О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на произвольных компактных графах

С. В. Васильев

Введение

Данная работа посвящена дифференциальным операторам Штурма - Лиувилля с сингулярными потенциалами на связном компактном графе (пространственная сеть). Главная цель этой работы - изучение обратной спектральной задачи, а именно восстановление коэффициентов в операторе с помощью определенных спектральных характеристик. Спектральные задачи, задачи рассеяния, а также задачи переноса для дифференциальных операторов на графе в последние годы достаточно часто встречаются в математических, естественно-научных и инженерных работах. В таких областях как наноэлектроника, механика и также квантовые вычисления эти задачи используются для построения математических моделей и их дальнейшего изучения. Большая часть этих работ посвящена так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и собственных функций для оператора на графе. Обратные спектральные задачи в силу нелинейности являются более сложными объектами для изучения и на данный момент существует не так много работ, посвященных этой теме. В частности, обратная спектральная задача восстановления коэффициентов дифференциальных операторов на деревьях (т.е. графов без циклов) была изучена в работах [16–18]. Некоторые отдельные случаи с графами были изучены в работах [12-15]. В частности, обратная спектральная задача для графов с единственным циклом была решена в работах [26–28]. В работе [26] были изучены так называемые A-графы (т.е. графы, у которых циклы могут иметь только одну общую точку и не могут иметь общих ребер). Задача восстановления коэффициентов в операторе Штурма-Лиувилля на произвольном компактном графе была решена в работе [25].

Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами также достаточно часто встречаются в различных областях математических или естественно-научных дисциплин. В частности, сами операторы, порожденные на конечных промежутках были изучены в работе [11], а результаты для обратных задач были получены в работах [9-10]. Обратные задачи для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графах практически не рассматривались. На данный момент есть лишь решение такой задачи на графе–звезде [20].

В этой работе мы получим решение обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на произвольном связном компактном графе. В разделе 1 мы рассмотрим различные краевые задачи на графе, возникающие из условий склейки и условий Кирхгофа, а также из условий Дирихле и условий Неймана на граничных вершинах. В разделе 2 мы сформулируем постановку обратной задачи для операторов Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами на произвольных компактных графах. В разделе 3 мы рассмотрим характеристические функции указанных краевых задач, а также докажем некоторое вспомогательные утверждения. В разделе 4 мы рассмотрим дополнительную обратную задачу на некотором ребре, а также докажем теорему о единственности решения обратной задачи. В разделе 5 будет рассмотрена так называемая возвратная процедура . В разделе 6 мы сформулируем алгоритм получения решения рассматриваемой обратной задачи.

Основная часть

Раздел 1. Краевые задачи на произвольном графе.

Рассмотрим компактный связный граф G. Обозначим множество вершин графа G как $V(G)$. Ребра графа G будем рассматривать как гладкие кривые, которые пересекаются только в вершинах. Длину ребра e обозначим как $|e|$. Введем в рассмотрение отображение μ, которое в соответствие каждому ребру будет ставить упорядоченную пару вершин $e^{\pm} \in V(G)$: $\mu(e) := [e^-, e^+]$, где вершина e^- соответствует началу ребра, а e^+ - концу. Тогда множество ребер, которое мы обозначим как $E(G)$:

$$E(G) = \{e \mid \mu(e) := [e^-, e^+],\ e^{\pm} \in V(G)\}$$

Каждое ребро e параметризуем параметром $x \in [0, |e|]$. Ориентацию ребра выберем таким образом, чтобы его начало соответствовало точке $x = |e|$, а конец - точке $x = 0$.

Назовем ребро $e \in E(G)$ инцидентным вершине $v \in V(G)$, если $v \in \mu(e)$, т.е. либо $e^+ = v$, либо $e^- = v$. Множество ребер, инцидентых вершине v в графе G обозначим как $I(v, G)$. Валентностью вершины v, которую мы обозначим как $val(v)$ будет являться мощность конечного множества $I(v, G)$, т.е. $val(v) = |I(v, G)|$. Поскольку граф G является связным, то $\forall v \in V(G)\ val(v) \neq 0$. Так как $I(v, G)$ является конечным множеством, то валентность v - есть число ребер, инцидентных вершине v. Граничная вершина v есть вершина, которой инцидентно одно ребро. Все остальные вершины являются внутренними. Множество внутренних вершин обозначим через $V^I(G)$, а множество граничных - $V^B(G)$. Ясно, что справедливо

$$V(G) = V^B(G) \cap V^I(G),$$

$$V^B(G) = \{v|\ val(v) = 1\}, \quad V^I(G) = \{v|\ val(v) > 1\}.$$

Ребро $e \in E(G)$, называется граничным, если $e^+ \in V^B(G)$ или $e^- V^B(G)$. Все остальные рчбра являются внутренними. Обозначим множество граничных ребер как $E^B(G)$, а множество внутренних как $E^I(G)$. Понятно, что

$$E(G) = E^I(G) \cup E^B(G),$$

$$E^B(G) = \{e|\ e^+ \in V^B(G) \cup e^- \in V^B(G)\}, \quad E^I(G) = \{e|\ e^{\pm} \in V^I(G)\}.$$

Цепь ребер $\{e_1, ..., e_n\}$ называется циклом ω, если образует замкнутую кривую. Множество всех возможных циклов графа G обозначим как $\Xi(G)$:

$$\Xi(G) = \{\omega \mid e \in \omega \subset E(G)\}.$$

Ребро e называется простым, если не является частью какого-либо цикла. Пусть $E^P(G)$ - множество простых ребер. Введем также множество ребер, принадлежащих хотя бы одному циклу, которое мы обозначим как $E^C(G)$. Ясно, что $E(G) = E^P(G) \cup E^C(G)$ и

$$E^P(G) = \{e \mid \forall \omega \in \Xi(G)\ e \notin \omega,\ e \in E(G)\}$$

$$E^C(G) = \{e \mid \exists \omega \in \Xi(G)\ e \in \omega,\ e \in E(G)\}.$$

Для определенности будем считать, что в графе G присутствует больше одной граничной вершины, т.е $|V^B(G)| > 1$ (случаями $|V^B(G)| = 0$ и $|V^B(G)| = 1$ можно пренебречь; см. примечания). Определим некоторую вершину $v_r \in V^B(G)$ как корень. В дальнейшем будем считать, что если $e \in E^P(G)$, то начало ребра будет ближе к корню, чем его конец.

Сведем все циклы в точки, тогда получим некоторый граф G^* с множеством ребер $E(G^*) = E^P(G)$. Минимальное число χ_e ребер на G^* между корневым ребром и ребром e, включая e называется порядком ребра e. Фактически, G^* - это дерево, т.е. граф без циклов. Число

$$\chi := \max_{e \in G^*} \chi_e$$

называется порядком G^*. Обозначим множество $E^{(\nu)},\ \nu = \overline{0, \chi}$, множеством простых ребер порядка ν.

Пусть y - некоторая функция на графе, представимая как $y = [y_e]_{e\in E}$, где функция $y_e(x)$ соответствует ребру e, $x \in [0, |e|]$. Также рассмотрим вещественнозначную функцию $q = [q_e]_{e\in E(G)}$, где $q_e(x)$, $x \in [0, |e|]$ соответствует ребру e и $q_e \in W_2^{-1}[0, |e|]$, т.е. $q_e(x) = \sigma'_e(x)$ (производная рассматривается в смысле обобщенных функций), а $\sigma_e(x) \in L_2[0, |e|]$. Мы назовем функцию $\sigma_e(x)$ потенциалом на ребре e. Обозначим $\sigma = [\sigma_e]_{e\in E(G)}$. Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на ребре $e \in E(G)$ [9-11]:

$$\ell_e y_e = -\big(y_e^{[1]}\big)' - \sigma_e(x) y_e^{[1]} - \sigma_e^2(x) y_e,$$

$$\ell_e y_e = \lambda y_e,\ e \in E(G) \tag{1.1}$$

где $y_e^{[1]} := y'_e - \sigma_e(x) y_e$ - это квазипроизводная.

$$dom(\ell_e) = \{y_e \mid y_e \in W_2^1[0, |e|],\ y_e^{[1]} \in W_1^1[0, |e|],\ \ell_e y_e \in L_2[0, |e|]\}.$$

В каждой вершине $v \in V^I(G)$ введем стандартные условия склейки, которые в дальнейшем будем обозначать как $MC(v)$-условия для ребер $e \in I(v, G)$:

$$\begin{gathered} y_e|_v = y_r|_v, \quad e, r \in I(v), \\ \sum_{e\in I(v)} \partial_e y_e|_v = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где введены обозначения

$$y_e|_v := \begin{cases} y_e(0), & v = e^+ \\ y_e(|e|), & v = e^- \end{cases}, \quad \partial_e y_e|_v := \begin{cases} y_e^{[1]}(0), & v = e^+ \\ -y_e^{[1]}(|e|), & v = e^- \end{cases}$$

Также под $y|_v$, $\partial y|_v$ будем понимать соответственно всевозможные $y_e|_v$, $\partial_e y_e|_v$, такие, что $e \in I(v, G)$.

Рассмотрим краевую задачу $L_D(G)$, $D \subset V^B(G)$, для уравнения (1.1) с $MC(v)$-условиями в каждой $v \in V^I$ и граничным условиями

$$\partial y|_v = 0, \quad v \in V^B(G)\backslash D, \quad y|_u = 0, \quad u \in D. \tag{1.3}$$

Пусть ребро $r \in E^C(G)$, а $v = r^-$. Рассмотрим краевую задачу $L_D^v(G)$, $D \subset V^B(G)$, для уравнения (1.1) с $MC(u)$-условиями в каждой $u \in V^I(G)\backslash\{v\}$ и граничными условиями

$$\begin{gathered} \partial y|_u = 0, \quad u \in V^B(G)\backslash D, \qquad y|_u = 0, \quad u \in D, \\ y_e|_v = 0,\ e \in I(v, G) \end{gathered} \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем обозначать $L(G) := L_\varnothing(G)$ и $L^v(G) := L_\varnothing^v(G)$.

Раздел 2. Функция Вейля. Постановка обратной задачи

Пусть $\varphi_v = [\varphi_{ev}]_{e \in E(G)}$, $v \in V^B(G)$, будут решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими (1.2) и граничным условиям

$$\partial\varphi_v|_u = \delta_{uv}, \quad u \in V^B(G) \tag{2.1}$$

где δ_{uv}-символ Кронекера.

Обозначим $M_v(\lambda) := \varphi_v|_v$. Функция $M_v(\lambda)$ называется функцией Вейля для уравнения (1.1) относительно вершины $v \in V^B(G)$.

Теперь построим функцию Вейля на ребрах из множества $E^C(G)$. Зафиксируем $e \in E^C(G)$. Пусть $\varphi_e = [\varphi_{er}]_{r \in E(G)}$ будут решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими $MC(v)$–условиям для ребер $r \in I(v, G)$ при $v \in V^I(G) \backslash \{e^+\}$, $MC(e^+)$–условиям для ребер $r \in I(e^+, G) \backslash \{e\}$ и граничным условиям

$$\partial\varphi_e|_{r^+} = \delta_{er},\ r \in E^B(G) \cup \{e^+\} \tag{2.2}$$

Обозначим $M_e(\lambda) := \varphi_e|_{e^+}$, $e \in E^C(G)$.

Наряду с потенциалом σ мы рассмотрим потенциал $\widetilde{\sigma}$. В дальнейшем будем считать, что если символ α обозначает объект, зависящий от σ, то тогда $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, зависящий от $\widetilde{\sigma}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \widetilde{\alpha}$.

Сформулируем обратную задачу:

Обратная задача 1. По данным $M_v(G)$, $v \in E^B(G)$, и $M_e(\lambda)$, $e \in E^C(G)$, построить потенциал q на графе G.

Основной результат этой работы - теорема о единственности решения обратной задачи 1 и создание процедуры решения обратной задачи.

Раздел 3. Вспомогательные утверждения.

Наряду с потенциалом σ мы рассмотрим потенциал $\widetilde{\sigma}$. В дальнейшем будем считать, что если символ α обозначает объект, зависящий от σ, то тогда $\widetilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, зависящий от $\widetilde{\sigma}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \widetilde{\alpha}$.

Пусть $C_e(x,\lambda)$, $S_e(x,\lambda)$ - решения с краевыми условиями

$$C_e(0,\lambda) = S_e^{[1]}(0,\lambda) = 1, \;\; C_e^{[1]}(0,\lambda) = S_e(0,\lambda) = 0, \tag{3.1}$$

а $\psi_e(x,\lambda),\ \zeta_e(x,\lambda)$ - решения с краевыми условиями

$$\zeta_e(|e|,\lambda) = -\psi_e^{[1]}(|e|,\lambda) = 1, \quad \psi_e(|e|,\lambda) = \zeta_e^{[1]}(|e|,\lambda) = 0. \tag{3.2}$$

Из формулы Остроградского-Лиувилля получим $< C_e(x,\lambda), S_e(x,\lambda) >= 1$, где вронскиан $< y, z >= yz^{[1]} - y^{[1]}z$. Обозначим через $\Delta(\lambda, L(G))$ характеристическую функцию краевой задачи $L(G)$. Как и в классическом случае, можно показать, что функция $M_v(\lambda)$ будет мероморфной:

$$M_v(\lambda) = -\frac{\Delta(\lambda, L_v(G))}{\Delta(\lambda, L(G))},$$

Так как $\Delta(\lambda)$ - целая функция порядка $\frac{1}{2}$, то функция Вейля является мероморфной.

Пусть $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$ и $\lambda = \rho^2$. Под функцией $\eta(x,\rho,\sigma)$ будем понимать целую по ρ при всех $x \in [0,l]$ (l могут быть различны для различных $\eta(x,\rho,\sigma)$) и некотором фиксированном потенциале σ функцию, такую что:

1) $\eta(x,\rho,\sigma) = o(exp(x|Im\rho|))$ при $\rho \to \infty$ и при любых фиксированных $x \in [0,l]$ и $\sigma \in L_2(G)$.

2) $\eta(x,\cdot,\sigma) \in L_2(\gamma)$ для любого $x \in [0,l]$ при всех вещественных τ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

3) $\eta(\cdot,\cdot,\sigma) \in L_2[0,l] \times \gamma$ и равномерно ограничена на $[0,l] \times \gamma$ при каждом фиксированном вещественном τ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

4) если $\eta(x,\rho,\sigma)$ - некоторая фиксированная функция среди рассматриваемого нами класса, то $\eta(x,\rho,\sigma)$ непрерывно зависит от σ, а именно при

$$\lim_{n\to\infty} ||\sigma_n(x) - \sigma(x)||_{L_2(G)} = 0$$

функция $\eta(x,\rho,\sigma_n)$ сходятся к функции $\eta(x,\rho,\sigma)$ равномерно на $[0,l] \times \gamma$ для всех $\tau > \tau_0$ и

$$\max_{x\in[0,l]} ||\eta(x,\cdot,\sigma_n) - \eta(x,\cdot,\sigma)||_{L_2(\gamma)} \to 0.$$

Введем в рассмотрение множество $A(\tau_0) := \{\rho : Im\rho \geq \tau_0\}$. Под функцией $\kappa(\rho,\sigma)$ будем понимать мероморфную функцию, такую что

1) при фиксированном $\sigma \in L_2(G)$ функция $\kappa(\rho,\sigma) \to 0$ при $\rho \to \infty$, $\rho \in A(\tau_0)$, где τ_0 может быть различна для различных функций κ.

2) $\kappa(\cdot,\sigma) \in L_2(\gamma)$ для всех вещественных $\tau > \tau_0$ и фиксированном $\sigma \in L_2(G)$.

3) если $\kappa(\rho,\sigma)$ - некоторая фиксированная функция среди рассматриваемого нами класса, то $\kappa(\rho,\sigma)$ непрерывно зависит от σ, а именно при

$$\lim_{n\to\infty} ||\sigma_n(x) - \sigma(x)||_{L_2(G)} = 0$$

$\kappa(\rho,\sigma_n)$ сходится к функции $\kappa(\rho,\sigma)$ равномерно на γ для всех $\tau > \tau_0$ и

$$\lim_{n\to\infty} ||\kappa(\cdot,\sigma_n) - \kappa(\cdot,\sigma)||_{L_2(\gamma)} \to 0.$$

В дальнейшем под функциями $\eta(x,\rho)$ и $\kappa(\rho)$ будем понимать соответственно различные функции $\eta(x,\rho,\sigma)$ и $\kappa(\rho,\sigma)$ с указанными свойствами.

Обозначим $[1] := 1 + \kappa(\rho)$.

Лемма 1. *Справедливы следующие представления*

$$C_e(x,\lambda) = cos\rho x + \eta(x,\rho), \quad S_e(x,\lambda) = \frac{sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\eta(x,\rho), \tag{3.3}$$

$$\zeta_e(x,\lambda) = cos\rho(|e|-x) + \eta(|e|-x,\rho), \quad \psi_e(x,\lambda) = \frac{sin\rho(|e|-x)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\eta(|e|-x,\rho) \tag{3.4}$$

Доказательство. Из [9]–[11] получим, что

$$C_e(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt,$$

где $K_C(x,t)$ - это оператор преобразования для $C(x,\lambda)$, который не зависит от ρ. Аналогично

$$S_e(x,\lambda) = \frac{sin\rho x}{\rho} + \int_0^x K_S(x,t)\frac{sin\rho t}{\rho}dt,$$

где $K_S(x,t)$ - это оператор преобразования для $S(x,\lambda)$. Таким образом, необходимо доказать, что получаемые интегралы как функции в этих решениях будут обладать свойствами функций $\eta(x,\rho)$. Ясно, что функции

$$\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt, \quad \int_0^x K_S(x,t)\cos\rho t dt$$

будут целыми по ρ функциями экспоненциального типа. Тогда получим, что при фиксированных x

$$\lim_{|\rho|\to\infty} e^{-|Im\rho|x}\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt = 0, \ \lim_{|\rho|\to\infty} e^{-|Im\rho|x}\int_0^x K_S(x,t)\frac{sin\rho t}{\rho}dt = 0$$

Таким образом, первое свойство доказано.

Опять же, из [9]–[11] можно получить, что $K_C(x,t) \in L_2[0,l]$ и $K_S(x,t) \in L_2[0,l]$. Исходя из этого, по теореме Пэли-Винера получим для всех вещественных фиксированных τ

$$\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt \in L_2(\gamma), \quad \int_0^x K_S(x,t)\frac{sin\rho t}{\rho}dt \in L_2(\gamma).$$

Также из [9]–[11] получаем, что при $\lim\limits_{n\to\infty}||\sigma_n(\cdot)-\sigma(\cdot)||_{L_2(G)} = 0$ выполняется при любом фиксированном $x \in [0,l]$:

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\Big|\int_0^x K_C^{(n)}(x,t)\cos\rho t dt - \int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt\Big|\Big|_{L_2(\gamma)} = 0,$$

где $K_C^{(n)}(x,t)$ - оператор преобразования, соответствующий σ_n. Аналогично сходимость присутствует и для $K_S(x,t)$. Таким образом, второе свойство доказано.

Учтем, что $|\cos\rho t| \le Me^{t|Im\rho|}$, где M - некоторая константа. Тогда справедливо

$$\Big|\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt\Big| \le \int_0^x \Big|K_C(x,t)\cos\rho t\Big|dt \le Me^{t|Im\rho|}.$$

Тогда ясно, что при фиксированных $Im\rho$ функция $\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt$ ограниченна равномерно на $[0,l]\times\gamma$. Для функций $\zeta_e(x,\lambda), \psi_e(x,\lambda)$ доказывается аналогично. $\square$

Ясно, что решения $\zeta_e(x,\lambda)$ и $\psi_e(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда решение уравнения (1.1) можно выразить как линейную комбинацию решений $C_e(x,\lambda)$ и $S_e(x,\lambda)$ или $\zeta_e(x,\lambda)$ и $\psi_e(x,\lambda)$. Обозначим

$$\xi_e(x,\lambda) := C_e(x,\lambda) - i\rho S_e(x,\lambda); \quad E_e(x,\lambda) := \zeta_e(x,\lambda) - i\rho\psi_e(x,\lambda),$$

Используя (3.3) и (3.4), получим

$$\xi_e(x,\lambda) = e^{-i\rho x} + \eta(x,\rho); \quad E_e(x,\lambda) = e^{i\rho(x-|e|)} + \eta(|e|-x,\rho). \tag{3.5}$$

Из (3.5) получим следующие выражения

$$\xi_e(|e|,\lambda) = e^{-i\rho|e|}[1], \quad E_e(0,\lambda) = e^{-i\rho|e|}[1], \tag{3.6}$$

$$\xi_e^{[1]}(|e|,\lambda) = -i\rho e^{-i\rho|e|}[1], \quad E_e^{[1]}(0,\lambda) = i\rho e^{-i\rho|e|}[1]. \tag{3.7}$$

Решения $\xi_e(x,\lambda)$ и $E_e(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений. Тогда рассмотрим

$$\varphi_{er}(x,\lambda) = A_{er}(\lambda)\xi_r(x,\lambda) + B_{er}(\lambda)E_r(x,\lambda). \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (1.2) и в (1.6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $A_{er}(\lambda)$, $B_{er}(\lambda)$. Определитель этой СЛАУ обозначим как $\Delta_B(\lambda,G)$. Тогда справедливы следующие леммы

Лемма 2. *Пусть* $\Theta := \{\sum\limits_{e\in E}\theta_e|e|,\ \theta_e\in\{0,1,2\}\}$. *Тогда справедливо*

$$\Delta_B(\lambda,G) = (i\rho)^n\sum_{l\in\Theta}A_l(G)e^{-i\rho l}[1], \quad A_{|G|}\neq 0, \tag{3.9}$$

где $n := |V^I| + |V^B|$, *а* $|G| := 2\sum\limits_{e\in E(G)}|e|$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу, получаемую из уравнения (1.1), $MC(v)$–условий в вершинах $v\in V^I(G)$ для всех ребер $e\in I(v,G)$ и граничных условий (2.1). Для удобства определим в каждой внутренней вершине $u\in V^I$ некоторые неизвестные α_u, а также зададим индикаторную функцию

$$I_s^{\pm}(u) := \begin{cases} 1, & s^{\pm}=u,\\ 0, & s^{\pm}\neq u.\end{cases} \tag{3.10}$$

Используя (3.8), получим условия непрерывности для ребер $e\in E$

$$A_{er} + E_e(0,\lambda)B_{er} - \sum_{v\in V^I}I_e^+(v)\alpha_v = 0, \tag{3.11}$$

$$\xi_e(|e|,\lambda)A_{er} + B_{er} - \sum_{v\in V^I}I_e^-(v)\alpha_v = 0, \tag{3.12}$$

условия Кирхгофа для вершин $u\in V^I$

$$\sum_{e\in E}\Big\{I_e^+(u)\Big[E_s^{[1]}(0,\lambda)B_{er} - i\rho A_{er}\Big] - I_e^-(u)\Big[\xi_s^{[1]}(l_s,\lambda)A_{er} + i\rho B_{er}\Big]\Big\} = 0, \tag{3.13}$$

и граничные условия для вершин $v\in V^B$

$$-i\rho A_{er} + E_e^{[1]}(0,\lambda)B_{er} = \delta_{er}. \tag{3.14}$$

Учитывая представление системы уравнений (3.11)-(3.14), а также (3.6) и (3.7), получим

$$\Delta_B(\lambda) = (i\rho)^n\sum_{l\in\Theta}A_l(G)e^{-i\rho l}[1],$$

где $A_l(G)$ - некоторые числа, а $A_{|G|}(G)$ является определителем системы

$$x_e^1 - \sum_{v\in V^I}I_e^-(v)x_v = 0, \quad e\in E(G) \tag{3.15}$$

$$x_e^2 - \sum_{v\in V}I_e^+(v)x_v = 0, \quad e\in E(G) \tag{3.16}$$

$$\sum_{e\in E}\Big(x_e^1I_e^-(u) + x_e^2I_e^+(u)\Big) = 0,\ u\in V^I(G) \tag{3.17}$$

с неизвестными $\{x_e^1\}_{e\in E}$, $\{x_e^2\}_{e\in E}$, $\{x_v\}_{v\in V^I}$. Выполним преобразования для всех $u\in V^I$

$$(3.17)_u = (3.17)_u - \sum_{e\in E}I_e^+(u)(3.16)_e - \sum_{e\in E}I_e^-(u)(3.15)_e,$$

где через $(3.15)_e$ и $(3.16)_e$ мы обозначили соответственно уравнения (3.15) и (3.16), относящиеся к ребру e, а через $(3.17)_u$ - уравнения (3.17), относящиеся к вершине u. В итоге, мы получим, что $A_{|G|}(G)$ является определителем системы вида

$$x_e^1 - \sum_{v \in V^I} I_e^-(v) x_v = 0, \quad e \in E(G)$$

$$x_e^2 - \sum_{v \in V} I_e^+(v) x_v = 0, \quad e \in E(G)$$

$$\sum_{e \in E} \Big(I_e^-(u) + I_e^+(u) \Big) x_u = 0, \ u \in V^I(G)$$

с неизвестными $\{x_e^1\}_{e\in E}$, $\{x_e^2\}_{e\in E}$, $\{x_v\}_{v\in V^I}$. Ясно, что определитель этой системы будет диагональным, причем в первых $2|E(G)|$ столбцах будут стоять единицы, а в последних $|V^I(G)|$ столбцах будут стоять выражения вида

$$\sum_{e \in E} \Big(I_e^-(u) + I_e^+(u) \Big),$$

где u - некоторая внутренняя вершина. Обозначим количество входящих ребер как

$$N^+(u) := \sum_{e \in E} I_e^+(u),$$

а количество исходящих ребер как

$$N^-(u) := \sum_{e \in E} I_e^-(u),$$

Следовательно,

$$\sum_{e \in E} \Big(I_e^-(u) + I_e^+(u) \Big) = N^+(u) + N^-(u),$$

Поскольку граф является связным, то для любой внутренней вершины u справедливо

$$N^+(u) + N^-(u) \neq 0.$$

Таким образом, получим

$$A_{|G|} = \prod_{u \in V^I} (N^+(u) + N^-(u)) \neq 0,$$

Таким образом, лемма доказана. □

Пользуясь стандартными методами из [24], получим

Лемма 4. *Для достаточно больших* $|\rho|$*, таких что* $\rho \in A(\tau_0)$*,* τ_0 *- некоторое фиксированное число, справедлива оценка*

$$C_1 |\rho|^n e^{2|G| Im\rho} < |\Delta_B(\lambda, G)| < C_2 |\rho|^n e^{2|G| Im\rho}. \tag{3.18}$$

Из справедливости полученных лемм вытекает

Лемма 5. *При фиксированных* $x \in [0, |e|]$ *для* $\rho \in A(\tau_0)$*,* τ_0 *- некоторое фиксированное число,* $\rho \to \infty$*, справедливо*

$$\varphi_{er}(x, \lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho} e^{-x Im\rho} \Big), \quad \varphi_{er}^{[1]}(x, \lambda) = O\Big(e^{-x Im\rho} \Big), \tag{3.19}$$

$$\hat{\varphi}_{er}(x, \lambda) = \frac{1}{\rho} e^{i\rho x} \hat{\kappa}(\rho). \tag{3.20}$$

Доказательство. Из представления (3.8) по методу Крамера получим

$$A_{er}(\lambda)=\frac{d_e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)},\quad B_{er}(\lambda)=\frac{d^e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)},\tag{3.21}$$

где $d_e(\lambda)$ и $d^e(\lambda)$ - определители матриц, получаемых заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов. Повторяя доказательство леммы 2 для этих определителей, аналогичным образом мы получим

$$\begin{aligned} d_e(\lambda)&=(i\rho)^{n-1}\sum_{l\in\Theta_e}A_l e^{-i\rho l}[1],\quad A_{2|G|-2|e|}\neq 0,\\ d^e(\lambda)&=(i\rho)^{n-1}\sum_{l\in\Theta^e}A_l e^{-i\rho l}[1],\quad A_{2|G|-|e|}\neq 0,\end{aligned}\tag{3.22}$$

где $\Theta_e:=\{\sum\limits_{r\in E\setminus\{e\}}\theta_r|r|,\ \theta_r\in\{0,1,2\}\}$ и $\Theta^e:=\{\sum\limits_{r\in E}\theta_r|r|,\ \theta_r\in\{0,1,2\},\theta_e\in\{0,1\}\}$. Тогда используя (3.9) и (3.12), получим при $\rho\in A(\tau_0)$

$$\frac{d_e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)}=\frac{(i\rho)^{n-1}}{(i\rho)^n}\frac{\sum\limits_{l\in\Theta_e}A_l e^{-i\rho l}+e^{2i\rho(|G|-|e|)}k(\rho)}{\sum\limits_{l\in\Theta}A_l(G)e^{-i\rho l}+e^{2i\rho(|G|)}k(\rho)}$$

Учитывая, что

$$A_{2|G|-2|e|}\neq 0,\quad A_{|G|}(G)\neq 0,$$

получим аналогично лемме 3 неравенства

$$C_1|\rho|^{n-1}e^{2|G|Im\rho}<\Big|\sum_{l\in\Theta}A_l(G)e^{-i\rho l}\Big|<C_2|\rho|^{n-1}e^{2|G|Im\rho},\tag{3.23}$$

а также

$$C_1|\rho|^{n}e^{2(|G|-|e|)Im\rho}<\Big|\sum_{l\in\Theta_e}A_l e^{-i\rho l}\Big|<C_2|\rho|^{n}e^{2(|G|-|e|)Im\rho},\tag{3.24}$$

где через C_1 и C_2 обозначаются различные константы. Тогда получаем

$$\frac{d_e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)}=\frac{(i\rho)^{n-1}}{(i\rho)^n}\frac{\sum\limits_{l\in\Theta_e}A_l e^{-i\rho l}}{\sum\limits_{l\in\Theta}A_l(G)e^{-i\rho l}}[1].\tag{3.25}$$

Получая аналогичное представление для соотношения $\frac{d^e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)}$, приходим к

$$\frac{d_e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)}=A^0_{er}[1],\quad \frac{d^e(\lambda)}{\Delta_B(\lambda)}=B^0_{er}[1],\tag{3.26}$$

где A^0_{er} и B^0_{er} - коэффициенты разложения решения Вейля по фундаментальной системе $\{\xi_e(x,\lambda),E_e(x,\lambda)\}$ в случае $\sigma=0$. Причем, подставляя (3.23) и (3.24) в (3.25), получим при достаточно больших $\rho\in A_\varepsilon$ следующие оценки:

$$|A^0_{er}|\leq C|\rho|^{-1}e^{-2|e|Im\rho},\quad |B^0_{er}|\leq C|\rho|^{-1}e^{-|e|Im\rho},$$

Тогда, учитывая (3.21), аналогично получаем, что при $\rho\to\infty$ и $\rho\in A(\tau_0)$ выполняются оценки

$$A_{er}=O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-2|e|Im\rho}\Big),\quad B_{er}=O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-|e|Im\rho}\Big).\tag{3.27}$$

Подставляя эти оценки, а также (3.5) в (3.8), получим

$$\begin{aligned}\varphi_{er}(x,\lambda)=O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-2|e|Im\rho}\Big)\Big(e^{-i\rho x}+o(e^{x|Im\rho|})\Big)+\\ +O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-|e|Im\rho}\Big)\Big(e^{i\rho(x-|e|)}+o(e^{(|e|-x)|Im\rho|})\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\varphi_{er}(x,\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho}e^{-xIm\rho}\Big).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\varphi_{er}^{[1]}(x,\lambda) = O\Big(e^{-xIm\rho}\Big).$$

Следовательно, (3.19) доказано. Учитывая, что

$$\Big|\frac{1}{\rho}e^{2i\rho|e|}A_e^0(\lambda)\Big| \le C, \quad \Big|\frac{1}{\rho}e^{i\rho|e|}B_e^0(\lambda)\Big| \le C,$$

где C обозначают различные константы, то из (3.26) следует, что

$$\hat{A}_e(\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{2i\rho|e|}\hat{\kappa}(\rho), \quad \hat{B}_e(\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{i\rho|e|}\hat{\kappa}(\rho). \tag{3.28}$$

Ясно, что

$$\hat{\varphi}_{er}(x,\lambda) = \hat{A}_e(\lambda)e^{-i\rho x} + \hat{B}_e(\lambda)e^{i\rho(x-|e|)} + \Big(A_e(\lambda)\kappa(\rho) - \widetilde{A_e}(\lambda)\widetilde{\kappa}(\rho)\Big)e^{-i\rho x} +$$
$$+\Big(B_e(\lambda)\kappa(\rho) - \widetilde{B_e}(\lambda)\widetilde{\kappa}(\rho)\Big)e^{i\rho(x-|e|)}.$$

Отсюда получим, что

$$\hat{\varphi}_{er}(x,\lambda) = \hat{A}_e(\lambda)e^{-i\rho x} + \hat{B}_e(\lambda)e^{i\rho(x-|e|)} + \Big(A_e(\lambda)\hat{\kappa}(\rho) - \hat{A}_e(\lambda)\kappa(\rho)\Big)e^{-i\rho x} +$$
$$+\Big(B_e(\lambda)\hat{\kappa}(\rho) - \hat{B}_e(\lambda)\kappa(\rho)\Big)e^{i\rho(x-|e|)}.$$

Подставляя в это выражение (3.28), получим

$$\hat{\varphi}_{er}(x,\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{2i\rho|e|}\hat{\kappa}(\rho)e^{-i\rho x} + \frac{1}{\rho}e^{i\rho|e|}e^{i\rho(x-|e|)}\hat{\kappa}(\rho) +$$
$$+\Big(A_e(\lambda)\hat{\kappa}(\rho) - \frac{1}{\rho}e^{2i\rho|e|}\kappa(\rho)\Big)e^{-i\rho x} + \Big(B_e(\lambda)\hat{\kappa}(\rho) - \frac{1}{\rho}e^{i\rho|e|}\kappa(\rho)\Big)e^{i\rho(x-|e|)}.$$

Учитывая (3.27), получим

$$\hat{\varphi}_{er}(x,\lambda) = \frac{1}{\rho}e^{i\rho x}\hat{\kappa}(\rho).$$

Таким образом, лемма доказана. $\square$

Раздел 4. Вспомогательная обратная задача.

Зафиксируем некоторое ребро $k \in E^B(G)$ и сформулируем задачу:

Вспомогательная обратная задача $IP(k, G)$: по данным $M_{k^+}(\lambda)$, построим потенциал q на k.

Воспользовавшись леммой 3 и свойствами функции $\kappa(\rho)$, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Зафиксируем* $k \in E^B(G)$. *Если* $M_{k^+}(\lambda) \equiv \widetilde{M}_{k^+}(\lambda)$, *тогда* $\sigma_k(x) \equiv \widetilde{\sigma}_k(x)$ *почти всюду на* $[0, |k|]$.

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу

$$P^k(x,\lambda) := \begin{bmatrix} C_k(x,\lambda) & \varphi_{kk}(x,\lambda) \\ C_k^{[1]}(x,\lambda) & \varphi_{kk}^{[1]}(x,\lambda) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{C}_k(x,\lambda) & \widetilde{\varphi}_{kk}(x,\lambda) \\ \widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda) & \widetilde{\varphi}_{kk}^{[1]}(x,\lambda) \end{bmatrix}^{-1}.$$

Поскольку $< \widetilde{C}_k(x,\lambda), \widetilde{\varphi}_{kk}(x,\lambda) >= 1$, то получим

$$P_{11}^k = C_k \widetilde{\varphi}_{kk}^{[1]} - \varphi_{kk} \widetilde{C}_k^{[1]}, \ P_{12}^k = \varphi_{kk} \widetilde{C}_k - C_k \widetilde{\varphi}_{kk},$$
$$P_{21}^k = C_k^{[1]} \widetilde{\varphi}_{kk}^{[1]} - \varphi_{kk}^{[1]} \widetilde{C}_k^{[1]}, \ P_{22}^k = \widetilde{C}_k \varphi_{kk}^{[1]} - C_k^{[1]} \widetilde{\varphi}_{kk},$$

Ясно, что $P_{11}^k = \hat{C}_k \widetilde{\varphi}_{kk}^{[1]} - \hat{\varphi}_{kk} \widetilde{C}_k^{[1]} + 1$. Тогда, подставляя (3.3),(3.19) и (3.20) получаем, что при любых фиксированных $x \in [0, |k|]$ и $\rho \to \infty$, $\rho \in A(\tau_0)$, а τ_0 - некоторое фиксированное число, справедливо

$$P_{11}^k(x,\lambda) = o(e^{xIm\rho}) O(e^{-xIm\rho}) - \frac{1}{\rho} o(e^{-xIm\rho}) \big(-\rho \sin \rho x + o(\rho e^{xIm\rho}) \big) + 1,$$

$$P_{12}^k(x,\lambda) = \frac{1}{\rho} O(e^{-xIm\rho}) \big(\cos \rho x + o(e^{xIm\rho}) \big) - \frac{1}{\rho} O(e^{-xIm\rho}) \big(\cos \rho x + o(e^{xIm\rho}) \big)$$

Учитывая, что при $\rho \in A(\tau_0)$, $\rho \to \infty$

$$\sin \rho x = O(e^{xIm\rho}), \quad \cos \rho x = O(e^{xIm\rho})$$

$$P_{11}^k(x,\lambda) = o(1)O(1) + o(1)O(1) + o(1)o(1) + 1,$$

$$P_{12}^k(x,\lambda) = \frac{1}{\rho} O(1)O(1) + \frac{1}{\rho} O(1)o(1) - \frac{1}{\rho} O(1)O(1) - \frac{1}{\rho} O(1)o().$$

Используя свойства символов Ландау, получим

$$P_{11}^k(x,\lambda) - 1 = o(1), \quad P_{12}^k(x,\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{4.1}$$

Аналогично получим

$$P_{21}^k(x,\lambda) = O(e^{-xIm\rho}) \big(-\rho \sin \rho x + o(\rho e^{xIm\rho}) \big) - O(e^{-xIm\rho}) \big(-\rho \sin \rho x + o(\rho e^{xIm\rho}) \big)$$

$$P_{22}^k(x,\lambda) = O(e^{-xIm\rho}) \big(\cos \rho x + o(e^{xIm\rho}) \big) - \frac{1}{\rho} O(e^{-xIm\rho}) \big(-\rho \sin \rho x + o(\rho e^{xIm\rho}) \big),$$

$$P_{21}^k(x,\lambda) = O(1)O(1)\rho + O(1)o(1)\rho + O(1)O(1)\rho + O(1)o(1)\rho$$
$$P_{22}^k(x,\lambda) = O(1)O(1) + o(1)O(1) + O(1)O(1) + O(1)o(1).$$

Отсюда получим

$$P_{21}^k(x,\lambda) = O(\rho), \quad P_{22}^k(x,\lambda) = O(1). \tag{4.2}$$

Представим решение Вейля φ_{kv} в виде

$$\varphi_{kv}(\lambda) = M_k^1(\lambda) C_k(x,\lambda) + M_k^2(\lambda) S_k(x,\lambda).$$

Учитывая граничные условия (2.1) или (2.2) и определение функции Вейля, получим, что при $v = k^+$

$$M_k^1(\lambda) = M_k(\lambda), \quad M_k^2(\lambda) = 1.$$

Таким образом, получаем

$$\varphi_{kk^+}(\lambda) = S_k(x,\lambda) + M_k(\lambda) C_k(x,\lambda).$$

то элементы $P^k_{1s}(x,\lambda)$ могут быть записаны в форме:

$$P^k_{11}(x,\lambda) = C_k(x,\lambda)\widetilde{S}^{[1]}_k(x,\lambda) - S_k(x,\lambda)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) - \hat{M}_k(\lambda) C_k(x,\lambda)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda),$$

$$P^k_{12}(x,\lambda) = \widetilde{C}_k(x,\lambda) S_k(x,\lambda) - \widetilde{S}_k(x,\lambda) C_k(x,\lambda) + \hat{M}_k(\lambda) C_k(x,\lambda)\widetilde{C}_k(x,\lambda).$$

Поскольку функции $C_k(x,\lambda)$ и $S_k(x,\lambda)$ целые по λ, то если $M_k = \widetilde{M_k}$, тогда функции $P^k_{1s}(x,\lambda)$ целые по λ. Согласно теореме Лиувилля, ограниченные целые функции являются константами. Учитывая оценки для $P^k_{1s}(x,\lambda)$, получим

$$P^k_{11}(x,\lambda) = 1, \quad P^k_{12}(x,\lambda) = 0.$$

Тогда, исходя из определения матрицы $P^k(x,\lambda)$, ясно, что $C_k(x,\lambda) = \widetilde{C}_k(x,\lambda)$. Таким образом

$$\int_0^x K_C(x,t)\cos\rho t dt = \int_0^x \widetilde{K}_C(x,t)\cos\rho t dt.$$

Следовательно, почти всюду на $[0,|k|]$ справедливо

$$\sigma_k = \widetilde{\sigma}_k.$$

Теорема доказана. □

Обозначим особенности функций Вейля $M_k(\lambda)$ и $\widetilde{M_k}(\lambda)$ соответственно Λ_k и $\widetilde{\Lambda}_k$. Как и в классическом случае, будем называть Λ_k и $\widetilde{\Lambda}_k$ спектрами. В ρ- плоскости рассмотрим контур $\gamma = \gamma(\tau) := (-\infty + i\tau, +\infty + i\tau)$, где $\tau > 0$ такое, что $\inf\{\Lambda_k \cup \widetilde{\Lambda}_k\} > -\tau^2$. Пусть Γ будет контуром в λ-плоскости, который есть образ γ при отображении $\lambda = \rho^2$. Обозначим D^+ образ полуплоскости $\{Im\rho > \tau\}$, и $D^- := C\backslash D^+$. Пусть

$$C_N := \{|\lambda| = (N + 1/4)^2\}, \quad C^-_N := C_N \cap D^-$$

контура с обходом по часовой стрелке. Обозначим

$$\Gamma_N = \Gamma \cap intC_N, \quad \Gamma^-_N = \Gamma_N \cup C^-_N.$$

Пусть $\theta^2 = \mu$. Определим функцию

$$D_k(x,\lambda,\mu) := \frac{< C_k(x,\lambda), C_k(x,\mu) >}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x C_k(t,\lambda) C_k(t,\mu) dt,$$

$$\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) := \frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda), \widetilde{C}_k(x,\mu) >}{\lambda - \mu} = \int\limits_0^x \widetilde{C}_k(t,\lambda) \widetilde{C}_k(t,\mu) dt,$$

Тогда справедливы следующие леммы

Лемма 6. *Для всех* $x \in [0,|k|]$, $\lambda \in D^+$ *справедливо*

$$C_k(x,\lambda) = \widetilde{C}_k(x,\lambda) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu) C_k(x,\mu) d\mu. \tag{4.3}$$

Доказательство. С учетом представления

$$\varphi_{kk}(\lambda) = S_k(x,\lambda) + M_k(\lambda) C_k(x,\lambda)$$

ясно, что $P^k_{jk}(x,\lambda)$ являются мероморфными по λ при фиксированных x с полюсами $\{\Lambda_k \cup \widetilde{\Lambda}\}$. Т.к. $\inf\{\Lambda_k \cup \widetilde{\Lambda}\} > -\tau^2$, то в области $intC^+_N \cup \Gamma_N$ функция $P^k_{jk}(x,\lambda)$ аналитическая, а область

$intC_N^+\cup\Gamma_N$ - односвязная, ограниченная кусочно гладкой линией $C_N^+\cup\Gamma_N$. Тогда справедлива интегральная формула Коши

$$P_{1k}^k(x,\lambda)-\delta_{1k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N^+\cup\Gamma_N}\frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}d\mu,\ k=1,2,$$

где $\lambda\in intC_N^+\cup\Gamma_N$. Ясно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N^+\cup\Gamma_N}\frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N}\frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{P_{1k}(x,\mu)-\delta_{1k}}{\lambda-\mu}d\mu$$

Из определения $P_{jk}^k(x,\lambda)$ ясно, что

$$C_k(x,\lambda)=P_{11}^k(x,\lambda)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+P_{12}^k(x,\lambda)\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda).$$

Так как $\lambda\notin\Gamma_N^-$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{\delta_{1k}}{\lambda-\mu}d\mu=0.$$

Следовательно,

$$C_k(x,\lambda)=\widetilde{C}_k(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{P_{11}^k(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+P_{12}^k(x,\mu)\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\mu+\varepsilon_N,$$

где

$$\varepsilon_N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N}\frac{\widetilde{C}_k(x,\lambda)(P_{11}^k(x,\mu)-\delta_{11})+\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)P_{12}^k(x,\mu)}{\lambda-\mu}d\mu.$$

Учитывая указанные свойства P_{js}^k и так как $\xi\in C_N$, то $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N=0$. Подставляя в полученное выражение определение $P_{js}^k(x,\lambda)$, получаем, что

$$\widetilde{C}_k(x,\lambda)P_{11}^k(x,\mu)+\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)P_{12}^k(x,\mu)=$$

$$=C_k(x,\mu)\widetilde{\varphi}_{kk^+}^{[1]}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)-\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\mu)\varphi_{kk^+}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+$$

$$+\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)\varphi_{kk^+}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\mu)-C_k(x,\mu)\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\mu)\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)$$

Используя

$$\varphi_{kk}(\lambda)=S_k(x,\lambda)+M_k(\lambda)C_k(x,\lambda)$$

получаем

$$\widetilde{C}_k(x,\lambda)P_{11}^k(x,\mu)+\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)P_{12}^k(x,\mu)=$$

$$=C_k(x,\mu)\Big(\widetilde{S}_k^{[1]}(x,\mu)+\widetilde{M}_k(\mu)\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\mu)\Big)\widetilde{C}_k(x,\lambda)-$$

$$-\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\mu)\Big(S_k(x,\mu)+M_k(\mu)C_k(x,\mu)\Big)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+$$

$$+\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda)\Big(S_k(x,\mu)+M_k(\mu)C_k(x,\mu)\Big)\widetilde{C}_k(x,\mu)-$$

$$-C_k(x,\mu)\Big(\widetilde{S}_k(x,\mu)+\widetilde{M}_k(\mu)\widetilde{C}_k(x,\mu)\Big)\widetilde{C}_k^{[1]}(x,\lambda).$$

Откуда

$$\widetilde{C}_k(x,\lambda)P^k_{11}(x,\mu)+\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)P^k_{12}(x,\mu)=$$

$$=\widetilde{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu)>-$$

$$-M_k(\mu)C_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu)>+$$

$$+S_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\mu),\widetilde{C}_k(x,\lambda)>+C_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{S}_k(x,\mu)>.$$

Поскольку функции

$$S_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\mu),\widetilde{C}_k(x,\lambda)>,\quad C_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{S}_k(x,\mu)>$$

являются аналитическими, то по интегральной теореме Коши справедливо

$$\int\limits_{\Gamma_N^-} S_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\mu),\widetilde{C}_k(x,\lambda)>d\mu=0$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_N^-} C_k(x,\mu)<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{S}_k(x,\mu)>d\mu=0.$$

Таким образом, получим

$$C_k(x,\lambda)=\widetilde{C}_k(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu)>}{\lambda-\mu}\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu+\varepsilon_N,$$

где $\hat{M}_e(\mu)=M_e(\mu)-\widetilde{M}_e(\mu)$. Используя определение функции $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)$:

$$C_k(x,\lambda)=\widetilde{C}_k(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu+\varepsilon_N,$$

Учитывая (3.3) и поскольку при $\lambda\in D^-$ справедливо неравенство $Im\rho<\tau$, то

$$|C_e(x,\lambda)|<\frac{1}{\rho}e^{x\tau}$$

Поскольку $x\in[0,|e|]$, то $\widetilde{C}_k(x,\lambda)$ ограничено, а, следовательно, $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)$ тоже ограничено. Из (3.20) следует, что

$$\hat{M}_k(\lambda)=\frac{1}{\rho}\hat{\kappa}(\rho)=\frac{1}{\rho}o(1),\ \rho\to\infty,\ \rho\in A(\tau_0).$$

Таким образом, получаем, что

$$\int\limits_{C_N^-}\widetilde{D}_e(x,\lambda,\mu)\hat{M}_e(\mu)C_e(x,\mu)d\mu\to 0,\ N\to\infty$$

Тогда получаем (4.3). □

Определим

$$\widetilde{r}_k(x,\rho,\theta):=\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\theta\hat{M}_k(\mu);\quad r_k(x,\rho,\theta):=D_k(x,\lambda,\mu)\theta\hat{M}_k(\mu);$$

Выберем контур $\gamma(\tau)$ таким, что $\theta\hat{M}_e(\mu)\in L_2(\gamma)$.

Лемма 7. *Для любого* $\lambda\in\overline{D^+}$ *и* $x\in[0,|k|]$,

$$\int_\gamma|D_k(x,\lambda,\theta^2)|^2|d\theta|<A(x,\rho),\tag{4.4}$$

где $A(x,\rho)$ равномерно ограниченно на компактном множестве.

Доказательство. Используя (3.3) и (3.4), а также определение функции $D_k(x,\lambda,\mu)$ получим

$$D_k(x,\lambda,\mu) = D_k^1(x,\lambda,\mu) + D_k^2(x,\lambda,\mu) + D_k^3(x,\lambda,\mu) + D_k^4(x,\lambda,\mu),$$

где

$$D_k^1(x,\lambda,\mu) = \int\limits_0^x cos\rho t\cos\rho\theta t dt, \quad D_k^2(x,\lambda,\mu) = \int\limits_0^x cos\rho t\eta(t,\theta)tdt,$$

$$D_k^3(x,\lambda,\mu) = \int\limits_0^x cos\theta t\eta(t,\rho)dt, \quad D_k^4(x,\lambda,\mu) = \int\limits_0^x \eta(t,\rho)\eta(t,\theta)dt.$$

Поскольку $\lambda \in \overline{D^+}$, то справедливо

$$\frac{1}{|\rho\pm\theta|} \le \frac{C}{|\rho\pm\theta|+1},$$

Тогда

$$|D_k^1(x,\lambda,\mu)| \le \left(\frac{1}{|\rho-\theta|+1} + \frac{1}{|\rho+\theta|+1}\right)C(x)e^{x(|Im\rho|+\tau)} \tag{4.5}$$

Также из неравенства Коши-Буняковского получим

$$\begin{gathered}|D_k^1(x,\lambda,\mu)| \le C_0(x,\rho)||\eta(\cdot,\theta)||_{L_2},\\ |D_k^4(x,\lambda,\mu)| \le ||\eta(\cdot,\rho)||_{L_2}||\eta(\cdot,\theta)||_{L_2}\end{gathered} \tag{4.6}$$

где

$$C_0(x,\rho) = \Big(\int\limits_0^x |\cos\rho t|dt\Big)^{1/2}$$

равномерно ограничено на любом компактном множестве. Также из равенства Парсеваля

$$\int\limits_\gamma |D_k^3(x,\lambda,\mu)|^2|d\theta| = 2\pi||\eta(\cdot,\rho)||_{L_2[0,x]} \tag{4.7}$$

Таким образом, из (4.5)-(4.7) следует (4.4). □

Лемма 8. *Выполняются следующие оценки*

$$\int_\gamma\int_\gamma |r_k(x,\rho,\theta)|^2|d\theta||d\rho| < \infty, \quad \int_\gamma\int_\gamma |\widetilde{r}_k(x,\rho,\theta)|^2|d\theta||d\rho| < \infty. \tag{4.8}$$

Доказательство. Из (4.6) и (4.7), а также из $\hat{M}_k(\mu) = \frac{1}{\theta}\hat{\kappa}(\theta)$, следует, что

$$\int_\gamma\int_\gamma |D_k^3(x,\lambda,\mu)\theta\hat{M}_k(\mu)|^2|d\theta||d\rho| = 2\pi o(1)\int_\gamma ||\eta(\cdot,\rho)||_{L_2[0,x]}|d\rho| < \infty$$

Аналогично, можно получить

$$\int_\gamma\int_\gamma |D_k^4(x,\lambda,\mu)\theta\hat{M}_k(\mu)|^2|d\theta||d\rho| \le \int_\gamma\int_\gamma \hat{\kappa}(\theta)||\eta(\cdot,\rho)||_{L_2}||\eta(\cdot,\theta)||_{L_2}|d\theta||d\rho| \le$$
$$\le \int_\gamma ||\eta(\cdot,\rho)||_{L_2}|d\rho|\int_\gamma ||\eta(\cdot,\theta)||_{L_2}|d\theta| < \infty$$

Из (4.5) следует, что

$$\int_\gamma |D_k^1(x,\lambda,\mu)|^2|d\rho| < C_1(x).$$

Подставляя $\theta \hat{M}_k(\mu) = \kappa(\theta) \in L_2(\gamma)$, получаем

$$\int_\gamma \int_\gamma |D_k^1(x, \lambda, \mu)\theta \hat{M}_k(\mu)|^2 |d\rho||d\theta| < \infty.$$

Из равенства Парсеваля, получаем

$$\int_\gamma |D_k^2(x, \lambda, \mu)|^2 |d\rho| = 2\pi ||\eta(\cdot, \theta)||^2_{L_2[0,x]},$$

и приходим к

$$\int_\gamma \int_\gamma |D_k^2(x, \lambda, \mu)\theta \hat{M}_k(\mu)|^2 |d\rho||d\theta| < \infty.$$

Пользуясь определением $r_k(x, \rho, \theta)$, получаем (4.8). □

Перенесем уравнение (4.3) на Гильбертово пространство $L_2(\gamma)$. Разделим интеграл на две части:

$$\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x, \mu)d\mu =$$

$$= \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)\hat{C}_k(x, \mu)d\mu + \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)\widetilde{C}_k(x, \mu)d\mu$$

Заметим, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)\hat{C}_k(x, \mu)d\mu = \int_\Gamma \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)\hat{C}_k(x, \mu)d\mu$$

из леммы 7 следует, что интеграл в правой части сходится абсолютно и равномерно по λ на любом компактном подмножестве $\overline{D^+}$. Тогда при $\lambda \to \Gamma$ мы определим

$$\Psi_k(x, \rho) := C_k(x, \lambda) - \widetilde{C}_k(x, \lambda),$$
$$\widetilde{F}_k(x, \rho) := \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x, \lambda, \mu)\hat{M}_k(\mu)\widetilde{\ }_k(x, \mu)d\mu, \ \lambda = \rho^2 \tag{4.10}$$

Из (3.3) следует, что $\Psi_k(x, \cdot) \in L_2(\gamma)$. Делая замену переменных $\mu = \theta^2$ и используя представление $\widetilde{r}_k(x, \rho, \theta)$, получим соотношение

$$\Psi_k(x, \rho) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \widetilde{r}_k(x, \rho, \theta)\Psi_k(x, \theta)d\theta + \widetilde{F}_k(x, \rho), \tag{4.9}$$

Из (3.19) следует, что $\Psi_k(x, \cdot) \in L_2(\gamma)$. Для каждого фиксированного $x \in [0, |k|]$ соотношение (4.10) может быть рассмотрено как линейное интегральное уравнение в $L_2(\gamma)$ относительно $\Psi_k(x, \rho)$. Уравнение (3.10) называется основным уравнением для задачи $IP(k)$. Удобно переписать основное уравнение в операторной форме. Для каждой фиксированной $x \in [0, |k|]$ мы определим линейные операторы $\widetilde{H}_k(x)$ и $H_k(x)$ в $L_2(\gamma)$ следующим образом

$$\widetilde{H}_k(x)f(\rho) := \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \widetilde{r}_k(x, \rho, \theta)f(\theta)d\theta, \quad H_k(x)f(\rho) := \frac{1}{\pi i} \int_\gamma r_k(x, \rho, \theta)f(\theta)d\theta$$

Тогда основное уравнение запишется в виде

$$\Psi_k(x) = \widetilde{H}_k(x)\Psi_k(x) + \widetilde{F}_k(x). \tag{4.11}$$

Из (4.7) следует, что $\widetilde{H}_k(x)$ является оператором Гильберта-Шмидта в $L_2(\gamma)$.

Теорема 2. *Для каждого фиксированного $x \in [0, |k|]$ уравнение (4.11) единственным образом разрешимо в $L_2(\gamma)$.*

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\lambda - \mu}\left(\frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{1}{\mu - \xi}\right) = \frac{1}{(\lambda - \xi)(\xi - \mu)},$$

то в силу интегральной формулы Коши

$$\frac{P^k_{js}(x,\lambda)-P^k_{js}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_N\cup\Gamma_N}\frac{P^k_{js}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}d\xi,\quad j,s=1,2,$$

Разделяя на два интеграла и поступая аналогично тому, как это делалось при нахождении (4.3), получим

$$\frac{P^k_{js}(x,\lambda)-P^k_{js}(x,\mu)}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-_N}\frac{P^k_{js}(x,\xi)}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}d\xi+\varepsilon^{js}_N(x,\lambda,\mu)\tag{4.12}$$

где

$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon^{js}_N(x,\lambda,\mu)=0,\quad j,s=1,2.$$

Исходя из определения $P^k_{js}(x,\lambda)$, получаем, что

$$P^k_{11}y_k+P^k_{12}y^{[1]}_k=C_k<y_k,\widetilde{\varphi}_{kk^+}>-\varphi_{kk^+}<y_k,\widetilde{C}_k>$$

$$P^k_{21}y_k+P^k_{22}y^{[1]}_k=C^{[1]}_k<y_k,\widetilde{\varphi}_{kk^+}>-\varphi^{[1]}_{kk^+}<y_k,\widetilde{C}_k>$$

Тогда из (4.12) получаем, что

$$\begin{gathered}\frac{P^k(x,\lambda)-P^k(x,\mu)}{\lambda-\mu}\begin{bmatrix}y_k(x)\\ y^{[1]}_k(x)\end{bmatrix}=\varepsilon^0_N(x,\lambda,\mu)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-_N}\frac{d\xi}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\cdot\\ \cdot\left(<y_k,\widetilde{\varphi}_{kk^+}>\begin{bmatrix}C_k(x)\\ C^{[1]}_k(x)\end{bmatrix}-<y_k,\widetilde{C}_k>\begin{bmatrix}\varphi_{kk^+}(x)\\ \varphi^{[1]}_{kk^+}(x)\end{bmatrix}\right)\end{gathered}\tag{4.13}$$

Учитывая определение $P^k(x,\lambda)$ ясно, что

$$P^k(x,\lambda):=$$

$$=\frac{1}{<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)>}\begin{bmatrix}C_k(x,\lambda)\ \varphi_{kk^+}(x,\lambda)\\ C^{[1]}_k(x,\lambda)\ \varphi^{[1]}_{kk^+}(x,\lambda)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}^{[1]}_{kk^+}(x,\lambda)\ -\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)\\ -\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)\ \widetilde{C}_k(x,\lambda)\end{bmatrix}$$

Ясно, что

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\varphi}^{[1]}_{kk^+}(x,\lambda)\ -\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)\\ -\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)\ \widetilde{C}_k(x,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)>\\ 0\end{bmatrix}$$

и, перемножая матрицы

$$\begin{bmatrix}C_k(x,\lambda)\ \varphi_{kk^+}(x,\lambda)\\ C^{[1]}_k(x,\lambda)\ \varphi^{[1]}_{kk^+}(x,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)>\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=<\widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\lambda)>\begin{bmatrix}C_k(x,\lambda)\\ C^{[1]}_k(x,\lambda)\end{bmatrix},$$

получаем

$$\det\left(P^k(x,\lambda)\begin{bmatrix}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_k(x,\mu)\\ C^{[1]}_k(x,\mu)\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}C_k(x,\lambda)\ C_k(x,\mu)\\ C^{[1]}_k(x,\lambda)\ C^{[1]}_k(x,\mu)\end{bmatrix}=$$

$$=<C_k(x,\lambda),C_k(x,\mu)>.$$

Рассмотрим

$$\det\left(P^k(x,\mu)\begin{bmatrix}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_k(x,\mu)\\ C^{[1]}_k(x,\mu)\end{bmatrix}\right)=$$

$$\det \begin{bmatrix} P^k_{11}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+P^k_{12}(x,\mu)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) \\ P^k_{21}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)+P^k_{22}(x,\mu)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix} =$$

$$= P^k_{11}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)C^{[1]}_k(x,\mu)+P^k_{12}(x,\mu)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)C^{[1]}_k(x,\mu)-$$
$$-P^k_{21}(x,\mu)\widetilde{C}_k(x,\lambda)C_k(x,\mu)-P^k_{22}(x,\mu)\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda)C_k(x,\mu)$$

Поскольку справедливо

$$P^k_{11}(x,\lambda)C^{[1]}_k(x,\lambda)-P^k_{21}(x,\lambda)C_k(x,\lambda)=\widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda),$$
$$P^k_{22}(x,\lambda)C_k(x,\lambda)-P^k_{12}(x,\lambda)C^{[1]}_k(x,\lambda)=\widetilde{C}_k(x,\lambda),$$

то получаем

$$\det\left(P^k(x,\mu)\begin{bmatrix} \widetilde{C}_k(x,\lambda) \\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix}\right) =< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu) >$$

Таким образом,

$$\det\left(\Big(P^k(x,\lambda)-P^k(x,\mu)\Big)\begin{bmatrix} \widetilde{C}_k(x,\lambda) \\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix}\right) =$$
$$=< C_k(x,\lambda),C_k(x,\mu) > - < \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu) >$$

Используя в (4.13) в качестве $y_k(x)$ $\widetilde{C}_k(x,\lambda)$ и домножая на $\begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix}$, приходим к выражению

$$\frac{P^k(x,\lambda)-P^k(x,\mu)}{\lambda-\mu}\begin{bmatrix} \widetilde{C}_k(x,\lambda) \\ \widetilde{C}^{[1]}_k(x,\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix} = \varepsilon^0_N(x,\lambda,\mu)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{d\xi}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\cdot\ \Bigg(< \widetilde{C}_k,\widetilde{\varphi}_{kk^+} > \begin{bmatrix} C_k(x,\xi) \\ C^{[1]}_k(x,\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix} -$$

$$- < \widetilde{C}_k,\widetilde{C}_k > \begin{bmatrix} \varphi_{kk^+}(x,\xi) \\ \varphi^{[1]}_{kk^+}(x,\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k(x,\mu) \\ C^{[1]}_k(x,\mu) \end{bmatrix}\Bigg)$$

Берем определитель от получившегося выражения и получим

$$\frac{< C_k(x,\lambda),C_k(x,\mu) >}{\lambda-\mu}-\frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\mu) >}{\lambda-\mu}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N^-}\Bigg(\frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{\varphi}_{kk^+}(x,\xi) >< C_k(x,\xi),C_k(x,\mu) >}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}-$$
$$-\frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\xi) >< \varphi_{kk^+}(x,\xi),C_k(x,\mu) >}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}\Bigg)d\xi.$$

Так как интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{S}_k(x,\xi) >< C_k(x,\xi),C_k(x,\mu) >}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}=0$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_N^-}\frac{< \widetilde{C}_k(x,\lambda),\widetilde{C}_k(x,\xi) >< S_k(x,\xi),C_k(x,\mu) >}{(\lambda-\xi)(\xi-\mu)}=0,$$

то, учитывая представление решения Вейля

$$\varphi_{kk^+}(\xi) = S_k(x,\xi) + M_k(\xi)C_k(x,\xi)$$

и используя определение функций $D_k(x,\lambda,\mu)$ и $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)$, получим

$$D_k(x,\lambda,\mu) - \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N^-} \hat{M}_k(\xi)\widetilde{D}_k(x,\lambda,\xi)D_k(x,\xi,\mu)d\xi + \varepsilon_N^1(x,\lambda,\mu),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_N^1(x,\lambda,\mu) = 0$. При $N \to \infty$ получим

$$D_k(x,\lambda,\mu) - \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \hat{M}_k(\xi)\widetilde{D}_k(x,\lambda,\xi)D_k(x,\xi,\mu)d\xi.$$

Учитывая полученные оценки для $M_k(\lambda), C_k(x,\lambda)$ и $D_k(x,\lambda,\mu)$, получим, что интеграл в правой части сходится абсолютно и равномерно по λ,μ на компактном подмножестве Γ. Выполняя замену переменных $\xi = \varsigma^2$ в интеграле и умножая обе части на $\theta\hat{M}_k(\mu)$, получим

$$r_k(x,\rho,\theta) - \widetilde{r}_k(x,\rho,\theta) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \widetilde{r}_k(x,\rho,\varsigma)r_k(x,\varsigma,\theta)d\varsigma,$$

что эквивалентно операторной записи

$$(E - \widetilde{H}_K(x))(E + H_k(x)) = E, \tag{4.14}$$

где E - единичный оператор. Меняя местами σ и $\widetilde{\sigma}$ и повторяя рассуждения, получим

$$(E + H_K(x))(E - \widetilde{H}_k(x)) = E. \tag{4.15}$$

Таким образом, оператор $(E - \widetilde{H}_K(x))$ обратимый, а, следовательно, теорема доказана.

Найдем решение задачи $IP(e)$.

Теорема 3. *Решение $\sigma_k(x)$ задачи $IP(k)$ может быть найдено по формуле*

$$\begin{aligned}\sigma_k(x) = &-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu \\ &+\frac{1}{\pi i} l.i.m._{N\to\infty}\int_{\gamma_N} \rho\cos 2\rho x\hat{M}_k(\rho^2)d\rho\end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\gamma_N = \gamma \cap \{\rho : |\rho|^2 = (N+1/4)^2\}$.

Доказательство. Получим решение для $\sigma_k(x)$ в классическом случае. Продифференцируем (4.3) дважды по x.

$$\begin{aligned}C_k'(x,\lambda) = \widetilde{C'}_k(x,\lambda) &+ \frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)C_k'(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_k''(x,\lambda) = \widetilde{C''}_k(x,\lambda) &+ \frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k'(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k'(x,\mu)d\mu + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k''(x,\mu)d\mu\end{aligned}$$

Будем считать, что $\widetilde{\sigma}_k(x) = 0$. Так как мы рассматриваем классический случай, то выполняется

$$-y_k'' + q_k(x)y_k = \lambda y_k, \quad -\widetilde{y}_k'' = \lambda \widetilde{y}_k$$

Следовательно

$$C_k''(x,\lambda) = q_k(x)C_k(x,\lambda) - \lambda C_k(x,\lambda),$$
$$\widetilde{C}_k''(x,\lambda) = -\lambda \widetilde{C}_k(x,\lambda).$$

Тогда справедливо

$$\widetilde{C}_k''(x,\lambda) = -\lambda C_k(x,\lambda) - \frac{\lambda}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu$$

и

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k''(x,\mu)d\mu = \\ = q_k(x)\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu - \\ -\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)\mu d\mu,\end{gathered}$$

а также

$$\begin{gathered}C_k''(x,\lambda) = q_k(x)\widetilde{C}_k(x,\lambda) + q_k(x)\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu - \\ -\lambda\widetilde{C}_k(x,\lambda) - \lambda\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu\end{gathered}$$

Откуда получим

$$\begin{gathered}q_k(x)\widetilde{C}_k(x,\lambda) + q_k(x)\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu - \\ -\lambda\widetilde{C}_k(x,\lambda) - \lambda\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu = \lambda\widetilde{C}_k(x,\lambda) - \\ +\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k'(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ +\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ +\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k'(x,\mu)d\mu + \\ +q_k(x)\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu - \\ -\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)\mu d\mu,\end{gathered}$$

Сокращая, получаем

$$\begin{gathered}q_k(x)\widetilde{C}_k(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k'(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ +\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu + \\ +\frac{1}{2\pi i}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k'(x,\mu)d\mu + \\ +(\lambda-\mu)\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N} \widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)\hat{M}_k(\mu)C_k(x,\mu)d\mu\end{gathered}$$

Поскольку

$$(\lambda-\mu)\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu) = \widetilde{C}_k(x,\lambda)\widetilde{C}_k'(x,\mu) - \widetilde{C}_k'(x,\lambda)\widetilde{C}_k(x,\mu),$$

то получим

$$q_k(x)\widetilde{C}_k(x,\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\int_{\Gamma_N}\Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\widetilde{C}_k(x,\lambda)\int_{\Gamma_N}\Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu.$$

Следовательно,

$$q_k(x) = -\frac{1}{\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N}\Big(\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\Big)'\hat{M}_k(\mu)d\mu.$$

Тогда

$$\sigma_k(x) = -\frac{1}{\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N}\widetilde{C}_k(x,\mu)C_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu =$$

$$-\frac{1}{\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N}\widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu - \frac{1}{\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{\Gamma_N}\widetilde{C}_k^2(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_N}\hat{M}_k(\mu)d\mu \to 0, \quad N\to\infty,$$

то получаем, что в классическом случае для $\sigma_k(x)$ верно (4.16). Учитывая получаемую из (3.19) оценку для $\hat{M}_k(\mu)$ и получаемое из (3.3) представление для $C_k(x,\lambda)$, приходим к тому, что первый интеграл в (4.16) сходится абсолютно и равномерно для всех $x\in[0,|k|]$. Пусть

$$m_k(\lambda) := \frac{1}{\pi i\rho}l.i.m._{N\to\infty}\int_{\gamma_N}cos2\rho x\hat{M}_k(\mu)d\mu$$

Эта функция определена как преобразование Фурье для $\rho\hat{M}_k(\rho)\in L_2(\gamma)$, а, следовательно, по теореме Пэли-Винера $m_k(\lambda)\in L_2[0,|k|]$. Таким образом, правая часть в (4.16) корректно определена как функция $\sigma_k^*(x)\in L_2[0,|k|]$. Докажем, что $\sigma_k^*(x)=\sigma_k(x)$.

Из работ [9-11] известно, что $\sigma_k(x)$ для сингулярного потенциала можно приближать последовательностью $\sigma_{nk}(x),\ \sigma_{nk}(x)\in W_2^1[0,|k|]$. Поскольку определение $\sigma_{nk}(x)$ совпадает с классическим, то для него справедливо (4.16). Обозначим через $\alpha^{(n)}$ объект, связанный с σ_{nk} и соответствующий ему объект α, связанный с σ_k. Ясно что

$$\sigma_k^*(x) := m_k(x) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{C}_k(x,\mu)\hat{M}_k(\mu)d\mu,$$

а также

$$||\sigma_{nk}-\sigma_k||_{L_2(G)}\to 0,\ n\to\infty, \quad \sigma_{nk}(0)=0.$$

Рассмотрим

$$\sigma_k^*(x)-\sigma_{nk}(x) = m_k(x)-m_k^{(n)}(x)-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\widetilde{C}_k(x,\mu)\Big(\hat{C}_k^{(n)}(x,\mu)-\hat{C}_k(x,\mu)\Big)\hat{M}_k(\mu)d\mu+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\widetilde{C}_k(x,\mu)\hat{C}_k^{(n)}(x,\mu)(\hat{M}_k^{(n)}(\mu)-\hat{M}_k(\mu))d\mu$$

Используя (3.3), а также (3.19), получим

$$||\sigma_k^*(x)-\sigma_{nk}(x)|| < ||m_k(x)-m_k^{(n)}(x)||+$$

$$+C\Big(\max_{x\in[0,|k|]}||\hat{C}_k^{(n)}(x,\rho^2)-\hat{C}_k(x,\rho^2))||_{L_2(\gamma)}+||\hat{M}_k^{(n)}(\lambda)-\hat{M}_k(\lambda)||_{L_2(\Gamma)}\Big)$$

Используя непрерывность преобразования Фурье, а также свойство 4 для $\eta(x,\rho)$ и свойство 3 для $\kappa(\rho)$, получаем, что

$$||\sigma_e^*(x)-\sigma_{nk}(x)||_{L_2[0,|k|]}\to 0,\ n\to\infty$$

А так как $l.i.m._{n\to\infty}\sigma_{ne}(x)=\sigma_e(x)$ в $L_2[0,|k|$, то мы приходим к $\sigma_e^*(x)=\sigma_e$. $\square$

Таким образом, решение вспомогательной задачи может быть построено по следующему алгоритму:

Алгоритм 1. Дана функция $M_k(\lambda)$.

1) Возьмем $\widetilde{\sigma}=0$ и подсчитаем $\widetilde{C}_k(x,\lambda)$, $\widetilde{M}_k(\lambda)$, $\widetilde{D}_k(x,\lambda,\mu)$ и $\widetilde{r}_k(x,\rho,\theta)$.

2) Построим $\widetilde{F}_k(x,\rho)$ используя (4.9).

3) Найдем $\Psi_k(x,\rho)$, решив основное уравнение (4.10) для каждого фиксированного $x\in[0,|k|]$.

4) Построим $\sigma_k(x)$, используя (4.16), где $\hat{C}_k(x,\lambda)=\Psi_k(x,\rho)$.

Раздел 5. Возвратная процедура.

Для получения возвратной процедуры представим решение уравнения (1.1) в виде

$$y_e(x,\lambda) = M_e^0(\lambda)S_e(x,\lambda) + M_e^1(\lambda)C_e(x,\lambda). \tag{5.1}$$

Построим графы $\hat{G}$ и Q. Зафиксируем ребро $r \in E^P(G) \cap E^I(G)$. Пусть $v = r^-$, $v \in V(G)$. Вершина v делит граф G на две части: $G = Q \cup \hat{G}$, где $V(Q) \cap V(\hat{G}) = v$ и $E(\hat{G}) \cap I(v,G) = r$.

Подставляя решение (5.1) в различные краевые условия, мы получим различные характеристические функции, представимые, как определители. Определитель $\Delta(\lambda, L(G))$ разложим по теореме Лапласа по тем столбцам, которые соответствуют $M_e^0(\lambda)$, $M_e^1(\lambda)$, $e \in E(\hat{G})$. Возможны два случая.

1. Пусть $v \in V^B(Q)$. Тогда ясно, что при $u \in V^B(G) \cap V^B(Q)$

$$\Delta(\lambda, L(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_v(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L(Q)),$$
$$\Delta(\lambda, L_u(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_{uv}(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u(Q)),$$

Перезапишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L_v(Q)) \ \Delta(\lambda, L(Q)) \\ \Delta(\lambda, L_{uv}(Q)) \ \Delta(\lambda, L_u(Q)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L(\hat{G})) \\ \Delta(\lambda, L_v(\hat{G})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L(G)) \\ \Delta(\lambda, L_u(G)) \end{pmatrix}$$

Решая эту систему методом Крамера, получим

$$\Delta(\lambda, L(\hat{G})) = \frac{\Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_u(Q)) - \Delta(\lambda, L_u(G))\Delta(\lambda, L(Q))}{\Delta(\lambda, L_v(Q))\Delta(\lambda, L_u(Q)) - \Delta(\lambda, Q)\Delta(\lambda, L_{vu}(Q))},$$

а также

$$\Delta(\lambda, L_v(\hat{G})) = \frac{\Delta(\lambda, L_u(G))\Delta(\lambda, L_v(Q)) - \Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_{uv}(Q))}{\Delta(\lambda, L_v(Q))\Delta(\lambda, L_u(Q)) - \Delta(\lambda, Q)\Delta(\lambda, L_{vu}(Q))},$$

По определению функции Вейля получим

$$M_v(\lambda, \hat{G}) = -\frac{\Delta(\lambda, L_u(G))\Delta(\lambda, L_v(Q)) - \Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_{uv}(Q))}{\Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_u(Q)) - \Delta(\lambda, L_u(G))\Delta(\lambda, L(Q))},$$

Разделив числитель и знаменатель на $\Delta(\lambda, L(G))$ и учитывая, что

$$M_v(\lambda, \hat{G}) = -\frac{\Delta(\lambda, L_v(G))}{\Delta(\lambda, L(G))},$$

получим

$$M_v(\lambda, \hat{G}) = \frac{M_u(\lambda, G)\Delta(\lambda, L_v(Q)) + \Delta(\lambda, L_{uv}(Q))}{\Delta(\lambda, L_u(Q)) + \Delta(\lambda, Q)M_u(\lambda, G)}. \tag{5.2}$$

2. Для $v \in V^I(Q)$ аналогично получаем при $u \in V^B(G) \cap V^B(Q)$

$$\Delta(\lambda, L(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L^v(Q)),$$
$$\Delta(\lambda, L_u(G)) = \Delta(\lambda, L(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u(Q)) + \Delta(\lambda, L_v(\hat{G}))\Delta(\lambda, L_u^v(Q)),$$

Перезапишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L(Q)) \ \Delta(\lambda, L^v(Q)) \\ \Delta(\lambda, L_u(Q)) \ \Delta(\lambda, L_u^v(Q)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L(\hat{G})) \\ \Delta(\lambda, L_v(\hat{G})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(\lambda, L(G)) \\ \Delta(\lambda, L_u(G)) \end{pmatrix}$$

Решая эту систему методом Крамера, получим

$$\Delta(\lambda, L(\hat{G})) = \frac{\Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_u^v(Q)) - \Delta(\lambda, L^v(Q))\Delta(\lambda, L_u(G))}{\Delta(\lambda, L(Q))\Delta(\lambda, L_u^v(Q)) - \Delta(\lambda, L^v(Q))\Delta(\lambda, L_u(Q))},$$

а также

$$\Delta(\lambda, L_v(\hat{G})) = \frac{\Delta(\lambda, L(Q))\Delta(\lambda, L_u(G)) - \Delta(\lambda, L(G))\Delta(\lambda, L_u(Q))}{\Delta(\lambda, L(Q))\Delta(\lambda, L_u^v(Q)) - \Delta(\lambda, L^v(Q))\Delta(\lambda, L_u(Q))},$$

По определению функции Вейля получим

$$M_v(\lambda,\hat{G}) = -\frac{\Delta(\lambda,L(G))\Delta(\lambda,L_u^v(Q)) - \Delta(\lambda,L^v(Q))\Delta(\lambda,L_u(G))}{\Delta(\lambda,L(Q))\Delta(\lambda,L_u(G)) - \Delta(\lambda,L(G))\Delta(\lambda,L_u(Q))},$$

Разделив числитель и знаменатель на $\Delta(\lambda, L(G))$ и учитывая, что

$$M_v(\lambda,\hat{G}) = -\frac{\Delta(\lambda,L_v(G))}{\Delta(\lambda,L(G))},$$

получим

$$M_v(\lambda,\hat{G}) = \frac{\Delta(\lambda,L_u^v(Q)) + \Delta(\lambda,L^v(Q))M_u(G)}{\Delta(\lambda,L(Q))M_u(G) + \Delta(\lambda,L_u(Q))}. \tag{5.3}$$

Пусть дано $M_v(\lambda, G)$, $v = e^{\pm}$, $e \in E^C(G)$. Рассмотрим задачу $IP(e, G)$. Сдвинув некоторую вершину u , соответствующую концу ребра e, к вершине $u' \notin G$ без изменений других вершин и изменения длины $|e|$, мы получим G_e с ребром e' вместо e. Ребро e' - граничное в G_e, а u' - граничная вершина. Учитывая, что процедура восстановления потенциала одинакова для всех ребер, то ясно, что $IP(e, G)$ эквивалентно $IP(r, G)$, где $e \in E^C(G)$, $r \in E^B(G)$.

Возвратная процедура. Зафиксируем $e \in E^P(G) \backslash E^B(G)$. Пусть $e \in E^{(\nu)}$ и вершина $v \in V(G)$ - начало ребра e. Вершина v делит граф G на две части $G = Q \cup \hat{G}$, где $V(Q) \cap V(\hat{G}) = v$ и $E(\hat{G}) \cap I(v, G) = e$. Тогда выполняются (5.2) или (5.3). Предполагаем потенциал q известным на Q. Фиксируем $u \in V^B(G) \cap V(Q)$. Пусть $M_u(\lambda, G)$ даны.

1. Функции Вейля $M_v(\lambda, \hat{G})$ находим из (5.2) или (5.3).
2. Решая обратную задачу $IP(r, \hat{G})$, мы построим потенциал q на r.

Раздел 6. Решение обратной задачи 1.

Пусть даны спектры $M_v(\lambda),\ M_e(\lambda)$, $v \in V^B(G)$, $e \in E^C(G)$. Тогда решение обратной задачи 1 может быть получено по следующему алгоритму:

Алгоритм 2.

1. Для каждого фиксированного ребра $k \in E^B(G)$ решаем $IP(k, G)$ по алгоритму 1 и находим σ_k на ребре k.

2. Для каждого фиксированного ребра $e \in E^C(G)$ решаем $IP(e, G)$ по алгоритму 1 и находим σ_e на ребре e.

2. Для $\nu = \chi - 1, ..., 0$ мы используем возвратную процедуру, а, следовательно, находим $M_{k^+}(\lambda)$. После чего находим σ_k, используя процедуру восстановления потенциала из функции Вейля, т.е. решаем задачу $IP(k, G)$. Повторяя этот шаг для всех $k \in E^{(\nu)}$ и всех $\nu = \chi - 1, ..., 0$, получаем σ на всем графе G.

Следовательно, выполняя алгоритм 2, мы получим решение обратной задачи 1 и докажем его единственность.

Заключение

Итак, в данной работе мы получили решение обратной спектральной задачи восстановления сингулярного потенциала для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля по данным функциям Вейля на связных компактных графах. Также были изучены характеристические функции различных краевых задач. Была получена возвратная процедура нахождения функций Вейля, относящихся к внутренним вершинам, по данным функциям Вейля в граничных вершинах. Мы доказали теорему единственности решения рассматриваемой обратной задачи, а также получили алгоритм, благодаря которому можно получить решение обратной задачи.

Список использованных источников

1 В.А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, "Наукова Думка Киев,1977, 329с;

2 Б.М. Левитан, Обратные задачи Штурма-Лиувилля, Наука, Москва, 1984, 240с;

3 E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, New York, Academic Press, 1987.

4 G. Freiling and V.A. Yurko, Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications,NOVA Science Publishers, New York, 2001, 305pp.

5 K.Chadan, D. Colton, L. Paivarinta and W. Rundell, An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems, SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation.SIAM, Philadelphia, PA, 1997, 166pp.

6 R. Beals , P. Deift and C. Tomei, Direct and Inverse Scattering on the Line, Math. Surveys and Monographs, v.28. Amer. Math. Soc. Providence: RI, 1988, 252pp.

7 В.А. Юрко, Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов и их приложений, 385 с.

8 V.A. Yurko, Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Illposed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002, 303pp.

9 R.O. Hryniv and Ya.V. Mykytyuk, Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, Inverse Problems 19 (2003), 665-684pp.

10 R.O. Hryniv and Ya.V. Mykytyuk, Transformation operators for Sturm-Liouville operators with singular potentials, Mathematical Physics, Analysis and Geometry 7 (2004), 119-149pp.

11 А.А. Шкаликов и А.М. Савчук, Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами, Математические заметки, 1999, 741-753с.

12 Ю.В. Покорный и А.В. Боровских, Дифференциальные уравнения на геометрических графах, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 272с.

13 Ю. Покорный и В. Прядиев, Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети, УМН, 2004, том 59, выпуск 3(357)б 115-150с

14 Н. Герасименко, Обратная задача рассеяния на некомпактном графе, 1988б 287-200с.

15 M.I. Belishev, Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method, Inverse Problems 20 (2004), 647-672pp.

16 В.А. Юрко, Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs, Inverse Problems 21 (2005), 1075-1086pp.

17 В.А. Юрко, О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах, Математ. заметки. т.79, вып.4 (2006), 619-630pp.

18 G. Freiling and V.A. Yurko, Inverse problems for differential operators on trees with general matching conditions, Applicable Analysis 86, no.6 (2007), 653-667pp.

19 B.M. Levitan and I.S. Sargsyan, Introduction to Spectral Theory, AMS Transl. of Math. Monogr. 39, Providence, 1975, 525p.

20 G. Freiling, M. Ignatiev, V. Yurko, An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graphs, 2008, 397-409pp.

21 В.А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, 1977, Киев, 329с.

24 V.A. Yurko, Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs, 2010, 20p.

25 R. Bellmann and Coike, Differential-difference Equations, 1963, 548p.

26 Freiling G., Yurko V.A. Inverse nodal problems for differential operators on graphs with a cycle. Tamkang J. Math. 41, N1. 2010, 50-54pp.

27 Юрко В.А. Об обратной спектральной задаче для дифференциальных операторов на графеежe. Доклады Академии наук 425 N4. 2009, 65Ц72с.

28 Yurko V.A. Inverse problems for Sturm-Liouville operators on bush-type graphs. Inverse Problems 25, N10. 2009, 125-127pp.

29 Yurko V.A. Uniqueness of recovering Sturm-Liouville operators on A-graphs from spectra. Results in Mathematics 55, N1-2. 2009, 199-207pp.

30 M.Y. Ignatiev. Inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator on non-compact A-graph. Uniqueness result. Department of Mathematics, Saratov University, 25p.

31 M.Y. Ignatiev, Inverse scattering problem for Sturm-Liouville operator on one-vertex noncompact graph with a cycle, Tamkan J. of Mathematics 42, N3.011, 154-166pp.

32 Б.С. Павлов, М.Д. Фаддеев, "Модель свободных электронов и задача рассеяния."1983, 257Џ268с.

33 J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, vol.I, 2nd edn., Springer–Verlag, New York, 1995, 412p.

Приложения

Пусть $|V^B(G)| \leq 1$, т.е. либо $|V^B(G)| = 0$, либо $|V^B(G)| = 1$. Тогда обратную задачу можно сформулировать следующим образом. Даны функции Вейля $M_e(\lambda)$, $e \in E^C(G)$. Построим потенциал q на графе G. Для случая $|V^B(G)| = 1$ все утверждения и полученные результаты также справедливы. В частности, для нахождения потенциала σ на графе G можно использовать алгоритм 1 без шага 2. Если $|V^B(G)| = 0$ и $E^P(G^*) \neq \varnothing$, то дерево G^* не пусто. Мы выбираем и фиксируем одну из граничных вершин $v \in V^B(G^*)$ как корень и повторяем вышеупомянутую процедуру. Если простых рчбер нет, т.е. $E^P(G^*) = \varnothing$, то дерево G^* пустое и мы пропускаем шаг 3 в Алгоритме 1.