

Квазиклассические асимптотики решений
разностных уравнений на комплексной
ПЛОСКОСТИ

Щетка Екатерина Владимировна

Содержание

1	Введение	3
1.1	Постановка задачи	3
1.2	Классический комплексный метод ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений	4
1.3	Основные результаты	5
1.4	Обобщение на случай тригонометрических полиномов	7
1.5	План доказательства	8
1.6	Соглашения	10
2	Комплексный импульс	11
2.1	Свойства комплексного импульса	11
2.2	Комплексный импульс и канонические области	12
3	Асимптотическая диагонализация матричного уравнения Харпера	16
4	Интегральное уравнение на кривой	19
4.1	Преобразование разностного уравнения в интегральное	19
4.2	Оценки норм интегральных операторов	20
5	Продолжение решения с кривой в допустимую область A	24
5.1	Построение решения на кривой	24
5.2	Аналитическое продолжение решения	25
5.3	Асимптотики решения вне кривой	26
5.4	Равномерные асимптотики решения в допустимой области A	26
6	Построение второго решения	29
7	Построение решений в областях другого типа	30

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В работе исследуется одномерное разностное уравнение Шредингера:

$$\frac{\psi(z+h) + \psi(z-h)}{2} + \cos z \psi(z) = E\psi(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где h — малый положительный параметр, E — спектральный параметр.

Это — уравнение Харпера, оно возникает при описании блоховского электрона в постоянном магнитном поле во многих предельных ситуациях, например, в пределе слабого или сильного магнитного поля (см. [1]). Спектральные свойства уравнения (1) в $L_2(\mathbb{R})$ оказались очень богатыми. В настоящее время доказано, что для иррациональных $\frac{h}{2\pi}$ спектр представляет собой канторово множество. Однако, на данный момент нет конструктивного описания его геометрии (за исключением „квази-классического“ случая, см. [2]).

Уравнение Харпера может быть формально переписано в виде

$$\left(\cos \frac{h}{i} \frac{d}{dz} + \cos z \right) \psi(z) = E\psi(z),$$

и, таким образом, задача об исследовании его спектра при малых h оказывается типично квазиклассической. Используя методы теории псевдодифференциальных операторов, В. Helffer и J.Sjöstrand получили в работе [3] тонкие оценки, описывающие структуру спектра. Позже их результаты были получены на совсем другом пути В.С. Буслаевым и А.А. Федотовым (см. обзор [2] и ссылки в нем).

Для исследования спектра уравнения (1) В.С. Буслаев и А.А. Федотов развили аналог комплексного метода ВКБ для разностных уравнений (см., например, [4, 5]). Авторы описали основные геометрические конструкции комплексного метода ВКБ для уравнения Харпера и доказали теорему о существовании аналитических решений, имеющих стандартное асимптотическое поведение на некоторых *канонических* областях в комплексной плоскости.

Разностные уравнения возникают в очень разных задачах: от физики твердого тела до теории дифракции, поэтому развитие комплексного метода ВКБ для разностных уравнений имеет самостоятельную ценность.

В данной работе мы развиваем подход В.С. Буслаева и А.А. Федотова. Сложность решения разностных уравнений состоит прежде всего в том, что они нелокальны. В работе [4] авторы сводили задачу к исследованию нелинейного разностного уравнения — разностного аналога

уравнения Риккати. Мы перестраиваем доказательство, сводя уравнение (1) к линейному сингулярному интегральному уравнению. Такой подход упрощает и сокращает доказательство. Кроме того, мы обобщаем результаты работ [4, 5]: раньше доказательство проводилось для 2-3 типов *канонических* областей, теперь мы меняем точку зрения и доказываем теорему для произвольной области, являющейся *канонической*.

Прежде чем формулировать наши результаты, напомним основные конструкции и результаты классического метода ВКБ.

1.2 Классический комплексный метод ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений

Классический метод ВКБ (Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна) возник для построения асимптотик решений уравнения Шредингера в квазиклассическом случае. Позже метод был обобщен на уравнения n -го порядка и системы, для построения решений таких уравнений и систем на комплексной плоскости был развит его комплексный аналог (см., например, [6]). Комплексный метод ВКБ имеет большое число важных физических приложений, например, он необходим при вычислении коэффициента надбарьерного отражения для оператора Шредингера и асимптотик лакун оператора Хилла с большими номерами. Ограничимся здесь рассмотрением дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$-h^2\psi'' + V(z)\psi = E\psi, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где h — малый положительный параметр, E — спектральный параметр, V — целая функция.

Все геометрические конструкции комплексного метода ВКБ описываются в терминах комплексного импульса p , определяемого соотношением

$$p^2(z) + V(z) = E.$$

Комплексный импульс — это многозначная функция, точки ветвления которой одновременно являются ее нулями и точками поворота уравнения (2).

Перейдем к определению канонической области. Оно является основным геометрическим понятием в комплексном методе ВКБ. Точное определение возникает при построении решений, имеющих стандартное асимптотическое поведение при $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим гладкую ориентируемую кривую $\gamma \subset \mathbb{C}$, не содержащую точек ветвления p . Фиксируем на γ непрерывную ветвь комплексного

импульса. Будем называть γ канонической, если вдоль γ

$$\frac{d}{ds} \left(\operatorname{Im} \int^z p dz \right) > 0,$$

где ds — элемент кривой γ .

Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, не содержащая точек ветвления p . Фиксируем на ней непрерывную ветвь комплексного импульса. Будем называть K канонической областью, если любую ее точку можно соединить в K канонической кривой (относительно выбранной ветви p) с некоторой фиксированной точкой в области или на ее границе. Будем называть область

$$A = \{z \in K \mid \operatorname{dist}(z, \partial K) > \Delta\},$$

где ∂K — граница области K ,

допустимой подобластью канонической области K , соответствующей Δ .

Теперь сформулируем основную теорему комплексного метода ВКБ для дифференциальных уравнений второго порядка (см. [6]).

Теорема 1.2.1 *При достаточно малых h уравнение*

$$-h^2 \psi'' + V(z)\psi = E\psi, \quad z \in \mathbb{C}$$

имеет целые решения ψ_{\pm} , допускающие в допустимой области A асимптотические представления

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{e^{\pm \frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz}}{\sqrt{p(z)}} (1 + O(h)), \quad z \in A,$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в канонической области K . Оценка погрешности равномерна по $z \in A$.

Заметим, что теорема носит условный характер: она годится для любой предъявленной канонической области, но здесь не обсуждается существование и геометрия канонических областей.

Теперь вернемся к разностному уравнению (1).

1.3 Основные результаты

Определим комплексный импульс p равенством

$$\cos p(z) = E - \cos z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Это — многозначная аналитическая функция с точками ветвления, удовлетворяющими уравнению

$$\cos z = E \pm 1.$$

Будем называть гладкую ориентируемую кривую $\gamma \subset \mathbb{C}$ вертикальной, если угол α между γ и $\text{Im}z = \text{const}$ удовлетворяет неравенству $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Введем ориентацию вертикальных кривых из $-i\infty$ в $+i\infty$.

Пусть γ — вертикальная кривая, не содержащая точек ветвления p . Фиксируем на γ непрерывную ветвь комплексного импульса. Будем называть γ канонической, если вдоль γ

$$\frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^z p dz \right) > 0 \text{ и } \frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) < 0,$$

где ds — элемент кривой γ . Заметим, что в определении канонической кривой в случае дифференциальных уравнений условие на действие было одно, а также отсутствовало условие вертикальности кривой.

Будем называть область D горизонтально связной, если для любых двух ее точек z_1 и z_2 , имеющих одинаковую мнимую часть, отрезок $[z_1, z_2] = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z = \text{Im}z_1, \text{Re}z_1 \leq \text{Re}z \leq \text{Re}z_2\}$ содержится в D . Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — горизонтально связная область, не содержащая точек ветвления p . Фиксируем на ней непрерывную ветвь комплексного импульса. Будем называть K канонической областью, если при подходящем выборе ветви K оказывается объединением канонических кривых, соединяющих в K две фиксированные точки на ее границе.

В этой работе в качестве двух „точек“ на границе мы берем точки $\pm i\infty$, таким образом, мы рассматриваем канонические области бесконечные вверх и вниз. Такие области являются естественными для уравнений с целым потенциалом.

Замечание 1.3.1 *Задача с ограниченной канонической областью отличается от задачи с бесконечной канонической областью: в них по-разному описываются функциональные пространства, в которых нужно работать. В случае конечных канонических кривых функциональные пространства допускают стандартные особенности функций на концах канонических кривых, а в случае неограниченных канонических кривых выбор функциональных пространств зависит от поведения p на бесконечности.*

Будем называть область

$$A = \{z \in K \mid \text{dist}(z, \partial K) > \Delta\}, \text{ где } \partial K \text{ — граница области } K,$$

допустимой подобластью канонической области K , соответствующей Δ .

Замечание 1.3.2 *Далее мы увидим, что все канонические области, содержащие кривые, идущие из $-i\infty$ в $+i\infty$, на достаточно больших расстояниях от \mathbb{R} асимптотически становятся полосами (их можно расширить до полос). Поэтому не нужно будет рассматривать сужающиеся на бесконечности канонические области, и не возникнут конечные допустимые подобласти.*

Сформулируем основную теорему комплексного метода ВКБ для уравнения Харпера.

Теорема 1.3.1 *При достаточно малых h уравнение*

$$\frac{\psi(z+h) + \psi(z-h)}{2} + \cos z \psi(z) = E\psi(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

имеет целые решения ψ_{\pm} , допускающие в допустимой области A асимптотические представления

$$\psi_{\pm}(z) = \frac{e^{\pm \frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz}}{\sqrt{\sin p(z)}} (1 + O(h)), \quad z \in A,$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в канонической области K . Комплексный импульс p определяется по формуле (3). Ветвь импульса однозначно определяется канонической областью K . Оценка погрешности равномерна по $z \in A$.

Заметим, что теорема носит условный характер: она годится для любой предъявленной канонической области, здесь мы не обсуждаем существование и геометрию канонических областей, в работах [4, 5] можно найти несколько конкретных примеров канонических областей.

1.4 Обобщение на случай тригонометрических полиномов

Наша цель — обобщить полученные результаты на разностное уравнение Шредингера с потенциалом в виде тригонометрического полинома, а также дробно-рациональной функции от экспоненты e^{iz} .

Рассмотрим разностное уравнение Шредингера с потенциалом V :

$$\frac{\psi(z+h) + \psi(z-h)}{2} + V(z)\psi(z) = E\psi(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Здесь, как и раньше, h — малый положительный параметр, E — спектральный параметр.

Теперь естественно определить комплексный импульс p следующим равенством

$$\cos p(z) = E - V(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Для случая тригонометрического полинома порядка n

$$V(z) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikz}, \quad c_{\pm n} \neq 0,$$

обобщение происходит почти мгновенно, и Теорема 1.3.1 сохраняется с учетом нового определения комплексного импульса (4).

Для дробно-рациональной функции от экспоненты ситуация является другой, мы планируем посвятить этому отдельную работу.

Теперь обсудим основные идеи доказательства Теоремы 1.3.1.

1.5 План доказательства

Мы начинаем с того, что трансформируем разностное уравнение (1) в матричное уравнение первого порядка на вектор $\Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \psi(z-h) \end{pmatrix}$:

$$\Psi(z+h) = M(z)\Psi(z), \quad \text{где } M(z) = \begin{pmatrix} 2(E - \cos z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Далее с помощью замены $\Psi(z) = U(z)\Phi(z)$ с некоторой матрицей U мы приходим к уравнению на вектор $\Phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}$:

$$\Phi(z+h) = T(z)\Phi(z), \quad \text{где } T(z) = U^{-1}(z+h)M(z)U(z).$$

Мы выбираем U так, чтобы матрица $U^{-1}(z)M(z)U(z)$ была диагональной. Вычисляя асимптотики матрицы T , мы видим, что T оказывается близкой к диагональной из-за малости h :

$$T(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & O(h) \\ e^{2ip(z)}O(h) & e^{-ip(z)} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы матрица уравнения стала близка к единичной, мы используем преобразование вида

$$\phi_1(z) = e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz + O(1)} \chi_1(z), \quad \phi_2(z) = e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz + O(1)} \chi_2(z), \quad z_0 \in K,$$

и приходим к уравнению

$$\begin{pmatrix} \chi_1(z+h) \\ \chi_2(z+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1(z) \\ \chi_2(z) \end{pmatrix} = T_1(z) \begin{pmatrix} \chi_1(z) \\ \chi_2(z) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для построения решений этого разностного уравнения мы преобразуем его в интегральное уравнение с помощью леммы, рассмотренной в работе [7].

Лемма 1.5.1 *Фиксируем $h > 0$. Рассмотрим горизонтально связную область $D \subset \mathbb{C}$, состоящую из вертикальных кривых, идущих от $-i\infty$ к $+i\infty$. Обозначим $\gamma_z \subset D$ вертикальную кривую, идущую от $-i\infty$ к $+i\infty$ через точку $z \in D$. Пусть g — функция, аналитическая в D и удовлетворяющая оценке $g(z) = O\left(\frac{1}{z^{1+\varepsilon}}\right)$ при $|\operatorname{Im}z| \rightarrow \infty$, где $\varepsilon > 0$. Тогда функция*

$$f(z) = Lg(z), \text{ где } Lg(z) = \frac{1}{2ih} \int_{\gamma_z} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} \right) g(\zeta) d\zeta,$$

является решением уравнения

$$f(z+h) - f(z) = g(z),$$

аналитическим в области D .

Доказательство. Лемма сразу следует из теоремы о вычетах

$$f(z+h) - f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=z} \left(\frac{1}{2ih} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} \right) g(\zeta) \right) = g(z).$$

□

Обозначим $g(z)$ правую часть в (6) и рассмотрим уравнение как неоднородное. Тогда решение уравнения (6) является суммой решения однородного уравнения и частного решения, построенного с помощью Леммы 1.5.1.

Именно в этот момент вместо разностного уравнения возникает сингулярное интегральное уравнение на кривой. Теперь мы имеем особенность на контуре интегрирования и рассматриваем уравнение на некоторой фиксированной кривой.

И после еще одной замены $\chi_2(z) = e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz + ip(z)} h^\alpha \tilde{\chi}_2(z)$, где $0 < \alpha < 1$, мы получаем уравнение вида

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где K — матричный сингулярный интегральный оператор, действующий в некотором пространстве функций на кривой γ :

$$K = \begin{pmatrix} L_+ O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_+ O(h^{1+\alpha} e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \\ O(e^{|\gamma|}) K_+ O(h^{1-\alpha} e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & O(e^{|\gamma|}) K_+ O(h^2 e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix}.$$

Здесь $O(\cdot)$ обозначают аналитические функции с соответствующими оценками, а операторы L_+, K_+ определяются равенствами

$$L_+ g(z) = \frac{1}{2ih} \int_{\gamma_z} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} - i \right) g(\zeta) d\zeta,$$

$$K_+ g(z) = e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} \left(L_+ e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^{\cdot} p dz} g(\cdot) \right) (z).$$

Сходимость интегралов обеспечивается выбором функционального пространства. Каждый элемент матрицы K действует на скалярную функцию следующим образом: сначала присходит умножение на $O(\cdot)$, а затем ко всему выражению применяется оператор L_+ или K_+ .

Оператор, похожий на K_+ , возникал при решении задачи другой природы в [7]. Однако в работе [7] рассматривался сингулярный интегральный оператор на конечных кривых, здесь мы рассматриваем его на бесконечных кривых. Как и в случае конечных кривых, норма этого оператора оказывается порядка единицы, если кривая γ каноническая. Отсюда норма элементов матрицы K оказывается малой из-за малости h , и мы можем построить решение (7). Далее решение аналитически продолжается во всю область.

После того как мы наметили план, можно приступить к самому доказательству основной теоремы.

1.6 Соглашения

Договоримся обозначать положительные константы, не зависящие от h и z , буквой C .

Запись $g(z, h) = O(f(z, h))$ в некоторой области означает, что $|g(z, h)| \leq C |f(z, h)|$ в этой области.

Всюду далее будем считать, что если разностное уравнение рассматривается в области, то аргументы всех функций в уравнении одновременно лежат в этой области.

2 Комплексный импульс

2.1 Свойства комплексного импульса

Напомним, что комплексный импульс p определяется равенством

$$\cos p(z) = E - \cos z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Уравнение (8) решается явно:

$$p(z) = \frac{1}{i} \ln \left(v(z) \pm \sqrt{v^2(z) - 1} \right),$$

где

$$v(z) = E - \cos z.$$

Все точки ветвления p описываются уравнением

$$v(z) = \pm 1.$$

Логарифмических точек ветвления нет, поскольку подлогарифмическое выражение нигде не обращается в ноль.

Лемма 2.1.1 *Для любого значения спектрального параметра $E \in \mathbb{C}$ комплексный импульс p имеет 4 точки ветвления (с учетом кратности) в полосе $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]\}$, где $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Тригонометрический полином 1 порядка $v(z) \pm 1$ имеет 2 нуля на периоде. Таким образом, мы имеем 4 точки ветвления в \mathcal{R} . □

Рассмотрим односвязную область $K \subset \mathbb{C}$, не содержащую точек ветвления p . На такой области можно фиксировать непрерывную ветвь комплексного импульса p .

Иследуем поведение импульса при больших $|\operatorname{Im} z|$, обозначим $y = \operatorname{Im} z$.

Лемма 2.1.2 *Пусть $|y| \rightarrow \infty$, тогда*

$$p(z) = \pm(\pi - z) + 2\pi k + O(e^{-|y|}).$$

Знаки \pm и $k \in \mathbb{Z}$ зависят от выбора ветви p . Оценка погрешности равномерна по $\operatorname{Re} z$.

Доказательство. Пусть $y \rightarrow +\infty$, перепишем (8) как

$$e^{ip(z)} + e^{-ip(z)} = 2E - e^{iz} - e^{-iz}.$$

Так как в правой части равенства мы имеем одну растущую экспоненту и одну убывающую, то и в левой части одна из экспонент будет расти, а вторая соответственно убывать. Отсюда

$$e^{\pm ip(z)} = -e^{-iz} + O(1), \quad y \rightarrow +\infty.$$

Прологарифмировав данное равенство, получим

$$\pm ip(z) = i(\pi - z) + 2\pi ik + O(e^{-|y|}), \quad y \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично рассматривается случай $y \rightarrow -\infty$. □

Из Леммы 2.1.2 вытекают три важных следствия.

Следствие 2.1.1 *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$-C + |y| < |\operatorname{Im} p(z)| < C + |y|, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Пусть V_δ обозначает δ -окрестность точек ветвления.

Следствие 2.1.2 *Для любого $\delta > 0$ существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что для $z \in K \setminus V_\delta$*

$$|p'(z)| \leq C(\delta), \quad |p''(z)| \leq C(\delta)e^{-|y|}, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Следствие 2.1.3 *Для любого $\delta > 0$ существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что для $z \in K \setminus V_\delta$*

$$|e^{ip(z)} - 1| > C(\delta).$$

2.2 Комплексный импульс и канонические области

Во введении было дано определение канонических областей и упомянуто, что в этой работе мы не обсуждаем их существование и геометрию. Однако структура этих областей на бесконечности и асимптотика ветви импульса в них играют важную роль в построении доказательства. Сначала мы опишем некоторые локальные свойства канонических областей, а затем обсудим их глобальные свойства.

В силу того, что мы рассматриваем бесконечные канонические кривые, нам потребуются определения строго вертикальной и строго канонической кривой.

Будем называть гладкую ориентируемую кривую $\gamma \subset \mathbb{C}$ строго вертикальной, если существует минимальный угол наклона δ между γ и $\text{Im}z = \text{const}$. Введем ориентацию вертикальных кривых из $-i\infty$ в $+i\infty$.

Пусть γ — строго вертикальная кривая, не содержащая точек ветвления p . Фиксируем на γ непрерывную ветвь комплексного импульса. Будем называть γ строго канонической, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что вдоль γ

$$\frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^z p dz \right) > \varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds} \left(\text{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) < -\varepsilon, \quad (9)$$

где ds — элемент кривой γ .

Лемма 2.2.1 Пусть γ — строго каноническая кривая. Любая кривая, достаточно близкая в C^1 топологии к γ , является строго канонической.

Доказательство. Каноническая кривая находится на положительном расстоянии d от конечных точек ветвления. Если пошевелить кривую в пределах некоторой $d/2$ - окрестности, кривая так и останется на положительном расстоянии от точек ветвления.

Ясно, что любая кривая, достаточно близкая в C^1 топологии к строго вертикальной кривой с минимальным углом наклона δ , будет строго вертикальной с минимальным углом наклона, например, $\delta/2$.

В силу условия строгой каноничности (9) вдоль γ верно

$$\text{Im} \left(p(z) \frac{dz}{ds} \right) > \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{Im} \left((p(z) - \pi) \frac{dz}{ds} \right) < -\varepsilon,$$

где ds — элемент кривой γ . Отсюда легко видеть, что при малом изменении z и $\frac{dz}{ds}$ будут выполнены те же неравенства с константой $\varepsilon/2$. □

Таким образом, строго канонические кривые устойчивы относительно малых деформаций в топологии C^1 , а значит, справедлива

Теорема 2.2.1 Любая строго каноническая кривая содержится в некоторой локальной канонической области.

Теперь обсудим глобальные свойства канонических областей. Обозначим $x = \text{Re}z$.

Лемма 2.2.2 Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим ветвь комплексного импульса с асимптотикой $p(z) = +(\pi - z) + 2\pi k + O(e^{-|y|})$ при $y \rightarrow +\infty$. Тогда существует единственная полуполоса

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid x \in (2\pi k + C'e^{-|y|}, \pi + 2\pi k - C'e^{-|y|}), y > C\},$$

где $C > 0$ достаточно велико и $C' > 0$ зависит только от p , в которой выполнены условия

$$\frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z p dz \right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) < 0. \quad (10)$$

Доказательство. Подставим асимптотику импульса в (10):

$$\frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z p dz \right) = \operatorname{Im}(ip(z)) = \pi - x + 2\pi k + O(e^{-|y|}) > 0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) = \operatorname{Im}(i(p(z) - \pi)) = -x + 2\pi k + O(e^{-|y|}) < 0. \quad (12)$$

Условия (11) и (12) выполнены только в полуполосе Π для достаточно большого C . □

Лемма 2.2.3 Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим ветвь импульса с асимптотикой $p(z) = -(\pi - z) - 2\pi k + O(e^{-|y|})$ при $y \rightarrow +\infty$. Тогда существует единственная полуполоса

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid x \in (\pi + 2\pi k + C'e^{-|y|}, 2\pi + 2\pi k - C'e^{-|y|}), y > C\},$$

где $C > 0$ достаточно велико и $C' > 0$ зависит только от p , в которой выполнены условия (10).

Доказательство. Аналогично доказательству Леммы 2.2.2. □

Такие же леммы формулируются дословно для нижней полуполосы с заменой $y > C$ на $y < -C$.

Как следствие лемм, любая каноническая относительно некоторой ветви импульса область обязана уходить на $\pm i\infty$ в полуполосы, однозначно определяемые знаком \pm и $k \in \mathbb{Z}$ в асимптотиках ветви импульса p на $\pm i\infty$. Далее справедлива следующая

Лемма 2.2.4 Пусть K — каноническая относительно некоторой ветви комплексного импульса область, уходящая в полуполосы Π_{\pm} на $\pm i\infty$ соответственно (см. Рис. 1). Тогда на достаточно больших расстояниях от \mathbb{R} можно расширить каноническую область K до полуполос Π_{\pm} .

Доказательство. Рассмотрим процедуру расширения канонической области на примере одной канонической кривой (см. Рис. 1).

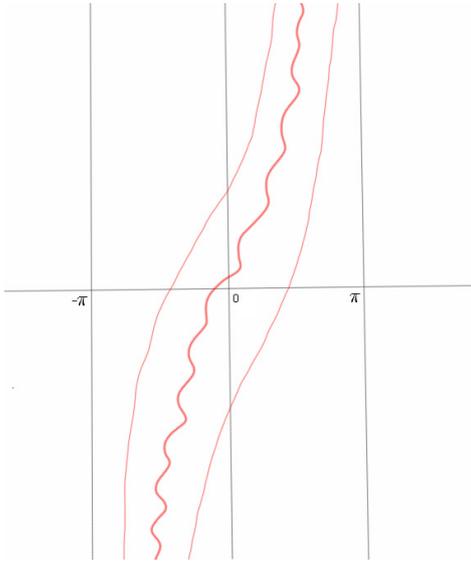


Рис. 1: Исходная область с канонической кривой.

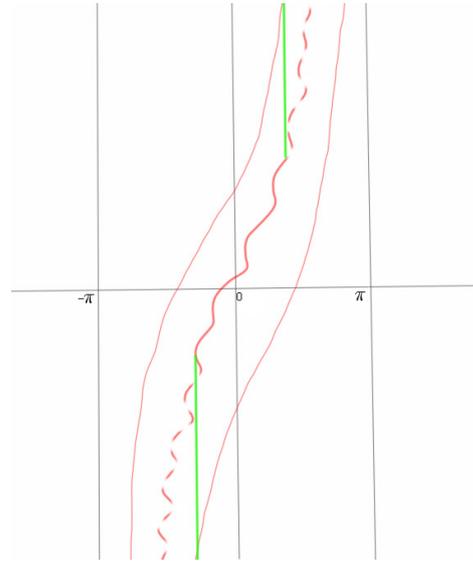


Рис. 2: Замена крайних частей кривой на вертикальные кривые.

Мы заменяем каноническую кривую на линии $\operatorname{Re} z = \text{const}$ на достаточно больших расстояниях от \mathbb{R} (см. Рис. 2). Заметим, что каждый из трех участков полученной кривой удовлетворяет условиям строгой каноничности. Необходимо немножко их подправить, чтобы полученная кривая стала гладкой.

Далее мы чуть шевелим вертикальные части кривой влево и вправо, и за счет устойчивости строго канонических кривых относительно малых деформаций в топологии C^1 „новые“ кривые также оказываются строго каноническими (см. Рис. 3). Затем мы рассматриваем вертикальные части кривых чуть выше и шевелим их (см. Рис. 4). И с каждым разом поднимаясь все выше, мы можем постепенно расширить область на достаточно больших расстояниях от \mathbb{R} до полуполос за счет Лемм 2.2.2 — 2.2.3.

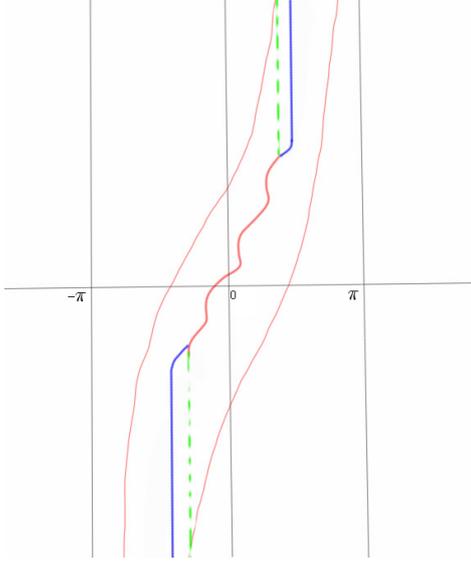


Рис. 3: Деформация вертикальных участков.

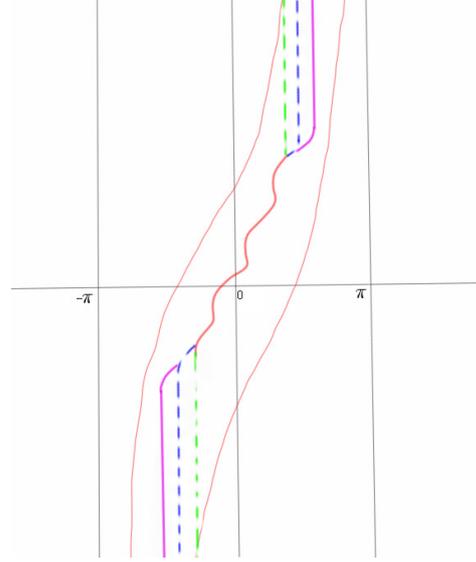


Рис. 4: Последующая деформация вертикальных участков.

□

Таким образом, можно считать, что задана каноническая область, которая „максимальна“ сверху и снизу.

3 Асимптотическая диагонализация матричного уравнения Харпера

Преобразуем разностное уравнение второго порядка (1) в матричное уравнение первого порядка на вектор $\Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \psi(z-h) \end{pmatrix}$:

$$\Psi(z+h) = \begin{pmatrix} 2(E - \cos z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi(z). \quad (13)$$

Теперь мы начинаем непосредственно доказательство. Оно зависит от того, как ведет себя $|e^{ip}|$ внутри заданной канонической области на бесконечности. Возможны три варианта: в областях типа I указанная экспонента убывает на $\pm i\infty$, в областях типа II экспонента растет на $\pm i\infty$, в областях типа III она растет в одну сторону (например, на $+i\infty$) и убывает в другую (на $-i\infty$).

Сначала рассмотрим каноническую область K типа I, в ней $|e^{ip(z)}| \leq$

$Ce^{-|y|}$ при $|y| \rightarrow \infty$. Решения в областях другого типа будут строиться аналогичным образом, в следующих секциях мы обсудим детали их построения.

Для приведения матрицы в уравнении (13) к диагональному виду сделаем замену $\Psi(z) = U(z)\Phi(z)$ с матрицей $U(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & 1 \\ 1 & e^{ip(z)} \end{pmatrix}$. Тогда мы приходим к уравнению

$$\Phi(z+h) = U^{-1}(z+h) \begin{pmatrix} 2 \cos p(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U(z)\Phi(z) = T(z)\Phi(z),$$

$$\text{где } T(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1}{e^{2ip(z+h)} - 1} & e^{-ip(z)} \frac{e^{ip(z+h)} - e^{ip(z)}}{e^{2ip(z+h)} - 1} \\ e^{ip(z)} \frac{e^{ip(z+h)} - e^{ip(z)}}{e^{2ip(z+h)} - 1} & e^{-ip(z)} \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1}{e^{2ip(z+h)} - 1} \end{pmatrix}, \Phi(z) = \begin{pmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \end{pmatrix}.$$

Вычислим асимптотики коэффициентов матрицы T при достаточно малых h . Ниже аргументы всех функций равны z , так что они не указываются явно.

Лемма 3.0.5 Пусть A — допустимая подобласть канонической области K , тогда при достаточно малых h имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} T_{11} &= e^{ip} \left(e^{-ip' \frac{h}{2} - (\ln \sin p)' \frac{h}{2}} + O(h^2 e^{-2|y|}) \right), & T_{12} &= e^{-ip} O(he^{-|y|}), \\ T_{21} &= e^{ip} O(he^{-|y|}), & T_{22} &= e^{-ip} \left(e^{-ip' \frac{h}{2} - (\ln \sin p)' \frac{h}{2}} + O(h^2 e^{-2|y|}) \right), \end{aligned}$$

где $z \in A$.

Доказательство. Используя Следствия 2.1.2 — 2.1.3, получим

$$\begin{aligned} \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1}{e^{2ip(z+h)} - 1} &= 1 + \frac{e^{2ip+ip'h+O(h^2)} - e^{2ip+2ip'h+O(h^2)}}{e^{2ip+O(h)} - 1} = \\ &= 1 + \frac{e^{2ip}(-ip'h + O(h^2))}{e^{2ip}(1+O(h)) - 1} = 1 + \frac{e^{2ip}(-ip'h + O(h^2))}{(e^{2ip} - 1)(1+O(h))} = \\ &= 1 - \frac{ip'h e^{2ip}}{e^{2ip} - 1} + O(h^2 e^{-2|y|}). \end{aligned}$$

Учитывая

$$\frac{(ip + \ln \sin p)'}{2} = \frac{ip' e^{2ip}}{e^{2ip} - 1},$$

мы получаем оценки для T_{11} и T_{22} .

Оценки для T_{12} и T_{21} вытекают из следующего вычисления:

$$\frac{e^{ip(z+h)} - e^{ip(z)}}{e^{2ip(z+h)} - 1} = e^{-ip(z+h)} \left(1 - \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1}{e^{2ip(z+h)} - 1} \right) = O(h e^{-|y|}).$$

□

Замечание 3.0.1 Из доказанной леммы следует, что матрица T становится асимптотически диагональной при малых h :

$$T(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & O(h) \\ e^{2ip(z)} O(h) & e^{-ip(z)} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы сделать матрицу T близкой к единичной, мы используем преобразование вида

$$\phi_1(z) = e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z) - ip(z)} \chi_1(z), \quad \phi_2(z) = e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z)} \chi_2(z),$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в области K . В результате мы приходим к уравнению на вектор $X(z) = \begin{pmatrix} \chi_1(z) \\ \chi_2(z) \end{pmatrix}$: $X(z+h) = \hat{T}(z)X(z)$ с матрицей \hat{T} , описанной в следующей Лемме.

Лемма 3.0.6 Пусть A — допустимая подобласть канонической области K , тогда при достаточно малых h имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} \hat{T}_{11} &= 1 + O(h^2 e^{-|y|}), & \hat{T}_{12} &= e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h), \\ \hat{T}_{21} &= e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h e^{-2|y|}), & \hat{T}_{22} &= 1 + O(h^2 e^{-|y|}), \end{aligned}$$

где $z \in A$, z_0 — произвольная фиксированная точка в K .

Доказательство. Начнем с вычисления

$$\begin{aligned} B &:= e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^{z+h} p dz + \frac{1}{2} \ln \sin p(z+h) + ip(z+h)} e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z) - ip(z)} = \\ &= e^{-ip + ip' \frac{h}{2} + (\ln \sin p)' \frac{h}{2} + O(h^2 e^{-|y|})} = e^{-ip + ip' \frac{h}{2} + (\ln \sin p)' \frac{h}{2}} (1 + O(h^2 e^{-|y|})). \end{aligned}$$

Здесь было учтено, что

$$(\ln \sin p)'' = ip'' \frac{e^{2ip} + 1}{e^{2ip} - 1} - ip' \frac{4ip' e^{2ip}}{(e^{2ip} - 1)^2} = O(e^{-|y|}).$$

Тогда $\hat{T}_{11} = BT_{11} = 1 + O(h^2 e^{-|y|})$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} D &:= e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^{z+h} p dz + \frac{1}{2} \ln \sin p(z+h) + ip(z+h)} e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z)} = \\ &= e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} (1 + O(h e^{-2|y|})). \end{aligned}$$

Тогда $\hat{T}_{12} = DT_{12} = \hat{T}_{12} = e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h)$.

Аналогичным образом можно получить оценки для \hat{T}_{22} и \hat{T}_{21} .

□

Используя доказанную лемму, перепишем уравнение на вектор X как

$$X(z+h) - X(z) = \begin{pmatrix} O(h^2 e^{-|y|}) & e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h) \\ e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h e^{-2|y|}) & O(h^2 e^{-|y|}) \end{pmatrix} X(z), \quad (14)$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в области K . Далее задача состоит в том, чтобы обратить разностный оператор первого порядка в левой части равенства и преобразовать уравнение в интегральное уравнение с малым оператором.

4 Интегральное уравнение на кривой

4.1 Преобразование разностного уравнения в интегральное

Для построения решений разностного уравнения (14) мы преобразуем его в интегральное уравнение с помощью Леммы 1.5.1.

Обозначим $g(z)$ правую часть в (14) и рассмотрим уравнение как неоднородное. Тогда решение уравнения (14) оказывается суммой решения однородного уравнения $X(z+h) - X(z) = 0$ и частного решения, построенного с помощью Леммы:

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_+ O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_+ e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^{\cdot} p dz} O(h) \\ L_+ e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^{\cdot} p dz} O(h e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_+ O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Поясним все обозначения в уравнении (15). Матрица в правой части состоит из операторных блоков, каждый блок действует на скалярную функцию следующим образом: сначала приходится умножение на $O(\cdot)$, а затем ко всему выражению применяется оператор L_+ . Здесь выражение L_+g отличается от выражения Lg из Леммы 1.5.1 добавлением решения однородного уравнения и определяется равенством

$$L_+g(z) = \frac{1}{2ih} \int_{\gamma_z} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} - i \right) g(\zeta) d\zeta.$$

Заметим, что оператор L_+ имеет экспоненциально убывающее ядро на $-i\infty$, позже мы используем это в доказательстве.

Сделаем еще одну замену $\chi_2(z) = e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz + ip(z)} h^\alpha \tilde{\chi}_2(z)$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда с учетом Следствия 2.1.1 уравнение (15) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} L_+O(h^2e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_+O(h^{1+\alpha}e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \\ O(e^{|\operatorname{Im}(\cdot)|}) K_+O(h^{1-\alpha}e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & O(e^{|\operatorname{Im}(\cdot)|}) K_+O(h^2e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix}.$$

Здесь $K_+g(z) = e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} \left(L_+e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} g(\cdot) \right) (z)$, $O(\cdot)$ обозначают аналитические функции с соответствующими оценками, а χ_1 и χ_2 являются ограниченными аналитическими функциями в области K .

Построение решений уравнения (16) является кульминационным моментом в доказательстве Теоремы 1.3.1. Фиксируем строго каноническую кривую и рассмотрим уравнение (16) на этой кривой. Далее мы проверим, что на строго канонической кривой норма оператора в правой части (16) оказывается малой.

4.2 Оценки норм интегральных операторов

Напомним, что в Секции 2.2 мы расширили каноническую область до полуполос на достаточно больших расстояниях от \mathbb{R} , обозначим эту „максимальную“ область K . Рассмотрим допустимую подобласть A канонической области K . Так как K имеет конечную ширину, то, чуть уменьшив ее до допустимой подобласти A , мы ничего не потеряем: в ней снова можно найти строго каноническую кривую.

Итак, фиксируем в допустимой подобласти A канонической области K строго каноническую кривую γ . Рассмотрим „окрестность“ кривой γ :

$$A_\gamma^h = \left\{ z \in A \mid \exists \zeta \in \gamma : \operatorname{Im} \zeta = \operatorname{Im} z \text{ и } |\operatorname{Re} \zeta - \operatorname{Re} z| < \frac{h}{2} \right\}, h > 0.$$

Мы будем рассматривать пространство аналитических и ограниченных в A_γ^h функций:

$$H_\gamma^h = \left\{ g \in \mathcal{H}(A_\gamma^h) \mid \|g\| = \sup_{z \in A_\gamma^h} |g(z)| < \infty \right\}.$$

Заметим, что H_γ^h является банаховым пространством.

Теорема 4.2.1 Пусть γ — строго вертикальная кривая в допустимой области A . Тогда для достаточно малых h норма оператора $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})$ в H_γ^h удовлетворяет оценке

$$\|L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| \leq \frac{C}{h}. \quad (17)$$

Доказательство. Сходимость интеграла $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ следует из наличия экспоненциального убывания подынтегрального выражения на бесконечности.

Рассмотрим функцию $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ в точках справа от γ в A_γ^h и покажем ее аналитичность. Заметим, что в уравнении (16) оператор L_+ действует на аналитические в A_γ^h функции. Возьмем в качестве точки z точку z_0 . Оператор L_+ устроен так, что контур интегрирования γ обходит точку z_0 слева по инфинитезимальной дуге. Прodeформируем γ параллельным переносом на $\frac{h}{4}$ влево и обозначим полученную кривую γ' . Теперь очевидна аналитичность функции $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ в точке z_0 и справа от нее в A_γ^h .

Далее оценим $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ в точке z_0 и справа от нее в A_γ^h . Так как „новая“ кривая получена из „старой“ параллельным переносом, то γ' тоже строго вертикальна. Обозначим $\eta = \operatorname{Im} \zeta$. Тогда

$$|(L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot))(z)| = \frac{1}{2h} \left| \int_{\gamma'} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} - i \right) O(e^{-|\eta|}) g(\zeta) d\zeta \right|.$$

Теперь расстояние от γ' до точки z не меньше $\frac{h \sin \delta}{4}$, где δ — минимальный угол наклона кривой γ . Для $|\zeta - z| \geq \frac{h \sin \delta}{4}$ существует константа C такая, что

$$\left| \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right| \leq C \begin{cases} 1, & \eta \geq y; \\ e^{-\frac{2\pi}{h}|\eta - y|}, & \eta < y. \end{cases} \quad (18)$$

Из условия строгой вертикальности кривой γ' следует, что $|d\zeta| \leq \frac{d\eta}{\sin \delta}$.
Тогда

$$\left| \int_{\gamma'} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right) O(e^{-|\eta|}) g(\zeta) d\zeta \right| \leq \\ \leq C \|g\| \left(\int_y^\infty e^{-|\eta|} d\eta + \int_{-\infty}^y e^{-|\eta|} e^{-\frac{2\pi}{h}|\eta-y|} d\eta \right).$$

Также мы имеем $|y| \leq |\eta - y| + |\eta|$, из чего следует

$$\int_y^\infty e^{-|\eta|} d\eta + \int_{-\infty}^y e^{-|\eta|} e^{-\frac{2\pi}{h}|\eta-y|} d\eta \leq C \left(1 + e^{-|y|} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{2\pi-h}{h}|\eta-y|} d\eta \right) \leq C.$$

Таким образом,

$$|(L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot))(z)| \leq C \frac{\|g\|}{h} \quad (19)$$

с константой C , не зависящей от функции $g \in H_\gamma^h$. Здесь z лежит справа от γ .

Теперь рассмотрим функцию $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ в точках слева от γ в A_γ^h и покажем ее аналитичность. Когда мы перемещаем точку z влево, при пересечении контура появляется дополнительный вычет подынтегральной функции, который также является функцией аналитической. Отсюда следует аналитичность $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ слева от γ в A_γ^h .

Выражение для $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ в точках слева от γ отличается от уже рассмотренного добавлением вычета, который оценивается через $C\|g\|$, и кривой γ' . Теперь γ' получается из γ параллельным переносом на $\frac{h}{4}$ вправо. В силу малости h вычет не влияет на конечные оценки:

$$|(L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot))(z)| \leq \frac{C}{h} \left| h\|g\| + \int_{\gamma'} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} - i \right) e^{-|\eta|} g(\zeta) d\zeta \right|.$$

Итак, неравенство (19) имеет место всюду в A_γ^h . Отсюда следует, что функция $L_+O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})g(\cdot)$ принадлежит классу H_γ^h , и имеет место неравенство (17). □

Теорема 4.2.2 Пусть γ — строго каноническая кривая в области A . Тогда для достаточно малых h норма оператора $O(e^{|\eta|}) K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})$ в H_γ^h удовлетворяет оценке

$$\|O(e^{|\eta|}) K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| \leq C. \quad (20)$$

Доказательство. Сначала обсудим сходимость интеграла $K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})$ на бесконечности. Для этого вырежем некоторую β -окрестность точки z_0 , которую γ обходит слева по инфинитезимальной дуге. Тогда на оставшейся части кривой выполнено неравенство (18) и мы получаем

$$\left| e^{\frac{2i}{h} \int_z^\zeta p dz} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right) \right| \leq C \begin{cases} e^{-\frac{2}{h} \operatorname{Im} \int_z^\zeta p dz}, & \eta \geq y; \\ e^{-\frac{2}{h} \operatorname{Im} \int_z^\zeta p dz - \frac{2\pi}{h} |\eta - y|}, & \eta < y; \end{cases} \quad (21)$$

для точек $\zeta \in \gamma$ таких, что $|\zeta - z_0| > \beta$. Из условия строгой каноничности кривой γ следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{cases} -\operatorname{Im} \int_z^\zeta p dz \leq -\varepsilon(\eta - y), & \eta \geq y; \\ -\operatorname{Im} \int_z^\zeta (p - \pi) dz \leq \varepsilon(\eta - y), & \eta < y. \end{cases} \quad (22)$$

А значит, для $|\zeta - z_0| > \beta$ выполнена оценка

$$\left| e^{\frac{2i}{h} \int_z^\zeta p dz} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right) \right| \leq C e^{-\frac{2\varepsilon}{h} |\eta - y|}. \quad (23)$$

Отсюда очевидным образом следует сходимость интеграла $K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})$.

Рассуждение об аналитичности функции $K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot)$ в A_γ^h проводится так же, как и в предыдущей теореме.

Далее оценим $O(e^{|\eta|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot))(z)$ в точке z_0 и справа от нее в A_γ^h . Продеформируем γ параллельным переносом на $\frac{h}{4}$ влево и обозначим полученную кривую γ' . Из свойства устойчивости строго канонических кривых (2.2.1) следует, что существует ε -окрестность кривой γ такая, что любая кривая в ней, полученная из γ параллельным переносом, будет строго канонической. Таким образом, для достаточно малых h кривая γ' будет строго канонической. Тогда

$$\begin{aligned} & |O(e^{|\eta|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot))(z)| = \\ & = \left| \frac{O(e^{|\eta|})}{h} \int_{\gamma'} e^{\frac{2i}{h} \int_z^\zeta p dz} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} - i \right) O(e^{-2|\eta|}) g(\zeta) d\zeta \right|. \end{aligned}$$

Теперь расстояние от γ' до точки z не меньше $\frac{h \sin \delta}{4}$, где δ — минимальный угол наклона кривой γ . А значит, выполнены неравенства (18) и (21). Учитывая условие строгой каноничности (22) для кривой γ' , мы приходим к (23). Заметим, что здесь мы рассматриваем ε , которое годится для кривой γ и ее сдвигов γ' . Используя оценку (23) и условие строгой вертикальности кривой γ' , мы получаем

$$\begin{aligned} |O(e^{|y|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot)) (z)| &\leq \frac{C e^{|y|} \|g\|}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\varepsilon}{h} |\eta-y| - 2|\eta|} d\eta \leq \\ &\leq \frac{C e^{|y|} \|g\| e^{-2|y|}}{h} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\varepsilon-2h}{h} |\eta-y|} d\eta \right| \leq C \|g\|. \end{aligned}$$

Выражение для $O(e^{|y|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot)) (z)$ в точках слева от кривой γ отличается от уже рассмотренного добавлением вычета, который оценивается через $C \|g\|$, и кривой γ' . Теперь γ' получается из γ параллельным переносом на $\frac{h}{4}$ вправо.

Таким образом,

$$|O(e^{|y|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot)) (z)| \leq C \|g\|$$

с константой C , не зависящей от функции $g \in H_\gamma^h$. Отсюда следует, что функция $O(e^{|y|}) (K_+ O(e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) g(\cdot)) (z)$ принадлежит классу H_γ^h , и имеет место неравенство (20). □

Заметим, что максимальная из констант C в (20) и (17) зависит только от параметров δ и ε строго канонической кривой γ в области A .

5 Продолжение решения с кривой в допустимую область A

5.1 Построение решения на кривой

Лемма 5.1.1 *Для достаточно малого h уравнение (16) на γ имеет единственное векторное решение с компонентами из H_γ^h . Они допускают асимптотические представления*

$$\chi_1 = 1 + O(h), \quad \tilde{\chi}_2 = O(h^{1-\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (24)$$

Доказательство. Из Теорем 4.2.1 и 4.2.2 следует, что для достаточно малых h компоненты матрицы K из уравнения (16) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}\|L_+O(h^2e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq Ch, & \|L_+O(h^{1+\alpha}e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq Ch^\alpha, \\ \|O(e^{|\operatorname{Im}(\cdot)|})K_+O(h^{1-\alpha}e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq Ch^{1-\alpha}, \\ \|O(e^{|\operatorname{Im}(\cdot)|})K_+O(h^2e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq Ch^2.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при достаточно малом h уравнение (16) на γ имеет единственное векторное решение с компонентами из H_γ^h :

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(h) & O(h^\alpha) \\ O(h^{1-\alpha}) & O(h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + O(h) \\ O(h^{1-\alpha}) \end{pmatrix}.$$

Здесь поправочные члены оценены по норме в H_γ^h . □

5.2 Аналитическое продолжение решения

Теперь укажем процедуру аналитического продолжения решения с кривой γ . Справедлива

Лемма 5.2.1 *Пусть $A \subset \mathbb{C}$ — допустимая область, $\gamma \subset A$ — строго каноническая кривая. Тогда при достаточно малом h компоненты (24) решения уравнения (17) могут быть аналитически продолжены с кривой γ в область A .*

Доказательство. Ядро оператора L_+ имеет полюсы в точках $\zeta = z + 0 + hk, k \in \mathbb{Z}$. Поэтому правая часть в (16) может быть аналитически продолжена в полосу A_h , где

$$A_h = \{z \in A \mid \exists \zeta \in \gamma : \operatorname{Im} \zeta = \operatorname{Im} z \text{ и } 0 < \operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \zeta < h\}, \quad h > 0.$$

Поэтому и функции χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ из левой части (16) аналитически продолжают в эту полосу. Деформируя контур интегрирования в интегралах, через которые выражается правая часть в (16), так, чтобы он оставался внутри A_h , мы видим, что χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ могут быть аналитически продолжены в полосу A_{2h} . Повторяя эти рассуждения, мы аналитически продолжаем χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ в часть области A , расположенную справа от γ .

Проверим, что χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ аналитически продолжают налево от γ . Переобозначим оператор K как K_γ , явно указывая контур интегрирования в интегральном операторе. Пусть $z \in A_h$. Продеформируем строго каноническую γ к строго канонической кривой γ_1 , проходящей между точками

z и $z + h$. Поскольку ядра L_+ и K_+ имеют простые полюса в $\zeta = z + 0$, уравнение (16) заменяется на

$$[I + O(h^{1-\alpha})] \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K_{\gamma_1} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Второй член в скобках в левой части (25) — вклад вычета, появившегося при деформации контура. Он является матрицей 2×2 с аналитическими коэффициентами, которые оцениваются через $Ch^{1-\alpha}$ в области A . Мы продолжили χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ направо от γ с помощью (16). Применяя аналогичные рассуждения к (25), мы продолжаем эти функции налево от γ . \square

5.3 Асимптотики решения вне кривой

Лемма 5.3.1 Пусть $\gamma_1 \subset A$ — еще одна каноническая кривая. Обозначим h_0 и h_1 параметры из Леммы 5.1.1 для кривых γ и γ_1 соответственно. Положим $h = \min(h_0, h_1)$. Тогда вдоль γ_1 решения $\chi_1, \tilde{\chi}_2$ допускают асимптотические представления вида (24), в которых оценки поправочных членов указаны относительно нормы в $H_{\gamma_1}^h$.

Доказательство. Для выбранного h уравнение (16) вдоль γ_1 имеет единственное векторное решение с компонентами из $H_{\gamma_1}^h$, обозначим их $\chi_1^1, \tilde{\chi}_2^1$. Они имеют вдоль γ_1 асимптотики вида (24), в которых оценки поправочных членов указаны относительно нормы в $H_{\gamma_1}^h$.

Согласно Лемме 5.2.1, мы можем аналитически продолжить решения χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ на кривую γ_1 . Они принадлежат пространству $H_{\gamma_1}^h$. Деформируя кривую γ к γ_1 , нетрудно убедиться, что эти „старые“ функции удовлетворяют „новому“ уравнению на γ_1 . Но в $H_{\gamma_1}^h$ это уравнение имеет единственное решение. Отсюда вдоль γ_1 $\chi_1^1 = \chi_1$ и $\tilde{\chi}_2^1 = \tilde{\chi}_2$. \square

5.4 Равномерные асимптотики решения в допустимой области A

Сначала с помощью Леммы 5.1.1 мы строим решения χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ на γ . Затем с помощью Леммы 5.2.1 мы можем продолжить их в область A , и по Лемме 5.3.1 оно будет допускать асимптотическое представление (24) на любой строго канонической кривой с оценкой поправочных членов относительно нормы в пространстве, соответствующем этой кривой. Малость

h зависит от параметров строго канонической кривой: минимального угла наклона δ и параметра ε из условий строгой каноничности (9). Наша цель — получить равномерные в допустимой области A оценки.

Сперва покажем, что мы имеем равномерные оценки на любом компакте в A . Рассмотрим компакт $\tilde{A} \subset A$ (см. Рис. 5). Любая точка $z_0 \in \tilde{A}$ содержится между двумя строго каноническими кривыми γ и γ_1 . Прodefормируем верхние и нижние части этих кривых вне компакта \tilde{A} , как в Лемме 2.2.4. Мы можем считать, что они совпадают вне \tilde{A} с линиями $\operatorname{Re} z = C_1$ сверху и $\operatorname{Re} z = C_2$ снизу. Решения χ_1 и $\tilde{\chi}_2$ аналитичны в области A_0 , содержащейся между этими кривыми. Аналитические функции $\chi_1 - 1$ и $\tilde{\chi}_2$ равны $O(h)$ на замкнутой кривой, ограничивающей A_0 . Здесь $h = \min(h_0, h_1)$. По принципу максимума $\chi_1 - 1 = O(h)$ и $\tilde{\chi}_2 = O(h)$ в A_0 с равномерной по $z \in A_0$ оценкой. В силу компактности, \tilde{A} можно покрыть конечным набором областей типа A_0 . И тогда асимптотические представления (24) будут справедливы на всем компакте \tilde{A} с оценкой равномерной по $z \in \tilde{A}$.

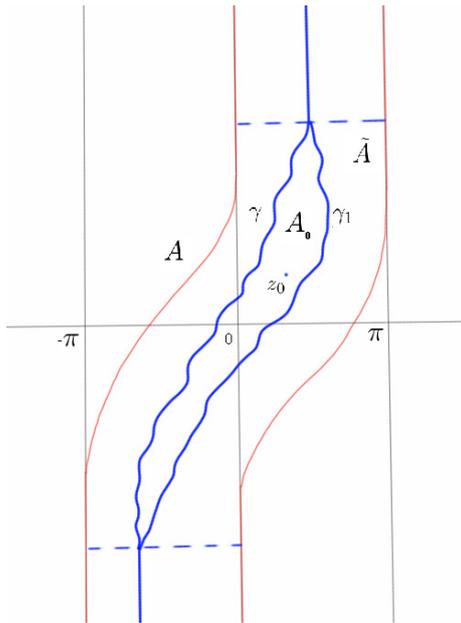


Рис. 5: К доказательству равномерности оценок на любом компакте.

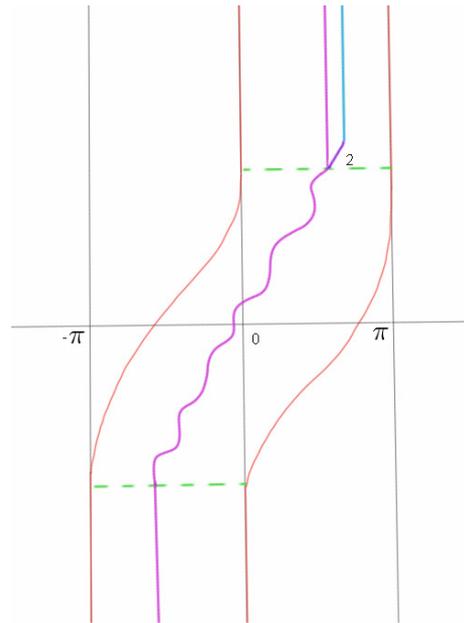


Рис. 6: К доказательству равномерности оценок вне достаточно большого компакта.

Теперь обсудим асимптотики построенного решения вне некоторого компакта. Напомним, что вне достаточно большого компакта каноническая область K состоит из двух полуполос (см. Лемму 2.2.4), а

допустимая подобласть A получается из K „выкидыванием“ некоторой Δ -окрестности границы. Сейчас мы покажем, что для любой кривой $\operatorname{Re} z = \operatorname{const}$, содержащейся в одной из „обрезанных“ полуполос выполнены условия строгой каноничности с параметром $\varepsilon = \frac{\Delta}{2}$. Данное замечание позволит нам говорить о равномерности по кривым асимптотик компонент построенного решения вне достаточно большого компакта.

Рассмотрим модификацию Леммы 2.2.2 для условий строгой каноничности.

Лемма 5.4.1 *Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим ветвь импульса с асимптотикой $p(z) = +(\pi - z) + 2\pi k + O(e^{-|y|})$ при $y \rightarrow +\infty$. Тогда существует единственная полуполоса*

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid x \in (2\pi k + C'e^{-|y|} + \varepsilon, \pi + 2\pi k - C'e^{-|y|} - \varepsilon), y > C\},$$

где $C > 0$ достаточно велико и $C' > 0$ зависит только от p , в которой выполнены условия

$$\frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z p dz \right) > \varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{d}{dy} \left(\operatorname{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) < -\varepsilon.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Леммы 2.2.2. □

Существует также соответствующий аналог Леммы 2.2.3 и формулировки для нижней полуполосы. Отсюда мы имеем равномерность асимптотик компонент решения вне достаточно большого компакта на кривых $\operatorname{Re} z = \operatorname{const}$.

Теперь рассмотрим какую-нибудь строго каноническую кривую γ с параметрами δ и ε . Вне достаточно большого компакта она совпадает с линиями $\operatorname{Re} z = C_1$ (см. Рис. 6). Деформируем верхнюю часть γ , как в Лемме 2.2.4, к любой кривой вида $\operatorname{Re} z = C_2$ (на Рис. 6 голубая) внутри верхней полуполосы. Деформировать нужно так, чтобы минимальный угол наклона „новой“ кривой был равен „старому“ δ . Тогда на части кривой, отмеченной на Рис. 6 цифрой 2, справедливы следующие оценки

$$\frac{d}{ds} \left(\operatorname{Im} \int^z p dz \right) > \varepsilon \sin \delta \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds} \left(\operatorname{Im} \int^z (p - \pi) dz \right) < -\varepsilon \sin \delta.$$

Параметры крайних частей „новой“ кривой остаются теми же. Таким образом, „новая“ кривая является строго канонической с параметрами δ и $\varepsilon \sin \delta$.

Мы обсудили деформацию верхней части кривой. Соответствующие построения для нижней полуполосы проводятся аналогично. Итак, мы имеем равномерность по кривым асимптотик компонент решения вне достаточно большого компакта.

Таким образом, построено решение уравнения (16) в допустимой области A , имеющее асимптотическое представление (24) с оценкой поправочных членов равномерной по $z \in A$.

Теперь проведем все преобразования в обратную сторону.

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z) - ip(z)} & \chi_1(z) &= \frac{e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - ip(z)}}{\sqrt{\sin p(z)}} (1 + O(h)), \\ \phi_2(z) &= e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz - \frac{1}{2} \ln \sin p(z) + ip(z)} & h^\alpha \tilde{\chi}_2(z) &= \frac{e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz + ip(z)}}{\sqrt{\sin p(z)}} O(h), \\ \psi_+(z) &= e^{ip(z)} \phi_1(z) + \phi_2(z) & &= \frac{e^{\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz}}{\sqrt{\sin p(z)}} (1 + O(h)), \quad z \in A,\end{aligned}$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в K . Оценка погрешности равномерна по $z \in A$.

6 Построение второго решения

Обсудим построение второго решения уравнения (14). Оно имеет вид

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_- O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_- e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^{\cdot} p dz} O(h) \\ L_- e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^{\cdot} p dz} O(h e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_- O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Действие оператора L_- определяется соотношением

$$L_- g(z) = \frac{1}{2ih} \int_{\gamma_z} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} + i \right) g(\zeta) d\zeta.$$

Сделаем замену $\chi_1(z) = e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} h^\alpha \tilde{\chi}_1(z)$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение (26) преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} K_{-O}(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & K_{-O}(h^{1-\alpha}) \\ L_{-O}(h^{1+\alpha} e^{-2|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_{-O}(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix}.$$

Здесь $K_{-}g(z) = e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} \left(L_{-} e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} g(\cdot) \right) (z)$, $O(\cdot)$ обозначают ана-

литические функции с соответствующими оценками, а функции $\tilde{\chi}_1, \chi_2$ являются аналитическими в области K .

Анализ уравнения (27) аналогичен анализу уравнения (16), так что справедливы все результаты Секции 4.2 и Раздела 5. Таким образом, найдено второе решение

$$\psi_{-}(z) = \frac{e^{-\frac{i}{h} \int_{z_0}^z p dz}}{\sqrt{\sin p(z)}} (1 + O(h)), \quad z \in A,$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка в K . Оценка погрешности равномерна по $z \in A$.

7 Построение решений в областях другого типа

Теперь рассмотрим каноническую область K типа II, в ней для ветви импульса p выполнено $|e^{-ip(z)}| \leq C e^{-|y|}$, $|y| \rightarrow \infty$. Построение решений здесь аналогично предыдущему. Для преобразования матрицы в уравнении (13) сделаем замену $\Psi(z) = U(z)\Phi(z)$ с матрицей $U(z) = \begin{pmatrix} e^{-ip(z)} & 1 \\ 1 & e^{-ip(z)} \end{pmatrix}$. Все последующие шаги и оценки выполняются точно с заменой импульса p на $-p$ и операторов L_{\pm} на L_{\mp} .

В канонических областях типа III $|e^{ip}|$ растет в одну сторону и убывает в другую. Рассмотрим случай $|e^{-ip(z)}| \leq C e^{-|y|}$, $y \rightarrow +\infty$ и $|e^{ip(z)}| \leq C e^{-|y|}$, $y \rightarrow -\infty$, второй случай рассматривается точно также.

Сначала проведем замену с матрицей $U(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & 1 \\ 1 & e^{ip(z)} \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что утверждение Леммы 3.0.5 сохранится. Матрица \hat{T} , описанная в Лемме 3.0.6, теперь имеет вид

$$\hat{T}(z) = \begin{pmatrix} 1 + O(h^2 e^{-|y|}) & e^{-\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h) A(z) \\ e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} O(h) B(z) & 1 + O(h^2 e^{-|y|}) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в отличие от случаев II и III (см. Лемму 3.0.6) внедиагональные члены матрицы \hat{T} содержат аналитические функции $A(z)$ и $B(z)$, для которых имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} A(z) &= O(e^{-2|y|}), & B(z) &= O(1), & y &\rightarrow +\infty, \\ A(z) &= O(1), & B(z) &= O(e^{-2|y|}), & y &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Обсудим построение первого решения, второе строится аналогичным образом. С помощью Леммы 1.5.1 и после замены $\chi_2(z) = e^{\frac{2i}{h} \int_{z_0}^z p dz} h^\alpha \tilde{\chi}_2(z)$ ($0 < \alpha < 1$) мы приходим к интегральному уравнению (16), где

$$K = \begin{pmatrix} L_+ O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) & L_+ O(h^{1+\alpha}) A(\cdot) \\ K_+ O(h^{1-\alpha}) B(\cdot) & K_+ O(h^2 e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|}) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что за счет экспоненциального убывания ядра L_+ на $-i\infty$ и экспоненциального убывания ядра K_+ на $\pm i\infty$ имеют место оценки, подобные объявленным в Теоремах 4.2.1 и 4.2.2:

$$\begin{aligned} \|L_+ O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq \frac{C}{h}, & \|L_+ A(\cdot)\| &\leq \frac{C}{h}, \\ \|K_+ B(\cdot)\| &\leq C, & \|K_+ O(e^{-|\operatorname{Im}(\cdot)|})\| &\leq C. \end{aligned}$$

Далее процедура продолжения решения из Секции 5 повторяется дословно.

Итак, мы рассмотрели все возможные типы канонических областей и построили решения уравнения Харпера в соответствующих им допустимых областях A , имеющие объявленные асимптотические представления с оценкой поправочных членов равномерной по $z \in A$. Далее мы видим, что с помощью уравнения Харпера мы можем аналитически продолжить решения во всю комплексную плоскость, поэтому решения оказываются целыми. Таким образом, доказательство Теоремы 1.3.1 завершено.

Список литературы

- [1] J.P. Guillemin, B. Helffer, P. Treton. Walk inside Hofstadter's butterfly. J. Phys. France, 50, 2019-2058, 1989.
- [2] А.А. Федотов. Метод монодромизации в теории почти-периодических уравнений. Записки научн. семинаров ПОМИ, 25:2, 203–235, 2013.
- [3] B. Helffer, J.Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application a'l etude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique). Memoires de la SMF, 34, 1988.
- [4] V. Buslaev and A. Fedotov. The complex WKB method for Harper's equation. Reports of Mittag-Leffler institute, Stockholm, 11:1-68, 1993.
- [5] В.С. Буслаев, А.А. Федотов. Комплексный метод ВКБ для уравнения Харпера. Алгебра и анализ, 6(3):59-83,1994.
- [6] М.В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.
- [7] A. Fedotov and F. Klopp. WKB method for adiabatic problems. Asymptotic analysis, 27, 219-264, 2001.