Классификация некоторых дифференциальных операторов ранга 2

В.С.Оганесян

Введение

Если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [1]). Кривая Γ, определенная соотношением $R(z,w) = 0$, называется *спектральной кривой*. Если

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z,w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z,w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом*. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n. Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функцию Римана [2]. Случай ранга больше 1 значительно сложней. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье [8] для невырожденной эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α:

$$L = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^2 + 2x,$$

$$M = (\partial_x^2 + x^3 + \alpha)^3 + 3x\partial_x^2 + 3\partial_x + 3x(x^2 + \alpha),$$

где L и M – коммутирующая пара операторов Диксмье ранга 2 рода 1. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена Кричевером [3]. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым [4]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой (общий вид операторов ранга 3, рода 1 параметризуется двумя произвольными функциями) был найден Моховым [5], [6]. Более того, примеры коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами были построены для произвольного ранга. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами была поставлена и рассмотрена Моховым в [10]. Миронов в [7] построил примеры коммутирующих операторов L и M ранга 2 и произвольного рода g:

$$L = (\partial_x^2 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)^2 + g(g+1)A_3x,$$

$$M^2 = L^{2g+1} + a_{2g}L^{2g} + ... + a_1L + a_0,$$

где A_i – произвольные константы, $A_3 \neq 0$, a_i – некоторые константы. Кроме того, Мироновым в [9] было доказано, что

$$L_1 = (\partial_x^2 + \alpha_1\mathcal{P}(x) + \alpha_0)^2 + \alpha_1g_2g(g+1)\mathcal{P}(x), \alpha_1 \neq 0$$

$$M_1^2 = L_1^{2g+1} + a_{2g}L_1^{2g} + ... + a_1L_1 + a_0$$

где $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{P}'(x))^2 = g_2\mathcal{P}^2(x) + g_1\mathcal{P}(x) + g_0, g_2 \neq 0,$$

коммутирующая пара ранга 2, рода g.
В той же работе доказано, что

$$L_2 = (\partial_x^2 + \alpha_1\wp(x) + \alpha_0)^2 + s_1\wp(x) + s_2\wp^2(x),$$

$$M_2^2 = L_2^{2g+1} + b_{2g}L_2^{2g} + ... + b_1L_2 + b_0$$

где $\wp(x)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса, $\alpha_1 = \frac{1}{4} - 2g^2 - 2g$, $s_1 = \frac{1}{4}g(g+1)(16\alpha_0 + 5g_2)$, $s_2 = -4g(g+2)(g^2-1)$, тоже коммутирующая пара ранга 2, рода g.
Примеры коммутирующих операторов произвольного рода и произвольного ранга с полиномиальными коэффициентами были построены Моховым в [11]. В работе [12] доказано, что операторы

$$L_1 = (\partial_x^2 + A_6x^6 + A_2x^2)^2 + 16g(g+1)A_6x^4,$$

$$L_2 = (\partial_x^2 + A_4x^4 + A_2x^2 + A_0)^2 + 4g(g+1)A_4x^2,$$

где $g \in \mathbb{N}$, $A_6 \neq 0$, $A_4 \neq 0$, A_2, A_0 – произвольные числа, коммутируют с дифференциальными операторами M_1 и M_2 порядка $4g+2$. L_1, M_1 и L_2, M_2 являются операторами ранга 2, а их спектральная кривая имеет вид $w^2 = z^{2m+1} + a_{2m}z^{2m} + ... + a_1z + a_0$. В той же работе доказаны следующие четыре утверждения:

1) Если $L=(\partial_x^2+A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+...+A_0)^2+B_kx^k+B_{k-1}x^{k-1}+...+B_0$, где $n>3$, $A_n\neq 0$, $B_k\neq 0$, коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и M, L – операторы ранга 2, то $k=n-2$ и $B_k=(n-2)^2m(m+1)A$ для некоторого m.
2) Если $L=(\partial_x^2+Ax^n)^2+Bx^{n-2}$, то при $n>6$ не существует дифференциального оператора M порядка $4g+2$, коммутирующего с L, где пара M и L были бы ранга 2.
3) Если $n=5$, то оператор $L=(\partial_x^2+Ax^5)^2+18Ax^3$, $A\neq 0$, коммутирует с оператором M порядка 6 и M, L – операторы ранга 2.
4) Оператор $L=(\partial_x^2+Ax^5)^2+9m(m+1)Ax^3$ при $m>1$, $A\neq 0$, не коммутирует ни с каким оператором M порядка $4g+2$, с которым M и L образовывали бы пару ранга 2.

В данной работе рассмотрен оператор

$$L_4=\partial_x^4+u(x).$$

В [7] можно выделить иерархию уравнений $f_j(x)=0$, определяемую из рекуррентного соотношения:

$$f_1=C_1+\frac{u(x)}{2}$$

$$f_{j+1}(x)=C_{i+1}+\int(u(x)f_j'(x)+\frac{u'(x)f_j(x)}{2}-\frac{f_j^{(5)}(x)}{4})dx.$$

Для того, чтобы существовал оператор порядка $4g+2$, который бы коммутировал с L_4, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие константы $C_1,...,C_g$, что $f_g(x)\equiv 0$. Например,

$$f_2'(x)=4C_1u'(x)+6u(x)u'(x)-u^{(5)}=0.$$

Заметим, что эта иерархия очень похожа на иерархию стационарных КдФ. Напомним, что стационарная иерархия КдФ определяется рекуррентным соотношением:

$$f_1=C_1+\frac{u(x)}{2}$$

$$f_{j+1}(x)=C_{i+1}+\int(u(x)f_j'(x)+\frac{u'(x)f_j(x)}{2}-\frac{f_j^{(3)}(x)}{4})dx.$$

Пусть $u(x)$ имеет полюс в точке a_i и в ее окрестности

$$u(x)=\frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k}+\frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}}+...+\varphi_{i,0}+\varphi_{i,1}(x-a_i)^2+O((x-a_i)^3).$$

Доказаны следующие теоремы:
Теорема 1. *Если оператор* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *коммутирует с оператором* M *порядка* $4g+2$ *и* M, L *являются операторами ранга 2, то функция* $u(x)$ *может иметь полюса только* 4 *порядка,* $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, *где* $k = 0, ..., n_i$, $l = 1, 2, 3$ *и* $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, *где* $r = n_i + 1, ..., g$. *Функция u(x) не может иметь изолированного полюса в бесконечности.*

Следствие. *Пусть* $u(x)$ *– эллиптическая функция (мероморфная, без изолированной особенности в бесконечности) с одним полюсом четвертого порядка в фундаментальной области (на комплексной плоскости),* $\varphi_{i,-4} = g(4g+1)(4g+3)(4g+4)$, *то оператор* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *коммутирует с оператором порядка* $4g+2$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_{i,4k-l} = 0, k = 0, ..., n_i$, $l = 1, 2, 3$.

Следствие. *Операторы*

$$L_4 = \partial_x^4 + n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x),$$

где $\wp(x)$ *есть решение уравнения* $(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 - g_3$, $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4n+2$ *и* M, L_4 *операторы ранга 2. При* $g_3 = 0$ *получаем, что* $L_4 = \partial_x^4 + \frac{n(4n+1)(4n+3)(4n+4)}{x^4}$. *Вычисления показывают, что при малых* n *спектральная кривая, для почти всех* g_3, *невырожденна, но доказать это для всех* n *не удается.*

Пример. *Оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + 280\wp^2(x) + 280\wp^2(x-a),$$

где $\wp(x)$ *– функция Вейерштрасса,* $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором порядка* 6 *и они имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда* $a = \omega_1, \omega_2$ *или* $\omega_1 + \omega_2$ *и* $\wp(a) = 0$. *Функция* $\wp(x)$ *удовлетворяет соотношению* $(\wp'(x))^2 = 3\wp^3(x) - g_2\wp(x)$.

Из доказательства теоремы 1 видно, что скорее всего верна следующая гипотеза, но доказать это пока не удается.

Гипотеза. *Пусть* $u(x)$ *эллиптическая (мероморфная, без изолированной особенности в бесконечности) функция с конечным числом полюсов в фундаментальном параллелограмме (в* $\mathbb{C}$ *). Пусть* $S = \sum\limits_{i=1}^{i=m} n_i + 1$, *где* m *число полюсов,* $n_i \in \mathbb{N}$. *Если* $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$,

$\varphi_{i,4k-l} = 0$, $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $k = 0, ..., n_i$, $r = n_i + 1, ..., S$ и $l = 1, 2, 3$, тогда $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором порядка $4S + 2$.

Теорема 2. *Если $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором порядка $4g + 2$ и $u(x)$ в точке a_i имеет полюс, то решения уравнения $\psi^{(4)}(x) + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x)$ в точке a_i имеют особенности вида $x^{\sigma_{i,r}} g(x)$, где $g(x)$ – голоморфная функция в a_i, $r = 1, 2, 3, 4$,*
$\sigma_{i,1} = \frac{1}{2}(1 - 4n - \sqrt{1 - 16n - 16n^2})$
$\sigma_{i,2} = \frac{1}{2}(1 - 4n + \sqrt{1 - 16n - 16n^2})$
$\sigma_{i,3} = \frac{1}{2}(5 + 4n - \sqrt{1 - 16n - 16n^2})$
$\sigma_{i,4} = \frac{1}{2}(5 + 4n + \sqrt{1 - 16n - 16n^2})$.
То есть общие собственные функции всегда имеют точки ветвления. Следовательно, L_4 не коммутирует с оператором нечетного порядка так как общие собственные функции операторов взаимно простого порядка мероморфны по x.

Автор выражает благодарность профессору О.И.Мохову за научное руководство и помощь в написании работы.

Необходимое условие для коммутации операторов ранга 2

Рассмотрим оператор

$$(\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x) \tag{1}$$

Из работы [7] известно, что оператор (1) коммутирует с оператором порядка $4g + 2$ с гиперэллиптической спектральной кривой рода g, тогда и только тогда, когда найдется многочлен

$$Q = z^g + a_1(x)z^{g-1} + a_2(x)z^{g-2} + ... + a_{g-1}(x)z + a_g(x),$$

что выполняется следующее соотношение

$$Q^{(5)} + 4VQ''' + 6V'Q'' + 2Q'(2z - 2W + V'') - 2QW' \equiv 0, \tag{2}$$

Q' здесь означает $\partial_x Q$. Спектральная кривая имеет вид

$$4w^2 = 4F(z) = 4(z-W)Q^2 - 4V(Q')^2 + (Q'')^2 - 2Q'Q''' + 2Q(2V'Q' + 4VQ'' + Q^{(4)}).$$

При $V = 0$ соотношение (2) и спектральная кривая перепишутся в виде

$$Q^{(5)} + 2Q'(2z - 2W) - 2QW' \equiv 0, \tag{3}$$

$$4w^2 = 4F(z) = (Q'')^2 - 2Q'Q''' + 2QQ^{(4)}.$$

Перепишем (3) в виде

$$4Q'z \equiv -Q^{(5)} + 2QW' + 4Q'W.$$

Получаем следующую систему на $a_i(x)$:

$$\begin{cases} a_1 = W/2 + C_1 \\ 4a_2' = -a_1^{(5)} + 2a_1W' + 4a_1'W \\ ... \\ 4a_{i+1}' = -a_i^{(5)} + 2a_iW' + 4a_i'W \\ ... \\ 4a_g' = -a_{g-1}^{(5)} + 2a_{g-1}W' + 4a_{g-1}'W \\ 0 = -a_g^{(5)} + 2a_gW' + 4a_g'W \end{cases}$$

Из этой системы видно, что результат в [7] можно переформулировать следующим образом. Пусть $a_1 = W/2 + C_1$, где C_1 – произвольная константа. Определим a_i рекуррентным соотношением

$$a_{i+1} = C_{i+1} + \frac{1}{4}\int(-a_i^{(5)} + 2a_iW' + 4a_i'W)dx,. \qquad (4)$$

где C_{i+1} – константа. Значит оператор (1) коммутирует с оператором порядка $4g+2$ и является оператором ранга 2 тогда и только тогда, когда $a_{g+1} \equiv const$.

Рассмотрим оператор L_4 вида

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x)$$

Условие, что L_4 коммутируют с оператором L_6 имеет вид

$$4C_1u'(x) + 6u(x)u'(x) - u^{(5)} = 0,$$

для некоторого C_1.

$$f_{j+1}(x) = C_{i+1} + \int(u(x)f_j'(x) + \frac{u'(x)f_j(x)}{2} - \frac{f_j^{(5)}(x)}{4})dx, \qquad (5)$$

где

$$f_1 = C_1 + \frac{u(x)}{2}.$$

Условие того, что L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$ эквивалентно условию существования констант $C_1, C_2, ..., C_g$, что $f_{g+1} \equiv const$.

Лемма 1. *Если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $u(x)$ может иметь полюс только 4-го порядка.*
Доказательство. Пусть $u(x)$ имеет полюс порядка k в точке a_i. Так как L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $f'_{g+1} \equiv 0$. Пусть f_g имеет полюс в точке a_i порядка m и в окрестности a_i

$$f_g = \frac{A^g_{i,-m}}{(x-a_i)^m} + O((x-a_i)^{-m+1}).$$

Тогда $u(x)f'_g(x)$ имеет полюс порядка $k+m+1$, $u'(x)f_g(x)$ полюс порядка $k+m+1$, а $f_g^{(5)}(x)$ полюс порядка $m+5$. Если бы $m+5$ не равнялось бы $k+m+1$, то $A^g_{i,-m}$ равнялось бы 0, так как $f_{g+1} \equiv 0$. Но по предположению f_g имеет полюс порядка m. Значит $k+m+1 = m+5$.
Доказательство завершено.

В дальнейшем символом $A^k_{i,m}$ будем обозначать коэффициент при $(x-a_i)^m$ в ряде Лорана у f_k в окрестности a_i.
Из леммы 1 следует, что f_k имеет в a_i полюс порядка $4k$. Пусть далее $u(x)$ имеет в окрестности a_i ряд Лорана

$$\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,-3}}{(x-a_i)^3} + \frac{\varphi_{i,-2}}{(x-a_i)^2} + \frac{\varphi_{i,-1}}{x-a_i} +$$

$$+\varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i)^2 + \varphi_{i,2}(x-a_i)^2 + \varphi_{i,3}(x-a_i)^3 + \varphi_{i,4}(x-a_i)^4 + O((x-a_i)^5).$$

Лемма 2. *Пусть L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, тогда* $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, где $n_i \in \mathbb{N}$ и

$A^{k+1}_{i,-4k-4} = \frac{(2k+1)A^k_{i,-4k}(\varphi_{-4} - k(4k+1)(4k+3)(4k+4))}{2k+2}$.
Доказательство.
В окрестности a_i

$$f_j = \frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}} + O((x-a_i)^{-4j+1}).$$

Тогда

$$f'_{j+1} = (\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4} + O(\frac{1}{(x-a_i)^3}))(-\frac{4jA^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+1}} + O((x-a_i)^{-4j}) +$$

$$+(-\frac{2\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5} + O(\frac{1}{(x-a_i)^4}))(\frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}} + O((x-a_i)^{-4j+1}) +$$

$$+\frac{j(4j+1)(4j+2)(4j+3)(4j+4)A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+5}}+O((x-a_i)^{-4j-4})=$$

$$=-\frac{(4j+2)(\varphi_{i,-4}-j(4j+1)(4j+3)(4j+4))A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j+5}}+O((x-a_i)^{-4j-4}).$$

Если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $f'_{g+1}\equiv 0$, а значит старший член для некоторого n_i должен обнулиться. То есть $\varphi_{i,-4}=n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$.
Доказательство завершено.

Лемма 3. *Пусть* $j<n_i+1$ и в окрестности a_i

$$f_j=\frac{A^j_{i,-4j}}{(x-a_i)^{4j}}+O((x-a_i)^{-4j+1}),$$

тогда $A^j_{i,-4j}>0$, $A^{n_i+1}_{i,-4n_i-4}=0$.

Доказательство. Так как $\varphi_{-4}=n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, а

$$A^{j+1}_{i,-4j-4}=\frac{(4j+2)(\varphi_{i,-4}-j(4j+1)(4j+3)(4j+4))A^j_{i,4j}}{4j+4},$$

то при $j<n_i+1$ коэффициент $A^j_{i,-4j}>0$. При $j=n_i+1$ коэффициент $A^{n_i+1}_{i,-4n_i-4}=0$.
Доказательство завершено.

Лемма 4. Если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g+2$, то $\varphi_{i,-3}=\varphi_{i,-2}=\varphi_{i,-1}=0$ для всех i.

Доказательство. По условию $f_1(x)=C_1+\frac{u(x)}{2}$ и в окрестности a_i

$$f_1=\frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4}+\frac{\varphi_{i,-l}}{2(x-a_i)^l}+O((x-a_i)^{-l+1}),$$

где $l=1,2,3$. Тогда $f'_2(x)=u(x)f'_1(x)+\frac{u'(x)f_1(x)}{2}-\frac{f_1^{(5)}(x)}{4}$ в окрестности a_i имеет вид

$$\Big(\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4}+\frac{\varphi_{i,-l}}{(x-a_i)^l}+O((x-a_i)^{-l+1})\Big)\Big(-\frac{2\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5}-\frac{l\varphi_{i,-l}}{2(x-a_i)^{l+1}}+O((x-a_i)^{-l})\Big)+$$

$$+\Big(-\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^5}-\frac{l\varphi_{i,-l}}{4(x-a_i)^{l+1}}+O((x-a_i)^{-l})\Big)\Big(\frac{\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^4}+\frac{\varphi_{i,-l}}{(x-a_i)^l}+O((x-a_i)^{-l+1})\Big)+$$

$$+\frac{840\varphi_{i,-4}}{(x-a_i)^9}+\frac{l(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)\varphi_{i,-l}}{8(x-a_i)^{l+5}}+O((x-a_i)^{-l-4})=$$

$$=-\frac{3\varphi_{i,-4}(\varphi_{i,-4}-280)}{(x-a_i)^9}-\frac{\varphi_{i,-l}(4+l)(6\varphi_{i,-4}-l(l+1)(l+2)(l+3))}{8(x-a_i)^{l+5}}+O((x-a_i)^{-l-4})$$

Проинтегрировав получим, что

$$f_2(x)=\frac{3\varphi_{i,-4}(\varphi_{i,-4}-280)}{8(x-a_i)^8}+\frac{\varphi_{i,-l}(6\varphi_{i,-4}-l(l+1)(l+2)(l+3))}{8(x-a_i)^{l+4}}+O((x-a_i)^{-l-3})$$

Отметим, что $6\varphi_{i,-4}-l(l+1)(l+2)(l+3)>0$. Рассмотрим f_k, где $k<n_i+1$, в окрестности a_i

$$f_k=\frac{A^k_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}}+\frac{A^k_{i,-4k+4-l}}{(x-a_i)^{4k-4+l}}+O((x-a_i)^{-4k+5+l})$$

Докажем по индукции, что $A^k_{i,-4k+4-l}=\varphi_{i,-3}K^k_{i,-4k+4-l}$, где $K^k_{i,-4k+4-l}>0$ и не зависит от $\varphi_{i,-3}$. Для $k=2$ мы уже это показали. Допустим, что это верно для k и докажем для $k+1$. Функция $f'_{k+1}(x)=u(x)f'_k(x)+\frac{u'(x)f_k(x)}{2}-\frac{f^{(5)}_k(x)}{4}$ в окрестности точки a_i выглядит

$$f_{k+1}=\frac{(2k+1)(\varphi_{i,-4}-k(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4))A^k_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k+4}}+$$

$$+\frac{\varphi_{i,-l}A^k_{i,-4k}(8k+l)}{2(4k+l)(x-a_i)^{4k+l}}+$$

$$\frac{(4k-2+l)(4\varphi_{i,-4}-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l))A^k_{i,-4k+4-l}}{4(4k+l)(x-a_i)^{4k+l}}+\ldots$$

$$=\frac{A^{k+1}_{i,-4k-4}}{(x-a_i)^{4k+4}}+\frac{A^{k+1}_{i,-4k-l}}{(x-a_i)^{4k+l}}+O((x-a_i)^{-4k+1-l})$$

Мы видим, что $A^{k+1}_{i,-4k-l}=\varphi_{i,-l}K^{k+1}_{i,-4k-l}$, где $K^{k+1}_{i,-4k-l}>0$ так как $A^k_{i,-4k}>0$ и $k<n_i+1$. Из леммы 2 известно, что $A^{n_i+1}_{i,-4n_i-4}=0$. Если $k\geqslant n_i+1$, то

$$A^{k+1}_{i,-4k-l}=$$

$$=\frac{(4k-2+l)(4\varphi_{i,-4}-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l))A^k_{i,-4k+4-l}}{4(4k+l)}.$$

Но если $k\geqslant n_i+1$, то

$$4n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)-(4k-4+l)(4k-3+l)(4k-1+l)(4k+l)<0.$$

Окончательно получаем, что если существует такое g, что $f_{g+1} \equiv 0$, то $A^k_{i,-4k+l} = \varphi_{i,-l} K^k_{i,-4k+l} = 0$ для некоторого k. Но $K^k_{i,-4k+l} \neq 0$ для всех k. Следовательно, $\varphi_{i,-l} = 0$.

Доказательство завершено.

Теорема 1. *Если оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и M, L являются операторами ранга 2, то функция $u(x)$ может иметь полюса только 4 порядка, $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, где $k = 0, ..., n_i$, $l = 1,2,3$ и $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $r = n_i+1, ..., g$. Функция u(x) не может иметь изолированного полюса в бесконечности.*

Доказательство. Сперва докажем, что $u(x)$ не может иметь изолированного полюса в бесконечности. Допустим, что это не так и $u(x)$ имеет полюс в бесконечности порядка m. Тогда

$$f_2 = A^2_{\infty,2m} x^{2m} + O(x^{2m-1})$$

Но f_3 имеет в бесконечности полюс порядка $3m$ и

$$A^3_{\infty,3m} = \frac{4mA^2_{\infty,2m}\varphi_{\infty,m} + m\varphi_{\infty,m}A^2_{\infty,2m}}{6m} \neq 0.$$

В общем случае

$$A^{k+1}_{\infty,(k+1)m} = \frac{2kmA^k_{\infty,km}\varphi_{\infty,m} + m\varphi_{\infty,m}A^k_{\infty,km}}{2m(k+1)} = \frac{\varphi_{\infty,m}A^k_{\infty,mk}(2k+1)}{2(k+1)} \neq 0.$$

Тем самым, кратность полюса будет все увеличиваться и f_k не обратиться в ноль ни при каком k.

Перейдем к доказательству основной части теоремы.
Учитывая результат леммы 4, $f_1(x) = C_1 + \frac{u(x)}{2}$ в окрестности a_i имеет вид

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_0}{2} + C_1 + \frac{\varphi_l(x-a_i)^l}{2} + O(x^{l-1}),$$

где $l = 1,2,3$. Тогда $f_2'(x) = u(x)f_1'(x) + \frac{u'(x)f_1(x)}{2} - \frac{f_1^{(5)}(x)}{4}$ в окрестности a_i

$$f_2 = \frac{3(\varphi_{i,-4}-280)\varphi_{i,-4}}{8(x-a_i)^8} + \frac{\varphi_{i,-4}(3\varphi_{i,0}+2C_1)}{4(x-a_i)^4} + \frac{3\varphi_{i,-4}\varphi_{i,l}}{4(x-a_i)^{4-l}} + O((x-a_i)^{l-3}).$$

Мы видим, что коэффициент при $(x-a_i)^{l-4}$ равен $\varphi_{i,l}\frac{3\varphi_{i,-4}}{4}$. Из леммы 2 известно, что $\varphi_{i,-4}$ положительное число. Рассмотрим f_k

$$f_k = \frac{A^k_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}} + \frac{A^k_{i,-4k+4}}{(x-a_i)^{4k-4}} + \frac{A^k_{i,-4k+4+l}}{(x-a_i)^{4k-4-l}} + O((x-a_i)^{4k-5-l})$$

Докажем, что $A^k_{i,-4k+4+l} = \varphi_{i,l} K^k_{i,-4k+4+l}$, где $K^k_{i,-4k+4+l} \neq 0$ и не зависит от φ_l. Будем доказывать по индукции. Для $k = 2$ мы уже проверили. Допустим, что это верно для k и проверим для $k+1$.

$$f_{k+1} = \frac{A^{k+1}_{i,-4k-4}}{(x-a_i)^{4k+4}} + \frac{A^{k+1}_{i,-4k}}{(x-a_i)^{4k}} +$$

$$\frac{(8k-l)\varphi_{i,l} A^k_{i,-4k}}{2(4k-l)(x-a_i)^{4k-l}} +$$

$$\frac{(4k-2-l)(4\varphi_{i,-4} - (4k-4-l)(4k-3-l)(4k-1-l)(4k-l))A^k_{i,-4k+4+l}}{4(4k-l)(x-a_i)^{4k-l}} + \ldots$$

Из предположения индукции видно, что

$$K^{k+1}_{i,-4k+l} = \frac{(8k-l)A^k_{i,-4k}}{2(4k-l)} + \frac{(4k-2-l)(4\varphi_{i,-4} - (4k-4-l)(4k-3-l)(4k-1-l)(4k-l))K^k_{i,-4k+4+l}}{4(4k-l)}$$

Из этого выражения видно, что при $k \leqslant n_i + 1$ оба слагаемых неотрицательны. При $k > n_i + 1$ из леммы 3 нам известно, что $A^k_{i,-4k} = 0$, но второе слагаемое отрицательно и следовательно ни при каком k число $K^k_{i,-4k+4+l} \neq 0$. Но $A^k_{i,-4k+4+l} = \varphi_{i,l} K^k_{i,-4k+4+l}$, а так как необходимо найти такое g, что $f_{g+1} \equiv 0$, то $A^k_{i,-4k+4+l} = 0$ для некоторого $k \Leftrightarrow \varphi_{i,l} = 0$.
Точно такими же рассуждениями можно доказать, что $\varphi_{i,8-l} = 0$, где $l = 1, 2, 3$.

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть $\varphi_{i,4k-l} = 0$, где $k = 1, ..., m-1$, $l = 1, 2, 3$ и $m < n_i + 1$. Докажем, что соответствующие коэффициенты равны нулю и для $k = m$. В связи с предположением

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,0}}{2} + C_1 + \sum_{t=1}^{t=m-1} \frac{\varphi_{i,4t}(x-a_i)^{4t}}{2} + \frac{\varphi_{i,4m-l}(x-a_i)^{4m-l}}{2} + \ldots.$$

Тогда

$$f_k = \sum_{t=-k}^{t=-1} A^k_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + \sum_{t=0}^{t=m-k} A^k_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + A^k_{i,4m-4k+4-l}(x-a_i)^{4m-4k+4-l} + \ldots$$

$$f_{k+1} = \sum_{t=-k-1}^{t=-1} A^{k+1}_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + \sum_{t=0}^{m-k-1} A^{k+1}_{i,4t}(x-a_i)^{4t} + A^{k+1}_{i,4m-4k-l}(x-a_i)^{4m-4k-l} + \ldots$$

$$A^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \frac{(4m-4k+2-l)A^k_{i,4m-4k+4-l}(4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l))}{4(4m-4k-l)} +$$
$$+ \frac{(4m-8k-l)\varphi_{i,4m-l} A^k_{i,-4k}}{2(4m-4k-l)},$$

Так как $A^1_{i,4m-l} = \frac{\varphi_{i,4m-l}}{2}$, то из преобразования выше видно, что $A^k_{4m-4k-l} = \varphi_{i,4m-l} K^k_{i,4m-4k-l}$, где $K^k_{4m-4k-l}$ не зависит от $\varphi_{i,4m-l}$.
Из преобразования видно, что если $k < \frac{m}{2}$, то $K^k_{i,4m-4k-l} > 0$, так как оба слагаемых положительны. Если окажется, что $K^m_{i,4-l} > 0$, то для всех $k > m$ и $k < n_i + 1$ число $K^k_{4m-4k+4-l} > 0$. Если $k \geqslant n_i + 1$, то

$$K^{k+1}_{i,4m-4k-l} = \frac{(4m-4k+2-l)K^k_{i,4m-4k+4-l}(4\varphi_{i,-4}-(4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l))}{4(4m-4k-l)}.$$

То есть, если $K^m_{i,4-l} > 0$, то $K^k_{i,4m-4k-l} \neq 0$ для $k \geqslant n_i + 1$.
Теперь докажем, что $K^m_{i,4-l} > 0$. Мы уже показали, что $K^m_{i,4-l} > 0$ для $m = 1$ и $m = 2$. Пусть m является четным и $m > 2$. Рекуррентно используя формулу выше, получим

$$K^m_{i,4-l} = \prod_{r=0}^{r=m-1} \frac{(4m-4r+2-l)(4\varphi_{i,-4}-(4m-4r-l)(4m-4r+1-l)(4m-4r+3-l)(4m-4r+4-l))}{4(4m-4r-l)} +$$
$$\sum_{t=1}^{t=\frac{m}{2}-1} \frac{(4m-8t-l)A^t_{i,-4t}}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(4\varphi_{i,-4}-(4m-4r-l)(4m-4r+1-l)(4m-4r+3-l)(4m-4r+4-l))}{4(4m-4r-l)} -$$
$$\sum_{t=\frac{m}{2}}^{t=m-1} \frac{(8t-4m+l)A^t_{i,-4t}}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(4\varphi_{i,-4}-(4m-4r-l)(4m-4r+1-l)(4m-4r+3-l)(4m-4r+4-l))}{4(4m-4r-l)}$$
$$> \prod_{r=0}^{r=m-1} \frac{(4m-4r+2-l)(\varphi_{i,-4}-(m-r)(4m-4r+1)(4m-4r+3)(4m-4r+4))}{(4m-4r-l)} +$$
$$\sum_{t=1}^{t=\frac{m}{2}-1} \frac{(4m-8t-l)A^t_{i,-4t}}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(\varphi_{i,-4}-(m-r)(4m-4r+1)(4m-4r+3)(4m-4r+4))}{(4m-4r-l)} -$$
$$\sum_{t=\frac{m}{2}}^{t=m-1} \frac{(8t-4m+l)A^t_{i,-4t}}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(\varphi_{i,-4}-(m-r)(4m-4r-1)(4m-4r-3)(4m-4r-4))}{(4m-4r-l)} \geqslant$$
$$\geqslant A^{m-1}_{i,-4m+4} \prod_{r=0}^{r=m-1} \frac{2r+2}{2r+1} + A^{m-1}_{i,-4m+4} \sum_{t=1}^{t=\frac{m}{2}-1} \frac{(4m-8t-l)}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(2(m-r)+2)}{(4m-4r-l))(2(m-r)+1)} -$$
$$-A^{m-1}_{i,-4m+4} \sum_{t=\frac{m}{2}}^{t=m-1} \frac{(8t-4m+l)}{2} \prod_{r=1}^{r=m-t} \frac{(4m-4r+2-l)(2(m-r)+2)}{(4m-4r-l)(2(m-r)+1)} > 0.$$

Аналогично доказывается случай, когда m нечетно.
Тем самым, если существует такое g, что $f_{g+1} \equiv 0$, то $g > n_i \geqslant m$ и для некоторого k коэффициент $A^k_{4m-4k+4-l} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{i,4m-l} = 0$.

Пусть теперь $g > n_i$. Тогда

$$f_1 = \frac{\varphi_{i,-4}}{2(x-a_i)^4} + \frac{\varphi_{i,0}}{2} + C_1 + \sum_{t=1}^{t=m-1} \frac{\varphi_{i,4t}(x-a_i)^{4t}}{2} + \frac{\varphi_{i,4m-l}(x-a_i)^{4m-l}}{2} + ...,$$

где $m > n_i$. Далее видим, что

$$f_k = \sum_{t=-k}^{t=-1} A_{i,4t}^k (x-a_i)^{4t} + \sum_{t=0}^{t=m-k} A_{i,4t}^k (x-a_i)^{4t} + A_{i,4m-4k+4-l}^k (x-a_i)^{4m-4k+4-l} + \ldots$$

Закон преобразования для $A_{i,4m-4k+4-l}^k$ такой же как выше и точно также можно доказать, что $K_{i,4m-4n_i+4-l}^k > 0$. При $k > n_i$ коэффициент $A_{i,-4k}^k = 0$, а это значит, что при $k > n_i$

$$K_{i,4m-4k-l}^{k+1} = \frac{(4m-4k+2-l)K_{i,4m-4k+4-l}^k(4\varphi_{i,-4}-(4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l))}{4(4m-4k-l)}.$$

Значит, $K_{i,4m-4k-l}^{k+1} \neq 0$, так как

$$4\varphi_{i,-4} - (4m-4k+4-l)(4m-4k+3-l)(4m-4k+1-l)(4m-4k-l)) \neq 0,$$

при $l = 1,3$. $K_{4m-4k-2}^{k+1} = 0$ из-за множителя $(4m - 4k + 2 - l)$, которое при $k = m > n_i$ и $l = 2$ обращается в ноль, а следовательно и при больших k коэффициент $K_{4m-4k-2}^{k+1} = 0$. Но если L_4 коммутирует с оператором порядка $4g + 2$, то для некоторого k коэффициент $A_{i,4m-4k+4-1}^k = A_{i,4m-4k+4-3}^k = 0 \Leftrightarrow \varphi_{4m-1} = \varphi_{4m-3} = 0$.

Доказательство завершено.

Подробней рассмотрим как распределены константы которые появляются после интегрирования f_{k+1}'. Как мы уже видели

$$f_2 = \frac{3(\varphi_{-4} - 280)\varphi_{-4}}{8(x-a_i)^8} + \frac{\varphi_{-4}(3\varphi_0 + \tilde{C}_1)}{4(x-a_i)^4} + \tilde{C}_2 + O((x-a_i)).$$

Мы знаем, что $A_{i,-4(n_i+1)}^{n_i+1} = 0$ и тем самым

$$f_{n_i+1} = \sum_{t=1}^{t=k} \frac{A_{i,-4t}^{n_i+1}}{(x-a_i)^{4t}} + \tilde{C}_{n_i+1} + O((x-a_i)).$$

Заметим, что $A_{i,-4n_i}^{n_i+1}$ зависит линейно от константы C_1, $A_{i,-4n_i+4}^{n_i+1}$ зависит линейно от констант C_1, C_2, $A_{i,-4n_i+8}^{n_i+1}$ от C_1, C_2, C_3, а $A_{i,-4}^{n_i+1}$ от $C_1, \ldots, C_{n_i}$.

Следствие. *Пусть $u(x)$ – эллиптическая функция (мероморфная, без изолированной особенности в бесконечности) с одним полюсом в фундаментальной области (на комплексной плоскости), $\varphi_{i,-4} = g(4g+1)(4g+$*

3)(4g+4), *то оператор* $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ *коммутирует с оператором порядка* $4g+2$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_{i,4k-l} = 0, k = 0, ..., n_i$, $l = 1, 2, 3$.

Доказательство. Надо выбрать константы $C_1, ...C_g$ таким образом, чтобы главная часть ряда Лорана у f_{n_i+1} исчезла. Это всегда можно сделать так как у нас получится треугольная система линейных уравнений. Так как не существует ограниченной голоморфной функции отличной от константы, то $f'_{n_i+1} \equiv 0$. При $g < n_i$ коэффициент $A^{g+1}_{-4g-4} \neq 0$ и не зависит от констант интегрирования.

Доказательство завершено.

Следствие. *Операторы*

$$L_4 = \partial_x^4 + n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x),$$

где $\wp(x)$ *есть решение уравнения* $(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 - g_3$, $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором* M *порядка* $4n+2$ *и* M, L_4 *операторы ранга 2. При* $g_3 = 0$ *получаем, что* $L_4 = \partial_x^4 + \frac{n(4n+1)(4n+3)(4n+4)}{x^4}$. *Вычисления показывают, что при малых* n *спектральная кривая, для почти всех* g_3, *невырожденна, но доказать это для всех* n *не удается.*

Если положить $C_1 = -42g_2 - 420\wp(a)$, то можно доказать

Пример. *Оператор*

$$L_4 = \partial_x^4 + 280\wp^2(x) + 280\wp^2(x-a),$$

где $\wp(x)$ *– функция Вейерштрасса,* $n \in \mathbb{N}$, *коммутирует с оператором порядка* 6 *и они имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда* $a = \omega_1, \omega_2$ *или* $\omega_1 + \omega_2$ *и* $\wp(a) = 0$. *Функция* $\wp(x)$ *удовлетворяет соотношению* $(\wp'(x))^2 = 3\wp^3(x) - g_2\wp(x)$.

Если рассмотреть f_k, где $k > n_i + 1$, то из леммы 3 видно, что степень полюса у f_k будет равна $4n_i$ и больше степень возрастать не будет. Заметим, что $A^k_{i,-4k}$ зависит линейно от констант $C_1, ..., C_{k-n_i}$, $A^k_{i,4k+4}$ линейно зависят от $C_1, ..., C_{k-n_i+1}$,..., $A^k_{i,-4}$ зависит от $C_1, ..., C_k$. Пусть $u(x)$ имеет m полюсов (в параллелограмме или в $\mathbb{C}$). Пусть $S = \sum\limits_{i=1}^{i=m} n_i + 1$. Тогда нам надо обнулить $S-1$ членов, а независимых переменных у нас S. Скорее всего все эти линейные уравнения совместны, но формально это доказать не получается. Тем самым можно выдвинуть гипотезу

Гипотеза. *Пусть $u(x)$ эллиптическая (мероморфная) функция с конечным числом полюсов в фундаментальном параллелограмме (в $\mathbb{C}$ и не имеет изолированной особенности в бесконечности). Пусть $S = \sum\limits_{i=1}^{i=m} n_i + 1$, где m число полюсов, $n_i \in \mathbb{N}$. Если $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $k = 0, ..., n_i$, $r = n_i+1, ..., S$ и $l = 1, 2, 3$, тогда $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором порядка $4S+2$.*

Общие собственные функции операторов ранга 2.

Из теории линейных дифференциальных уравнений ([13], гл. 15, 16) известно, что решение может иметь особенность только в особенностях коэффициентов. Особенность решения (для примера в x=0)

$$\frac{d^n w}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}w}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}\frac{dw}{dz} + P_n(x)w = 0$$

называется регулярной если P_k имеет полюс порядка не более k. В ([13], гл. 15, 16) доказано, что решение можно искать в виде ряда

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma}.$$

Обозначим $L = \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + P_{n-1}\frac{d}{dz} + P_n(x)$ и $[\sigma+m]_n = (\sigma+m)(\sigma+m-1)...(\sigma+n-m+1)$, тогда

$$Lw = L(\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\sigma} f(x, x+\sigma),$$

где $f(x, x+\sigma) = [\sigma+m]_n + P_1(x)[\sigma+m]_{n-1} + [\sigma+m]_1 P_{n-1}(x) + P_n(x) = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(m+\sigma)x^\lambda$. Если $Lw = 0$, то

$c_0 f_0(\sigma) = 0$
$c_1 f_0(\sigma+1) + c_0 f_1(\sigma) = 0$
....
$c_m f_0(\sigma+m) + c_{m-1} f_1(\sigma+m-1) + ... + c_0 f_m(\sigma) = 0.$
Так как $c_0 \neq 0$, то
$f_0(\sigma) = [\sigma]_n + [\sigma]_{n-1}P_1(0) + ... + [\sigma]_1 P_{n-1}(0) + P_n(0) = 0.$

Если σ есть корень этого уравнения и $f_0(\sigma+m)\neq 0$, где m–целое число, то константы c_m определяются рекуррентным соотношением

$$c_m=\frac{(-1)^m c_0 F_m(\sigma)}{f_0(\sigma+1)f_0(\sigma+2)...(\sigma+m)},$$

$F_m(\sigma)$ определяется через $f_1,...,f_m$.
Другими словами, если $f_0(\sigma)$ имеет корни которые не отличаются на целое число, то все решения определяются рядом, написанным выше, и имеют вид $x^\sigma g(x)$, где $g(x)$–голоморфная функция. Когда имеются решения отличные на целое число, то могут возникнуть логарифмы и общее решение будет иметь вид $g_0(x)ln^k x+g_1(x)ln^{k-1}x+...+g_k(x)$. Подробней писать об этом мы здесь не будем.
Рассмотрим наш оператор $L_4=\partial_x^4+u(x)$, который коммутирует с оператором порядка $4g+2$. Как мы уже доказали, $u(x)$ может иметь полюс только 4-го порядка и $\varphi_{i,-4}=n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$. То есть все особенности регулярные. Решениями уравнения
$\sigma_i(\sigma_i-1)(\sigma_i-2)(\sigma_i-3)-\varphi_{i,-4}=0$ являются
$\sigma_{i,1}=\frac{1}{2}(1-4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$,
$\sigma_{i,2}=\frac{1}{2}(1-4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$,
$\sigma_{i,3}=\frac{1}{2}(5+4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$,
$\sigma_{i,4}=\frac{1}{2}(5+4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$.
Видно, что $\sigma_{i,1},\sigma_{i,3}$ и $\sigma_{i,2},\sigma_{i,4}$ отличаются на $4n_i+2$. Это значит, что все 4 решения нельзя искать в виде ряда, но мы доказали, что из условия коммутации следует, что $\varphi_{4k-l}=0$, $k=0,...,n_i$, $l=1,2,3$, а из этого легко видеть, что коэффициенты ряда выражаются без трудностей.

Список литературы

[1] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy,Proc. London Math. Soc. (2),**21** (1923), 420–440.

[2] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, Функц. анализ и его прил., 11:1 (1977), 15–31

[3] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, Функц. анализ и его прил., 12:3 (1978), 20–31

[4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, УМН, 35:6(216) (1980), 47–68

[5] О. И. Мохов, “Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой”, УМН, 37:4(226) (1982), 169–170

[6] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:6 (1989), 1291–1315

[7] A.E. Mironov. Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra. Invent. math. (2014) 197:417-431

[8] J. Dixmier,Bull. Soc. Math. France,96(1968), 209–24

[9] A.E.Mironov. Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators arXiv:1302.5735

[10] О. И. Мохов, “О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода”, Матем. заметки, 94:2 (2013), 314–316

[11] O.I.Mokhov. Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, V. 234, 2014, 309–322.

[12] Commuting differential operators of rank 2 with polynomial coefficients, arXiv:1409.4058.

[13] Э.Л.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

В.С.Оганесян (V.S.Oganesyan)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: vardan.o@mail.ru