РАБОТА НА КОНКУРС МЁБИУСА

На тему: «ПРОСТРАНСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНУЮ СФЕРУ»

Автор: Габдурахманов Равиль Марсельевич
Научный руководитель: д.ф.-м.н., Пенской Алексей Викторович

Москва, 2016 г.

Содержание

1. Введение

Пусть $\phi : M \to N$ гладкое отображение римановых многообразий. Определим функционал *энергии* формулой

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int\limits_M |d\phi(x)|^2 dx,$$

где $d\phi(x)$ обозначает дифференциал ϕ в точке $x \in M$; и dx это элемент объема M. Функционалу E соответствует оператор Эйлера-Лагранжа $\tau(\phi) = div(d\phi)$, называемый *полем напряжений* ϕ. Отображение $\phi : M \to N$ называется *гармоническим*, если его поле напряжений всюду равно нулю.

Гармонические отображения возникают в разных вариациях в физике и в математике: в теории минимальных поверхностей и спектральной геометрии. К примеру:

- Если $dim\, M = 1$, то гармонические отображения это геодезические на N.
- Если $N = \mathbb{R}$, то это гармонические функции на M.
- Если $dim\, M = 2$, то они содержат параметрические представления минимальных поверхностей в N с интегралом Дирихле-Дугласа в качестве функционала энергии.

В связи с этим гармоническим отображениям было посвящено множество исследований в 20 веке. Среди них работы Калаби [1, 2], Барбосы [3] и Брайанта [4]. В дальнейшем нам понадобится следующее предложение и основополагающие теоремы.

Предложение 1.1. [9] *Изометрическое погружение $\phi : (M, g) \to (N, h)$ минимально тогда и только тогда, когда оно гармоническое.*

Теорема 1.2. (Калаби [1]). *Пусть $X : S^2 \to \mathbb{R}^n$ погружение сферы S^2 в $\mathbb{R}^n$, образ которой локально минимальная поверхность в сфере rS^{n-1} радиуса r и к тому же не содержится ни в какой гиперплоскости $\mathbb{R}^n$. Тогда выполнено следующее:*

1) Площадь $A = A(S^2)$ образа S^2 целое кратное $2\pi r^2$.

2) Размерность n нечётная.

В этой теореме предполагается, что образ отображения $X : S^2 \to \mathbb{R}^n$ не лежит ни в какой гиперплоскости $\mathbb{R}^n$. Такие отображения называются *линейно полными.* Отметим также, что если в условиях теоремы 1.2 индуцировать на S^2 метрику посредством X, то погружение X будет изометрическим, а следовательно и гармоническим благодаря предложению 1.1. Барбоса уточняет пункт 1) теоремы 1.2 в случае $r = 1$.

Теорема 1.3. (Барбоса [3]). *Площадь обобщённого минимального погружения $X : S^2 \to S^{2m}$ равна $4\pi d$, для некоторого $d \in \mathbb{N}$*

Обобщенность минимального погружения X в этой теореме означает, что метрика, индуцируемая X на S^2 может быть вырождена в изолированных точках. Число d, фигурирующее в этой теореме, называется *гармонической степенью* (или просто *степенью*) гармонического отображения X. Случай $m = 2$ был исследован Брайантом в [4] и использует конструкцию твисторного расслоения $\pi : \mathbb{C}P^3 \to S^4$, которое будет введено в разделе 2. Необходимые результаты из его работы могут быть изложены в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4. (Брайант [4]).

1) Пусть $\psi : S^2 \to \mathbb{C}P^3$ линейно полная горизонтальная голоморфная кривая, тогда $\phi = \pi\psi : S^2 \to S^4$ линейно полное гармоническое отображение. Наоборот, каждое линейно полное гармоническое отображение $\phi : S^2 \to S^4$ получается как $\pm\pi\psi$, для некоторой однозначно определённой линейно полной горизонтальной голоморфной кривой ψ, называемой твисторным поднятием ϕ.

2) Твисторное поднятие линейно полного гармонического отображения $\phi : S^2 \to S^4$ алгебраично.

3) Площадь S^2 относительно метрики, индуцированной ϕ, равна $4\pi d$, где d это степень твисторного поднятия.

В данной работе мы исследуем гармонические отображения $\phi : \mathbb{R}P^2 \to S^4$ с площадью в индуцированой метрике 6π, 8π, 10π и 12π. Для этого мы используем двулистное ориентирующее риманово накрытие $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ и твисторное поднятие в $\mathbb{C}P^3$ гармонических отображений $S^2 \to S^4$, согласованных с антиподальной инволюцией S^2 (т.е. опускающихся до гармонических отображений $\mathbb{R}P^2 \to S^4$).

В данной работе мы будем существенно использовать статьи Болтона и Вудварда [6, 7, 8].

2. Твисторное расслоение и действие групп

Определим конструкцию твисторного расслоения $\pi : \mathbb{C}P^3 \to S^4$. Пусть $\mathbb{H}^2$ это левое кватернионное векторное пространство. Тогда π получается при помощи композиции отображения Хопфа $\rho : \mathbb{C}P^3 \to \mathbb{H}P^1$, заданного как:

$$\rho([z_1, z_2, z_3, z_4]) = [z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j],$$

и канонического отождествления $\mathbb{H}P^1$ с $S^4 \subset \mathbb{H} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^5$, заданного при помощи стереографической проекции из южного полюса S^4 на экваториальную гиперплоскость $\mathbb{H}$ в $\mathbb{R}^5$, которая вложена в $\mathbb{H}P^1$ посредством $q \mapsto [q, 1]$. Явно это отождествление задается так:

$$[q_1, q_2] \in \mathbb{H}P^1 \leftrightarrow \frac{(2\bar{q}_1 q_2, |q_1|^2 - |q_2|^2)}{|q_1|^2 + |q_2|^2} \in S^4.$$

Отсюда получаем явную формулу для твисторного расслоения

$$\pi([z_1, z_2, z_3, z_4]) = \frac{(2(\bar{z}_1 z_3 + z_2 \bar{z}_4), 2(\bar{z}_1 z_4 - z_2 \bar{z}_3), |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2}.$$

Если $\mathbb{C}P^3$ наделить метрикой Фубини-Штуди постоянной голоморфной секционной кривизны 1, то π риманова субмерсия и горизонтальное распределение на $\mathbb{C}P^3$ состоит из касательных к $\mathbb{C}P^3$ векторов, которые ортогональны слоям π.

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Тогда проективизация $PSp(2;\mathbb{C})$ комплексифицированной симплектической группы

$$Sp(2;\mathbb{C}) = \{A \in SL(4;\mathbb{C}) | A^t J A = J\}$$

действует на $\mathbb{C}P^3$ стандартно, как группа голоморфных диффеоморфизмов, сохраняющих горизонтальное распределение [7]. $PSp(2) = PSp(2;\mathbb{C}) \cap PU(4)$ подгруппа голоморфных изометрий, сохраняющих горозонтальное распределение.

Отметим, что эти группы действуют на $\mathbb{C}P^3$ транзитивно, а также, что $Sp(2)$, а следовательно, и $PSp(2)$ линейно связна [10]. Также заметим, что элементы $Sp(2)$ состоят из матриц вида $(\mathbf{u}, J\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, J\bar{\mathbf{v}})$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ - единичные векторы в $\mathbb{C}^4$, и $\mathbf{v}$ ортогонален к $\mathbf{u}$ и $J\bar{\mathbf{u}}$.

Положим S это риманова поверхность, и $\psi : S \to \mathbb{C}P^3$ голоморфная кривая. Тогда ψ *горизонтальна*, если в каждой точке она касается горизонтального распределения на $\mathbb{C}P^3$, или, что то же самое, если она пересекается с каждым слоем π ортогонально. Условие горизонтальности [4] для голоморфной кривой $\psi = [\mathbf{f}] = [f_1, f_2, f_3, f_4]$:

$$(\mathbf{f}', J\mathbf{f}) = 0, \tag{2.2}$$

где (,) обозначает комплексное билинейное расширение на $\mathbb{C}^4$ стандартного скалярного произведения на $\mathbb{R}^4$. Это условие может быть также записано как:

$$f_1'f_2 - f_1f_2' + f_3'f_4 - f_3f_4' = 0. \tag{2.3}$$

Отсюда и до конца данной работы мы записываем голоморфные кривые $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ в терминах локальной координаты z в виде $\psi = [\mathbf{f}] = [f_1, f_2, ..., f_{n+1}]$, где $f_1, ..., f_{n+1}$ голоморфные функции от z, не имеющие общих корней. Мы будем называть такое представление *приведенной формой* ψ.

3. Особые точки горизонтальных голоморфных кривых

В этом разделе мы дадим определение типов особенностей голоморфных кривых в $\mathbb{C}P^n$, следуя [6]. Положим, что $\psi : S \to \mathbb{C}P^n$ линейно полная голоморфная кривая. В терминах локальной координаты в приведенной форме $\psi = [\mathbf{f}] = [f_1, f_2, ..., f_{n+1}]$, и пусть $\mathbf{f}^{(j)}$ обозначает j-ую производную $\mathbf{f}$ по z. Определим *k-ую оскулирующую кривую* как $[\mathbf{f} \wedge \ldots \wedge \mathbf{f}^{(k)}]$ для каждого $k = 0, \ldots, n-1$, тогда *высшая особенность* ψ это точка $p \in S$, в которой производная k-ой оскулирующей кривой равна нулю для некоторого $k = 0, \ldots, n-1$. Множество $Z(\psi)$ высших особенностей ψ тогда задаётся как:

$$Z(\psi) = \{p \in S \,|\, \mathbf{f} \wedge \ldots \wedge \mathbf{f}^{(n)}(p) = 0\}.$$

Если z это локальная комплексная координата, такая что $z(p) = 0$, то $\mathbf{f}$ может быть записана в *нормальной форме*:

$$\mathbf{f}(z) = h_0(z)\mathbf{a}_0 + z^{r_0(p)+1}h_1(z)\mathbf{a}_1 + \ldots + z^{r_0(p)+\ldots r_{n-1}(p)+n}h_n(z)\mathbf{a}_n$$

с подходящим базисом $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, неотрицательными целыми числами $r_0(p), \ldots, r_{n-1}(p)$, и голоморфными функциями $h_0(z), \ldots, h_n(z)$, не равными нулю в $z = 0$. Если $r_k(p) > 0$, то производная k-ой оскулирующей кривой имеет нуль порядка $r_k(p)$ в точке p и *тип особенностей* ψ определяется как множество

$$\{(p; r_0(p), \ldots, r_{n-1}(p)) \,|\, p \in Z(\psi)\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $g \in PGL(n+1;\mathbb{C})$ и ω - конформный диффеоморфизм S. Если ψ имеет тип особенностей $\{(p; r_0(p), \ldots, r_{n-1}(p)) \,|\, p \in Z(\psi)\}$, то $g\psi\omega^{-1}$ имеет тип особенностей $\{(\omega(p); r_0(p), \ldots, r_{n-1}(p)) \,|\, p \in Z(\psi)\}$.*

Дадим теперь критерий для нахождения высших особенностей линейно полной горизонтальной голоморфной кривой $\psi : S \to \mathbb{C}P^3$.

Лемма 3.2. *Пусть $\psi : S \to \mathbb{C}P^3$ линейно полная горизонтальная голоморфная кривая, записанная в теримнах локальной комплексной координаты z в приведенной форме $\psi(z) = [\mathbf{f}(z)] = [f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)]$. Тогда $z = a$ высшая особенность ψ тогда и только тогда, когда*

$$(f_1''f_2' - f_1'f_2'' + f_3''f_4' - f_3'f_4'')(a) = 0, \tag{3.1}$$

или, что то же самое, когда $(\mathbf{f}'', J\mathbf{f}')(a) = 0$.

Для линейно полной голоморфной кривой $\psi : S^2 \to \mathbb{C}P^n$ и $k = 0, \ldots, n-1$ определим

$$r_k = \sum_{p \in Z(\psi)} r_k(p).$$

Предложение 3.3. *Пусть $\psi : S^2 \to \mathbb{C}P^3$ линейно полная горизонтальная голоморфная кривая и $p \in S^2$. Тогда $r_0(p) = r_2(p)$ и*

$$2r_0 + r_1 = 2d - 6, \tag{3.2}$$

где d - степень ψ.

Доказательства Леммы 3.2 и Предложения 3.3 могут быть найдены в [6].

4. Каноническая форма

Благодаря теореме 1.4, твисторное поднятие линейно полного гармонического отображения $\phi : S^2 \to S^4$ и, в частности, его алгебраичность, дают мощный инструмент для исследования гармонических отображений. А именно, пусть $HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ обозначает множество линейно полных горизонтальных голоморфных отображений из S^2 в $\mathbb{C}P^3$ степени d, и пусть $Harm_d^{LF}(S^4)$ обозначает множество линейно полных гармонических отображений из S^2 в S^4 с индуцированной площадью $4\pi d$. Тогда $Harm_d^{LF}(S^4)$ распадается на две компоненты $Harm_d^{+}(S^4)$ и $Harm_d^{-}(S^4)$, которые переставляются посредством антиподальной инволюции S^4, и существует биективное соответствие

$$\pi_*^{\pm} : HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3) \to Harm_d^{\pm}(S^4) \tag{4.1}$$

заданное как $\pi_*^{\pm}(\psi) = \pm\pi \circ \psi$.

Ясно, что $p \in S^2$ точка ветвления ψ тогда и только тогда, когда $r_0(p) > 0$. В случае $r_0(p) = 0$, как показано в разделе 7 работы [7], p омбилическая точка тогда и только тогда, когда $r_1(p) > 0$. Также из [11] следует, что точки ветвления и омбилические точки ϕ соответствуют таковым для ψ. Таким образом высшие особенности ψ возникают в точках ветвления и омбилических точках ϕ.

Ясно, что $PSp(2)$ действует свободно на $HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ при помощи посткомпозиции со стандартным действием на $\mathbb{C}P^3$ и из Леммы 3.1 следует, что тип особенностей сохраняется. Отождествления, заданные $\pi_*^{\pm}$, определяют действие $PSp(2)$ на $Harm_d^{\pm}(S^4)$, которое сохраняет индуцированную площадь, точки ветвления, омбилические точки и согласованность с антиподальной инволюцией. Аналогично, группа вращений сферы $SO(3) \cong PSU(2)$ действует на пространствах $HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ и $Harm_d^{\pm}(S^4)$ посредством прекомпозиции со стандартным действием на $S^2 = \mathbb{C}P^1$, и также сохраняет согласованность с антиподальной инволюцией. Отметим, что действия $PSp(2)$ и $PSU(2)$ коммутируют и что отображения $\pi_*^{\pm}$ $PSp(2)$-эквивариантны и $PSU(2)$-эквивариантны.

Рассмотрим теперь векторное пространство $\mathbb{C}[z]_d$ полиномов степени не выше d. Пусть V подпространство $(\mathbb{C}[z]_d)^4$, состоящее из таких четвёрок взаимно простых полиномов максимальной степени d, для которых отображение $z \to [f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)]$ линейно полно в $\mathbb{C}P^3$. Тогда V проективное подмножество $(\mathbb{C}[z]_d)^4$, и мы отождествляем его проективизацию $P(V)$ с пространством линейно полных голоморфных отображений степени d из S^2 в $\mathbb{C}P^3$ обычным образом:

$$[f_1, f_2, f_3, f_4] \leftrightarrow (z \to [f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)]).$$

Здесь и далее мы используем комплексную координату на S^2, определённую посредством стереографической проекции из южного полюса S^2 на экваториальную плоскость, таким образом мы, как обычно, можем отождествить S^2 и $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Антиподальная инволюция при таком отождествлении переводит z в $-1/\bar{z}$.

Наделим $(\mathbb{C}[z]_d)^4$ стандартной топологией векторного пространства, а $P((\mathbb{C}[z]_d)^4)$ соответствующей топологией проективизации. Тогда V открытое подмножество $(\mathbb{C}[z]_d)^4$, а $P(V)$ открытое подмножество $P((\mathbb{C}[z]_d)^4)$. Подмножества любого из этих пространств тогда наделяются индуцированной топологией. Обозначим подмножество горизонтальных отображений $V^H \subset V$. $Harm_d^{LF}(S^4)$ наделим компактно-открытой топологией. И приведём лемму из [8].

Лемма 4.1. *$Harm_d^{\pm}(S^4)$ являются замкнутыми подмножествами в $Harm_d^{LF}(S^4)$, и отображения $\pi_*^{\pm} : P(V^H) \to Harm_d^{\pm}(S^4)$ являются гомеоморфизмами.*

Для удобства мы также введём понятие *матрицы коэффициентов (*или просто *матрицы)* голоморфной кривой $\mathbf{f}(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)) \in (\mathbb{C}[z]_d)^4$. Она равна:

$$F = \begin{pmatrix} a_1^0 & a_1^1 & \dots & a_1^{d-1} & a_1^d \\ a_2^0 & a_2^1 & \dots & a_2^{d-1} & a_2^d \\ a_3^0 & a_3^1 & \dots & a_3^{d-1} & a_3^d \\ a_4^0 & a_4^1 & \dots & a_4^{d-1} & a_4^d \end{pmatrix},$$

где a_i^j - это j-ый коэффициент многочлена $f_i(z) = a_i^0 + a_i^1 z + \ldots + a_i^j z^j + \ldots + a_i^d z^d$, и $1 \leq i \leq 4$, $0 \leq j \leq d$. Из определения видно, что тогда $(\mathbf{f}(z))^t = F \cdot (1, z, z^2, \ldots, z^d)^t$. А также ясно, что кривая $\mathbf{f}(z)$ линейно полна только тогда, когда её матрица коэффициентов F имеет полный ранг.

Заметим, что элемент $A \in Sp(2)$, действующий на $\mathbf{f}(z) \in (\mathbb{C}[z]_d)^4$ при помощи посткомпозиции (т.е. $A : \mathbf{f}(z) \to A \circ \mathbf{f}(z)$), действует на матрицу коэффициентов F умножением слева (т.е. $A : F \to AF$). Также, как отмечалось выше, на двумерной сфере действует группа $PSU(2) \cong SO(3)$, как группа поворотов S^2. Причем, действие $PSU(2)$ на S^2 опускается до действия на $\mathbb{R}P^2$, поскольку оно переводит антиподальные точки в антиподальные. Отметим также, что эта группа линейно связна [10].

В следующих разделах мы будем исследовать линейно полные гармонические отображения S^2 в S^4 степеней $d = 3, 4, 5$ и 6 опускающиеся до линейно полных гармонических отображений $\mathbb{R}P^2$ в S^4 (т.е. согласованные с антиподальной инволюцией). Обозначим подпространство линейно полных гармонических отображений S^2 в S^4 степени d согласованных с антиподальной инволюцией $AHarm_d^{LF}(S^4) \subset Harm_d^{LF}(S^4)$, с $AHarm_d^{\pm}(S^4) \subset Harm_d^{\pm}(S^4)$. Твисторное поднятие таких отображений обозначим $AHHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3) \subset HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3)$. Мы будем приводить такие отображения к некоторой канонической форме посредством действия подходящими элементами из $PSU(2)$ и $PSp(2)$. При этом, как отмечалось ранее, согласованность с антиподальной инволюцией будет сохраняться, что означает, что мы будем гомотопировать элементы $AHarm_d^{LF}(S^4)$ внутри $AHarm_d^{LF}(S^4)$. Это позволит нам ответить на вопрос о связности $AHarm_d^{LF}(S^4)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.2. *Любое отображение $\psi \in HHol_d^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ подходящим элементом $g \in PSp(2)$ приводится к отображению $g\psi$ с матрицей коэффициентов вида*

$$\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \ast & \dots & \ast \\ 0 & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast \\ 0 & 0 & \ast & \ast & \dots & \ast \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Во-первых, транзитивность действия $PSp(2)$ на $\mathbb{C}P^3$, позволяет нам привести первый столбец к указанному виду. Далее, мы заметим, что элементы $Sp(2)$, сохраняющие вектор $(1, 0, 0, 0)^t$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & -\bar{v}_2 \\ 0 & 0 & v_2 & \bar{v}_1 \end{pmatrix},$$

и поскольку в правом нижнем углу стоит матрица из $U(2)$, мы можем занулить последнюю координату второго столбца. Оставшиеся два нуля во второй строке следуют из условия горизонтальности (2.3). $\square$

Лемма 4.3. *Согласованные с антиподальной инволюцией отображения из Леммы 4.2, имеют матрицу коэффициентов вида*

$$\begin{pmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \ast & \dots & \ast & \ast \\ 0 & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast & 0 \\ 0 & 0 & \ast & \ast & \dots & \ast & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно, пусть матрица коэффициентов ψ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast & b \\ 0 & 0 & 0 & \ast & \dots & \ast & c \\ 0 & \ast & \ast & \ast & \dots & \ast & d \\ 0 & 0 & \ast & \ast & \dots & \ast & e \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая значения $\phi(0) = \pi \circ \psi(0)$ и $\phi(\infty)$, получаем равенства

$$\bar{b}d + c\bar{e} = 0,$$

$$\bar{b}e - c\bar{d} = 0,$$
$$|d|^2 + |e|^2 = 0,$$

из которых и следует утверждение леммы. □

5. Гармонические отображения $RP^2 \to S^4$ площади 6π

Из предложения 3.3 мы можем заключить, что кривые степени 3 не имеют высших особенностей.

Теорема 5.1. *Любая линейно полная горизонтальная голоморфная кривая $\psi \in AHHol_3^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ подходящими элементами $g \in PSp(2)$ и $\omega \in PSU(2)$ приводится к канонической кривой $\Psi^3(z) = g\psi\omega(z) = [1, -z^3, -\sqrt{3}z, -\sqrt{3}z^2]$.*

Доказательство. Используя леммы 4.2 и 4.3 получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & s & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

далее, написав условие горизонтальности, получаем равенства

$$ad = 0,$$
$$bd = 0,$$
$$3d - sq = 0, \tag{5.1}$$

из которых следует, что $a = b = 0$ и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{sq}{3} \\ 0 & s & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим теперь, что s, q можно сделать вещественными. Действительно, пусть $s = \tilde{s}e^{ix}$ и $q = \tilde{q}e^{iy}$ показательные формы чисел s и q. Тогда преобразования $\omega(z) = \exp(-i\frac{x+y}{3})z$, $g = diag\{1, 1, \exp(i\frac{y-x}{3}), \exp(i\frac{x-y}{3})\}$ дают необходимое.

Проверим теперь согласованность с антиподальной инволюцией на вещественной прямой, приравняв значения $\phi(x)$ и $\phi(-\frac{1}{x})$, получим равенства

$$(|c|^2 + d^2)s^2 = |p|^2 + q^2,$$
$$(|c|^2 + d^2)(|p|^2 + q^2) = s^2,$$
$$\mathrm{Re}(p) = -\mathrm{Re}(p)(|c|^2 + d^2),$$
$$\mathrm{Re}(c)s^2 = -\mathrm{Re}(c)(|p|^2 + q^2),$$
$$\mathrm{Im}(c)s = \mathrm{Im}(p),$$
$$\mathrm{Im}(c)s = -\mathrm{Im}(p),$$
$$dq = -s,$$

из которых и равенства (5.1) следует $c = p = 0$, $d^2 = 1$, $q^2 = s^2 = 3$ и $dq = -s$. Следовательно, мы получаем четыре случая:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

которые, как нетрудно видеть, переводятся один в другой подходящей комбинацией преобразований $\omega(z) = -z$, $g = diag\{1, 1, -1, -1\}$. Легко проверить, что, например, первое из них (а значит и все остальные) согласовано с антиподальной инволюцией. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Вывод 5.2. *Пространства* $AHHol_3^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ *и* $AHarm_3^{\pm}(S^4)$ *линейно связны.*

Доказательство. Следует из теоремы 5.1, леммы 4.1 и того, что $PSp(2)$ и $PSU(2)$ линейно связны. $\square$

Таким образом пространство гармонических отображений $\mathbb{R}P^2$ в S^4 с площадью 6π в индуцированной метрике имеет две компоненты связности $AHarm_3^+(S^4)$ и $AHarm_3^-(S^4)$, которые гомеоморфны посредством антиподальной инволюции S^4.

6. Гармонические отображения $RP^2 \to S^4$ площади 8π

В случае степени 4 из предложения 3.3 мы видим, что такие кривые имеют либо одну точку ветвления, либо две омбилические точки. Ясно, что отображение с одной точкой ветвления не может быть согласовано с антиподальной инволюцией. Поэтому остаётся случай двух омбилических точек, которые, очевидно, должны быть антиподальными.

Теорема 6.1. *Не существует линейно полных горизонтальных голоморфных кривых* $\psi \in AHHol_4^{LF}(\mathbb{C}P^3)$, *т.е. пространство* $AHHol_4^{LF}(\mathbb{C}P^3)$, *а с ним и пространства* $AHarm_4^{\pm}(S^4)$, *пусты.*

Доказательство. Предположим, что такие кривые есть. И выберем одну из них. Первым делом мы переведем одну из особых точек в нуль подходящим поворотом S^2. Далее мы воспользуемся леммами 4.2 и 4.3, и получим в результате матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & f \\ 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & r & s & t & 0 \\ 0 & 0 & u & v & 0 \end{pmatrix}.$$

Написав условие горизонтальности, получим равенства

$$\begin{cases} fp - dq = 0, \\ cq = 0, \\ 3bq + cp + sv - tu = 0, \\ 2aq + bp + rv = 0, \\ 3ap + ru = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Из которых следует, что $c = 0$. Действительно, ведь q не может быть нулем, поскольку тогда либо $f = 0$ и степень кривой понижается, либо $p = 0$ и кривая перестаёт быть линейно полной (подобные рассуждения будут часто возникать в дальнейшем и мы их опускаем). Используем (3.1) для нахождения особых точек (высших особенностей), получим

$$3bqz^2 + 6aqz - ru = 0.$$

Поскольку мы имеем дело с особенностью в нуле, заключаем, что $ru = 0$. А следовательно, с учетом (6.1) имеем $ap = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow d = 0$, $u = 0$. Напишем теперь (3.1) во второй карте

$$3rvz + sv = 0.$$

Поскольку ∞ также высшая особенность, заключаем, что $sv = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow b = 0$. Приведем полученную матрицу и оставшиеся условия

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

$$2a + rv = 0. \tag{6.3}$$

Заметим, что если $a = \tilde{a}e^{ix}$ и $f = \tilde{f}e^{iy}$ показательные формы чисел a и f, то преобразования $\omega(z) = \exp(i\frac{x-y}{4})z$, $g = diag\{\exp(-i\frac{x}{2}), \exp(i\frac{x}{2}), 1, 1\}$ и умножение на $\exp(-i\frac{x}{2})$ оставляют матрицу (6.2) в том же виде, но с действительными a и f. Более того, учитывая теперь (6.3), преобразование $g = diag\{1, 1, \exp(-i\mathrm{Arg}(r)), \exp(i\mathrm{Arg}(r))\}$ делает действительными также элементы r и v матрицы (6.2). Заметим, что выше использовался поворот $\omega(z) = \exp(i\frac{x-y}{4})z$, это поворот S^2 относительно оси проходящей через 0 и ∞, поэтому высшие особенности остались на месте. Итого мы имеем матрицу вида (6.2) с единственным комплексным числом $t = \mathrm{Re}(t) + i\mathrm{Im}(t)$ и условием (6.3). Проверяя теперь согласованность с антиподальной инволюцией, например, на вещественной прямой, т.е. сравнивая значения $\phi(x)$ и $\phi(-\frac{1}{x})$ при действительном x, можно написать следующие равенства

$$\begin{cases} 1 + f^2 = a^2, \\ |t|^2 + v^2 = r^2, \\ \mathrm{Im}(t) = 0, \\ f\mathrm{Re}(t) + v + ar = 0, \\ fr + a\mathrm{Re}(t) = 0, \\ \mathrm{Re}(t) = fv, \\ r = av, \end{cases}$$

последнее из которых и (6.3) дают $a(2 + v^2) = 0 \Rightarrow a = 0$. Но тогда степень кривой падает и мы приходим к противоречию, которое и доказывает теорему. $\square$

Таким образом не существует гармонических отображений $\mathbb{R}P^2$ в S^4 с площадью 8π в индуцированной метрике.

7. Гармонические отображения $RP^2 \to S^4$ площади 10π

В случае степени 5 из предложения 3.3 мы имеем либо две точки ветвления, либо четыре омбилические точки. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 7.1. *Голоморфная кривая $\psi \in AHHol_5^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ не может иметь две точки ветвления.*

Доказательство. Предположим, что может. Тогда переведем одну из них в нуль подходящим поворотом S^2. Воспользовавшись леммами 4.2 и 4.3, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Написав условие горизонтальности, получим равенства

$$\begin{cases} fq - er = 0, \\ fp - dr = 0, \\ ep - 3cr - dq - \gamma\mu + \delta\eta = 0, \\ 2br + cq + \beta\mu - \delta\varepsilon = 0, \\ 3bq + cp + 5ar + 3\alpha\mu + \beta\eta - \gamma\varepsilon = 0, \\ 2aq + bp + \alpha\eta = 0, \\ 3ap + \alpha\varepsilon = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Из (3.1) с учётом (7.1) получаем уравнение на особые точки

$$crz^4 + 2brz^3 + (bq + \alpha\mu + 5ar)z^2 + 2aqz - \frac{\alpha\varepsilon}{3} = 0. \tag{7.2}$$

Поскольку одна особая точка в нуле $\alpha\varepsilon = 0$ и можно считать, что $\varepsilon = 0$, поскольку если $\alpha = 0$, то можно занулить и ε подходящим элементом $Sp(2)$. Тогда с учётом (7.1) $p = 0$, $d = 0$, и во второй карте

$$(10aq + 8\alpha\eta)z^3 + (6bq + 6\alpha\mu + 3\beta\eta)z^2 + (3\beta\mu - \gamma\eta)z + (\gamma\mu - \delta\eta) = 0.$$

Поскольку вторая особая точка в ∞, заключаем, что $(\gamma\mu - \delta\eta) = 0$. Но тогда из (7.1) $cr = 0 \Rightarrow c = 0$. И мы имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & r \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

и условия

$$\begin{cases} fq - er = 0, \\ \gamma\mu - \delta\eta = 0, \\ 2br + \beta\mu = 0, \\ 5ar + 3bq + 3\alpha\mu + \beta\eta = 0, \\ 2aq + \alpha\eta = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

Так как особых точек больше не должно быть, то из (7.2) получаем $br = 0$, $bq + \alpha\mu + 5ar = 0 \Rightarrow b = 0$, $\alpha\mu + 5ar = 0$. Отсюда и из (7.4) мы заключаем, что $\beta = 0 \Rightarrow \alpha\mu = 0 \Rightarrow ar = 0$, но тогда либо $a = 0$ и степень кривой падает, либо $r = f = 0$ и опять степень падает, либо $r = q = 0$ и кривая перестаёт быть линейно полной. Получаем противоречие, которое и доказывает лемму. $\square$

Из леммы (7.1) следует, что у нас остаётся случай четырёх омбилических точек, которые, впрочем, как мы увидим далее, могут склеиться в две омбилические точки с $r_1(p) = 2$. Поскольку поворотами S^2 можно перевести две из этих точек в 0 и ∞, а оставшиеся две довернуть на вещественную прямую, то взаимное расположение этих точек параметризуется одним параметром (например, наименьшим углом среди всех пар из них). Это позволяет предположить, что канонические формы кривых степени 5 образуют однопараметрическое семейство. В следующей теореме мы докажем, что это предположение верно.

Теорема 7.2. *Любая линейно полная горизонтальная голоморфная кривая $\psi \in AHHol_5^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ подходящими элементами $g \in PSp(2)$ и $\omega \in PSU(2)$ приводится к канонической кривой $\Psi_\eta^5(z) = g\psi\omega(z) = [1 - qz, qz^4 + z^5, -\mu z + \eta z^2, \eta z^3 + \mu z^4]$, где $q = \frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}}$, $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}}$, $\eta \in (-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Здесь мы можем повторить рассуждения из доказательства леммы 7.1 дойдя до матрицы (7.3) и условий (7.4). Заметим тогда, что если $a = \tilde{a}e^{ix}$, $q = \tilde{q}e^{iy}$ и $r = \tilde{r}e^{iw}$ показательные формы чисел a, q и r, то действия $\omega(z) = \exp(i(y - w))z$, $g = diag\{\exp(-i\frac{4w-5y+x}{2}), \exp(i\frac{4w-5y+x}{2}), 1, 1\}$ и умножение на $\exp(i\frac{4w-5y-x}{2})$ оставляют матрицу (7.3) в том же виде, но с действительными a, q и r. Более того, учитывая теперь последнее равенство из (7.4), преобразование $g = diag\{1, 1, \exp(-i\mathrm{Arg}(\alpha)), \exp(i\mathrm{Arg}(\alpha))\}$ делает действительными также элементы α и η матрицы (7.3).

На этот раз мы будем требовать, чтобы и отображения касательных пространств в токах 0 и ∞ были согласованы с антиподальной инволюцией S^2. Для этого мы рассмотрим образы $\phi(t \cdot \exp(i\varphi))$ и $\phi(-\frac{\exp(i\varphi)}{t})$ антиподальных путей $t \cdot \exp(i\varphi)$ и $-\frac{\exp(i\varphi)}{t}$ с фиксированым φ, и потребуем, чтобы совпадали первые члены их разложения в ряд Тейлора по t в $t = 0$. При этом мы получим равенства

$$\begin{cases} \bar{f}\mu = \bar{\delta} \cdot \exp(-2i\varphi), \\ \frac{\alpha}{a} + \frac{\bar{\mu}}{1+|f|^2} = -\frac{\bar{f}\delta}{1+|f|^2} \cdot \exp(-2i\varphi). \end{cases} \tag{7.5}$$

Поскольку равенства (7.5) должны выполняться при любом φ, мы заключаем, что $\bar{\delta} = \delta = 0$, $\bar{f}\mu = 0$, $\frac{\alpha}{a} + \frac{\bar{\mu}}{1+|f|^2} = 0 \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$. Можно показать, что если потребовать $\mu = 0$, то из согласованности с антиподальной инволюцией вытекает $a = 0$ и степень кривой падает. Таким образом мы имеем $\delta = 0$, $f = 0$, $\alpha + a\mu = 0$. Из соотношений (7.4) получаем $e = 0$, $\gamma\mu = 0$, и, как отмечалось выше, $\mu \neq 0$. Следовательно, $\gamma = 0$ и мы получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

с условиями

$$\begin{cases} 2b + \beta\mu = 0, \\ 5a + 3bq + 3\alpha\mu + \beta\eta = 0, \\ 2aq + \alpha\eta = 0, \\ \alpha + a\mu = 0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Заметим, что в матрице (7.6) комплексными остались только b и β, и из первого и второго равенств (7.7) получим для мнимых частей

$$\begin{cases} 2\mathrm{Im}(b) + \mathrm{Im}(\beta)\mu = 0, \\ 3\mathrm{Im}(b)q + \mathrm{Im}(\beta)\eta = 0. \end{cases}$$

Отсюда либо $\mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(b) = 0$, либо $2\eta = 3\mu q$. Можно показать, что второй случай приводит либо к падению степени, либо к $b = \beta = 0$ и в частности к $\mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(b) = 0$. Поэтому можем считать, что $\mathrm{Im}(\beta) = \mathrm{Im}(b) = 0$. Таким образом все элементы матрицы (7.6) действительные. Напишем теперь уравнение на оставшиеся две особые точки

$$2bz^2 + (bq + \alpha\mu + 5a)z + 2aq = 0. \tag{7.8}$$

Поскольку все коэффициенты в (7.8) действительные, корни z_1, z_2 либо комплексно-сопряженные, либо действительные. Так как корни должны быть антиподальными, то в случае комплексно-сопряженных корней имеем $z_1 = \bar{z}_2 = \overline{(-\frac{1}{\bar{z}_1})} = -\frac{1}{z_1} \Rightarrow |z_1|^2 = -1 \Rightarrow z_1 = \pm i$, $z_2 = \mp i$. Отсюда с учётом (7.8) можно вывести $b = aq$, $bq + \alpha\mu + 5a = 0$, и учитывая (7.7) получить $a = 0$, но тогда степень кривой падает. Поэтому остаётся случай вещественных антиподальных корней $z_1 = x$, $z_2 = -\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$. Подставив их в (7.8) получим $b + aq = 0$. Сравнивая теперь значения в антиподальных точках i и $-i$, имеем также $a\alpha + b\beta + \mu + q\eta = 0$. В результате мы имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2b + \beta\mu = 0, \\ 5a + 3bq + 3\alpha\mu + \beta\eta = 0, \\ 2aq + \alpha\eta = 0, \\ \alpha + a\mu = 0, \\ b + aq = 0, \\ a\alpha + b\beta + \mu + q\eta = 0, \end{cases} \tag{7.9}$$

которая, как можно показать, имеет четыре семейства решений

$$\begin{cases} a = 1,\ b = -q = -\frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \alpha = -\mu = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \beta = \eta, & \eta \in \mathbb{R} \\ a = 1,\ b = -q = \frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \alpha = -\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \beta = \eta, & \eta \in \mathbb{R} \\ a = -1,\ b = q = -\frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \alpha = \mu = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \beta = -\eta, & \eta \in \mathbb{R} \\ a = -1,\ b = q = \frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \alpha = \mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}},\ \beta = -\eta, & \eta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.10}$$

Итого, мы имеем четыре матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & -\mu & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 \\ 0 & \mu & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 \\ 0 & -\mu & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \\ 0 & \mu & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

в которых $q = \frac{\eta}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}}$, $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\eta^2+5}{\eta^2+4}}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Покажем, что они переводятся одна в другую подходящими элементами $PSp(2)$ и $PSU(2)$. Матрица (7.11) переводится в (7.14) и матрица (7.12) переводится в (7.13) умножением на i и действием $g = diag\{i, -i, i, -i\}$. Матрица (7.11) переводится в (7.12) умножением на i и действием $\omega(z) = -z$, $g = diag\{i, -i, i, -i\}$. Нетрудно проверить, что отображение, заданное матрицей (7.11) согласовано с антиподальной инволюцией. Это завершает доказательство теоремы. □

Из этой теоремы получаем:

Вывод 7.3. *Пространства $AHHol_5^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ и $AHarm_5^{\pm}(S^4)$ линейно связны.*

Доказательство. Коэффициенты канонической кривой из теоремы 7.2 непрерывно зависят от η при $\eta \in (-\infty, +\infty)$, это позволяет непрерывно деформировать любую такую кривую в любую другую, оставаясь внутри $AHHol_5^{LF}(\mathbb{C}P^3)$. Утверждение теперь следует из теоремы 7.2, леммы 4.1 и того, что $PSp(2)$ и $PSU(2)$ линейно связны. □

Таким образом пространство гармонических отображений $\mathbb{R}P^2$ в S^4 с площадью 10π в индуцированной метрике имеет две компоненты связности $AHarm_5^+(S^4)$ и $AHarm_5^-(S^4)$, которые гомеоморфны посредством антиподальной инволюции S^4.

Замечание 7.4. В условиях теоремы 7.2 матрица канонической кривой при $\eta = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5/3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5/3} & 0 \end{pmatrix},$$

и при этом четыре омбилические точки с $r_1(p) = 1$ сливаются в две омбилические точки с $r_1(0) = 2$, $r_1(\infty) = 2$.
А если взять предел, например, при $\eta \to +\infty$, то степень кривой падает до 3 и мы получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

но, как можно заметить, это матрица канонической кривой степени 3 из теоремы (5.1). В этом случае омбилические точки попарно «аннигилируют» в 0 и ∞. Это приводит к следующему утверждению.

Утверждение 7.5. Пространство $AHHol_{\leq 5}^{LF}(\mathbb{C}P^3)$ линейно связно.

Доказательство. Следует из теоремы 6.1, следствий 5.2 и 7.3, и замечания 7.4. Действительно, пространства $AHHol^{LF}_{\leq 2}(\mathbb{C}P^3)$ и $AHHol^{LF}_4(\mathbb{C}P^3)$ пусты, а пространства $AHHol^{LF}_5(\mathbb{C}P^3)$ и $AHHol^{LF}_3(\mathbb{C}P^3)$ могут быть соединены, например, путем

$$\gamma(t) = \begin{cases} \Psi^5_{tg(\pi t/2)}(z), & 0 \leq t < 1, \\ \Psi^3(z), & t = 1. \end{cases}$$

который будет непрерывен в силу замечания 7.4. $\square$

8. Гармонические отображения $RP^2 \to S^4$ площади 12π

Кривая степени 6 из предложения 3.3 может иметь до 6 особых точек. Но, как оказывается, ни одно линейно полное гармоническое отображение $S^2 \to S^4$ степени 6 не пропускается через $\mathbb{R}P^2$. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 8.1. *Не существует линейно полных горизонтальных голоморфных кривых $\psi \in AHHol^{LF}_6(\mathbb{C}P^3)$, т.е. пространство $AHHol^{LF}_6(\mathbb{C}P^3)$, а с ним и пространства $AHarm^{\pm}_6(S^4)$, пусты.*

Доказательство. Предположим, что такие кривые есть. И выберем одну из них. Первым делом мы переведем одну из особых точек в нуль подходящим поворотом S^2. Далее мы воспользуемся леммами 4.2 и 4.3, и получим в результате матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \nu & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку мы имеем особую точку в нуле, мы хотим, чтобы и в ∞ была особая точка. Это приводит к условию

$$dq - pe + \delta\mu - \nu\varepsilon = 0. \tag{8.1}$$

Потребуем, чтобы касательных пространств в токах 0 и ∞ были согласованы с антиподальной инволюцией S^2. Для этого мы рассмотрим образы $\phi(t\cdot\exp(i\varphi))$ и $\phi(-\frac{\exp(i\varphi)}{t})$ антиподальных путей $t\cdot\exp(i\varphi)$ и $-\frac{\exp(i\varphi)}{t}$ с фиксированым φ, и потребуем, чтобы совпадали первые члены их разложения в ряд Тейлора по t в $t = 0$. Получим равенства

$$\begin{cases} \bar{f}\mu = r\bar{\varepsilon}\cdot\exp(2i\varphi), \\ \alpha + \frac{r\bar{\mu}}{|r|^2+|f|^2} = -\frac{\bar{f}\varepsilon}{|r|^2+|f|^2}\cdot\exp(-2i\varphi). \end{cases} \tag{8.2}$$

Поскольку равенства (8.2) должны выполняться при любом φ, мы заключаем, что $r\bar{\varepsilon} = 0$, $\bar{f}\mu = 0$, $\alpha + \frac{r\bar{\mu}}{|r|^2+|f|^2} = 0$, $\frac{\bar{f}\varepsilon}{|r|^2+|f|^2} = 0$. Проверяя согласованность с антиподальной инволюцией, можно также заключить, что $f = e = 0$. Следовательно $\varepsilon = 0$, $\alpha\bar{r} + \bar{\mu} = 0$. Написав теперь условие горизонтальности и учитывая (8.1), можно также заключить, что $d = \delta = c = 0$. Итого, мы имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \nu & \mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

с условиями

$$\begin{cases} 2br + \gamma\mu = 0, \\ 5ar + 3bq + 3\beta\mu + \gamma\nu = 0, \\ 2aq + bp + 3r + 2\alpha\mu + \beta\nu = 0, \\ 3ap + 5q + 3\alpha\nu + \beta\eta = 0, \\ 2p + \alpha\eta = 0, \\ \bar{\alpha}r + \mu = 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Заметим теперь, что если $p = \tilde{p}e^{ix}$, $r = \tilde{r}e^{iy}$ и $\mu = \tilde{\mu}e^{iw}$ показательные формы чисел p, r и μ, то действия

$$\begin{cases} \omega(z) = \exp(i(\frac{x-y}{2}))z, \\ g = diag\{\exp(i\frac{3x-2y}{2}), \exp(-i\frac{3x-2y}{2}), \exp(i\frac{2x-3y+2w}{2}), \exp(-i\frac{2x-3y+2w}{2})\} \end{cases}$$

и умножение на $\exp(i\frac{2y-3x}{2})$ оставляют матрицу (8.3) в том же виде, но с действительными p, r и μ. Более того, учитывая теперь последние два условия из (8.4), заключаем, что α и η также действительные. Проверяя теперь согласованность с антиподальной инволюцией на вещественной прямой, находим, что γ действительная и равна ηr. С учетом первого условия из (8.4), b также действительная. Дальнейшая проверка на согласованность с антиподальной инволюцией на вещественной и мнимой прямой приводит к условиям

$$\begin{cases} \nu = \bar{\beta}r - \bar{a}\alpha r - \alpha q, \\ \bar{\beta} = a\eta r + \bar{q}\eta - \nu r. \end{cases} \tag{8.5}$$

из которых можно немедленно получить

$$\begin{cases} \nu = \frac{a\eta r^2 + \bar{q}\eta r - \bar{a}\alpha r - \alpha q}{r^2+1}, \\ \beta = \frac{\bar{a}\eta r + q\eta + a\alpha r^2 + \alpha\bar{q}r}{r^2+1}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Из соотношений (8.6) и (8.4) можно заключить, что либо $\eta = 0$, но тогда степень кривой падает, либо q (а с ней и все оставшиеся переменные) действительная, либо q (а с ней и β, ν, a) чисто мнимая. Покажем, что случай чисто мнимых β, ν, a, q приводится к случаю вещественных β, ν, a, q. Легко видеть, что для этого достаточно взять $\omega(z) = iz$, $g = diag\{1, 1, i, -i\}$. Поэтому остается случай, при котором все переменные вещественные. Напишем соотношения, имеющиеся на данный момент.

$$\begin{cases} 2br + \gamma\mu = 0, \\ 5ar + 3bq + 3\beta\mu + \gamma\nu = 0, \\ 2aq + bp + 3r + 2\alpha\mu + \beta\nu = 0, \\ 3ap + 5q + 3\alpha\nu + \beta\eta = 0, \\ 2p + \alpha\eta = 0, \\ \alpha r + \mu = 0, \\ \gamma = \eta r, \\ \nu = \frac{a\eta r^2 + q\eta r - a\alpha r - \alpha q}{r^2+1}, \\ \beta = \frac{a\eta r + q\eta + a\alpha r^2 + \alpha q r}{r^2+1}. \end{cases} \tag{8.7}$$

Напишем уравнение на особые точки

$$12brz^4 + (20ar - 2\gamma\nu)z^3 + (12aq + 12\alpha\mu + 48r)z^2 + (20q - 2\beta\eta)z + 12p = 0. \tag{8.8}$$

Если положить $p = b = 0$, т.е. рассмотреть случай 4-ых особых точек, то можно показать, что степень кривой падает. Поэтому, будем считать, что $p, b \neq 0$. Поскольку все коэффициенты уравнения (8.7) вещественные, то корни либо вещественные, либо комплексно-сопряженные. С учётом того, что корни должны разбиваться на 2 пары антиподальных, возможны четыре случая:

1) Один из корней (8.8) не лежит ни на действительной ни на мнимой оси и равен $z_1 = x \cdot \exp(i\varphi)$. Антиподальный к нему $z_2 = -\frac{\exp(i\varphi)}{x}$, комплексно-сопряженный $z_3 = x \cdot \exp(-i\varphi)$, комплексно-сопряженный к антиподальному $z_4 = -\frac{\exp(-i\varphi)}{x}$. Перемножив их получим $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 1 \Rightarrow p = br$.

2) Все корни (8.8) лежат на действительной оси. Тогда $z_1 = x$, $z_2 = -\frac{1}{x}$, $z_3 = y$, $z_4 = -\frac{1}{y}$. Перемножив их получим $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 1 \Rightarrow p = br$.

3) Все корни (8.8) лежат на мнимой оси. Тогда $z_1 = ix, z_2 = -\frac{i}{x}, z_3 = iy, z_4 = -\frac{i}{y}$. Перемножив их получим $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 1 \Rightarrow p = br$.

4) Два корня (8.8) лежат на действительной оси и два на мнимой. Тогда $z_1 = x$, $z_2 = -\frac{1}{x}$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$. Перемножив их получим $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = -1 \Rightarrow p = -br$.

Из уравнений (8.7) можно заключить, что $b = -pr$. И если $p = br$, то $p = -pr^2 \Rightarrow p(1 + r^2) \Rightarrow p = b = 0$. Следовательно остается только случай 4), в котором $p = -br \Rightarrow p = pr^2 \Rightarrow p(1 - r^2) = 0 \Rightarrow r = \pm 1$. Случай $r = -1$ приводится к случаю $r = 1$ например действием $g = diag\{-i, i, -i, i\}$ и умножением на i. Поэтому достаточно рассмотреть только случай $r = 1$. Подставив корни i и $-i$ в (8.8) получим равенства

$$\begin{cases} aq + \alpha\mu + 4 = 0, \\ 10a - 10q + \beta\eta - \gamma\nu = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Из равенств (8.9) и (8.7) можно тогда заключить, что $p = -b$, $\mu = -\alpha$, $\gamma = \eta$, $a = q$, $\nu = \beta$ и $\alpha a = 0$. Тогда либо $a = q = \nu = \beta = 0$ и $b^2 + 5 = 0$, либо $\alpha = \mu = 0 \Rightarrow p = b = 0$ и, как отмечалось ранее, степень кривой падает. Это противоречие завершает наше доказательство. □

9. Гармонические отображения произвольных степеней

Мы рассмотрели случаи степеней 3, 4, 5 и 6. В случаях степеней 3 и 5 мы нашли канонические формы твисторных поднятий и доказали связность пространств этих поднятий. В случаях степеней 4 и 6 мы показали, что таких отображений не существует. Это наводит на мысль о том, что не существует гармонических отображений четной степени, и о том, как выглядят отображения произвольных нечетных степеней. Для доказательства этих предположений нам потребуется дополнение к теореме 1.4.

Теорема 9.1. (Брайант [4]).

Пусть $\hat{\psi} : S^2 \to \mathbb{C}P^3$ линейно полная горизонтальная антиголоморфная кривая, тогда $\phi = \pi\hat{\psi} : S^2 \to S^4$ линейно полное гармоническое отображение. Наоборот, каждое линейно полное гармоническое отображение $\phi : S^2 \to S^4$ получается как $\pm\pi\hat{\psi}$, для некоторой однозначно определённой линейно полной горизонтальной антиголоморфной кривой $\hat{\psi}$, называемой твисторным антиголоморфным поднятием ϕ.

Более того, если $\psi = [\mathbf{f}] = [f_1, f_2, f_3, f_4]$ *голоморфное твисторное поднятие* ϕ, *то* $\hat{\psi} = \bar{\psi}J = [\bar{\mathbf{f}}J] = [\bar{f}_2, -\bar{f}_1, \bar{f}_4, -\bar{f}_3]$ *антиголоморфное твисторное поднятие* ϕ [7].

Для $\mathbf{f}(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z))$ степени n обозначим

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{f}}(z) = (\tilde{f}_1(z), \tilde{f}_2(z), \tilde{f}_3(z), \tilde{f}_4(z)) = \\ = (\bar{z}^n f_1(-1/\bar{z}), \bar{z}^n f_2(-1/\bar{z}), \bar{z}^n f_3(-1/\bar{z}), \bar{z}^n f_4(-1/\bar{z})).\end{gathered}$$

Тогда $[\tilde{f}(z)]$ задает антиголоморфную кривую в $\mathbb{C}P^3$.

Теорема 9.2. *Не существует гармонических отображений проективной плоскости в четырехмерную сферу чётных степеней, т.е. пространства* $AHarm_n^{LF}(S^4)$ *пусты при чётном* n.

Доказательство. Предположим, что такие отображения существуют. Возьмём произвольное гармоническое отображение $RP^2 \to S^4$ чётной степени n, т.е. инвариантное относительно антиподальной инволюции гармоническое отображение $\phi : S^2 \to S^4$ степени n. Взяв композицию его голоморфного твисторного поднятия $\psi = [\mathbf{f}(z)] = [f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)]$ с антиподальной инволюцией S^2 получим антиголоморфное твисторное поднятие $\tilde{\psi} = [\tilde{\mathbf{f}}(z)]$. Используя теорему 9.1 получим $\psi = -\bar{\tilde{\psi}}J$. Тогда

$$\begin{aligned}g(z) \cdot \mathbf{f}(z) &= g(z) \cdot (f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)) = \\ &= -\overline{\tilde{\mathbf{f}}(z)}J = (-\overline{\tilde{f}_2(z)}, \overline{\tilde{f}_1(z)}, -\overline{\tilde{f}_4(z)}, \overline{\tilde{f}_3(z)}),\end{aligned} \tag{9.1}$$

для некоторой функции $g(z)$ на S^2. Покажем, что $g(z)$ голоморфная функция. Из (9.1) получаем равенства

$$g(z) = \frac{-\overline{\tilde{f}_2(z)}}{f_1(z)} = \frac{\overline{\tilde{f}_1(z)}}{f_2(z)} = \frac{-\overline{\tilde{f}_4(z)}}{f_3(z)} = \frac{\overline{\tilde{f}_3(z)}}{f_4(z)}. \tag{9.2}$$

Легко видеть, что $\overline{\tilde{f}_i(z)}$ $(i = 1,2,3,4)$ полиномы от z степени не выше n, поэтому они являются голоморфными функциями на $\mathbb{C}$. В свою очередь $f_i(z)$ $(i = 1,2,3,4)$ не имеют общих корней и потому $g(z)$ голоморфна на $\mathbb{C}$. По определению среди $f_i(z)$ $(i = 1,2,3,4)$ найдется полином степени n и из (9.2) следует, что $g(z)$ голоморфна так же и на ∞. Таким образом $g(z)$ голоморфная функция на S^2, а потому $g(z) = \frac{1}{\beta} = const \neq 0$.

Поскольку $f_i(z) = a_i^0 + a_i^1 z + \ldots + a_i^j z^j + \ldots + a_i^n z^n$, $(i = 1,2,3,4)$ имеем $\overline{\tilde{f}_i(z)} = (-1)^n \overline{a_i^n} + (-1)^{n-1}\overline{a_i^{n-1}}z + \ldots + (-1)^{n-j}\overline{a_i^{n-j}}z^j + \ldots + \overline{a_i^0}z^n$, $(i = 1,2,3,4)$. Учитывая (9.2) можем написать

$$\begin{cases} a_1^n = -\beta\overline{a_2^0}, & a_2^0 = (-1)^n\beta\overline{a_1^n}, \\ a_2^n = \beta\overline{a_1^0}, & a_1^0 = (-1)^{n+1}\beta\overline{a_2^n}, \\ a_3^n = -\beta\overline{a_4^0}, & a_4^0 = (-1)^n\beta\overline{a_3^n}, \\ a_4^n = \beta\overline{a_3^0}, & a_3^0 = (-1)^{n+1}\beta\overline{a_4^n}. \end{cases} \tag{9.3}$$

Из этих соотношений можно заключить для старших коэффициентов $a_i^n = (-1)^{n+1}|\beta|^2 a_i^n$ и поскольку n чётное $a_i^n = -|\beta|^2 a_i^n$. Это возможно только когда $a_i^n = 0$ $(i = 1,2,3,4)$, но тогда степень кривой падает и мы получаем противоречие, которое и доказывает теорему. $\square$

Замечание 9.3. В случае нечётного n для старших коэффициентов получаем $a_i^n = |\beta|^2 a_i^n$, откуда $|\beta| = 1$ и $\beta = \exp(i\tilde{\beta})$ для некоторого $\tilde{\beta}$. Если теперь подействовать на кривую поворотом $\omega(z) = \exp(-\mathrm{i}\frac{\tilde{\beta}}{\mathrm{n}})z$, то получится кривая с $\beta = 1$. Таким образом, любая кривая нечетной степени подходящим поворотом приводится к кривой вида $\psi = [\mathbf{f}(z)] = [f_1(z), \overline{\tilde{f}_1(z)}, f_3(z), \overline{\tilde{f}_3(z)}]$.

Благодарности: Автор глубоко признателен Алексею Викторовичу Пенскому за постановку задачи и плодотворные обсуждения, а также за его прекрасный учебно-исследовательский семинар по спектральной геометрии в НМУ.

Список литературы

[1] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres, J. Differential Geometry 1 (1967), 111-125.

[2] E. Calabi, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, Topics in Complex Manifolds (Ed. H. Rossi), Les Presses de l'Universit´e de Montr´eal (1968), 59-81.

[3] J. Barbosa, On minimal immersions of S2 into S2m, Trans. Amer. Math. Soc. 210 (1975), 75-106.

[4] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, J. Differential Geom. 17 (1982), 455–473.

[5] J. Eells, L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10, (1978), 1-68.

[6] J. Bolton and L. M. Woodward, Linearly full harmonic 2-spheres in S^4 of area 20π, Internat. J. Math. 12 (2001), 535–554.

[7] J. Bolton and L. M. Woodward, Higher singularities and the twistor fibration $\pi : \mathbb{C}P^3 \to S^4$, Geom.Dedicata 80 (2000), 231–245.

[8] J. Bolton and L. M.Woodward, The space of harmonic two-spheres in the unit four-sphere, Tohoku Math. J. 58 (2006), 231–236

[9] J. Eells, J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86, (1964), 109-160.

[10] Yung-Chow Wong and Yik-Hoi Au-Yeung, An Elementary and Simple Proof of the Connectedness of the Classical Groups, The American Mathematical Monthly Vol. 74, No. 8 (Oct., 1967), pp. 964-966

[11] H. Reckziegel, Horizontal lifts of isometric immersions into the bundle space of a pseudo-Riemannian submersion, in Global Differential Geometry and Global Analysis, Lecture Notes in Mathematics 1156, Springer, 1985, 18-27.