РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКИ С ЗАДАННЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ СТОРОН

Шаров Фёдор, студент третьего курса факультета математики НИУ ВШЭ

1. Основной результат.

В этой статье мы рассмотрим такую задачу: *дан набор прямоугольников; какие фигуры можно разрезать на прямоугольники, подобные данным?* Поставленная задача в целом сложна, до сих пор не имеет решения и вряд ли может быть в разумном смысле решена в общем виде. Однако, довольно интересным является исследование частных случаев этой общей проблемы. В нашей статье мы выясним какие прямоугольники можно разрезать на подобные n данным при условии, что отношения сторон данных прямоугольников — квадратичные иррациональности.

Сформулируем основную теорему нашей статьи.

Теорема 1 (основная). *Пусть $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $\ldots$, $x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$ — такие числа, что $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Тогда:*
1) если существуют такие числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $(a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p}) < 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, $\ldots$, x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \,|\, e, f \in \mathbb{Q}\};$$

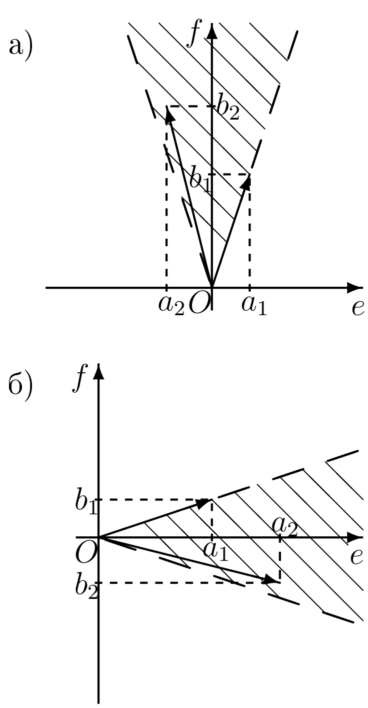


Рис. 1.

2) если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, $\ldots$, x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} \,|\, e, f \in \mathbb{Q}, e > 0, \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i} \right\} =: M(x_1, \ldots, x_n);$$

3) если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон x_1, $\ldots$, x_n тогда и только тогда, когда

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} \,|\, e, f \in \mathbb{Q}, f > 0, \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i} \right\} =: N(x_1, \ldots, x_n).$$

Условия второго и третьего пунктов теоремы имеют простой геометрический смысл. Число вида $z = e + f\sqrt{p}$ изобразим на декартовой плоскости в виде вектора с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке (e, f). На рис. 1.а показан случай, когда $n = 2$, $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$ и $a_2 - b_2\sqrt{p} < 0$: заштрихованная область является множеством $N(x_1, x_2)$. Это наименьшая симметричная относительно оси Of область, которая «содержит» все векторы (a_i, b_i), отложенные из точки $(0, 0)$. Аналогично на рис. 1.б показан случай, когда $n = 2$, $a_1 - b_1\sqrt{p} > 0$ и $a_2 - b_2\sqrt{p} > 0$: здесь заштриховано множество $M(x_1, x_2)$, симметричное относительно оси Oe.

Глядя на рис. 1.а, легко понять, что, на самом деле, если выполнены условия $x_1 = a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$, $x_2 = a_2 - b_2\sqrt{p} < 0$ и $|a_1|/b_1 \geqslant |a_2|/b_2$, то любой прямоугольник с отношением сторон $z \in N(x_1, x_2)$ можно сложить лишь из прямоугольников с отношением сторон x_1:

$$\frac{|e|}{f} \leqslant \max\left(\frac{|a_1|}{b_1}, \frac{|a_2|}{b_2}\right) = \frac{|a_1|}{b_1}.$$

Таким образом, в данном случае $N(x_1, x_2) = N(x_1)$. Аналогичное замечание справедливо и для второго пункта основной теоремы.

2. Обзор известных результатов.

Многие математики занимались обсуждаемой проблемой (см. [1–10]). Ниже приведены несколько из полученных результатов.

Теорема 2 (Ден, 1903, см. [3]). *Если прямоугольник разрезан на квадраты (не обязательно равные), то отношение его сторон рационально.*

Теорема 3 (Ден, 1903, см. теорему 1 в [4]). *Если прямоугольник с отношением сторон x можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то число x можно выразить через числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с помощью сложения, вычитания, умножения и деления.*

У теорем 2 и 3 существуют элементарные доказательства: теорема 2 доказана в [1] под названием «теорема Дена», теорема 3 доказана в [2], но не сформулирована там явно: её доказательство сразу следует из двух результатов: теоремы о сопротивлении цепи и отношении сторон прямоугольника и леммы о сопротивлении цепи.

Теорема 4 (Ласкович, Ринн, Секереш, Фрайлинг, 1994, см. [5, 8]). *Для числа $r > 0$ следующие три условия эквивалентны:*
1) квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон r;
2) для некоторых положительных рациональных чисел c_i выполнено равенство

$$c_1 r + \cfrac{1}{c_2 r + \cfrac{1}{c_3 r + \ldots + \cfrac{1}{c_n r}}} = 1;$$

3) число r является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все комплексные корни имеют положительную действительную часть.

Частным случаем теоремы Ласковича-Ринна-Секереша-Фрайлинга является следующая теорема, элементарное доказательство которой приведено в [2].

Теорема 5. *Пусть $x = a + b\sqrt{2} > 0$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Тогда из прямоугольников с отношением сторон x можно составить квадрат тогда и только тогда, когда $a - b\sqrt{2} > 0$.*

В статье [4] Фрайлинг, Ласкович и Ринн свели задачу о разрезании прямоугольника на прямоугольники, подобные данному, к сложной алгебраической проблеме — они дали алгебраический критерий возможности разрезания, правда, не дающий алгоритма проверки существования разрезания. Но зато это позволило им решить задачу для частного случая, когда отношения сторон являются квадратичными иррациональностями. Вот их теорема (теорема 7 в [4]) в формулировке, равносильной авторской.

Теорема 6 (Фрайлинг, Ласкович, Ринн, 1997). *Пусть $u = \alpha + \beta\sqrt{p} > 0$, где $\alpha, \beta, p \in \mathbb{Q}$ и $\beta\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. И пусть $v = \delta u + \gamma$ для некоторых рациональных γ и δ. Тогда прямоугольник с отношением сторон v можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон u тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*
1) $\gamma = 0$ и $\delta > 0$;
2) $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\gamma(\alpha^2 - \beta^2 p)}{\alpha} > 0$ и $\delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0$.

К. Китинг и Дж.Л. Кинг решили близкую к поставленной в начале статьи задачу — о разрезании прямоугольника на прямоугольники и так называемые «антипрямоугольники» (см. [6, 7]).

3. Определения и обозначения.

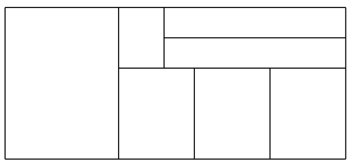
Для доказательства теоремы сначала дадим несколько определений и введём обозначения.

Определение 1. *Отношением сторон* прямоугольника со сторонами a и b будем называть каждое из чисел a/b и b/a.

Множество всех положительных рациональных чисел будем обозначать $\mathbb{Q}^+$, множество $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ будем обозначать $\mathbb{Q}_0^+$, множество всех отрицательных рациональных чисел будем обозначать $\mathbb{Q}^-$. Аналогично для удобства введём обозначения $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > 0\}$ и $\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r < 0\}$.

Определение 2. Все числа, которые можно представить в виде $x = a + b\sqrt{p}$ с рациональным положительным p, таким, что p не является квадратом рационального числа, и рациональными a и b, называются *квадратичными иррациональными числами (КИЧ)* или *квадратичными иррациональностями*. Множество всех квадратичных иррациональностей $x = a + b\sqrt{p}$ при фиксированном p будем обозначать $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$. Множество всех КИЧ $x = a + b\sqrt{p}$ с положительными a и b при фиксированном p будем обозначать $\mathbb{Q}^+\left[\sqrt{p}\right]$.

а)



б)

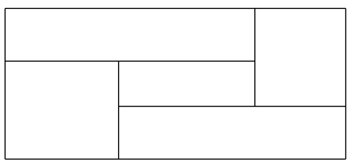


Рис. 2.

Определение 3. Любое разрезание прямоугольника на один прямоугольник (то есть, когда разрезание не производится вовсе) будем называть *тривиальным*. Далее тривиальные разрезания определяются по индукции: если даны два тривиальных разрезания двух прямоугольников P_1 и P_2 с общей стороной, но без общих внутренних точек, то разрезание их объединения, полученное объединением данных разрезаний прямоугольников P_1 и P_2, также будем называть *тривиальным*.

На рис. 2.а изображено тривиальное разрезание, на рис. 2.б — нетривиальное. Неформально говоря, нужно представить разрезаемый прямоугольник в виде прямоугольного листа бумаги с нарисованным на нём разбиением на прямоугольники. Этот бумажный прямоугольник разрешается разрезать вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом производить такие операции по-отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то разрезание будет тривиальным.

Обозначим через $A(x_1, \ldots, x_n)$ множество всех таких чисел z, что прямоугольник с отношением сторон z можно тривиально разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$. Аналогично через $B(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим множество всех таких чисел z, что прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ (не обязательно тривиальным образом). Очевидно, что $A(x, y) \subset B(x, y)$.

4. Доказательство основной теоремы для тривиальных разрезаний.

Основную теорему мы докажем сначала для случая тривиальных разрезаний. Это означает, что в формулировке теоремы нужно заменить слово «разрезать» на словосочетание «тривиально разрезать». Доказательство приведено на элементарном языке и является более наглядным, чем общее доказательство теоремы. Далее в статье мы докажем эту теорему и для любых разрезаний, но при доказательстве уже будем использовать неэлементарные средства.

Итак, прежде всего нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, сформулированных в виде лемм 1–6.

Лемма 1. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно сложения, то есть для любых чисел $a, b \in A(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено $(a + b) \in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

◀ Действительно, пусть $a, b \in A(x, y)$. Заметим, что это означает, что из прямоугольников с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ мы можем тривиально составить любые прямоугольники с отношениями сторон a и b, в том числе прямоугольник со сторонами 1 и a и прямоугольник со сторонами 1 и b. Приложим эти два прямоугольника друг к другу по стороне 1. Получим прямоугольник со сторонами 1 и $a + b$. ▶

Лемма 2. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно операции взятия обратного числа по умножению, то есть для любого числа $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ выполнено $a^{-1} \in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

◀ Действительно, по определению, если число a — отношение сторон некоторого прямоугольника, то число a^{-1} также является отношением сторон того же прямоугольника. ▶

Лемма 3. *Множество $A(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно умножения на положительные рациональные числа, то есть для любого числа $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого числа $q \in \mathbb{Q}^+$ выполнено $aq \in A(x_1, \ldots, x_n)$.*

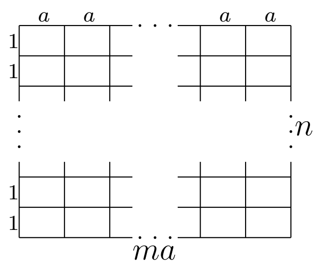


Рис. 3.

◀ Действительно, пусть $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$ и $q = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Прямоугольник со сторонами n и ma, отношение сторон которого равно $\frac{ma}{n} = qa$, можно тривиально разрезать на прямоугольники со сторонами 1 и a (см. рис. 3), а у этих прямоугольников, в свою очередь, существует тривиальное разбиение на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, так как $a \in A(x_1, \ldots, x_n)$. ▶

Лемма 4. *Пусть $(a - b\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] \cap \mathbb{R}^+$. Тогда из прямоугольников с отношением сторон $x = a + b\sqrt{p}$ можно тривиально сложить любой прямоугольник с рациональным положительным отношением сторон и прямоугольник с отношением сторон $a - b\sqrt{p}$.*

◀ Сначала докажем, что можно сложить прямоугольник с отношением сторон $a - b\sqrt{p}$. По лемме 2 имеем $\frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-pb^2} = \frac{1}{a+b\sqrt{p}} = \frac{1}{x} \in A(x)$. Так как $(a^2 - pb^2) \in \mathbb{Q}^+$, то по лемме 3 получаем $(a - b\sqrt{p}) \in A(x)$, что и требовалось.

Теперь докажем, что можно сложить любой прямоугольник с рациональным положительным отношением сторон. По лемме 1 прямоугольник с отношением сторон $2a$ можно тривиально сложить из двух прямоугольников с отношениями сторон $a - b\sqrt{p}$ и $a + b\sqrt{p}$ (так как $(a - b\sqrt{p}) + (a + b\sqrt{p}) = 2a$). Из прямоугольников с отношением сторон $2a \in \mathbb{Q}^+$ по лемме 3 можно тривиальнно сложить прямоугольник с любым рациональным положительным отношением сторон. ▶

Лемма 5. *Пусть $(a - b\sqrt{p}) \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] \cap \mathbb{R}^-$. Тогда из прямоугольников с отношением сторон $x = a + b\sqrt{p}$ можно тривиально сложить любой прямоугольник с отношением сторон $q\sqrt{p}$ (где $q \in \mathbb{Q}^+$) и прямоугольник с отношением сторон $b\sqrt{p} - a$.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4 — оставляем его читателю.

Лемма 6. *Пусть множество P замкнуто относительно операции сложения и операции взятия обратного по умножению. Тогда если $x_1, \ldots, x_n \in P$, то $P \supset A(x_1, \ldots, x_n)$.*

◀ Прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ будем называть *базовыми*. Доказательство проведём индукцией по количеству базовых прямоугольников в разбиении.

База индукции. Из одного базового прямоугольника можно тривиально сложить лишь прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$. По условию леммы $x_1, \ldots, x_n \in P$. По другому условию леммы множество P замкнуто относительно операции взятия обратного по умножению — поэтому $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n} \in P$. Значит, база индукции выполняется.

Шаг индукции. Предположим, все прямоугольники, которые можно тривиально сложить из k прямоугольников с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, имеют отношения сторон, принадлежащие множеству P. Любой прямоугольник $ABCD$, тривиально составленный из $k+1$ базового прямоугольника, можно разрезать на два прямоугольника, тривиально составленные из базовых прямоугольников. Каждый из этих двух прямоугольников будет разрезан не более чем на k базовых прямоугольников, значит, по предположению индукции отношения сторон каждого из них принадлежат множеству P. Найдём отношения сторон прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 4). Он разрезан на два прямоугольника — $ABEF$ и $ECDF$. Так как $\frac{BE}{AB}, \frac{EC}{CD} \in P$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{BE}{AB} + \frac{EC}{CD} \in P$ (из замкнутости P по сложению) и $\frac{AB}{BC} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^{-1} \in P$ (из замкнутости P относительно опе-

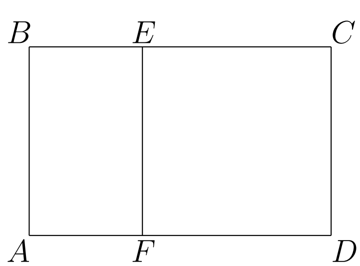


Рис. 4.

рации взятия обратного по умножению).

Таким образом, мы доказали методом математической индукции, что $P \supset A(x_1, \ldots, x_n)$. ▶

Доказательство основной теоремы для тривиальных разрезаний. Докажем первый пункт теоремы. По условию этого пункта существуют два таких числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, а $c_j - d_j\sqrt{p} < 0$.

Докажем, что $P := \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right] \cap \mathbb{R}^+ \subset A(x_1, \ldots, x_n)$. Возьмём произвольное $z = (e + f\sqrt{p}) \in P$. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1: $e > 0$, $f > 0$. По леммам 4 и 5 имеем $e, f\sqrt{p} \in A(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, $e + f\sqrt{p} \in A(x_1, \ldots, x_n)$ по лемме 1.

Случай 2: $e < 0$ (очевидно, что при этом $f > 0$ и $pf^2 - e^2 > 0$). Тогда $\frac{1}{z} = \frac{-e+f\sqrt{p}}{pf^2-e^2} \in \mathbb{Q}^+\left[\sqrt{p}\right] \subset A(x_1, \ldots, x_n)$ (по случаю 1), и по лемме 2 получаем, что $z \in A(x_1, \ldots, x_n)$.

Случай 3: $f < 0$ (очевидно, что при этом $e > 0$ и $e^2 - pf^2 > 0$). Тогда $\frac{1}{z} = \frac{e-f\sqrt{p}}{e^2-pf^2} \in \mathbb{Q}^+\left[\sqrt{p}\right] \subset A(x_1, \ldots, x_n)$ (по случаю 1), и по лемме 2 получаем, что $z \in A(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что множество P замкнуто относительно операций сложения и взятия обратного по умножению. Тогда, так как $x_1, \ldots, x_n \in P$, то по лемме 6 выполнено $P \supset A(x_1, \ldots, x_n)$.

Мы доказали, что $P \supset A(x_1, \ldots, x_n)$ и $P \subset A(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, $P = A(x_1, \ldots, x_n)$. Первый пункт теоремы доказан.

Докажем второй пункт теоремы. Покажем сначала, что $M(x_1, \ldots, x_n) \subset A(x_1, \ldots, x_n)$. Для определённости будем считать, что $|b_1|/a_1 = \max\limits_i(|b_i|/a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $b_1 = 0$, то все числа $x_1, \ldots, x_n$ являются рациональными, $M(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Q}^+$, а $\mathbb{Q}^+ \subset A(x_1, \ldots, x_n)$ по лемме 3. В дальнейшем будем считать, что $b_1 \neq 0$.

Пусть $z = (e + f\sqrt{p}) \in M(x_1, \ldots, x_n)$. По условию теоремы $e \in \mathbb{Q}^+$, $f \in \mathbb{Q}$ и $|f|/e \leqslant |b_1|/a_1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $f \in \mathbb{Q}_0^+$. Докажем, что

$$z = e + f\sqrt{p} = \frac{f}{|b_1|}(a_1 + |b_1|\sqrt{p}) + \left(e - \frac{fa_1}{|b_1|}\right) \in A(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, $\left(e - \frac{fa_1}{|b_1|}\right) \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $\frac{|f|}{e} \leqslant \frac{|b_1|}{a_1}$) и $\frac{f}{|b_1|} \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $f \in \mathbb{Q}_0^+$). По лемме 4 выполнено $(a_1 - b_1\sqrt{p}) \in A(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что тогда $(a_1 \pm |b_1|\sqrt{p}) \in A(x_1, \ldots, x_n)$ и по лемме 1 положительное рациональное число $2a_1 \in A(x_1, \ldots, x_n)$, откуда по лемме 3 для любых $q \in \mathbb{Q}^+$ выполнено $q \in A(x_1, \ldots, x_n)$. Снова применяя леммы 1 и 3, получаем требуемое.

Случай 2: $f \in \mathbb{Q}^-$. Докажем, что

$$z = e + f\sqrt{p} = \frac{|f|}{|b_1|}(a_1 - |b_1|\sqrt{p}) + \left(e - \frac{|f|a_1}{|b_1|}\right) \in A(x_1, \ldots, x_n).$$

Действительно, $\left(e - \frac{|f|a_1}{|b_1|}\right) \in \mathbb{Q}_0^+$ (так как $\frac{|f|}{e} \leqslant \frac{|b_1|}{a_1}$) и $\frac{|f|}{|b_1|} \in \mathbb{Q}^+$. Применяя леммы 1 и 3, получаем требуемое.

Таким образом, в любом случае если $z \in M(x_1, \ldots, x_n)$, то $z \in A(x_1, \ldots, x_n)$, то есть $M(x_1, \ldots, x_n) \subset A(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь проверим включение $M(x_1, \ldots, x_n) \supset A(x_1, \ldots, x_n)$. По лемме 6 для этого достаточно проверить замкнутость множества $M(x_1, \ldots, x_n)$ относительно операций сложения и взятия обратного по умножению.

Докажем сначала, что $M(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто по сложению. Действительно, пусть $(e + f\sqrt{p}), (g + h\sqrt{p}) \in M(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $|f| \leqslant e\frac{|b|}{a}$ и $|h| \leqslant g\frac{|b|}{a}$. Сложив эти неравенства, получим $|f+h| \leqslant |f|+|h| \leqslant (e+g)\frac{|b|}{a}$. Кроме того, очевидно, $(e+g) \in \mathbb{Q}^+$ и $(f+h) \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $[(e+g)+(f+h)\sqrt{p}] \in M(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь покажем, что $M(x_1, \ldots, x_n)$ замкнуто относительно операции взятия обратного по умножению. Действительно, пусть $(e+f\sqrt{p}) \in M(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $\frac{1}{e+f\sqrt{p}} = \frac{e-f\sqrt{p}}{e^2-pf^2}$. Очевидно, что это число также принадлежит множеству $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом, $M(x,y) \supset A(x_1, \ldots, x_n)$ и $M(x_1, \ldots, x_n) \subset A(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, $M(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$. Второй пункт нашей теоремы доказан.

Доказательство третьего пункта теоремы почти дословно повторяет доказательство второго пункта (вместо леммы 4 нужно использовать лемму 5).

5. Доказательство основной теоремы.

Приступим к доказательству основной теоремы в общем случае, то есть без предположения тривиальности разрезаний. Для этого нам снова потребуется доказать две вспомогательные леммы.

Лемма 7. *Если* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$, *то* $B(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$.

◀ Действительно, если $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, то поскольку множество $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления, по теореме 3 получаем, что $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$. Число z — отношение сторон прямоугольника, поэтому по определению $z > 0$, следовательно, $B(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$. ▶

Следующая лемма 8 эквивалентна теореме 6, но имеет чуть большую область применимости. По сути, лемма 8 является переформулировкой теоремы 6 на нашем «языке».

Лемма 8. *Пусть* $u = a + b\sqrt{p}$ *— положительная квадратичная иррациональность. Тогда: 1) если* $a - b\sqrt{p} > 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* v *можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон* u *тогда и только тогда, когда*

$$v \in \left\{ e + f\sqrt{p} \,|\, e \in \mathbb{Q}^+, f \in \mathbb{Q}, \frac{|f|}{e} \leqslant \frac{|b|}{a} \right\} = M(u);$$

2) если $a - b\sqrt{p} < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* v *можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон* u *тогда и только тогда, когда*

$$v \in \left\{ e + f\sqrt{p} \,|\, f \in \mathbb{Q}^+, e \in \mathbb{Q}, \frac{|e|}{f} \leqslant \frac{|a|}{b} \right\} = N(u).$$

◀ Если $b = 0$, то лемма 8 выполнена по теореме 3. В дальнейшем будем считать, что $b \neq 0$.

Обозначим $\alpha = a$, $\beta = b \neq 0$. Лемму достаточно доказать при условии, когда $v \in \mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, потому что это условие необходимо выполнено как при $v \in M(u)$ или $v \in N(u)$, так и при $v \in B(u)$ (по лемме 7). Тогда существуют такие рациональные числа γ и δ, что $v = \delta u + \gamma = \delta\beta\sqrt{p} + \delta\alpha + \gamma$. Рассмотрим два случая: когда $\alpha - \beta\sqrt{p} > 0$ и когда $\alpha - \beta\sqrt{p} < 0$.

1) Предположим

$$\alpha - \beta\sqrt{p} > 0. \tag{1}$$

Сразу заметим, что в нашей задаче это условие равносильно выполнению условия $\alpha > |\beta|\sqrt{p}$, так как $\alpha + \beta\sqrt{p} = u > 0$. Далее в этом пункте доказательства мы произведём ряд равносильных преобразований, которые верны лишь при условии (1).

Итак, условие $v \in M(u)$, очевидно, равносильно следующим двум условиям:

$$\delta\alpha + \gamma > 0 \text{ и } \frac{|\beta\delta|}{\delta\alpha + \gamma} \leqslant \frac{|\beta|}{\alpha}. \tag{2}$$

Теперь рассмотрим два подслучая: 1.1) $\gamma = 0$ и 1.2) $\gamma \neq 0$.

1.1) Если $\gamma = 0$, то выполнение системы условий (2) равносильно выполнению условия $\delta > 0$.

1.2) Если $\gamma \neq 0$, то, пользуясь первым условием из (2), второе можно преобразовать так:

$$\frac{|\beta\delta|}{\delta\alpha+\gamma} \leqslant \frac{|\beta|}{\alpha} \Leftrightarrow |\delta| \leqslant \delta + \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\delta \leqslant \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \leqslant \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0 \\ \gamma > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0 \\ \dfrac{\gamma(\alpha^2-\beta^2 p)}{\alpha} > 0, \end{cases}$$

где на последнем шаге мы воспользовались предположением $\alpha > |\beta|\sqrt{p}$.

Получаем, что если $\beta \neq 0$ и $\alpha - \beta\sqrt{p} > 0$, то условие $v \in M(u)$ равносильно выполнению одного из двух условий: либо 1) $\gamma = 0$ и $\delta > 0$, либо 2) $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\gamma(\alpha^2-\beta^2 p)}{\alpha} > 0$ и $\delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0$. По теореме 6 искомое разрезание существует тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из этих условий. Таким образом, первый пункт леммы доказан.

2) Предположим

$$\alpha - \beta\sqrt{p} < 0. \tag{3}$$

В нашей задаче это условие равносильно выполнению условия $\alpha < |\beta|\sqrt{p}$, так как $\alpha + \beta\sqrt{p} = u > 0$. Далее в этом пункте доказательства мы произведём ряд равносильных преобразований, которые верны лишь при условии (3).

Итак, условие $v \in N(u)$, очевидно, равносильно следующим двум условиям:

$$\delta\beta > 0 \text{ и } \frac{|\delta\alpha+\gamma|}{\beta\delta} \leqslant \frac{|\alpha|}{\beta}. \tag{4}$$

Снова рассмотрим два подслучая: 2.1) $\gamma = 0$ и 2.2) $\gamma \neq 0$.

2.1) Если $\gamma = 0$, то выполнение системы условий (4) равносильно выполнению условия $\delta > 0$.

2.2) Если же $\gamma \neq 0$, то, пользуясь первым условием из (4), второе можно преобразовать так:

$$\frac{|\delta\alpha+\gamma|}{\beta\delta} \leqslant \frac{|\alpha|}{\beta} \Leftrightarrow |\delta\alpha+\gamma| \leqslant \delta|\alpha| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ |\delta + \dfrac{\gamma}{\alpha}| \leqslant \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0 \\ \dfrac{\gamma(\alpha^2-\beta^2 p)}{\alpha} > 0. \end{cases}$$

Получаем, что если $\beta \neq 0$ и $\alpha - \beta\sqrt{p} < 0$, то условие $v \in N(u)$ равносильно выполнению одного из двух условий: либо 1) $\gamma = 0$ и $\delta > 0$, либо 2) $\alpha \neq 0$, $\dfrac{\gamma(\alpha^2-\beta^2 p)}{\alpha} > 0$ и $\delta + \dfrac{\gamma}{2\alpha} \geqslant 0$. По теореме 6 искомое разрезание существует тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из этих условий. Таким образом, второй пункт леммы доказан. ▶

Доказательство основной теоремы. Докажем первый пункт теоремы. По основной теореме для тривиальных разрезаний $B(x_1, \ldots, x_n) \supset A(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$. Также по лемме 7 выполняется обратное включение. Таким образом, $B(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{Q}[\sqrt{p}] \cap \mathbb{R}^+$, что и требовалось в первом пункте доказываемой теоремы.

Докажем второй пункт теоремы. Не теряя общности, можем предположить, что $|b_1|/a_1 = \max_i(|b_i|/a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажем, что тогда $B(x_1) = B(x_1, \ldots, x_n)$. По основной теореме для тривиальных разрезаний $x_2, \ldots, x_n \in A(x_1)$. Пусть $z \in B(x_1, \ldots, x_n)$. В разрезании прямоугольника с отношением сторон z на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ заменим каждый прямоугольник с отношением сторон, принадлежащим множеству $\{x_2, \ldots, x_n\}$, на его тривиальное разрезание на прямоугольники с отношением сторон x_1. Получим разрезание прямоугольника с отношением сторон z на прямоугольники с отношением сторон x_1. Это мы доказали, что $B(x_1,\dots,x_n)\subset B(x_1)$. Обратное включение очевидно следует из определения множества $B(x_1,\dots,x_n)$. Таким образом $B(x_1)=B(x_1,\dots,x_n)$. По лемме 8

$$B(x_1,\dots,x_n)=B(x_1)=\left\{e+f\sqrt{p}\,|\,e\in\mathbb{Q}^+, f\in\mathbb{Q}, \frac{|f|}{e}\leqslant\frac{|b_1|}{a_1}\right\}.$$

Вспоминая, что мы предположили, что $|b_1|/a_1=\max\limits_i(|b_i|/a_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$, получаем

$$B(x_1,\dots,x_n)=\left\{e+f\sqrt{p}\,|\,e\in\mathbb{Q}^+, f\in\mathbb{Q}, \frac{|f|}{e}\leqslant\max_i\frac{|b_i|}{a_i}\right\},$$

что и требовалось.

Третий пункт теоремы доказывается аналогично второму.

Список литературы

[1] М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко, «Разрезания металлического прямоугольника», журнал «Квант» №3 за 2011 год, стр. 10–17.

[2] М. Скопенков, О. Малиновская, С. Дориченко, «Собери квадрат», журнал «Квант» №2 за 2015 год, стр. 6–11.

[3] M. Dehn, Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. **57** (1903), 314–332.

[4] C. Freiling, M. Laczkovich, and D. Rinne, Rectangling a rectangle, Discr. Comp. Geom. **17** (1997), 217-225.

[5] C. Freiling and D. Rinne, Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. **1** (1994), 547–558.

[6] K. Keating and J. L. King, Shape tiling, Elect. J. Comb. **4:2** (1997), R12.

[7] K. Keating and J. L. King, Signed tilings with squares, J. Comb. Theory A **85:1** (1999), 83–91.

[8] M. Laczkovich and G. Szekeres, Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geom. **13** (1995), 569–572.

[9] R. Kenyon, Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel J. Math. **105:1** (1998), 61–84.

[10] B. Szegedy, Tilings of the square with similar right triangles, Combinatorica **21:1** (2001), 139–144.