ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ.

М.В.Платонова, Санкт-Петербург, Россия,
199178, 14 линия В.О., дом 29Б СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева

Аннотация. В работе изучаются возможности вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дробного дифференцирования порядка больше двух. С этой целью строятся аналоги односторонних α-устойчивых распределений при нецелых $\alpha > 2$. Хотя плотности таких распределений являются уже знакопеременными функциями, тем не менее, пользуясь методами теории обобщенных функций, удается придать им точный вероятностный смысл.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}_+^\alpha u, \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}_+^\alpha$ - оператор дробного дифференцирования, действующий на функцию f как

$$\left(\mathcal{D}_+^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-t)^k}{t^{1+\alpha}} dt \tag{2}$$

(подробнее об операторах дробного дифференцирования см. [6], стр. 85). Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Уравнения с дробными производными при $\alpha > 2$ рассматривались в работах [9],[10]. Дробные кинетические уравнения были введены для описания гамильтоновой динамики некоторых хаотических систем [13], для изучения термодиффузии во фрактальных и пористых средах [8] и теории турбулентности [13].

1991 *Mathematics Subject Classification.* 28C20, 60H05, 60G57.

Key words and phrases. Оператор Римана-Лиувилля, эволюционное уравнение, устойчивое распределение.

Работа автора выполнена при поддержке программы социальных инвестиций "Родные города" ОАО "Газпром нефть", а также при поддержке гранта РФФИ 16-01-00443а.

Если $0 < \alpha < 1$ или $1 < \alpha < 2$, то решение $(1),(3)$ представляется в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\varphi\left(x - \xi_\alpha(t)\right), \tag{4}$$

где $\xi_\alpha(t)$ - устойчивый процесс Леви со спектральной мерой Леви $\Lambda(dx) = \frac{C_\alpha dx}{x^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, сосредоточенной на положительной полуоси.

При $\alpha > 2$ такое представление невозможно, так как фундаментальное решение уравнения (1) уже не является вероятностной мерой. В литературе рассматривался вопрос обобщения представления (4) на случай $\alpha > 2$. В частности, в работе [9] строилось представление решения (в рамках теории псевдопроцессов) на основе так называемой "обобщенной" устойчивой случайной величины, введенной в [7]. Эта "обобщенная" случайная величина задается своим преобразованием Фурье, причем это преобразование Фурье не является характеристической функцией никакого вероятностного распределения. Соответственно, данный подход не может рассматриваться как вероятностный, так как в нем в принципе отсутствует понятие вероятностного пространства.

Далее, в работе [12] был предложен другой, уже вероятностный, подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2$. Данный подход основан на использовании теории обобщенных функций. Именно, симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция l (над некоторым классом основных функций), которая на основную функцию φ действует как

$$(l,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\,\varphi * \omega_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \tag{5}$$

где ω_ε — специальным образом подобранное семейство быстро осциллирующих функций, $\eta_\varepsilon = \int_{|x|>\varepsilon} x\nu(dx)$, а ν — пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}$ с интенсивностью $\frac{C_\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}$. Если $\alpha \in (0,2)$, то в формуле (5) свертка не нужна (можно считать, что ω_ε это $\delta-$мера), и в этом случае обобщенная функция l есть регулярный функционал вида

$$(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)p_\alpha(x)dx,$$

где $p_\alpha(x)$ — плотность симметричного устойчивого распределения с показателем α. Для всех прочих α обобщенная функция l является регулярным функционалом со знакопеременной (и, соответственно, невероятностной) плотностью.

Отметим, что данный подход хорошо работает, если $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+2)$, в этом случае преобразование Фурье $\widehat{g}_\alpha$ устойчивого распределения (определяемого формулой (5)) имеет такой же вид, как и в случае $\alpha \in (0,2)$, именно $\widehat{g}_\alpha(p) = \exp\left(-c\,|p|^\alpha\right)$, где c — положительная постоянная. Для $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m)$ предложенный в [12] метод давал другой, существенно менее естественный ответ, именно, преобразование Фурье для таких α имело вид

$$\widehat{g}_\alpha(p) = \exp\left(c_0 \left|p\right|^\alpha - c_1 p^{4m}\right),$$

где c_0, c_1 — положительные константы.

В данной работе мы также будем использовать метод, предложенный в работе [12], но будем рассматривать не одномерные случайные величины, а аналоги устойчивых процессов с независимыми приращениями. В отличие от [12], где мера Леви предполагалась симметричной, нас будет интересовать случай, когда мера Леви сосредоточена на положительной полуоси. При этом, если в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+2)$ оказалось достаточно пользоваться только методами работы [12], то в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m)$ нами предложен новый метод, основанный на использовании аппарата комплексного анализа, в частности, на теории пространств Харди. Фактически, вместо одного вещественного процесса мы рассматриваем два комплексных процесса. Отметим, что если этот подход использовать для построения одномерных симметричных распределений (как в [12]), то построенный объект будет иметь "правильный" (то есть, как в случае $\alpha \in (0, 2)$) вид преобразования Фурье (см. [5]).

Итак, пусть сначала $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)$. Покажем, как в этом случае мы будем строить вероятностное представление решения задачи Коши $(1),(3)$.

Пусть $\nu(dt, dx)$ - пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\,\Lambda\left(dx\right) = \frac{dt\,dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Для $\varepsilon{>}0$ через $\xi_\varepsilon\left(t\right)$, $t \in [0, T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν, вида

$$\xi_\varepsilon\left(t\right) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,+\infty)} x\nu(ds, dx). \tag{6}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при $\alpha > 2$ и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши $(1),(3)$.

Именно, для $\varepsilon{>}0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon\left(t, x\right) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)\left(x - \xi_\varepsilon\left(t\right)\right)\right],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ задается своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t\left(p\right) = \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big). \tag{7}$$

В настоящей работе показано, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbb{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), (3). Таким образом, для решения задачи Коши (1), (3) мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \xi_\varepsilon(t))\right].$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m)$. В данном случае предложенный выше метод не работает, так как для таких значений α функция (7) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. В данном случае для построения вероятностного представления решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа. Нам понадобится ввести несколько обозначений. Через P_+ обозначим проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ на пространство Харди H_+^2, а через P_-, проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbb{R})$ на пространство Харди H_-^2. Хорошо известно (см. [4]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H_-^2 лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H_+^2 содержится на отрицательной полуоси. Далее, для $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на подпространство функций ψ, таких, что носитель преобразования Фурье $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$, именно, $\widehat{P_M \psi} = \widehat{\psi} \cdot \mathbf{1}_{[-M,M]}$.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)$ и $\sigma_- = \exp\left(-\frac{i\pi}{\alpha}\right)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^\alpha = \sigma_-^\alpha = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+ \xi_\varepsilon(t)$ и $\sigma_- \xi_\varepsilon(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M \varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, именно $M = M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta - 1}$, где $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций — одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой — другим.

В настоящей работе показано, что если начальное данное φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$ для некоторого $l \geqslant 0$, то функция

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\left[\left(P_- \varphi_M * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \sigma_+ \xi_\varepsilon(t)) + \left(P_+ \varphi_M * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \sigma_- \xi_\varepsilon(t))\right],$$

где

$$\widehat{\omega}_{\varepsilon}^{t}(p)=\begin{cases}\exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k\sigma_+^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p\geqslant 0,\\ \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k\sigma_-^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p<0\end{cases}\tag{8}$$

по норме $W_2^l(\mathbb{R})$, $l\geqslant 0$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), (3). Таким образом, для таких α для решения задачи Коши мы получаем представление

$$u(t,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\Big[\left(P_-\varphi_M*\omega_\varepsilon^t\right)\left(x-\sigma_+\xi_\varepsilon(t)\right)\\ +\left(P_+\varphi_M*\omega_\varepsilon^t\right)\left(x-\sigma_-\xi_\varepsilon(t)\right)\Big].$$

Далее, отметим, что в построенном выше представлении решения задачи Коши мы брали за основу известное представление Леви-Хинчина устойчивых случайных величин в виде стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере. Но устойчивые распределения при $\alpha\in(0,2)$ могут быть получены и другим способом. Именно, они возникают как предельные распределения в схеме суммирования независимых случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. В настоящей работе также доказан естественный аналог такой предельной теоремы.

Именно, рассмотрим $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин, а $\eta(t)$ — пуассоновский процесс интенсивности единица, не зависящий от последовательности $\{\xi_i\}$. Процесс $\eta(t)$ играет вспомогательную роль, в данной задаче удобнее рассматривать суммы случайного числа случайных величин.

Далее, обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x>1$ удовлетворяет условию

$$P\left(\xi_1>x\right)=\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\left(1+o\left(1\right)\right).\tag{9}$$

Для $k<\alpha$ через $\mu_k=\mathbf{E}\xi_1^k$ обозначим момент порядка k случайной величины ξ_1. Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t\in[0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t)=\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j.\tag{10}$$

Заметим, что процесс ζ_n не имеет слабого предела при $n\to\infty$. Нас интересует случай $\alpha>2$, а в этом случае распределение $\mathcal{P}$ принадлежит области притяжения нормального закона, что означает, что слабый предел будет (после центрирования) в другой, более сильной нормировке.

Мы в настоящей работе покажем, что мы можем аппроксимировать решение задачи Коши с помощью процесса $\zeta_n(t)$, аналогично тому, как мы это делали с помощью процесса $\xi_\varepsilon(t)$.

Как и выше, через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на подпространство функций у которых носитель преобразования Фурье лежит в $[-M, M]$. Положим $\varphi_M = P_M\varphi$, причем M мы будем выбирать зависящим от n.

В случае, если $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+1)\cup(4m+1, 4m+2)$, а $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$, мы выберем $M = M(n) = n^{1/\alpha}$ и покажем, что функция

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi_M * \varkappa_n^t\right)(x - \zeta_n(t))\right],$$

где преобразование Фурье $\widehat{\varkappa}_n^t$ функции $\varkappa_n^t$ задается формулой

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1 ip}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2(ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big),$$

по норме $W_2^l(\mathbb{R})$ приближает решение задачи Коши (1), (3).

В случае $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m-1)\cup(4m-1, 4m)$ мы покажем, что функция

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\Big[\left(P_-\varphi_M * \varkappa_n^t\right)(x - \sigma_+\zeta_n(t)) + \left(P_+\varphi_M * \varkappa_n^t\right)(x - \sigma_-\zeta_n(t))\Big],$$

где $M = M(n) = n^{(1-\delta)/\alpha}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{1+[\alpha]}$ и

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\left(-nt\left(\frac{\mu_1 ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p \geqslant 0, \\ \exp\left(-nt\left(\frac{\mu_1 ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p < 0, \end{cases}$$

приближает решение задачи Коши (1), (3) по норме $W_2^l(\mathbb{R})$, $l \geqslant 0$.

Отметим еще, что в правой части (1) вместо оператора $\mathcal{D}_+^\alpha$ можно поставить оператор $\mathcal{D}_-^\alpha$ (см. [6], стр. 85). Для оператора $\mathcal{D}_-^\alpha$ теми же методами могут быть получены аналогичные результаты.

2. Обозначения

Константы мы всегда обозначаем буквой , причем одна и та же буква может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{ipx} dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(p) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(x) e^{-ipx} dx.$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$. Именно, для $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$P_M\psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-M}^{M} \widehat{\psi}(p) e^{-ipx} dp, \tag{11}$$

где $\widehat{\psi}$ - прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M - это ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbb{R})$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbb{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + |p|^{2k}\right) \left|\widehat{\psi}(p)\right|^2 dp.$$

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbb{R}) \to W_2^l(\mathbb{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать соответственно целую и дробную часть числа α.

Через $C_b^\infty(\mathbb{R})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Оператор дробной производной определяется формулой (см.[6], Теорема 5.8, стр. 99)

$$\left(\mathcal{D}_+^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-t)^k}{t^{1+\alpha}} dt, \tag{12}$$

где $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье $\mathcal{F}$ дробной производной справедливо

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{D}_+^\alpha \varphi\right) = (-ip)^\alpha \widehat{\varphi}(p), \tag{13}$$

где $(-ip)^{\alpha} = |p|^{\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha\pi i}{2}\text{sign }(p)\right)$, то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}_{+}^{\alpha}}$ действует как оператор умножения на $(-ip)^{\alpha}$.

Далее напомним определение классов Харди H_{+}^{2} и H_{-}^{2}. Функция F, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости принадлежит классу H_{+}^{2} (соответственно, H_{-}^{2}), если существует константа C, $C < \infty$, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx \leqslant C,$$

при всех $y > 0$ $(y < 0)$. Хорошо известно, что если $F(t) \in L^2(\mathbb{R})$ — функция, являющаяся граничным значением функции из H_{+}^{2} (или H_{-}^{2}), то $\widehat{F}(\lambda) = 0$ при почти всех $\lambda \geqslant 0$ $(\lambda \leqslant 0\ )$. Кроме того, верно и обратное утверждение. Именно, если $\Phi \in L_2(\mathbb{R})$ и $\Phi(\lambda) = 0$ почти всюду при $\lambda \geqslant 0$ $(\lambda \leqslant 0\ )$, то существует функция F из H_{+}^{2} (или H_{-}^{2}), для которой $\widehat{F}(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

3. Вероятностные представления решения при $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma(-\alpha)\, \mathcal{D}_{+}^{\alpha} u, \tag{14}$$

где оператор $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования (2). Для уравнения (14) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \tag{15}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. В этом параграфе мы рассмотрим только случай, когда

$$\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+1) \cup (4m+1, 4m+2)\,. \tag{16}$$

Отметим здесь, что случай

$$\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m-2, 4m-1) \cup (4m-1, 4m) \tag{17}$$

является технически более сложным и будет рассмотрен в следующем параграфе 4.

Решение задачи (14), (15) для α, удовлетворяющих (16), задается формулой

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\, \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx} e^{-t|p|^{\alpha} c_2(p)},$$

где $c_2(p) = -\Gamma(-\alpha)\exp\left(-\frac{\alpha\pi i}{2}\mathrm{sign}(p)\right)$, что непосредственно следует из (13). Заметим, что $\mathrm{Re}\, c_2(p)$ не зависит от p и при рассматриваемых значениях α справедливо неравенство $b = \mathrm{Re}\, c_2(p) > 0$.

Пусть $\nu(dt, dx)$ — пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}^+ \times [0, T]$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(dt, dx) = dt\,\Lambda(dx) = \frac{dt\,dx}{x^{1+\alpha}},\ \alpha > 2, \alpha \notin \mathbb{N}. \tag{18}$$

Для $\varepsilon{>}0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ обозначим случайный процесс

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,+\infty)} x\nu(ds, dx). \tag{19}$$

По теореме Кэмпбелла (см. [3]) характеристическая функция $f_{\xi_\varepsilon(t)}$ случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$ для любого t равна

$$f_{\xi_\varepsilon(t)}(p) = \exp\Big(t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\left(e^{ipx} - 1\right)d\Lambda(x)\Big).$$

Далее, определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t, x)$

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \xi_\varepsilon(t))\right],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big). \tag{20}$$

Отметим, что при таких α это быстро убывающая функция. Действительно, при $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+1)$ коэффициент при старшей степени p в показателе экспоненты отрицателен. При $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m+1, 4m+2)$ коэффициент при старшей степени p чисто мнимый, но зато предыдущий коэффициент (при p^{4m}) - отрицательный.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t, x)$ — решение задачи Коши* (14), (15), *а число α удовлетворяет условию* (16). *Тогда существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbb{R})} \leqslant CT\,\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})}\,\varepsilon^{1-\{\alpha\}},$$

где $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A — ограниченный оператор в некотором гильбертовом пространстве. Через $U_A(t)$, $t \geqslant 0$ обозначим полугруппу (ограниченных) операторов

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B — возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2], гл. IX, §2, п.1, стр. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \tag{21}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha - A_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ как

$$A_\varepsilon \psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\psi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях $A + B = \Gamma(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha$. Заметим, что для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства для операторных норм

$$\left\| e^{t(A+B)} \right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{22}$$

$$\left\| e^{tA} \right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{23}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{B\varphi}(p) &= \int\limits_{\mathbb{R}} dx \exp(ipx) \Big[\int\limits_0^\varepsilon \Big(\varphi(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big] \\
&= \widehat{\varphi}(p) \int\limits_0^\varepsilon \Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{i^k p^k y^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\
&= \widehat{\varphi}(p)\,|p|^\alpha \int\limits_0^{\varepsilon|p|} \Big(\exp(i\cdot \mathrm{sign}(p)\, y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i\cdot \mathrm{sign}(p)\, y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Если $|p| < \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$|p|^\alpha \Big| \int\limits_0^{\varepsilon|p|} \Big(\exp(i\cdot \mathrm{sign}(p)\, y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i\cdot \mathrm{sign}(p)\, y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C\,|p|^{[\alpha]+1}\,\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Если $|p| > \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая подынтегральное выражение по модулю и заменяя верхний предел на бесконечность, получаем оценку

$$\left|\widehat{B\varphi}\,(p)\right| \leqslant C\,|\widehat{\varphi}\,(p)|\,|p|^{\alpha}\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{B\varphi}\right\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)\left|\widehat{B\varphi}\,(p)\right|^2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,|p|^{2([\alpha]+1)} \\ &\qquad + C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,|p|^{2\alpha}\,.\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{B\varphi}\right\|^2_{W_2^l} &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{\mathbb{R}} dp\,\Big(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2 \\ &\quad + C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} dp\,\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,|p|^{2\alpha+2(1-\{\alpha\})} \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}\,. \qquad (24)\end{aligned}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (22), (23) и (24). □

Далее, в вероятностном представлении решения задачи Коши заменим невероятностный аналог устойчивой случайной величины ее аппроксимацией случайным блужданием.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$P\left(\xi_1 > x\right) = \frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\left(1 + h\left(x\right)\right), \qquad (25)$$

причем функция $|h\left(x\right)| \leqslant \frac{C}{x^{\beta}}$, где

$$\beta > 1 - \{\alpha\}\,. \qquad (26)$$

Пусть $\eta\left(t\right)$, $t \in [0, \infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_i\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j. \tag{27}$$

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbb{R})$, действующий по формуле (11). Далее число M будем выбирать в зависимости от n, то есть $M = M(n)$. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Для натуральных n определим функцию двух переменных

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi_M * \varkappa_n^t\right)(x - \zeta_n(t))\right],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\Big(-nt\Big(\frac{\mu_1 ip}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2(ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Big)\Big).$$

Также как и в (20), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ — это быстро убывающая функция.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/\alpha}$, $u(t,x)$ *— решение задачи Коши* (14), (15), *а число* α *удовлетворяет условию* (16). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$, *такое что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbb{R})} \leqslant C\Big(T + \frac{1}{n}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \mathit{\Gamma}(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ как

$$A_n\psi(x) = n\int_0^{+\infty}\Big(\psi\Big(x - \frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{\psi^{(k)}(x)(-y)^k}{n^{k/\alpha}k!}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Тогда $A + B = \mathit{\Gamma}(-\alpha)\mathcal{D}_+^\alpha$.

Представим

$$e^{tA}\varphi_M(x) - e^{t(A+B)}\varphi(x) = \Big(e^{tA} - e^{t(A+B)}\Big)\varphi_M(x) - e^{t(A+B)}(I - P_M)\varphi(x) = V_1 + V_2.$$

Оценим норму слагаемого V_2. Имеем

$$\begin{aligned}
\|V_2\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\Big(Ce^{-2bM^\alpha t}\int\limits_{|p|>M}\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,dp\Big).\\
&\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int\limits_{|p|>M}\Big(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,dp\\
&\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}=\frac{C}{n^{2([\alpha]+1)/\alpha}}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}\,. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Для оценки нормы слагаемого V_1 воспользуемся формулой (21).

Заметим, прежде всего, что для любого положительного k и $t>0$ справедливы неравенства

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1, \qquad (29)$$

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \qquad (30)$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$. Обозначим

$$S(y)=e^{iy}-\sum\nolimits_{k=0}^{[\alpha]}\frac{i^ky^k}{k!}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{B\varphi_M}\,(p) &= \int\limits_{-M}^{M}dx\exp{(ipx)}\\
&\cdot\Big[\int\limits_0^{+\infty}\Big(\varphi\,(x-y)-\sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\
&-n\int\limits_0^{+\infty}\Big(\varphi\Big(x-\frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big)-\sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{n^{k/\alpha}k!}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\,\Big]\\
&=-\widehat{\varphi_M}\,(p)\,\Big[c_2\,(p)\,|p|^\alpha+n\int\limits_0^{+\infty}S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\Big]. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Заметим, что интегрирование ведется по множеству $|p|\leqslant M$, значит в области интегрирования справедливо неравенство

$$\frac{|p|}{n^{1/\alpha}}\leqslant\frac{M}{n^{1/\alpha}}\leqslant 1. \qquad (32)$$

Представим выражение в квадратных скобках (31) в виде

$$n\int\limits_0^1 S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\,+n\int\limits_1^{+\infty}S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)+c_2\,(p)\,|p|^\alpha\,.$$

В силу (32) и условия $|y| \leqslant 1$ справедливо неравенство
$$\left|S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)\right| \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}\, y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \tag{33}$$
Тогда
$$\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}\int\limits_0^1 y^{[\alpha]+1} d\mathcal{P}\,(y) \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$
Из условия (26) следует, что существует $C>0$, такая что
$$\Big|\int\limits_1^\infty S\Big(\frac{py}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big(d\mathcal{P}\,(y) - \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big|$$
$$\leqslant C\int\limits_1^\infty \max\Big(\frac{|p|^{[\alpha]}\, y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}}, \frac{|p|^{[\alpha]+1}\, y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\Big)\frac{dy}{y^{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{C\,|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \tag{34}$$
Воспользовавшись простым неравенством
$$|p|^{[\alpha]+1} + |p|^{\alpha} \leqslant 2\left(1 + |p|^{[\alpha]+1}\right),$$
получим
$$\left\|\widehat{B\varphi_M}\right\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp\left(1+|p|^{2l}\right)\left|\widehat{B\varphi}\,(p)\right|^2$$
$$\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}} dp\left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right)|\widehat{\varphi}\,(p)|^2$$
$$\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \tag{35}$$
Заметим, что утверждение теоремы следует из (28), (29), (30) и (35). □

4. Вероятностные представления решения при $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m-1)\cup(4m-1,4m)$

Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma\,(-\alpha)\,\mathcal{D}^\alpha_+ u, \tag{36}$$
где оператор $\mathcal{D}^\alpha_+$ — оператор дробного дифференцирования (2). Для уравнения (36) рассмотрим задачу Коши
$$u\,(0,x) = \varphi\,(x)\,, \tag{37}$$
здесь функция φ принадлежит пространству $L_2\,(\mathbb{R})$.

Решение этой задачи в случае $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m-1)\cup(4m-1,4m)$ есть

$$u\,(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp\,\widehat{\varphi}\,(p)\,e^{-ipx}e^{-t|p|^{\alpha}c_0(p)},\tag{38}$$

где $c_0\,(p)\;=\;\mathit{\Gamma}\,(-\alpha)\exp\left(-\frac{\alpha\pi i}{2}\mathrm{sign}\,(p)\right)$, что непосредственно следует из (13). Заметим, что $\mathrm{Re}\,c_0\,(p)$ не зависит от p и при таких α справедливо $b=\mathrm{Re}\,c_0\,(p)>0$.

Пусть $\nu(dt,dx)$ — пуассоновская случайная мера на $[0,T]\times\mathbb{R}^+$ с интенсивностью $\mathbf{E}\nu(dt,dx)=dt\,\Lambda\,(dx)=\frac{dt\,dx}{x^{1+\alpha}}$, $\alpha>2$ и $\alpha\notin\mathbb{N}$.

Напомним, что для $\varepsilon{>}0$ случайная величина $\xi_\varepsilon(t)$ определяется (19). В отличие от предыдущего случая, будем рассматривать $\sigma\xi_\varepsilon(t)$, где σ — уже комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [3])

$$\mathbf{E}\exp\left(ip\sigma\xi_\varepsilon(t)\right)=\exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\left(e^{i\sigma px}-1\right)d\Lambda\,(x)\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p\geqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\sigma\geqslant 0$ или $p\leqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\sigma\leqslant 0$.

Рассмотрим проекторы Рисса $P_{\pm}$, действующие из $L_2\,(\mathbb{R})$ на пространства Харди $H^2_{\pm}$.

Любую функцию $\varphi\in L_2\,(\mathbb{R})$ можно представить как

$$\varphi\,(x)=P_+\varphi(x)+P_-\varphi(x)=\varphi_+\,(x)+\varphi_-\,(x)\,,$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси. Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая ограниченная функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая ограниченная функция в нижней.

Напомним, что для любого $M>0$ через P_M обозначаем проектор в $L_2\,(\mathbb{R})$, действующий по формуле (11). Далее число M будем выбирать в зависимости от ε, то есть $M=M\,(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M=P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+=\exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)$ и $\sigma_-=\exp\left(-\frac{i\pi}{\alpha}\right)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- — в нижней.

Для $\varepsilon{>}0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon\,(t,x)$

$$\begin{aligned}u_\varepsilon\,(t,x)=\mathbf{E}\Big[&\left(\varphi^-_M*\omega^t_\varepsilon\right)(x-\sigma_+\xi_\varepsilon\,(t))\\&+\left(\varphi^+_M*\omega^t_\varepsilon\right)(x-\sigma_-\xi_\varepsilon\,(t))\Big],\end{aligned}\tag{39}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k\sigma_+^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{[\alpha]}\frac{i^k\sigma_-^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p < 0. \end{cases} \tag{40}$$

Так как $P_-\varphi$ — аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ — аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$, $l \geqslant 0$, число α удовлетворяет условию* (17)*, $M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши* (36), (37)*, а функция $u_\varepsilon(t,x)$ определяется* (39)*. Тогда существует положительная константа $C = C(\alpha)$, такая что справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbb{R})} \leqslant C\left(T + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])}\right)\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty}\left(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm,\ B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}_+^\alpha P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда $A^\pm + B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}_+^\alpha P_\pm$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\left\|e^{t\left(A^\pm+B^\pm\right)}P_\pm\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{41}$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t\left(A^\pm+B^\pm\right)}\varphi^\pm(x) = \left(e^{tA^\pm} - e^{t\left(A^\pm+B^\pm\right)}\right)P_M\varphi^\pm(x) \\ - e^{t\left(A^\pm+B^\pm\right)}(I - P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^\pm$ воспользуемся формулой Дюамеля (21) для операторов $A^\pm$ и $B^\pm$.

Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm}(p) = \widehat{\varphi_M^\pm}(p)I^\pm(p), \tag{42}$$

где

$$I^{+}(p)=\exp\Big(-t\,|p|^{\alpha}\int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_-\infty}\Big(e^{-iy}-\sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(-iy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

$$I^{-}(p)=\exp\Big(-t\,|p|^{\alpha}\int\limits_{|p|\varepsilon\sigma_+}^{+\sigma_+\infty}\Big(e^{iy}-\sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(iy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big).$$

Обозначим, как и раньше, $S(y)=e^{iy}-\sum\limits_{k=0}^{[\alpha]}\frac{i^k y^k}{k!}$. Рассмотрим замкнутые контуры (рис.1)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pm} &= \{z\in\mathbb{C}:|z|\in[\,|p|\,\varepsilon,R\,]\,,\ \arg z=\pm\,\pi/\alpha\}\\ &\cup \{z\in\mathbb{C}:|z|=R,\ \arg z\in[\pm\,\pi/\alpha,0]\}\\ &\cup \{z\in\mathbb{C}:|z|\in[R,|p|\,\varepsilon]\,,\ \arg z=0\}\\ &\cup \{z\in\mathbb{C}:|z|=|p|\,\varepsilon,\ \arg z\in(0,\pm\,\pi/\alpha)\}\end{aligned}$$

и рассмотрим интегралы по замкнутым контурам

$$J^{\pm}=\int\limits_{\Gamma_{\pm}}S(\pm y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

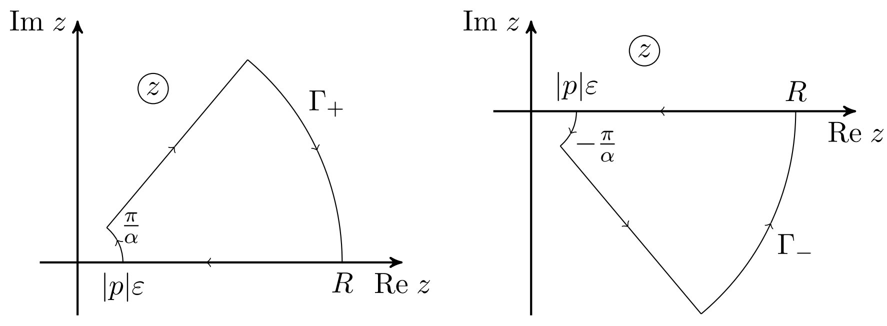

Рис. 1

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R\to\infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру $\Gamma_{\pm}$ равен нулю. Далее будем рассматривать интеграл только по Γ_+ (для интеграла по контуру Γ_- аналогично). Таким образом, имеем

$$\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)\exp\Big(-t\,|p|^\alpha\int\limits_{p\varepsilon}^{+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big) \cdot \exp\Big(t\,|p|^\alpha\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big),$$

где контур

$$\gamma_+ = \Big\{z\in\mathbb{C} : |z| = p\,\varepsilon,\ \arg z\in\Big(0, {}^{\pi}\!/\!_{\alpha}\Big)\Big\}.$$

В интеграле по контуру γ_+ сделаем замену переменной $y = p\varepsilon e^{i\varphi}$, где $\varphi\in\big(0,\frac{\pi}{\alpha}\big)$. Заметим, что функция $S(z)$ является целой функцией и в окрестности нуля допускает оценку $|S(z)|\leqslant C|z|^{1+[\alpha]}$. Используя неравенство $0<p<M(\varepsilon)=\varepsilon^{\delta-1}$, получаем

$$\Big|\exp\Big(t\,|p|^\alpha\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \exp\Big(Ctp^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}\Big) = \exp\Big(Ct(p\varepsilon)^{[\alpha]+1-\alpha}p^\alpha\Big). \quad (43)$$

Выбирая ε достаточно малым, получаем

$$\Big\|\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}\Big\|^2_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2\,|p|^{2k}\exp\Big(2Ctp^\alpha\varepsilon^{\delta(1-\{\alpha\})}\Big) \cdot\exp\Big(-2tp^\alpha\int\limits_1^{+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)dp \leqslant \int\limits_0^M |\varphi(p)|^2\,|p|^{2k}\,dp \leqslant \big\|P_M\varphi^-\big\|^2_{W_2^k}.$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+}P_MP_+$. Таким образом, имеем

$$\Big\|e^{tA^\pm}P_MP_\pm\Big\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \quad (44)$$

Осталось оценить $\|B^\pm P_MP_\pm\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\widehat{B^{\pm}\varphi_M^{\pm}}\,(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} dx \exp{(ipx)}$$
$$\cdot \Big[\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}\,(x-\sigma_{\mp} y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(k)}(x)(-\sigma_{\mp} y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$
$$+ \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}\,(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big]$$
$$= \widehat{\varphi_M^{\pm}}\,(p)\,\Big(-|p|^{\alpha} \int\limits_{\varepsilon|p|\sigma_{\mp}}^{+\sigma_{\mp}\infty} S(\mathrm{sign}\,(p)\cdot y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + |p|^{\alpha}\, c_0(p)\Big).$$

Повторяя рассуждения о повороте контура, получаем

$$\widehat{B^{-}\varphi_M^{-}}\,(p) = \widehat{\varphi_M^{-}}\,(p)\,|p|^{\alpha}\,\Big(\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \int\limits_{0}^{|p|\varepsilon} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big).$$

Используя неравенство

$$\Big|\int\limits_{0}^{\varepsilon|p|} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big| \leqslant C\,(|p|\,\varepsilon)^{1-\{\alpha\}}\,,$$

аналогично (43), получаем

$$\Big|\widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}\,(p)\Big| \leqslant C\,|\widehat{\varphi_{\pm}}\,(p)|\,|p|^{[\alpha]+1}\,\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Тогда

$$\Big\|B^{\pm}\widehat{P_M\varphi}^{\pm}\Big\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp\,\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,\Big|\widehat{B^{\pm}\varphi^{\pm}}\,(p)\Big|^2$$
$$\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})} \int\limits_{|p|<M} dp\,\Big(1+|p|^{2l}\Big)\,|\widehat{\varphi}\,(p)|^2\,|p|^{2([\alpha]+1)}$$
$$\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}\,. \quad (45)$$

Для норм слагаемых $V_2^{\pm}$ имеем (напомним, что через b мы обозначаем вещественную часть $c_0(p)$, которая, как уже было отмечено, положительна и не зависит от p)

$$\begin{aligned}
\left\|V_2^{\pm}\right\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-2bM^\alpha t}\int\limits_{|p|>M}\left(1+|p|^{2l}\right)\left|\widehat{\varphi_\pm}\,(p)\right|^2 dp\right). \\
&\leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\int\limits_{|p|>M}\left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right)\left|\widehat{\varphi_\pm}\,(p)\right|^2 dp \\
&\leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \leqslant \varepsilon^{2(1+[\alpha])(1-\delta)}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \quad (46)
\end{aligned}$$

Заметим, что из (41), (44), (45) и (46) следует утверждение теоремы. □

Как и выше, рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t\in[0,T]$, определенный (27). Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x>1$ удовлетворяет условию (25).

Из теоремы Кэмпбелла (см. [3]) имеем

$$\mathbf{E}e^{ip\sigma\zeta_n(t)} = \exp\Big(nt\int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{i\sigma pyn^{-1/\alpha}}-1\Big)d\mathcal{P}(y)\Big). \quad (47)$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p\geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\geqslant 0$ или $p\leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma\leqslant 0$.

Положим $\sigma_+=\exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)$ и $\sigma_-=\exp\left(-\frac{i\pi}{\alpha}\right)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- — в нижней.

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x)=\mathbf{E}\left[\left(\varphi_M^-*\varkappa_n^t\right)\left(x-\sigma_+\zeta_n(t)\right)+\left(\varphi_M^+*\varkappa_n^t\right)\left(x-\sigma_-\zeta_n(t)\right)\right],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p)=\begin{cases}\exp\left(-nt\left(\frac{\mu_1 ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}}+\frac{\mu_2(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}}+\dots+\frac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p\geqslant 0,\\ \exp\left(-nt\left(\frac{\mu_1 ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}}+\frac{\mu_2(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}}+\dots+\frac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p<0.\end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ ограниченная аналитическая функция в нижней полуплоскости, а $P_+\varphi$ — в верхней полуплоскости, то функция $u_n(t,x)$ корректно определена. Как и в (40), при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ является убывающей функцией.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi\in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})$, $l\geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (17), $M(n)=n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, $0<\delta\leqslant\frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть* $u(t,x)$ *— решение задачи Коши* (36), (37). *Тогда существует* $C=C(\alpha)>0$, *такое что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbb{R})} \leqslant C\left(T+\frac{1}{n^{\delta([\alpha]+1)/\alpha}}\right)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbb{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_n^{\pm}$, полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R})$

$$A_n^{\pm}\psi^{\pm}(x) = n\int_0^{+\infty}\Big(\psi^{\pm}(x-\sigma_{\mp}\frac{y}{n^{1/\alpha}})-\sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^{\pm})^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_{\mp}y)^k}{k!\,n^{k/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y).$$

Введем обозначения для операторов. Именно, обозначим

$$A^{\pm}=A_n^{\pm},\ B^{\pm}=-\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}_+^{\alpha}P_{\pm}-A_n^{\pm}.$$

Тогда $A^{\pm}+B^{\pm}=-\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}_+^{\alpha}P_{\pm}$. Заметим, что справедливо неравенство

$$\left\|e^{t\left(A^{\pm}+B^{\pm}\right)}P_{\pm}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \tag{48}$$

Далее, представим

$$e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x)-e^{t\left(A^{\pm}+B^{\pm}\right)}\varphi^{\pm}(x)=\left(e^{tA^{\pm}}-e^{t\left(A^{\pm}+B^{\pm}\right)}\right)P_M\varphi^{\pm}(x)$$
$$-e^{t\left(A^{\pm}+B^{\pm}\right)}(I-P_M)\,\varphi^{\pm}(x)=V_1^{\pm}+V_2^{\pm}.$$

Оценим нормы $V_2^{\pm}$. Имеем

$$\begin{aligned}\left\|V_2^{\pm}\right\|_{W_2^l}^2 &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\Big(Ce^{-2bM^{\alpha}t}\int_{|p|>M}\Big(1+|p|^{2l}\Big)\left|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)\right|^2dp\Big)\\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int_{|p|>M}\Big(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\Big)\left|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)\right|^2dp\\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2\leqslant\frac{C}{n^{2(1-\delta)([\alpha]+1)/\alpha}}\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2.\end{aligned}\tag{49}$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^{\pm}$ воспользуемся формулой (21) для операторов $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$.

Как и раньше, обозначим $S(y)=e^{iy}-\sum\limits_{k=0}^{[\alpha]}\frac{i^ky^k}{k!}$. Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}}(p)=\widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)I^{\pm}(p),$$

где

$$I^{+}(p)=\exp\Big(nt\int_0^{+\infty}S\Big(\frac{py\sigma_{-}}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}(y)\Big), \tag{50}$$

$$I^{-}(p)=\exp\Big(nt\int\limits_{0}^{+\infty}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\Big). \tag{51}$$

Преобразуем выражение (51). Имеем

$$\begin{aligned}I^{-}(p)&=\exp\Big(nt\int\limits_{0}^{1}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)+nt\int\limits_{1}^{+\infty}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\Big)\\&=\exp\Big(nt\int\limits_{0}^{1}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)-t\int\limits_{\frac{p\sigma_+}{n^{1/\alpha}}}^{+\sigma_+\infty}S(y)\frac{dy}{y^{\alpha+1}}\\&\qquad+nt\int\limits_{1}^{+\infty}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\Big(\frac{h(y)}{\alpha y^{\alpha}}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{52}$$

Заметим, что $|p|\leqslant M=n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, и, значит,

$$\Big|S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big|\leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}\,y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \tag{53}$$

Тогда первый интеграл в (52) оценивается как

$$\Big|\int\limits_{0}^{1}S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\mathcal{P}\,(y)\Big|\leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\int\limits_{0}^{1}y^{[\alpha]+1}d\mathcal{P}\,(y)\leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}.$$

Для оценки второго интеграла в (52) введем замкнутый контур

$$\begin{aligned}\Gamma_+\;&=\;\Big\{z\in\mathbf{C}:|z|\in[\,|p|\,n^{-1/\alpha},R\,],\ \arg z=\pi/\alpha\Big\}\\&\cup\;\{z\in\mathbf{C}:|z|=R,\ \arg z\in[\pi/\alpha,0]\}\\&\cup\;\Big\{z\in\mathbf{C}:|z|\in[R,|p|\,n^{-1/\alpha}],\ \arg z=0\Big\}\\&\cup\;\Big\{z\in\mathbf{C}:|z|=|p|\,n^{-1/\alpha},\ \arg z\in(0,\pi/\alpha)\Big\},\end{aligned}$$

(этот контур представлен на рис.2), и рассмотрим интеграл

$$J_+=\int\limits_{\Gamma_+}S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \tag{54}$$

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R\to\infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру Γ_+ равен нулю.

Воспользуемся неравенством $0<p<M(n)=n^{(1-\delta)/\alpha}$ в интеграле по дуге малой окружности сделаем замену переменных $y=pn^{-1/\alpha}e^{i\vartheta}$, где

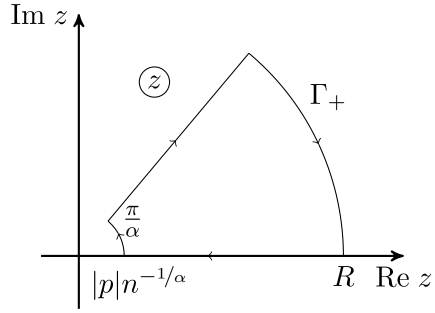

Рис. 2

$\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right)$. Имеем

$$\Big|\exp\Big(t\,p^{\alpha}\int\limits_{\gamma_+} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)\Big| \leqslant \exp\Big(C\,\frac{tp^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}\Big),$$

где через γ_+ обозначен контур

$$\gamma_+ = \Big\{z\in\mathbf{C} : |z| = pn^{-1/\alpha},\ \arg z\in(0,\pi/\alpha)\Big\}.$$

Из условия (26) следует, что существует $C>0$, такая что

$$\Big|\exp\Big(\int\limits_1^{\infty} S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)d\Big(\frac{h(y)}{\alpha y^{\alpha}}\Big)\Big)\Big| \\ \leqslant C\int\limits_1^{\infty}\max\Big(\frac{|p|^{[\alpha]}\,y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}}, \frac{|p|^{[\alpha]+1}\,y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\Big)\frac{dy}{y^{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{C\,|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \quad (55)$$

Выбирая n достаточно большим, получаем

$$\Big\|\widehat{e^{tA^-}\varphi_M^-}\Big\|^2_{W_2^k} \leqslant \int\limits_0^M |\varphi\,(p)|^2\,|p|^{2k}\exp\Big(2Ctp^{\alpha}n^{\delta(\{\alpha\}-1)/\alpha}\Big) \\ \cdot\exp\Big(-2tp^{\alpha}\int\limits_1^{+\infty} S(y)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\Big)dp \leqslant \int\limits_0^M |\varphi\,(p)|^2\,|p|^{2k}\,dp \\ \leqslant \big\|P_M\varphi^-\big\|^2_{W_2^k}.$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+}P_MP_+$. Таким образом, имеем

$$\Big\|e^{tA^{\pm}}P_MP^{\pm}\Big\|_{W_2^l\to W_2^l} \leqslant 1. \quad (56)$$

Нам осталось оценить $\|B^{\pm}P_MP^{\pm}\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\widehat{B^{\pm}P_M\varphi^{\pm}}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} dx \exp(ipx)$$

$$\cdot \Big[n \int\limits_0^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}\Big(x - \sigma_{\mp}\frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(k)}(x)(-\sigma_{\mp}y)^k}{n^{k/\alpha}k!} \Big) d\mathcal{P}(y)$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \Big(\varphi_M^{\pm}(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(\varphi_M^{\pm})^{(k)}(x)(-y)^k}{k!} \Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \Big]$$

$$= \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p) \Big(nt \int\limits_0^{+\infty} S\Big(\frac{\sigma_{\mp}py}{n^{1/\alpha}}\Big) d\mathcal{P}(y) + |p|^{\alpha} c_0(p) \Big).$$

Повторяя рассуждения о повороте контура и пользуясь оценками, аналогичными (53), (55), получаем

$$\Big| \widehat{B^{\pm}P_M\varphi^{\pm}}(p) \Big| \leqslant C \Big| \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p) \Big| \Big(|p|^{\alpha} + |p|^{1+[\alpha]} \Big).$$

Наконец, пользуясь простым неравенством

$$|p|^{[\alpha]+1} + |p|^{\alpha} \leqslant 2\left(1 + |p|^{[\alpha]+1}\right),$$

получаем

$$\Big\| \widehat{B^{\pm}\varphi_M^{\pm}} \Big\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp \left(1 + |p|^{2l}\right) \Big| \widehat{B^{\pm}\varphi^{\pm}}(p) \Big|^2$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \quad (57)$$

Заметим, что утверждение теоремы следует из (48), (49), (56) и (57). □

Список литературы

[1] Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М., Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана. Доклады Академии наук, 2014, т. 459, № 4, декабрь, с. 400-402.

[2] Т. Като, Теория возмущений линейных операторов. «Мир», Москва, 1972.

[3] Дж. Кингман, Пуассоновские процессы, МЦНМО, М., 2007.

[4] П. Кусис, Введение в теорию пространств H_p, Москва, «Мир», 1984.

[5] М.В. Платонова, Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы, Зап. научн. сем. ПОМИ, 442 (2015), 101-117.

[6] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, «Наука и техника», 1987.

[7] A. Lachal, From pseudo-random walk to pseudo-Brownian motion: first exit time from a one-sided or a two-sided interval, International Journal of Stochastic Analysis. Volume 2014 (2014), Article ID 520136, 49 pages.

[8] Nigmatullin R.R., The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. Phys. Stat. sol, 1986.

[9] E. Orsingher, B. Toaldo, Pseudoprocesses related to space-fractional higher-order heat-type equations, Stochastic Analysis and Applications, 32(4): 619 - 641, 2014.

[10] Saichev A.I., Zaslavsky G.M., Fractional kinetic equations: solutions and applications. American Institute of Physics, 1997.

[11] Schwartz L., Theorie des distributions. In 2 vlms. Paris: Hermann, 1950. Vol.1.162 p., 1951. Vol.2.169 p.

[12] Smorodina N.V., Faddeev M.M., The Levy-Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications. Acta Appl. Math. 110, 1289-1308, 2010.

[13] G. M. Zaslavsky, Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport, Phys. Reports 371, 461 (2002).