Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли

Клепиков П.Н.

Аннотация

Данная работа посвящена изучению алгебраических солитонов Риччи на конформно плоских метрических группах Ли. Ранее конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли изучались в случае малой размерности, а также при дополнительном условии диагонализируемости оператора Риччи. Настоящая работа продолжает данные исследования без дополнительного требования диагонализируемости солитона Риччи. Получена теорема о том, что любой нетривиальный конформно плоский алгебраический солитон Риччи на группе Ли обязан быть устойчивым и иметь оператор Риччи с типом Сегре $\{(1\ldots 1\,2)\}$ и единственным собственным значением равным нулю.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантная (псевдо)риманова метрика, алгебраические солитоны Риччи, конформно плоские метрики.

Исследованию многообразий постоянной кривизны Риччи, или эйнштейновых многообразий, посвящены работы многих математиков (см., например, обзоры [1,2]). В последнее время изучаются различные обобщения многообразий Эйштейна, одними из которых являются солитоны Риччи, впервые рассмотреные Р. Гамильтоном в работе [3].

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Так, например, на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи (см. [4, 5]). Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности. Вопрос о существовании нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи на группах Ли размерности более четырех с левоинвариантной римановой метрикой до сих пор остается открытым.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [6]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [7]).

Ранее конформно плоские солитоны Риччи на метрических группах Ли изучались в работе [8], где была получена классификация конформно плоских однородных инвариантных солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли, а также авторами в работе [9] при дополнительном условии диагонализируемости оператора Риччи.

К основным результатам данной работы относятся следующие теоремы и следствие.

Теорема 1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и $SW = 0$. Если оператор Риччи диагонализируем, то алгебраический солитон Риччи тривиален.*

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и $SW = 0$. Тогда G — тривиальный алгебраический солитон Риччи.*

Теорема 3. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи. Если $\Lambda = 0$, то оператор Риччи может иметь только тип Сегре $\{(1\dots 1\,2)\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Теорема 4. *Пусть G — группа Ли (размерности $n \geqslant 4$) с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой g нетривиального алгебраического солитона Риччи и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\Lambda = 0$ и в алгебре Ли существует базис $\{e_1, \dots e_n\}$, в котором оператор дифференцирования D и ненулевые скалярные произведения задаются следующими равенствами:*

$$De_i = 0, \text{ если } i \neq n, \qquad De_n = e_{n-1};$$
$$\langle e_i, e_i\rangle = \varepsilon_i, \text{ если } i \leqslant n-2, \qquad \langle e_{n-1}, e_n\rangle = \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{0, n-2}$. Ненулевые комутационные соотношения задаются следующими выражениями:

$$[e_i, e_j] \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\},\ i, j \leqslant n-2, \qquad [e_i, e_{n-1}] = 0,\ i \leqslant n-2,$$
$$[e_i, e_n] \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\},\ i \leqslant n-2, \qquad [e_{n-1}, e_n] \subseteq \operatorname{span}\{e_{n-1}\}.$$

Кроме того, данная метрическая алгебра Ли является локально симметричной ($\nabla R = 0$) тогда и только тогда, когда $[e_{n-1}, e_n] = 0$.

1. Основные определения и факты

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности $n \geqslant 4$. X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивиты и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ — тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и оператор Риччи ρ определим соответственно как

$$r(X,Y) = \operatorname{tr}(V \to R(X,V)Y), \quad g\left(\rho(X), Y\right) = r(X,Y). \tag{1}$$

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
Если $M = G/H$ — однородное пространство с однородной римановой метрикой g, тогда $(G/H, g)$ — *однородный солитон Риччи.*

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [3]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = id_{M^n}$.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [10]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [11]).

Определение 2. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или пряму произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

Если однородный риманов солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [12]) и по теореме Алексеевского-Кимельфельда многообразие является плоским (см. [13]). В случае стягивающегося однородного риманова солитона из работ [3, 14] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный риманов солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [15]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные римановы солитоны Риччи изометричны солвсолитонам.

Определение 3. Группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если выполняется уравнение:

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D, \tag{2}$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение 4. Две метрические алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ называются *изометричными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ (псевдо)евклидовых пространств, который (будучи продолжен до изоморфизма тензорных алгебр) переводит тензор кривизны Римана и его ковариантные производные в алгебре $\mathfrak{g}$ в соответствующие тензоры алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$.

Замечание. *Из результатов работ [16, 17] следует, что две метрические алгебры Ли изометричны тогда и только тогда, когда соответствуюшие им связные, односвязные группы Ли изометричны как (псевдо)римановы многообразия.*

Определим тензор Вейля W типа $(1,3)$ и тензор Схотена-Вейля SW типа $(0,3)$ равенствами

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (AX \wedge Y)Z + (X \wedge AY)Z,$$
$$SW(X,Y,Z) = \nabla_Z \mathcal{A}(X,Y) - \nabla_Y \mathcal{A}(X,Z),$$

где $\mathcal{A} = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right)$ — тензор одномерной кривизны, s — скалярная кривизна, оператор одномерной кривизны A определяется равенством $g\left(A(X),Y\right) = \mathcal{A}(X,Y)$ и $(X \wedge Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$.

Определение 5. Метрическая группа Ли размерности $n \geqslant 4$ называется *конформно плоской*, если ее тензор Вейля тривиален.

Замечание. *Отметим, что условие $W = 0$ влечет за собой выполнение $SW = 0$. А значит, для конформно плоской группы Ли имеем*

$$R(X,Y)Z = -(AX \wedge Y)Z - (X \wedge AY)Z, \tag{3}$$
$$\nabla_Z \mathcal{A}(X,Y) = \nabla_Y \mathcal{A}(X,Z).$$

2. Алгебраические солитоны Риччи на группах Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля

В данном разделе мы докажем некоторые результаты о алгебраических солитонах Риччи на группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля, а в последующих разделах вернемся к более сильному условию тривиальности тензора Вейля.

Лемма 1. *Пусть (G, g) — алгебраический солитон Риччи и тензор Схоутена-Вейля тривиален, тогда верно тождество*

$$\nabla_{DX}Y = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{4}$$

Доказательство. По определению тензора Схоутена-Вейля, с учетом постоянства скалярной кривизны, имеем:

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)\right).$$

Тензор Риччи, в силу равенств (1) и (2) , выражается через скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и дифференцирование D, значит

$$\begin{aligned}
SW(X, Y, Z) = -\frac{1}{n-2}\big(&\langle \Lambda\nabla_Z X + D\nabla_Z X, Y\rangle + \langle \Lambda X + DX, \nabla_Z Y\rangle - \\
&-\langle \Lambda\nabla_Y X + D\nabla_Y X, Z\rangle - \langle \Lambda X + DX, \nabla_Y Z\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{n-2}\big(&\langle D\nabla_Z X, Y\rangle - \langle D\nabla_Y X, Z\rangle + \langle DX, [Z, Y]\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{n-2}\big(&\langle X, \nabla_Y DZ - \nabla_Z DY\rangle + \langle X, [DZ, Y] + [Z, DY]\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{n-2}\big(&\langle X, \nabla_Y DZ - \nabla_Z DY + \nabla_{DZ} Y - \nabla_Y DZ + \nabla_Z DY - \nabla_{DY} Z\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{n-2}\big(&\langle X, \nabla_{DZ} Y\rangle - \langle X, \nabla_{DY} Z\rangle\big).
\end{aligned}$$

Используя данное равенство и тождество Кошуля [1], получим

$$\begin{aligned}
SW(X, Y, Z) = -\frac{1}{2(n-2)}\big(&\langle [DZ, Y], X\rangle - \langle [Y, X], DZ\rangle - \langle [DZ, X], Y\rangle - \\
&-\langle [DY, Z], X\rangle + \langle [Z, X], DY\rangle + \langle [DY, X], Z\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{2(n-2)}\big(&\langle X, [DZ, Y] + [Z, DY]\rangle + \langle Y, D[Z, X] - [DZ, X]\rangle + \\
&+\langle Z, [DY, X] - D[Y, X]\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{2(n-2)}\big(&\langle Z, [DX, Y]\rangle - \langle DX, [Y, Z]\rangle - \langle Y, [DX, Z]\rangle\big) = \\
= -\frac{1}{n-2}&\langle \nabla_{DX} Y, Z\rangle,
\end{aligned}$$

откуда, в силу невырожденности скалярного произведения, получим требуемое. □

Лемма 2. *Для произвольных векторов X и Y из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ верно*

$$\nabla_X D^2 Y = D^2 \nabla_X Y.$$

Доказательство. Рассмотрим следующее тождество для произвольных векторов X, Y и Z, которое верно в силу того, что D — самосопряженное дифференцирование:

$$\langle DX, [DY, Z]\rangle = \langle X, [D^2Y, Z]\rangle + \langle X, [DY, DZ]\rangle.$$

Так как связность Леви-Чивиты не имеет кручения, то

$$\langle DX, \nabla_{DY}Z - \nabla_Z DY\rangle = \langle X, \nabla_{D^2Y}Z - \nabla_Z D^2Y\rangle + \langle X, \nabla_{DY}DZ - \nabla_{DZ}DY\rangle,$$

откуда, в силу (4), имеем:

$$\langle DX, \nabla_Z DY\rangle = \langle X, \nabla_Z D^2Y\rangle.$$

С одной стороны, отсюда следует

$$\langle X, D\nabla_Z DY\rangle = \langle X, \nabla_Z D^2Y\rangle \quad \Rightarrow \quad D\nabla_Z DY = \nabla_Z D^2Y;$$

С другой стороны

$$\langle D\nabla_Z DX, Y\rangle = \langle D^2\nabla_Z X, Y\rangle \quad \Rightarrow \quad D\nabla_Z DX = D^2\nabla_Z X.$$

Сравнивая полученные выше выражения, получим требуемое. □

Пусть $D\mathfrak{g}$, $D^2\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Ker} D$ — образ оператора D, образ D^2 и ядро D соответственно. Тогда имеет место

Лемма 3. *1. $D\mathfrak{g}$ — абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$;*

2. $D^2\mathfrak{g}$ — абелев идеал алгебры $\mathfrak{g}$;

3. $\operatorname{Ker} D$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$;

4. $[\operatorname{Ker} D, D\mathfrak{g}] \subseteq D\mathfrak{g}$;

5. Если $D^2\mathfrak{g} = 0$, то $[D\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Ker} D$.

Доказательство. Пусть DX и DY — произвольные вектора из $D\mathfrak{g}$, тогда

$$[DX, DY] = \nabla_{DX}DY - \nabla_{DY}DX = 0$$

в силу (4), следовательно $D\mathfrak{g}$ — абелева подалгебра.

Так как $D^2\mathfrak{g} \subseteq D\mathfrak{g}$, то $D^2\mathfrak{g}$ также абелева подалгебра. Кроме того, пусть D^2X и Y — произвольные вектора из $D^2\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ соответственно, тогда

$$[D^2X, Y] = \nabla_{D^2X}Y - \nabla_Y D^2X = -D^2\nabla_Y X \in D^2\mathfrak{g}.$$

Пусть X и Y — произвольные вектора из $\operatorname{Ker} D$, т.е. $DX = 0$ и $DY = 0$, тогда

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] = 0,$$

а следовательно $[X, Y] \in \operatorname{Ker} D$.

Пусть DX и Y — произвольные вектора из $D\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Ker} D$ соответственно, тогда

$$[DX, Y] = D[X, Y] - [X, DY] = D[X, Y] \in D\mathfrak{g}.$$

Пусть DX и Y — произвольные вектора из $D\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ соответственно и $D^2\mathfrak{g} = 0$, тогда

$$D[DX, Y] = [D^2X, Y] + [DX, DY] = 0,$$

а следовательно $[DX, Y] \in \operatorname{Ker} D$. □

Лемма 4. *Для произвольного вектора X из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ верно*

$$D^3X = -\Lambda D^2 X.$$

Доказательство. По определению тензора Римана имеем

$$R\left(D^2X, Y\right) Z = \nabla_Y \nabla_{D^2X} Z - \nabla_{D^2X} \nabla_Y Z + \nabla_{[D^2X,Y]} Z$$

для произвольных векторов X, Y, Z. Все три слагаемых в данном равенстве равны нулю в силу (4) и того, что $D^2\mathfrak{g}$ — идеал по лемме 3. Тогда

$$\left\langle \rho\left(D^2X\right), Y\right\rangle = r\left(D^2X, Y\right) = \operatorname{tr}\left(V \to R\left(D^2X, V\right) Y\right) = 0,$$

что, в силу произвольного выбора Y и невырожденности скалярного произведения, влечет $\rho\left(D^2X\right) = 0$ для произвольного вектора X. Далее, с использованием уравнения алгебраического солитона Риччи (2), получаем требуемое. □

В случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой существуют различные возможные формы оператора Риччи, которые назваются *типами Сегре* (см. [8]). Так, например, запись "оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(11)2\}$" означает, что оператор Риччи имеет два действительных различных собственных значения, оба имеют алгебраическую кратность два, но первому из них соответствует двумерное собственное подпространство, а второму — одномерное. Круглые скобки группируют блоки, соответствующие одному и тому же собственному значению.

Предложение 1. *Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и тензор Схоутена-Вейля SW тривиален, тогда возможны два случая:*

1. $\Lambda \neq 0$*: тогда оператор D имеет тип Сегре $\{(1\ldots1)(1\ldots1\,2\ldots2)\}$, где первому блоку соответствует собственное значение $-\Lambda$, второму — 0.*
2. $\Lambda = 0$*: тогда оператор D имеет тип Сегре $\{(1\ldots1\,2\ldots2\,3\ldots3)\}$ с единственным собственным значением, равным нулю.*

Доказательство. Предположим, что оператор D имеет два комплексно-сопряженных собственных значения $\alpha \pm i\beta$, где $\beta \neq 0$, и соответствующие собственные вектора $U \pm iV$, тогда

$$\begin{gathered} DV = \alpha V + \beta U, \\ D^2V = 2\alpha\beta U + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) V, \\ D^3V = \left(3\alpha^2 - \beta^2\right)\beta U + \left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)\alpha V. \end{gathered}$$

По лемме 4 получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(3\alpha^2 - \beta^2\right)\beta = -2\Lambda\alpha\beta, \\ \left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)\alpha = -\Lambda\left(\alpha^2 - \beta^2\right), \end{cases}$$

откуда следует $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что противоречит условию $\beta \neq 0$. Значит оператор D не может иметь комплексно-сопряженных собственных значений.

Пусть λ — некоторое действительное собственное значение оператора D, X — соответствующий собственный вектор. Тогда из леммы 4 следует

$$\lambda^3 X = -\Lambda\lambda^2 X,$$

а значит оператор D может иметь собственные значения равные либо $-\Lambda$, либо 0.

Пусть собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность k:

$$\begin{gathered} DX_i = -\Lambda X_i + X_{i-1}, \quad i = \overline{1,k}, \quad X_0 = X_{-1} = \ldots = 0, \\ D^2 X_i = \Lambda^2 X_i - 2\Lambda X_{i-1} + X_{i-2}, \\ D^3 X_i = -\Lambda^3 X_i + 3\Lambda^2 X_{i-1} - 3\Lambda X_{i-2} + X_{i-3}. \end{gathered}$$

По лемме 4 получим

$$\Lambda^2 X_{i-1} - 2\Lambda X_{i-2} + X_{i-3} = 0,$$

а значит, если $\Lambda \neq 0$, то собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность не более 1; если $\Lambda = 0$, то собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность не более 3.

Пусть собственное значение 0 имеет кратность k:

$$\begin{gathered} DX_i = X_{i-1}, \quad i = \overline{1,k}, \quad X_0 = X_{-1} = \ldots = 0, \\ D^2 X_i = X_{i-2}, \quad D^3 X_i = X_{i-3}. \end{gathered}$$

По лемме 4 получим

$$\Lambda X_{i-2} + X_{i-3} = 0,$$

а значит, если $\Lambda \neq 0$, то собственное значение 0 имеет кратность не более 2; если $\Lambda = 0$, то собственное значение 0 имеет кратность не более 3. □

Замечание. *Отметим, что некоторые блоки матрицы оператора D в предложении 1 могут быть тривиальными. Например, при $\Lambda = 0$ оператор D может иметь тип Сегре $\{(1\ldots1\,2\ldots2)\}$.*

Замечание. *В силу уравнения алгебраического солитона Риччи (2), оператор Риччи имеет аналогичные типы Сегре, что и оператор D. При этом в первом случае собственные значения равны 0 и Λ соответственно, а во втором, т.к. $\Lambda = 0$, выполняется $\rho = D$.*

Далее мы раздельно рассмотрим два случая: $\Lambda \neq 0$ и $\Lambda = 0$.

3. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли. Случай $\Lambda \neq 0$.

Так как по предложению 1 оператор D в этом случае имеет тип Сегре $\{(1\ldots1)\,(1\ldots1\,2\ldots2)\}$ с собственными значениями $-\Lambda$ и 0, то в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$, в котором матрицы оператора D, оператора Риччи ρ и метрического тензора g имеют следующий блочный вид (см. [18]):

$$D = \begin{pmatrix} -\Lambda E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda E & E \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda E \end{pmatrix}, \ g = \begin{pmatrix} E_1^{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3^{\pm} \\ 0 & 0 & E_3^{\pm} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где размеры блоков на главной диагонали $k\times k$, $m_1\times m_1$, $m_2\times m_2$ и $m_2\times m_2$ соответственно, E — единичная матрица, $E_i^{\pm}$ — диагональная матрица с элементами ±1 на диагонали.

Введем следующие обозначения:

1. $D^2\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_k\}$,

2. $A_1 = \operatorname{span}\{e_{k+1}, \dots, e_{k+m_1}\}$,
3. $A_2 = \operatorname{span}\{e_{k+m_1+1}, \dots, e_{k+m_1+m_2}\}$,
4. $B_2 = \operatorname{span}\{e_{k+m_1+m_2+1}, \dots, e_{k+m_1+2m_2} = e_n\}$,

тогда $D\mathfrak{g} = D^2\mathfrak{g} + A_2$, $\operatorname{Ker} D = A_1 + A_2$.

Лемма 5. *Линейное подпространство $A_1 + A_2 + B_2$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. В силу вида матрицы оператора дифференцирования D (5), а также леммы 3, верны следующие соотношения

$$\begin{aligned}
&D[A_1, B_2] = [D\,A_1, B_2] + [A_1, D\,B_2] = [A_1, A_2] \subseteq A_1 + A_2 &&\Rightarrow [A_1, B_2] \subseteq A_1 + A_2 + B_2;\\
&D[A_2, B_2] = [D\,A_2, B_2] + [A_2, D\,B_2] = [A_2, A_2] = 0 &&\Rightarrow [A_2, B_2] \subseteq A_1 + A_2;\\
&D[B_2, B_2] = [D\,B_2, B_2] + [B_2, D\,B_2] = [A_2, B_2] \subseteq A_1 + A_2 &&\Rightarrow [A_1, B_2] \subseteq A_1 + A_2 + B_2,
\end{aligned}$$

а значит $A_1 + A_2 + B_2$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. □

Комбинируя леммы 3 и 5, получаем что при $\Lambda \neq 0$ алгебра Ли представляется в виде полупрямой суммы $\mathfrak{g} = D^2\mathfrak{g} \rtimes (A_1 + A_2 + B_2)$ своих идеала и подалгебры.

Предложение 2. *При $\Lambda \neq 0$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изометрична прямой сумме $D^2\mathfrak{g} \oplus (A_1 + A_2 + B_2)$.*

Доказательство. В силу определения 4 нам достаточно показать, что тензор кривизны и все его ковариантные производные совпадают как в прямой сумме, так и в полупрямой. Учитывая тождество (4) и вид метрического тензора (5), получаем требуемое. □

Предложение 2 позволяет нам не рассматривать абелев множитель $D^2\mathfrak{g}$ и полагать, что он тривиален. Кроме того, если дополнительно предположить диагонализируемость оператора Риччи, то получим следующую

Теорема 1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и $SW = 0$. Если оператор Риччи диагонализируем, то алгебраический солитон Риччи тривиален.*

В случае групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой оператор Риччи всегда диагонализируем, а значит справедливо

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи и $SW = 0$. Тогда G — тривиальный алгебраический солитон Риччи.*

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой алгебраического солитона Риччи. Если $\Lambda \neq 0$, то алгебраический солитон Риччи тривиален.*

Доказательство. Пусть базисные вектора e_i, e_j и e_k принадлежат A_2, A_2 и B_2 соответственно, тогда по леммам 1 и 3 имеем $R(e_i, e_j)e_k = 0$. Но, с другой стороны, по формуле (3)

$$R(e_i, e_j)e_k = -(A\,e_i \wedge e_j)e_k - (e_i \wedge A\,e_j)e_k = -2\mu(e_i \wedge e_j)e_k =$$

$$= -2\mu\left(\langle e_j, e_k\rangle e_i - \langle e_i, e_k\rangle e_j\right) = 0,$$

где $\mu = \frac{\Lambda}{2(n-1)} \neq 0$ — собственное значения оператора одномерной кривизны. При $i \neq j$ вектора e_i и e_j — линейно независимы и их линейная комбинация не может быть равна нулю.

Полученное противоречие показывает, что мы не можем выбрать $i \neq j$, а значит $\dim A_2 = m_2 = 1$ или оператор Риччи диагонален.

Пусть базисные вектора e_i и e_j принадлежат A_1 и A_2 соответственно, тогда по леммам 1 и 3 имеем $R(e_i, e_j)e_i = 0$. Но, с другой стороны, из вида метрического тензора (5) и формулы (3) следует

$$R(e_i, e_i)e_k = -(A\, e_i \wedge e_j)e_i - (e_i \wedge A\, e_j)e_i = -2\mu(e_i \wedge e_j)e_i = \\ = -2\mu\left(\langle e_j, e_i\rangle e_i - \langle e_i, e_i\rangle e_j\right) = 2\mu\langle e_i, e_i\rangle e_j \neq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\dim A_2 = m_2 = 0$, т.к. $n \geq 4$, а значит оператор Риччи диагонален, и по следствию 1 алгебраический солитон Риччи тривиален. $\square$

4. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли. Случай $\Lambda = 0$.

Так как по предложению 1 оператор D в этом случае имеет тип Сегре $\{(1 \ldots 1\, 2 \ldots 2\, 3 \ldots 3)\}$ с единственным собственным значением равным нулю, то в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором матрицы оператора D, оператора Риччи ρ и метрического тензора g имеют следующий блочный вид (см. [18]):

$$D = \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} E_1^{\pm} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2^{\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^{\pm} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_3^{\pm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_3^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3^{\pm} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где размеры блоков на главной диагонали $m_1 \times m_1$, $m_2 \times m_2$, $m_2 \times m_2$, $m_3 \times m_3$, $m_3 \times m_3$ и $m_3 \times m_3$ соответственно, E — единичная матрица, $E_i^{\pm}$ — диагональная матрица с элементами ± 1 на диагонали.

Введем следующие обозначения:

1. $A_1 = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{m_1}\}$,
2. $A_2 = \operatorname{span}\{e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_1+m_2}\}$,
3. $B_2 = \operatorname{span}\{e_{m_1+m_2+1}, \ldots, e_{m_1+2m_2}\}$,
4. $A_3 = \operatorname{span}\{e_{m_1+2m_2+1}, \ldots, e_{m_1+2m_2+m_3}\}$,
5. $B_3 = \operatorname{span}\{e_{m_1+2m_2+m_3+1}, \ldots, e_{m_1+2m_2+2m_3}\}$,
6. $C_3 = \operatorname{span}\{e_{m_1+2m_2+2m_3+1}, \ldots, e_{m_1+2m_2+3m_3} = e_n\}$,

тогда $D^2\mathfrak{g} = A_3$, $D\mathfrak{g} = A_2 + A_3 + B_3$, $\operatorname{Ker} D = A_1 + A_2 + A_3$.

Теорема 3. *Пусть G — группа Ли с левоинвариантной конформно плоской (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи. Если $\Lambda = 0$, то оператор Риччи может иметь только тип Сегре $\{(1 \dots 1\,2)\}$ с единственным собственным значением равным нулю.*

Доказательство. Пусть базисные векторы e_i, e_j и e_{j-m_3} принадлежат A_3, C_3 и B_3 соответственно, тогда по леммам 1 и 3 имеем $R(e_i, e_j)e_{j-m_3} = 0$. Но с другой стороны, из вида метрического тензора (6) и формулы (3) следует

$$R(e_i, e_j)e_{j-m_3} = -(A\,e_i \wedge e_j)e_{j-m_3} - (e_i \wedge A\,e_j)e_{j-m_3} = -\frac{1}{n-2}(e_i \wedge e_{j-m_3})e_{j-m_3} =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\left(\langle e_{j-m_3}, e_{j-m_3}\rangle e_i - \langle e_i, e_{j-m_3}\rangle e_{j-m_3}\right) = -\frac{1}{n-2}\langle e_{j-m_3}, e_{j-m_3}\rangle e_i = 0,$$

но $\langle e_{j-m_3}, e_{j-m_3}\rangle \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что $\dim A_3 = m_3 = 0$, т.е. оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1\,2 \dots 2)\}$ и $D^2\mathfrak{g} = 0$.

Пусть X и Y — произвольные векторы из алгебры Ли. Рассмотрим следующее тождество

$$[DX, Y] + [X, DY] = D[X, Y].$$

Спроецировав данное равенство на A_1, получим

$$[DX, Y]\Big|_{A_1} + [X, DY]\Big|_{A_1} = 0,$$

тогда, с учетом лемм 1 и 3, имеем

$$R(DX, Y)Z + R(X, DY)Z = \nabla_{[DX,Y]}Z + \nabla_{[X,DY]}Z = 0,$$

для произвольного вектора Z. Но, с другой стороны, из вида метрического тензора (6) и формулы (3) следует

$$R(DX, Y)X + R(X, DY)X = -(ADX \wedge Y)X - (DX \wedge AY)X$$
$$- (AX \wedge DY)X - (X \wedge ADY)X = -\frac{2}{n-2}(DX \wedge DY)X =$$
$$= -\frac{2}{n-2}\left(\langle DY, X\rangle DX - \langle DX, X\rangle DY\right).$$

Если $X, Y \notin \operatorname{Ker} D$ и DX, DY — линейно независимы, то $\langle DY, X\rangle = 0$ и $\langle DX, X\rangle \neq 0$. Тогда $R(DX, Y)X + R(X, DY)X \neq 0$ — противоречие, следовательно $\dim A_2 = m_2 = 1$, т.е. оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1\,2)\}$. □

Далее мы приведем структурную теорему о строении алгебры Ли группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи. Данная теорема верна в силу лемм 1 и 3, теорем 2 и 3, а также результатов работы [19].

Теорема 4. *Пусть G — группа Ли (размерности $n \geqslant 4$) с левоинвариантной (псевдо)римановой конформно плоской метрикой g нетривиального алгебраического солитона Риччи и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\Lambda = 0$ и в алгебре Ли существует базис $\{e_1, \dots e_n\}$, в котором оператор дифференцирования D и ненулевые скалярные произведения задаются следующими равенствами:*

$$De_i = 0, \text{ если } i \neq n, \qquad De_n = e_{n-1};$$

$$\langle e_i, e_i\rangle = \varepsilon_i, \ \text{если } i \leqslant n-2, \qquad \langle e_{n-1}, e_n\rangle = \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = \overline{0, n-2}$. *Ненулевые коммутационные соотношения задаются следующими выражениями:*

$$[e_i, e_j] \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}, \ i,j \leqslant n-2, \qquad [e_i, e_{n-1}] = 0, \ i \leqslant n-2,$$
$$[e_i, e_n] \subseteq \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}, \ i \leqslant n-2, \qquad [e_{n-1}, e_n] \subseteq \operatorname{span}\{e_{n-1}\}.$$

Кроме того, данная метрическая алгебра Ли является локально симметричной ($\nabla R = 0$) *тогда и только тогда, когда* $[e_{n-1}, e_n] = 0$.

Замечание. *Также отметим, что из результатов работы [19] следует, что группа Ли, алгебра Ли которой описана в предыдущей теореме, является многообразием Уокера (см. [20]) с левоинвариантным параллельным изотропным одномерным распределением* $D\mathfrak{g}$.

В качестве примера приведем следующую метрическую алгебру Ли размерности $n \geqslant 4$, ненулевые скобки Ли которой задаются равенствами

$$[e_i, e_n] = \alpha e_i, \ i \leqslant n-2, \quad [e_{n-1}, e_n] = \beta e_{n-1},$$

где $\alpha = \frac{\beta(n-2)+\sqrt{(n-2)(\beta^2(n-2)-4\varepsilon_0)}}{2(n-2)}$ и $\beta^2(n-2) - 4\varepsilon_0 \geqslant 0$. Ненулевые скалярные произведения задаются следующими равенствами

$$\langle e_i, e_i\rangle = \varepsilon_i, \ \text{если } i \leqslant n-2, \quad \langle e_{n-1}, e_n\rangle = \varepsilon_0.$$

Данная разрешимая метрическая алгебра Ли является нетривиальным конформно плоским алгебраическим солитоном Риччи. Она не локально симметрична при $\beta \neq 0$.

Список литературы

[1] А. Бессе. *Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ.* Мир, М., 1990.

[2] Ю.Г. Никоноров, Е.Д. Родионов, В.В. Славский. Геометрия однородных римановых многообразий. *Современная математика и ее приложения. Геометрия*, 37:1–78, 2006.

[3] R.S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 71:237–261, 1988.

[4] F. L. Cerbo. Generic properties of homogeneous Ricci solitons. *Adv. Geom*, 14(2):225–237, 2014.

[5] П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли. *Известия АлтГУ*, 85(1/2):122–129, 2015.

[6] J. Lauret. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds. *Math. Ann*, 319(4):715–733, 2001.

[7] K. Onda. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case. *Acta Mathematica Hungarica*, 144(1):247–265, 2014.

[8] M. Chaichi, Y. Keshavarzi. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces. *Indian Journal of Science and Technology*, 8(12):1–11, 2015.

[9] П.Н. Клепиков, Д.Н. Оскорбин. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. *Известия АлтГУ*, 89(1):123–128, 2016.

[10] H.-D. Cao. Recent progress on Ricci solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*, 11:1–38, 2010.

[11] R.M. Arroyo, R. Lafuente. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions. *Int Math Res Notices*, 2014.

[12] J. Lauret. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry. *Contemp. Math*, 491:1–35, 2009.

[13] D.V. Alexeevskii, B.N. Kimel'fel'd. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature. *Funktional. Anal. i Pril*, 9(2):5–11, 1975.

[14] P. Petersen, W. Wylie. On gradient Ricci solitons with symmetry. *Proc. Amer. Math. Soc*, 137(6):2085–2092, 2009.

[15] T. Ivey. Ricci solitons on compact three-manifolds. *Differential Geometry and Applications*, 3(4):301–307, 1993.

[16] T. Jentsch. The Jet Isomorphism Theorem of pseudo-Riemannian geometry. 2015. arXiv:1509.08269.

[17] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. Пер. с англ.* Наука, М., 1988.

[18] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.

[19] K. Honda. Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature and Ricci Operators. *Tokyo J. of Math.*, 26(1):241–260, 2003.

[20] M. Brozos-Vazquez, E. Garcia-Rio, P. Gilkey, S. Nikcevic, R. Vazquez-Lorenzo. *The Geometry of Walker Manifolds*. Morgan and Claypool Publishers, 2009.