в $\mathrm{Sp}(R)$.

Для самосопряжённого двустороннего идеала $I \trianglelefteq R$ (то есть $\overline{I} = I$) также определим $\mathrm{Sp}(I) = \mathrm{Sp}(R) \cap (1 + I)$, $\mathrm{Ep}(I) = \langle T_{i,j}(a), T_i(b) \mid a \in I, b \in \mathrm{AH}(I)\rangle$.

Введём также операцию транспонирования на кольце R, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^* = \left(\begin{smallmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{smallmatrix}\right)$. Эта операция является инволюцией R, коммутирующей со стандартной инволюцией $r \mapsto \overline{r}$, а также сохраняет $\mathrm{GSp}(R)$, $\mathrm{Sp}(R)$ и $\mathrm{Ep}(R)$.

В качестве основного примера такого кольца A будем рассматривать кольцо $A = \mathrm{M}(n, B)$ для коммутативного кольца B, где инволюция на A является транспонированием и e_i являются стандартными матричными единицами с номерами (i, i) (то есть e_i — матрица, содержащая нули во всех позициях, кроме (i, i), в которой она содержит 1).

Зафиксируем индекс $1 \leqslant m \leqslant n$. Будем говорить, что R удовлетворяет условиям стабильности, если выполнены следующие два условия:

1. Если для некоторого $u \in A$ выполнено $Aue_m = Ae_m$, то найдётся $a \in Ae_m$ такое, что $e_ma = 0$ и $A(1 - e_m + a)ue_m = Ae_m$ (аналог неравенства на стабильный ранг B в случае $A = \mathrm{M}(n, B)$).

2. Если для некоторых $u_1, u_2 \in A$ выполнено $Au_1e_m + Au_2e_m = Ae_m$, то найдётся $a = \overline{a} \in A$ такое, что $A(u_1 + au_2)e_m = Ae_m$ (аналог неравенства на Λ-стабильный ранг для матричного кольца над кольцом с форменным параметром, см. также [16]).

Эти условия будем называть первым и вторым условиями стабильности соответственно.

Нашей целью является доказательство следующего факта:

Теорема 1. *В предыдущих обозначениях пусть для любого максимального идеала M в $\mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$ существует такое мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R)) \setminus M$, что $S^{-1}R$ удовлетворяет условиям стабильности. Тогда $\mathrm{Ep}(R)$ нормальна в $\mathrm{GSp}(R)$.*

2 Элементарная подгруппа

Лемма 2. *Выполнены следующие соотношения:*

1. $T_{i,j}(a)T_{i,j}(b) = T_{i,j}(a+b)$, $T_i(c)T_i(d) = T_i(c+d)$ *при* $i \neq \pm j$, $a, b \in R$, $c, d \in \mathrm{AH}(R)$*;*
2. $[T_{i,j}(a), T_{k,l}(b)] = 1$, *если* $i \neq \pm j$, $k \neq \pm l$, $a, b \in R$ *и, кроме того,* $k \neq j, -i$ *вместе с* $l \neq i, -j$*;*
3. $[T_{i,j}(a), T_k(b)] = 1$, *если* $i \neq \pm j$, $a \in R$, $b \in \mathrm{AH}(R)$ *и* $k \neq j, -i$*;*
4. $[T_i(a), T_j(b)] = 1$, *если* $a, b \in \mathrm{AH}(R)$ *и* $j \neq -i$*;*
5. $[T_{i,j}(a), T_{j,k}(b)] = T_{i,k}(aE_jb)$, *если* $i \neq \pm j$, $j \neq \pm k$, $k \neq \pm i$ *и* $a, b \in R$*;*
6. $[T_{i,j}(a), T_{j,-i}(b)] = T_i(aE_jb - \overline{b}E_{-j}\overline{a})$, *если* $i \neq \pm j$ *и* $a, b \in R$*;*
7. $[T_{i,j}(a), T_j(b)] = T_{i,-j}(aE_jb)T_i(aE_jbE_{-j}\overline{a})$, *если* $i \neq \pm j$, $a \in R$ *и* $b \in \mathrm{AH}(R)$.

Доказательство.

1. Ясно.
2. $[T_{i,j}(a), T_{k,l}(b)] = T_{i,j}(a)T_{k,l}(b)T_{i,j}(-a)T_{k,l}(-b) = (1 + E_iaE_j - {}$ $- E_{-j}\overline{a}E_{-i})(1 + E_kbE_l - E_{-l}\overline{b}E_{-k})(1 - E_iaE_j + E_{-j}\overline{a}E_{-i})(1 - E_kbE_l + {}$ $+ E_{-l}\overline{b}E_{-k}) = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_kbE_l - E_{-l}\overline{b}E_{-k})(1 - E_iaE_j + {}$ $+ E_{-j}\overline{a}E_{-i} - E_kbE_l + E_{-l}\overline{b}E_{-k}) = 1$.
3. $[T_{i,j}(a), T_k(b)] = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i})(1 + E_kbE_{-k})(1 - E_iaE_j + {}$ $+ E_{-j}\overline{a}E_{-i})(1 - E_kbE_{-k}) = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_kbE_{-k}) \cdot{}$ $\cdot (1 - E_iaE_j + E_{-j}\overline{a}E_{-i} - E_kbE_{-k}) = 1$.
4. $[T_i(a), T_j(b)] = (1 + E_iaE_{-i})(1 + E_jbE_{-j})(1 - E_iaE_{-i})(1 - E_jbE_{-j}) = {}$ $= (1 + E_iaE_{-i} + E_jbE_{-j})(1 - E_iaE_{-i} - E_jbE_{-j}) = 1$.

5. $[T_{i,j}(a), T_{j,k}(b)] = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_jbE_k - E_{-k}\overline{b}E_{-j} + + E_iaE_jbE_k)(1 - E_iaE_j + E_{-j}\overline{a}E_{-i} - E_jbE_k + E_{-k}\overline{b}E_{-j} + E_iaE_jbE_k) = = 1 + E_iaE_jbE_k - E_{-k}\overline{b}E_{-j}\overline{a}E_{-i} = T_{i,k}(aE_jb)$.

6. $[T_{i,j}(a), T_{j,-i}(b)] = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_jbE_{-i} - E_i\overline{b}E_{-j} + + E_iaE_jbE_{-i})(1 - E_iaE_j + E_{-j}\overline{a}E_{-i} - E_jbE_{-i} + E_i\overline{b}E_{-j} + E_iaE_jbE_{-i}) = = 1 + E_iaE_jbE_{-i} - E_i\overline{b}E_{-j}\overline{a}E_{-i} = T_i(aE_jb - \overline{b}E_{-j}\overline{a})$.

7. $[T_{i,j}(a), T_j(b)] = (1 + E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_jbE_{-j} + E_iaE_jbE_{-j}) \cdot \cdot (1 - E_iaE_j + E_{-j}\overline{a}E_{-i} - E_jbE_{-j} + E_iaE_jbE_{-j}) = 1 + E_iaE_jbE_{-j} + + E_jbE_{-j}\overline{a}E_{-i} + E_iaE_jbE_{-j}\overline{a}E_{-i} = T_{i,-j}(aE_jb)T_i(aE_jbE_{-j}\overline{a})$. □

Так как E_i порождают R как идеал, то найдутся $\{\alpha_{i,r} \in R\}_{r=1}^{n_i}$ и $\{\beta_{i,r} \in R\}_{r=1}^{n_i}$ такие, что $1 = \sum_{r=1}^{n_i} \alpha_{i,r}E_i\beta_{i,r}$. Зафиксируем эти элементы для всех i и, не умаляя общности, будем считать, что $n_{-i} = n_i$, $\alpha_{-i,r} = \overline{\beta}_{i,r}$ и $\beta_{-i,r} = \overline{\alpha}_{i,r}$.

Лемма 3. *Если* $I = \overline{I} \trianglelefteq R$, *то выполнено* $\mathrm{Ep}(I) \leqslant [\mathrm{Ep}(I), \mathrm{Ep}(R)]$. *В частности,* $\mathrm{Ep}(R)$ *совершенна.*

Доказательство. Если $\pm i$, $\pm j$ и $\pm k$ различны, то

$$T_{i,k}(a) = \prod_{r=1}^{n_j} T_{i,k}(a\alpha_{j,r}E_j\beta_{j,r}) = \prod_{r=1}^{n_j} [T_{i,j}(a\alpha_{j,r}), T_{j,k}(\beta_{j,r})] \in [\mathrm{Ep}(I), \mathrm{Ep}(R)]$$

для любого $a \in I$. Кроме того, при $a \in \mathrm{AH}(I)$ и различных $\pm i$, $\pm j$ верно

$$\begin{aligned} T_i(a) = \prod_{r=1}^{n_j} \big(&T_i(\alpha_{j,r}E_j\beta_{j,r}a\alpha_{-j,r}E_{-j}\beta_{-j,r}) \cdot \\ &\cdot \prod_{s=r+1}^{n_j} T_i(\alpha_{j,r}E_j\beta_{j,r}a\alpha_{-j,s}E_{-j}\beta_{-j,s} + \alpha_{j,s}E_j\beta_{j,s}a\alpha_{-j,r}E_{-j}\beta_{-j,r})\big) = \\ = \prod_{r=1}^{n_j} \big(&[T_{i,j}(\alpha_{j,r}), T_j(\beta_{j,r}a\alpha_{-j,r})]T_{i,-j}(-\alpha_{j,r}E_j\beta_{j,r}a\alpha_{-j,r}) \cdot \\ &\cdot \prod_{s=r+1}^{n_j} [T_{i,j}(\alpha_{j,r}), T_{j,-i}(\beta_{j,r}a\alpha_{-j,s}E_{-j}\beta_{-j,s})]\big) \in [\mathrm{Ep}(R), \mathrm{Ep}(I)]. \end{aligned}$$ □

Лемма 4. $\mathrm{N}_{R^*}(\mathrm{Ep}(R)) \leqslant \mathrm{GSp}(R) \leqslant \mathrm{N}_{R^*}(\mathrm{Sp}(R))$.

Доказательство. Правое включение ясно, так как при $g \in \mathrm{GSp}(R)$ и $h \in \mathrm{Sp}(R)$ верно ${}^g h\, \overline{{}^g h} = ghg^{-1}\overline{g^{-1}}\,\overline{h}\,\overline{g} = gh\overline{h}g^{-1}\overline{g^{-1}}\,\overline{g} = 1$ и аналогично для $\overline{{}^g h}\, {}^g h$. Если $g \in \mathrm{N}_{R^*}(\mathrm{Ep}(R))$, то для любого $h \in \mathrm{Ep}(R)$ имеем ${}^g h \overline{{}^g h} = 1$, то есть $ghg^{-1}\overline{g^{-1}}\,\overline{h}\,\overline{g} = 1$, откуда $[\overline{g}g, h] = 1$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathrm{C}_{R^*}(\mathrm{Ep}(R)) = \mathrm{C}(R)^*$ (если $\overline{g}g \in \mathrm{C}(R)^*$, то $g\overline{g} = g\overline{g}gg^{-1} = gg^{-1}\overline{g}g = \overline{g}g$, этим мы будем пользоваться и в дальнейшем).

Пусть $g \in \mathrm{C}_{R^*}(\mathrm{Ep}(R))$ и докажем, что g коммутирует со всеми $a \in R$. Тогда $gT_{i,j}(a) = T_{i,j}(a)g$ при $a \in R$, $i \neq \pm j$. Другими словами, $g(E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i}) = (E_iaE_j - E_{-j}\overline{a}E_{-i})g$ и $E_kgE_iaE_j = 0$ при $k \neq i, -j$. Отсюда вытекает, что $E_kgE_i = 0$ и, следовательно, $g = \sum_i E_igE_i$.

Кроме того, из равенства $E_igE_iaE_j = E_iaE_jgE_j$ следует, что g коммутирует с E_iaE_j при $i \neq \pm j$. Отсюда, в силу $E_iaE_{\pm i} = \sum_{r=1}^{n_j} E_ia\alpha_{j,r}E_j \cdot E_j\beta_{j,r}E_{\pm i}$, g коммутирует и с $E_iaE_{\pm i}$. Наконец, g коммутирует с a, так как $a = \sum_{i,j} E_iaE_j$. □

Как следствие из доказательства, получаем $\mathrm{N}_{R^*}(\mathrm{Sp}(R)) = \mathrm{GSp}(R)$.

Заметим, что $A^i = (1 - e_i)A(1 - e_i)$ является кольцом (роль единицы играет $1 - e_i$) и инволюцией (полученной сужением инволюции кольца A). Это позволяет построить кольцо $R^i = (1 - E_i - E_{-i})R(1 - E_i - E_{-i})$ с инволюцией и вложение $\iota\colon \mathrm{Sp}(R^i) \to \mathrm{Sp}(R)$ по формуле $g \mapsto g + E_i + E_{-i}$.

Лемма 5. *Это корректно определённый гомоморфизм.*

Доказательство. Проверим сначала, что образ $\mathrm{Sp}(R^i)$ действительно содержится в $\mathrm{Sp}(R)$. Для $g \in \mathrm{Sp}(R^i)$ имеем $\iota(g)\overline{\iota(g)} = (g + E_i + E_{-i})(\overline{g} + E_i + E_{-i}) = g\overline{g} + E_i + E_{-i} = 1$.

Осталось проверить, что произведение переходит в произведение. Действительно, если $g, h \in \mathrm{Sp}(R^i)$, то $\iota(g)\iota(h) = (g + E_i + E_{-i})(h + E_i + E_{-i}) = gh + E_i + E_{-i} = \iota(gh)$. □

Так как ι инъективно, то $\mathrm{Sp}(R^i)$ будем отождествлять с её образом в $\mathrm{Sp}(R)$.

Лемма 6. $\mathrm{GSp}(R) = \mathrm{Sp}(R)\,\mathrm{D}(R)$, *где* $\mathrm{D}(R) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mid a = \overline{a}, b = \overline{b} \in \mathrm{C}(A)^*\}$.

Доказательство. Пусть $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GSp}(R)$, $g\overline{g} = \left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$. Ясно, что $h \in \mathrm{D}(R)$ и $gh^{-1} \in \mathrm{Sp}(R)$, так как $gh^{-1}\overline{gh^{-1}} = g\left(\begin{smallmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{smallmatrix}\right)\overline{g} = 1$. Поэтому $\mathrm{GSp}(R) \subseteq \mathrm{Sp}(R)\,\mathrm{D}(R)$, обратное включение очевидно. □

Лемма 7. *Для всех* $a \in \mathrm{H}(A)$ *матрица* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *лежит в* $\mathrm{Ep}(R)$. *Для всех* $a \in (1 - e_i)Ae_i$ *(или* $e_iA(1 - e_i)$*) матрица* $\left(\begin{smallmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\overline{a} \end{smallmatrix}\right)$ *лежит в* $\mathrm{Ep}(R)$.

Доказательство. Если $a \in \mathrm{H}(A)$, то

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \prod_{i>0}\Big(T_i(\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))\prod_{j>i} T_{i,-j}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))\Big) \in \mathrm{Ep}(R),$$

так как все сомножители коммутируют.

Аналогично, если $a \in (1-e_i)Ae_i$ (или, что то же самое, $a \in Ae_i$ и $e_ia = 0$), то

$$\left(\begin{smallmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\overline{a} \end{smallmatrix}\right) = \prod_{j>0, j\neq i} T_{j,i}(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) \in \mathrm{Ep}(R). \qquad \square$$

Лемма 8. *Пусть* $a \in I$, *где* $I = \overline{I} \trianglelefteq R$, $aE_i = aE_{-i} = a\overline{a} = 0$. *Тогда* $1 + E_i a - \overline{a} E_{-i} \in \mathrm{Ep}(I)$.

Доказательство. Не умаляя общности, $i > 0$. Заметим, что при данных предположениях $1 + E_i a - \overline{a} E_{-i} \in \mathrm{Sp}(I)$. Рассмотрим произведение (в порядке убывания j)

$$g = \prod_{j \neq \pm i} T_{i,j}(a) = 1 + E_i a - \overline{a} E_{-i} - \sum_{j>0, j \neq \pm i} E_i a E_j \overline{a} E_{-i}.$$

Так как $g(1 + E_i a - \overline{a} E_{-i})^{-1} = g(1 - E_i a + \overline{a} E_{-i}) = 1 - \sum_{j>0, j \neq \pm i} E_i a E_j \overline{a} E_{-i}$, то по лемме 7 получаем $g(1 + E_i a - \overline{a} E_{-i}) \in \mathrm{Ep}(R)$. $\square$

Лемма 9. *Группа* $\mathrm{D}(R)$ *нормализует* $\mathrm{Ep}(I)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{D}(R)$, тогда $g = \sum_i E_i g E_i$ и $g\overline{g} = \overline{g} g = s \in \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$. Нетрудно видеть, что для $a \in I$ выполнено

$$\begin{aligned} {}^g T_{i,j}(a) &= 1 + g E_i a E_j g^{-1} - g E_{-j} \overline{a} E_{-i} g^{-1} = \\ &= 1 + E_i g a g^{-1} E_j - E_{-j} s \overline{g^{-1}}\, \overline{a}\, \overline{g} s^{-1} E_{-i} = T_{i,j}({}^g a) \end{aligned}$$

и аналогично, для $b \in \mathrm{AH}(I)$, ${}^g T_i(b) = T_i({}^g b)$. $\square$

3 Нормальность элементарной подгруппы

Лемма 10. *Пусть* R *удовлетворяет условиям стабильности и для некоторого столбца* $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 e_m \\ v_2 e_m \end{smallmatrix}\right)$ *при* $v_1, v_2 \in A$ *верно* $A v_1 e_m + A v_2 e_m = A e_m$. *Тогда найдётся* $g \in \mathrm{Ep}(R)$ *такое, что* $gv \in \left(\begin{smallmatrix} e_m \\ A e_m \end{smallmatrix}\right)$.

Доказательство. Будем последовательно заменять v на столбцы вида gv при $g \in \mathrm{Ep}(R)$. Из второго условия стабильности с помощью леммы 7 следует, что v можно заменить на столбец такого же вида, но с $A v_1 e_m = A e_m$, умножением на элементарную матрицу. В свою очередь, из первого условия стабильности получается, что найдётся $a \in A e_m$, удовлетворяющее $e_m a = 0$ и $A(1 - e_m + a) v_1 e_m = A e_m$. Поэтому, заменяя v на $\left(\begin{smallmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\overline{a} \end{smallmatrix}\right) v$, получим столбец с $A(1 - e_m) v_1 e_m = A e_m$ (при этом $\left(\begin{smallmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\overline{a} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Ep}(R)$ по лемме 7, эта же лемма используется и дальше).

Иными словами, найдётся $b \in A$, для которого $b e_m = 0$ и $e_m = b v_1 e_m$. Тогда, заменяя v на $\left(\begin{smallmatrix} 1+(e_m - e_m v_1 e_m) b & 0 \\ 0 & 1-\overline{b}(e_m - e_m \overline{v_1} e_m) \end{smallmatrix}\right) v$, получим столбец с $e_m v_1 e_m = e_m$. Умножив его на $\left(\begin{smallmatrix} 1+(e_m - v_1 e_m) & 0 \\ 0 & 1-(e_m - e_m \overline{v_1}) \end{smallmatrix}\right)$ слева, получим требуемое. $\square$

Лемма 11. *Если* R *удовлетворяет условиям стабильности, то группа* $\mathrm{Ep}(R)$ *нормальна в* $\mathrm{GSp}(R)$. *Более того,* $\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(R^m)\,\mathrm{Ep}(R)$.

Доказательство. Ясно, что из второго утверждения следует первое, так как $\mathrm{D}(R)$ нормализует $\mathrm{Ep}(R)$ по лемме 9. Пусть $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(R)$. В силу предыдущей леммы можно считать, что $ae_m = e_m$. Заменяя g на $\prod_{0<i\neq m} T_{-i,m}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{smallmatrix}\right))g$, получим $ce_m = e_m ce_m$. Так как $g \in \mathrm{Sp}(R)$, то $\overline{c}a = \overline{a}c$, откуда $e_m\overline{c}e_m = e_m ce_m$. Поэтому, заменяя g на $T_{-m}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -e_m ce_m & 0 \end{smallmatrix}\right))g$, окончательно получаем $ce_m = 0$.

Добьёмся теперь выполнения $e_m a = e_m$ и $e_m b = 0$. Для того, чтобы получить $e_m a = 0$, достаточно заменить g на $g\prod_{0<i\neq m} T_{m,i}(\left(\begin{smallmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$. После этого заменим g на $g\prod_{0<i\neq m} T_{m,-i}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$, это даст равенство $e_m b = e_m be_m$. Так как $g \in \mathrm{Sp}(R)$, то $a\overline{b} = b\overline{a}$, откуда $e_m be_m = e_m\overline{b}e_m$. Поэтому после замены g на $gT_m(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -e_m be_m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ получаем требуемое. Нетрудно проверить, что из равенств $g\overline{g} = \overline{g}g = 1$ теперь вытекает, что $g \in \mathrm{Sp}(R^m)$. □

Лемма 12. *Для всех i и всех $c \in \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$ выполнено* $[\mathrm{Sp}(R^i), \mathrm{Ep}(Rc^4)] \leqslant \mathrm{Ep}(Rc)$. *В частности,* $\mathrm{Sp}(R^i)\,\mathrm{Ep}(R) = \mathrm{Ep}(R)\,\mathrm{Sp}(R^i)$ *является группой.*

Доказательство. Зафиксируем $g = a + E_i + E_{-i} \in \mathrm{Sp}(R^i)$. Ясно, что при $x \in \mathrm{AH}(Rc)$

$$\begin{aligned} {}^gT_i(x) &= (a + E_i + E_{-i})(1 + E_i x E_{-i})(\overline{a} + E_i + E_{-i}) = \\ &= a\overline{a} + E_i + E_{-i} + E_i x E_{-i} = 1 + E_i x E_{-i} = T_i(x) \in \mathrm{Ep}(Rc). \end{aligned}$$

Кроме того, при $j \neq \pm i$ и $x \in Rc$

$$\begin{aligned} {}^gT_{i,j}(x) &= (a + E_i + E_{-i})(1 + E_i x E_j - E_{-j}\overline{x}E_{-i})(\overline{a} + E_i + E_{-i}) = \\ &= 1 + E_i x E_j \overline{a} - aE_{-j}\overline{x}E_{-i}. \end{aligned}$$

Так как $xE_j\overline{a}E_i = xE_j\overline{a}E_{-i} = 0$, то по лемме 8 имеем ${}^gT_{i,j}(x) \in \mathrm{Ep}(Rc)$.

Пусть теперь $i \neq \pm j$, $j \neq \pm k$, $k \neq \pm i$. Для $x \in R$ заметим, что

$${}^gT_{j,k}(xc^4) = \prod_{r=1}^{n_i} [{}^gT_{j,i}(xc^2\alpha_{i,r}), {}^gT_{i,k}(x^2\beta_{j,r})] \in \mathrm{Ep}(Rc),$$

а для $x \in \mathrm{AH}(R)$ — что

$$\begin{aligned} {}^gT_j(xc^4) = \prod_{r=1}^{n_i} \big([{}^gT_{j,i}(a_{i,r}c), {}^gT_i(\beta_{i,r}c^2x\alpha_{-i,r})]\,{}^gT_{j,-i}(-\alpha_{i,r}E_i\beta_{i,r}xc^3\alpha_{-i,r}) \cdot \\ \cdot \prod_{s=r+1}^{n_i} [{}^gT_{j,i}(\alpha_{i,r}c), {}^gT_{i,-j}(\beta_{i,r}xc^3\alpha_{-i,s}E_{-i}\beta_{-i,s})]\big) \in \mathrm{Ep}(Rc), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое. □

Лемма 13. *Пусть $c \in \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$, g — элементарная трансвекция. Тогда верно* ${}^g\,\mathrm{Ep}(Rc^4) \leqslant \mathrm{Ep}(Rc)$.

Доказательство. Докажем, что ${}^gT_{i,j}(Rc^4), {}^gT_i(\mathrm{AH}(R)c^4) \leqslant \mathrm{Ep}(Rc)$. В случае ${}^gT_{i,j}(Rc^4)$ нетривиальным случаем является только $g = T_{j,i}(x)$, тогда при $k \neq \pm i, \pm j$

$$
\begin{aligned}
{}^gT_{i,j}(ac^4) &= \prod_{r=1}^{n_k} [{}^gT_{i,k}(a\alpha_{k,r}c^2), {}^gT_{k,j}(\beta_{k,r}c^2)] = \\
&= \prod_{r=1}^{n_k} \big[T_{j,k}(xa\alpha_{k,r}c^2)T_{i,k}(a\alpha_{k,r}c^2), T_{k,j}(\beta_{k,r}c^2x)^{-1}T_{k,j}(\beta_{k,r}c^2)\big],
\end{aligned}
$$

что принадлежит $\mathrm{Ep}(Rc)$.

Аналогично, для ${}^gT_i(\mathrm{AH}(R)c^4)$ достаточно рассмотреть $g = T_{-i}(x)$, тогда при $j \neq \pm i$

$$
\begin{aligned}
{}^gT_i(ac^4) = \prod_{r=1}^{n_j} \big(&[{}^gT_{i,j}(c\alpha_{j,r}), {}^gT_j(c^2\beta_{j,r}a\alpha_{-j,r})]{}^gT_{i,-j}(-c^3\alpha_{j,r}E_j\beta_{j,r}a\alpha_{-j,r}) \cdot \\
&\cdot \prod_{s=r+1}^{n_j} [{}^gT_{i,j}(c\alpha_{j,r}), {}^gT_{j,-i}(c^3\beta_{j,r}a\alpha_{-j,s}E_{-j}\beta_{-j,s})]\big) \in \mathrm{Ep}(Rc). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Лемма 14. *Пусть $S \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$ — мультипликативное подмножество, $g \in \mathrm{Sp}(R)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим, что $\Psi(g) \in \mathrm{Ep}(S^{-1}R)\,\mathrm{Sp}(S^{-1}R^m)$, где $\Psi\colon R \to S^{-1}R$. Тогда найдётся $s \in S$ такое, что ${}^g\,\mathrm{Ep}(Rs) \leqslant \mathrm{Ep}(R)$.*

Доказательство. Докажем, что для всех $i \neq \pm j$ существует $s \in S$ такое, что ${}^gT_{i,j}(Rs) \leqslant \mathrm{Ep}(R)$ (аналогичным образом получается, что для всех i существует $s \in S$, для которого ${}^gT_i(\mathrm{AH}(R)s) \leqslant \mathrm{Ep}(R)$). Тогда в качестве искомого s можно взять произведение этих s по всем i, j. Пусть $R' = R[x, y]$, где x коммутирует с $\mathrm{C}(R)$ (в случае T_i — ещё и $x = -\overline{x}$), $y = \overline{y}$ коммутирует с R и x. По условию $\Psi(g) = g_1g_2$, где $g_1 \in \mathrm{Ep}(S^{-1}R)$ и $g_2 \in \mathrm{Sp}(S^{-1}R^m)$, найдётся такое N, что g_1 является произведением N элементарных трансвекций из $\mathrm{Ep}(S^{-1}R)$. Пусть $h(y) = {}^gT_{i,j}(xy^{4^{N+1}})$.

По леммам 12 и 13 $\Psi(h(y)) \in \mathrm{Ep}(S^{-1}R'y)$. Это означает, что $\Psi(h(y))$ является произведением конечного числа элементарных трансвекций вида $T_{k,l}(ay)$, где $a \in S^{-1}R'$ (а также $T_k(ay)$ при $a \in \mathrm{AH}(S^{-1}R')$). Пусть $s_1 \in S$ — общий знаменатель всех таких a, тогда $\Psi(h(s_1y)) \in \Psi(\mathrm{Ep}(yR'))$. Это означает, что $\Psi(h(s_1y)) = \Psi(h'(y))$, где $h'(y) \in \mathrm{Ep}(yR')$. Но тогда нетрудно видеть, что найдётся $s_2 \in S$, для которого $h(s_1s_2y) = h'(s_2y)$. Окончательно, ${}^gT_{i,j}(x(s_1s_2)^{4^{N+1}}) = h(s_1s_2) = h'(s_2) \in \mathrm{Ep}(R')$. Ясно, что $s = (s_1s_2)^{4^{N+1}}$ подходит. $\square$

Теорема 1. *Пусть для любого максимального идеала $M \lhd \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$ существует мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R)) \setminus M$ такое, что $S^{-1}R$ удовлетворяет условиям стабильности. Тогда $\mathrm{Ep}(R)$ нормальна в $\mathrm{GSp}(R)$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{D}(R)$ нормализует $\mathrm{Ep}(R)$ по лемме 9, то достаточно доказать, что $\mathrm{Ep}(R) \trianglelefteq \mathrm{Sp}(R)$. Зафиксируем $g \in \mathrm{Sp}(R)$ и пусть $I = \{c \in \mathrm{H}(\mathrm{C}(R)) \mid {}^g\,\mathrm{Ep}(cR) \subseteq \mathrm{Ep}(R)\}$. Ясно, что I является идеалом в C. Кроме того, I не может содержаться ни в одном максимальном идеале C (так как он содержит по одному элементу из каждого мультипликативного подмножества S из условия в силу лемм 11 и 14). Поэтому ${}^g\,\mathrm{Ep}(R) \subseteq \mathrm{Ep}(R)$. $\square$

Как следствие (из теоремы и леммы 4) $\mathrm{N}_{R*}(\mathrm{Ep}(R)) = \mathrm{N}_{R*}(\mathrm{Sp}(R)) = \mathrm{GSp}(R)$.

Список литературы

[1] Вавилов Н. А., Петров В. А., *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$, Алгебра и анализ, **15**(4) (2003), 72–114.

[2] Вавилов Н. А., Степанов А. В., *Надгруппы полупростых групп*, Вестник СамГУ, 3(2008), 51–95.

[3] Копейко В. И., *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов*, Матем. сб., **106(148)**:1(5) (1978), 94–107.

[4] Петров В. А., Ставрова А. К., *Элеметарные подгруппы в изотропных редуктивных группах*, Алгебра и анализ, **20**:4 (2008), 160–188.

[5] Суслин А. А., Копейко В. И., *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов*, Зап. научн. семин. ЛОМИ, **71** (1977), 216–250.

[6] Bak A., Vavilov N., *Structure of Hyperbolic Unitary Groups* I*: Elementary Subgroups*, Algebra Colloq., **7**:2 (2000), 159–196.

[7] Costa D., Keller G., *Radix Redux: normal subgroups of symplectic groups*, J. Reine Angew. Math., 427 (1992), 51–105.

[8] Hazrat R., Vavilov N., *Bak's work on the K-theory of rings*, J. K-Theory, **4** (2009), 1–65.

[9] Hazrat R., Vavilov N., *K_1 of Chevalley groups are nilpotent*, J. Pure Appl. Algebra, **179** (2003), 99–116.

[10] Lavrenov A., *Another presentation for symplectic Steinberg groups*, J. Pure Appl. Algebra, **219:9** (2015), 3755–3780.

[11] Petrov V. A., *Overgroups of Unitary Groups*, K-Theory, **29** (2003), 147–174.

[12] Stepanov A., Vavilov N., *Decomposition of transvections: a theme with variations*, K-Theory, **19** (2000), 109–153.

[13] Suslin A. A., *Algebraic K-theory*, J. Sov. Math., **28** (6) (1985), 870–923.

[14] Taddei G., *Invariance du sous-groupe symplectique élémentaire dans le groupe symplectique sur un anneau*, C. R. Acad. Sci Paris, Sér I **295**, No. 2 (1982), 47–50.

[15] Taddei G., *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau*, Contemp. Math., **55** Part II (1986), 693–710.

[16] Vaserstein L. N., You H., *Normal subgroups of classical groups over rings*, J. Pure Appl. Algebra, **105:1** (1995), 93–106.