

Комбинаторная формула для аффинных функций Холла-Литтлвуда и взвешенная теорема Бриона

Игорь Махлин

Аннотация

Этот текст подготовлен для участия в конкурсе Мебиуса на основе совместной работы [1]. В нем представлена новая комбинаторная формула для функций Холла-Литтлвуда типа \tilde{A}_{n-1} , т.е. отвечающих аффинной алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$. Формула имеет вид суммы по мономиальному базису в соответствующем неприводимом представлении, построенному в работах [3, 4].

Формула может быть рассмотрена как взвешенная сумма экспонент целых точек в некотором бесконечномерном многограннике. Для ее доказательства мы выводим определенное обобщение (взвешенную версию) теоремы Бриона и применяем ее к упомянутому многограннику.

Содержание

0. Введение	2
I Предварительные сведения, основной результат и идея доказательства	4
1. Комбинаторная формула для финитного типа A	5
2. Мономиальный базис	6
3. Основной результат	7
4. Теорема Бриона и ее обобщение	10
5. Применение взвешенной теоремы Бриона в финитном случае	11
6. Применение взвешенной теоремы Бриона в аффинном случае	12
II Комбинаторные инструменты: обобщенные многогранники Гельфанда-Цетлина	14
7. Ординарные подграфы и соответствие с многогранниками	15
8. Взвешенная теорема Бриона для вырождений многогранников	23
9. Доказательство леммы 7.1	25
10. Приложение к финитному случаю	29
III Структура многогранника Π и доказательство теоремы 6.2	30
11. Теорема типа Бриона для $\tilde{\Pi}$	31
12. Соответствие между гранями Π и подграфами решетки	36
13. Доказательство теоремы 6.2	41
Список литературы	47

0. Введение

Начнем с определения функций Холла-Литтлвуда в контексте произвольной симметризуемой алгебры Каца-Мууди (определение см., например, в [8]). Пусть \mathfrak{g} — такая алгебра с картановской подалгеброй \mathfrak{h} . Далее, пусть $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ — ее система корней с подмножеством Φ^+ положительных корней и кратностью m_α корня $\alpha \in \Phi$. Кроме того, введем группу Вейля W с функцией длины l . Наконец, пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — целочисленный доминантный вес алгебры \mathfrak{g} . Соответствующая λ функция Холла-Литтлвуда есть

$$P_\lambda = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Phi^+} \left(\frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right)^{m_\alpha} \right). \quad (1)$$

Здесь $W_\lambda(t)$ — ряд Пуанкаре стабилизатора $W_\lambda \subset W$, т.е.

$$W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t^{l(w)}$$

(в частности, $W_\lambda(t) = 1$ для регулярного λ).

В определении (1) удобно считать P_λ элементом кольца $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R} \otimes \mathbb{Z}[t]$, где \mathfrak{R} — кольцо характеров, носитель которых содержится в объединении конечного набора нижних множеств стандартного порядка на \mathfrak{h}^* . Нетрудно убедиться в том, что правая часть определения корректно задает элемент кольца \mathfrak{R}_t (это показано в [9]).

Вообще говоря, определение можно дать исключительно в терминах системы корней без упоминания алгебр Ли, делая функции Холла-Литтлвуда объектом чисто комбинаторным. Однако же язык алгебр Каца-Мууди и их представлений крайне естественен при работе с этими объектами.

Стоит также отметить, что при $t = 0$ правая часть определения (1) обращается в формулу Каца-Вейля для характера неприводимого представления L_λ , а при $t = 1$ — в $\sum_{w \in W} e^{w\lambda}$. Таким образом, P_λ интерполирует между этими двумя выражениями.

Еще одно важное наблюдение состоит в том, что при фиксировании базиса $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в решетке целочисленных весов P_λ можно считать формальным рядом Лорана с коэффициентами в $\mathbb{Z}[t]$ от соответствующих переменных x_1, \dots, x_n . В том случае, когда \mathfrak{g} полупростая, эти ряды являются конечными и, как правило, называются "многочленами Холла-Литтлвуда". Нас, однако, будет в первую очередь интересовать аффинный случай.

Основной наш результат — новая комбинаторная формула для функций P_λ в случае $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_n$ (система корней типа \tilde{A}_{n-1}). Опишем одну геометрическую мотивировку для изучения этих выражений. Рассмотрим группу $\widehat{G} = \widehat{SL}_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$, центральное расширение группы петель группы $SL_n(\mathbb{C})$, определенное стандартным образом. Этой группе соответствует (бесконечномерное) многообразие флагов $F = \widehat{G}/B_+$, где B_+ — борелевская подгруппа в \widehat{G} . На F можно рассмотреть пучок дифференциальных форм Ω^* и эквивариантное линейное расслоение \mathcal{L}_λ . Оказывается, что эквивариантная

эйлерова характеристика пучка $\Omega^* \otimes \mathcal{L}_\lambda$, т.е.

$$\sum_{i,j \geq 0} (-1)^{i+j} \text{char}(H^i(F, \Omega^j \otimes \mathcal{L}_\lambda))$$

есть в точности $W_\lambda(-t)P_\lambda(-t)$. Более того, от множителя $W_\lambda(-t)$, неединичного в случае особого λ , можно избавиться, рассмотрев соответствующее параболическое многообразие флагов и на нем пучок дифференциальных форм, подкрученный на соответствующее линейно расслоение. В этом контексте функции Холла-Литтлвуда появляются в работе [5].

Кроме того, функции Холла-Литтлвуда типа \tilde{A} фигурируют также в теории представлений двойных аффинных алгебр Гекке (см. [6]).

Наша формула во многих отношениях похожа на комбинаторную формулу для классических функций Холла-Литтлвуда, т.е. типа A . Эта формула, присутствующая уже в [7], является суммой по таблицам Гельфанда-Цетлина — комбинаторным объектам, нумерующим базис в представлении L_λ . Наша же формула есть сумма по комбинаторному базису в интегрируемом неприводимом представлении алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$, построенному в работах [2, 3, 4]. Более того, от комбинаторных объектов, нумерующих этот базис в представлении аффинной алгебры, удастся перейти к своего рода (бесконечным) таблицам Гельфанда-Цетлина и затем задать слагаемые в формуле сходным с классическим случаем образом.

Параллельно с аффинным случаем мы будем описывать и финитный (классический), преследуя две цели. Во-первых, проиллюстрировать существенно более сложный аффинный случай и, во-вторых, подчеркнуть глубокие и отчасти даже неожиданные сходства между этими двумя сюжетами. По этой причине мы иногда будем аналогичные объекты в обоих случаях обозначать одним и тем же символом, однако, из контекста всегда будет ясно, о каком случае идет речь.

Наш подход к доказательству формулы основывается на теореме Бриона о выпуклых многогранниках, первоначально доказанной в работе [14]. Эта формула представляет сумму формальных экспонент целых точек выпуклого многогранника в виде некоторой суммы по его вершинам.

Сперва опишем ход рассуждения в финитном случае. Множество таблиц Гельфанда-Цетлина, заданное весом λ , может быть рассмотрено как множество целых точек в многограннике Гельфанда-Цетлина. Таким образом, характер представления L_λ есть сумма определенных экспонент этих целых точек и как раз может быть вычислена при помощи теоремы Бриона. Оказывается, что вклад большинства вершин при этом нулевой, а остающиеся вклады есть в точности слагаемые в классической формуле для многочленов Шура. Подробно этот сюжет описан в работе [12].

Далее, согласно упомянутой комбинаторной формуле, классический многочлен Холла-Литтлвуда P_λ есть сумма тех же экспонент того же множества точек, но, на этот раз, с коэффициентами (весами) — многочленам от t . В этой работе мы выводим обобщение теоремы Бриона, которое выражает некоторое взвешенные суммы целых точек многогранников в виде,

опять же, суммы по вершинам. Это обобщение можно применить к многогранникам Гельфанда-Цетлина и упомянутой системе весов, многочленов от t . Снова большинство вершин дадут нулевой вклад, а оставшиеся дадут слагаемые в формуле (1).

Теперь можно заметить, что в случае $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ ситуация похожая. Множество, параметризующее базисные векторы, снова может быть воспринято как множество целых точек "выпуклого многогранника", теперь, однако, бесконечномерного. Сверх того, экспонента веса вектора снова есть некоторая экспонента соответствующей целой точки. Удастся доказать формулу типа Бриона для этого бесконечномерного многогранника, раскладывая эту сумму экспонент в сумму по вершинам. Ненулевые вклады есть снова в точности слагаемые в формуле Каца-Вейля, что показано в статье [13]. (Если быть точным, в [13] рассматривается не все представление, а подпространство Фейгина-Стойновского, однако переход ко всему представлению произвести весьма нетрудно описанным в [4] методом.)

Наконец, наша формула для аффинных функций Холла-Литтлвуда есть, аналогично финитному случаю, сумма тех же экспонент тех же точек, но с коэффициентами, многочленами от t . Мы доказываем, что эту взвешенную сумму экспонент можно разложить в сумму по вершинам многогранника и в качестве ненулевых слагаемых получаем слагаемые в определении (1), что доказывает формулу.

Текст статьи устроен следующим образом. В части I мы приводим некоторые предварительные сведения и формулируем основной результат. Затем мы вводим наше обобщение теоремы Бриона и более детально объясняем, как оно может быть приложено к доказательству формулы. В части II разрабатывается некоторый комбинаторный арсенал, необходимый для доказательства. Мы рассматриваем семейство многогранников, естественным образом обобщающих многогранники Гельфанда-Цетлина, и доказываем два ключевых факта об их структуре. С точки зрения автора, содержание части II представляет определенный интерес само по себе. В последней части показано, как доказать формулу брионовского типа для нашего бесконечномерного многогранника, и затем доказана центральная теорема о вкладах вершин.

Часть I

Предварительные сведения, основной результат и идея доказательства

1. Комбинаторная формула для финитного типа A

Пусть $g = \mathfrak{sl}_n$, а $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ – целочисленный доминантный вес. Пусть

$$\lambda = (a_1, \dots, a_{n-1})$$

относительно базиса из фундаментальных весов. В подходящем базисе λ имеет координаты

$$\lambda_i = a_i + \dots + a_{n-1}.$$

С этим базисом мы и будем работать, считая характеры многочленами Лорана от соответствующих переменных x_1, \dots, x_{n-1} .

Базис Гельфанда-Цетлина в L_λ параметризуется так называемыми таблицами Гельфанда-Цетлина (таблицами ГЦ). Каждая таблица есть числовой треугольник $\{s_{i,j}\}$ с $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-i$. Верхний ряд треугольника есть просто $s_{0,j} = \lambda_j$ и $s_{0,n} = 0$. Остальные же элементы таблицы – произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$s_{i,j} \geq s_{i+1,j} \geq s_{i,j+1}. \quad (2)$$

Визуализируются эти таблицы, как правило, следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} s_{0,1} & & s_{0,2} & & \dots & & s_{0,n} \\ & s_{1,1} & & \dots & & & s_{1,n-1} \\ & & \dots & & \dots & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & s_{n,1} \end{array}$$

Другими словами, каждое число не больше своего соседа слева сверху и не меньше своего соседа справа сверху кроме, конечно же, чисел в ряду 0 (ряд i – множество чисел вида $s_{i,\cdot}$).

Обозначим множество таблиц ГЦ через \mathbf{GT}_λ . Пусть $A \in \mathbf{GT}_\lambda$ соответствут базисный вектор v_A с весом μ_A . В выбранном базисе вес μ_A имеет координаты

$$(\mu_A)_i = \sum_j s_{i,j} - \sum_j s_{i-1,j},$$

где $A = (s_{i,j})$.

Каждому $A \in \mathbf{GT}_\lambda$ сопоставим также p_A — многочлен от t . По определению,

$$p_A = \prod_{l=1}^{n-1} (1 - t^l)^{d_l}, \quad (3)$$

где d_l — следующее данное. Оно равно числу пар из $1 \leq i \leq n-1$ и $a \in \mathbb{Z}$ таких, что число a в ряду i встречается l раз, а в ряду $i-1$ — $l-1$ раз. Комбинаторная формула для многочленов Холла-Литтлвуда тогда выглядит следующим образом.

Теорема 1.1.

$$P_\lambda = \sum_{A \in \mathbf{GT}_\lambda} p_A e^{\mu_A}.$$

Эта теорема является прямым следствием правила ветвления, приведенного в [7]. Стоит отметить, что многочлены Холла-Литтлвуда, рассматриваемые в [7], соответствуют алгебре \mathfrak{gl}_n , а не \mathfrak{sl}_n . Однако переход от одного случая другому осуществить крайне просто — в обозначениях [7] определенный нами многочлен Холла-Литтлвуда есть

$$P_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)}(x_1, \dots, x_{n-1}, 1; t).$$

2. Мономиальный базис

Подобно тому, как комбинаторная формула для типа A есть сумма по базису в неприводимом \mathfrak{sl}_n -модуле, наша формула для типа \tilde{A} — сумма по некоторому базису в неприводимом $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -модуле. Этот базис был построен в работах [3, 4] Фейгиным, Джимбо, Локтевым, Мивой и Мухиным, в этом разделе мы вкратце обсудим его свойства.

Зафиксируем λ — целочисленный доминантный $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -вес с координатами

$$(a_0, \dots, a_{n-1})$$

относительно некоторого базиса из фундаментальных весов. Уровень λ — число $k = \sum a_i$.

Определим теперь комбинаторное множество \mathbf{II}_λ , параметризующее базис. Каждое $A \in \mathbf{II}_\lambda$ является бесконечной в обе стороны последовательностью целых чисел, отвечающей трем требованиям.

- i) $A_i = 0$ при $i \gg 0$.
- ii) $A_i = a_{i \bmod n}$ при $i \ll 0$.
- iii) $A_i \geq 0$ и $A_{i-n+1} + A_{i-n+2} + \dots + A_i \leq k$ (сумма n подряд идущих членов) для любого i .

Каждому $A \in \mathbf{\Pi}_\lambda$ соответствует весовой вектор v_A с некоторым весом μ_A . Дадим явное описание веса μ_A . Во-первых, отметим, что, поскольку μ_A принадлежит носителю $\text{char}(L_\lambda)$, вес $\mu_A - \lambda$ лежит в решетке корней. Мы фиксируем базис в решетке корней и выпишем координаты $\mu_A - \lambda$ относительно этого базиса. Пусть $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ — простые корни, а δ — мнимый корень, тогда в решетке корней мы фиксируем базис из корней

$$\gamma_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i$$

($1 \leq i \leq n-1$) и корня $-\delta$. (Конечно, на самом деле этот базис порождает некоторую подрешетку коразмерности 1, но вес $\mu_A - \lambda$ как раз лежит в этой подрешетке.)

Теперь введем $T^0 \in \mathbf{\Pi}_\lambda$ такое, что $T_i^0 = 0$ при $i > 0$ и $A_i = a_{(i \bmod n)}$ при $i \leq 0$. Координаты веса $\mu_A - \lambda$ выражаются через почленную разность $A - T^0$. А именно, координата, отвечающая γ_i равна

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} \left(A_{q(n-1)+i} - T_{q(n-1)+i}^0 \right), \quad (4)$$

в то время как координата, отвечающая $-\delta$ равна

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\lfloor \frac{i}{n-1} \right\rfloor (A_i - T_i^0). \quad (5)$$

Например, $\mu_{T^0} = \lambda$, т.е. v_{T^0} — старший вектор.

Явно определять сами векторы v_A мы здесь не будем, отметим лишь, что базис, ими образованный, является мономиальным. Это означает, что каждый вектор v_A получается из старшего под действием некоторого монома от корневых подпространств алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$. Базис этот, таким образом, имеет совсем другую природу чем базис Гельфанда-Цетлина, что делает глубокие сходства между обсуждаемыми здесь аффинным и финитным случаем отчасти неожиданными.

3. Основной результат

Один из ключевых моментов этой работы — это упомянутый во введении переход от бесконечных последовательностей, образующих $\mathbf{\Pi}_\lambda$, к своего рода бесконечным таблицам Гельфанда-Цетлина.

Каждому $A \in \mathbf{\Pi}_\lambda$ мы сопоставляем набор чисел $s_{i,j}(A)$, где оба индекса i и j пробегает все целые числа. В общем случае, если числа в таком наборе удовлетворяют неравенству (2) для любых i и j , мы будем говорить, что они образуют бесконечную таблицу ГЦ. Подобно обычным таблицам ГЦ, визуализируются они следующим образом.

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & s_{-1,-1} & & s_{-1,0} & & s_{-1,1} & \dots \\ & \dots & & s_{0,-1} & & s_{0,0} & & \dots \\ \dots & & s_{1,-2} & & s_{1,-1} & & s_{1,0} & \dots \\ & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Далее, для любого $m \in \mathbb{Z}$ определим $T^m \in \mathbf{\Pi}_\lambda$ по правилу $T_i^m = 0$ при $i > mn$ и $A_i = a_{(i \bmod n)}$ при $i \leq mn$. Тогда, по определению:

$$s_{i,j}(A) = \sum_{l \leq in+j(n-1)} (A_l - T_l^{i+j}) - \sum_{l=in+j(n-1)+1}^{(i+j)n} T_l^{i+j}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что в первую сумму в правой части входит лишь конечное число ненулевых слагаемых, а вторая сумма является ненулевой только при $j > 0$. Данное определение можно переформулировать так: обнулим все члены последовательности A с номером больше $in+j(n-1)$, вычтем из получившегося последовательность T^{i+j} и возьмем сумму членов результата.

Определение (6) будет также использоваться в более общем случае последовательностей A , удовлетворяющих условиям i) и ii) из предыдущего раздела, но, возможно, не удовлетворяющих условию iii).

Предложение 3.1. Если $A \in \mathbf{\Pi}_\lambda$, то массив $(s_{i,j}(A))$ — бесконечная таблица ГЦ.

Доказательство. Это следует из того, что

$$s_{i,j}(A) - s_{i-1,j+1}(A) = A_{in+j(n-1)} \geq 0$$

и

$$\begin{aligned} s_{i,j}(A) - s_{i-1,j}(A) &= A_{(i-1)n+j(n-1)+1} + \dots + A_{in+j(n-1)} + \\ &- T_{(i+j-1)n+1}^{i+j} - \dots - T_{(i+j)n}^{i+j} = A_{(i-1)n+j(n-1)+1} + \dots + A_{in+j(n-1)} - k \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для чисел $s_{i,j}(A)$ выполняются неравенства (2). \square

Из доказательства следует, что $s_{i,j}(A) = s_{i-1,j+1}(A)$ тогда и только тогда, когда $A_{in+j(n-1)} = 0$, а $s_{i,j}(A) = s_{i-1,j}(A)$ тогда и только тогда, когда $A_{in+(j-1)(n-1)} + \dots + A_{in+j(n-1)} = k$. Эти равносильности будут постоянно использоваться при работе с бесконечными таблицами $(s_{i,j}(A))$.

Для того, чтобы сформулировать основной результат осталось каждой последовательности A , удовлетворяющей i) и ii), сопоставить вес $p(A)$ вида $\prod_{l=1}^n (1-t^l)^{d_l}$. Числа d_l определяются соответствующим массивом $(s_{i,j}(A))$. Как и в финитном случае, для того чтобы определить d_l рассмотрим множество пар (x, i) таких, что число x встречается $l-1$ раз в ряду $i-1$ массива $(s_{i,j}(A))$ и l раз в ряду i . Это множество, как правило, бесконечно, и d_l определяется как размер фактора этого множества по некоторому отношению эквивалентности. Определим это отношение.

Одним из ключевых свойств любого массива $(s_{i,j}) = (s_{i,j}(A))$ является легко проверяемое равенство

$$s_{i-n+1,j+n} = s_{i,j} - k, \quad (7)$$

имеющее место для любых i, j . Пусть теперь X_l — множество всех пар (i, j) таких, что

$$s_{i-1,j} \neq s_{i-1,j+1} = \dots = s_{i-1,j+l-1} \neq s_{i-1,j+l}$$

и

$$s_{i,j-1} \neq s_{i,j} = \dots = s_{i,j+l-1} \neq s_{i,j+l}.$$

X_l , очевидно, находится в биекции с множеством пар из предыдущего абзаца. В силу равенства (7) из $(i, j) \in X_l$ следует $(i - \alpha(n-1), j + \alpha n) \in X_l$, где α — любое целое число. Отношение эквивалентности определяется формулой $(i, j) \sim (i - n + 1, j + n)$.

Предложение 3.2. Множество X_l / \sim конечно.

Доказательство. Во-первых, заметим, что каждый класс эквивалентности в X_l содержит ровно одного представителя (i, j) с $1 \leq i \leq n - 1$. Следовательно, достаточно доказать конечность множества $(i, j) \in X_l$ с i лежащим в этих пределах. Следующие факты следуют напрямую из (6) и того, что A удовлетворяет i) и ii).

- 1) Для всех $1 \leq i \leq n - 1$ при $j \gg 0$ выполняется $s_{i,j+1} = s_{i,j} - k$.
- 2) Для всех $1 \leq i \leq n - 1$ при $j \ll 0$ верно, что $s_{i,j+1} = s_{i,j}$ если и только если $a_{j \bmod n} = 0$. Последнее же верно только если верно и $s_{i-1,j+1} = s_{i-1,j}$.

Из утверждения 1) следует, что при $(i, j) \in X_l$ и $i \in [1, n - 1]$ индекс j не может быть сколь угодно большим, в то время как 2) показывает, что $-j$ не может быть сколь угодно большим. \square

Мы теперь полагаем $d_l = |X_l / \sim|$ и формулируем наш основной результат.

Теорема 3.1. Для целочисленного доминантного ненулевого $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -веса λ выполнено тождество

$$P_\lambda = \sum_{A \in \Pi_\lambda} p(A) e^{\mu^A}. \quad (8)$$

Замечание. В случае $\lambda = 0$ множество Π_λ , очевидно, состоит из единственной нулевой последовательности. Соответствующая бесконечная таблица ГЦ тоже тождественно нулевая, за счет чего наше определение веса $p(A)$ теряет смысл. В каком-то смысле, исключительность случая $\lambda = 0$ можно объяснить тем, что для аффинной системы корней стабилизатор нуля бесконечен, в отличие от любого другого веса. Как следствие, определение (1) не дает $P_0 = 1$, что верно для любой системы корней финитного типа.

4. Теорема Бриона и ее обобщение

В этом разделе будет вкратце напомнена формулировка теоремы Бриона и затем представлена обобщающая ее взвешенная версия. Связь между этими результатами и нашей формулой будет объяснена ниже.

Рассмотрим векторное пространство \mathbb{R}^m с фиксированным базисом и решеткой целых точек $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$. Для любого подмножества $P \subset \mathbb{R}^m$ определена его производящая функция

$$S(P) = \sum_{a \in P \cap \mathbb{Z}^m} e^a,$$

формальный ряд Лорана от переменных x_1, \dots, x_m . (Формальная экспонента точки определяется просто как $e^a = x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$.)

Пусть P — выпуклый рациональный многогранник (пересечение конечного набора полупространств, заданных нестрогими линейными неравенствами с целыми коэффициентами). В этом случае существует многочлен $q \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$ такой, что произведение $qS(P)$ конечно, т.е. тоже многочлен (Лорана). Более того, рациональная функция $\frac{qS(P)}{q}$ не зависит от выбора q и обозначается $\sigma(P)$. В англоязычной литературе эта функция называется "integer point transform", мы же будем использовать термин "целоточечная свертка".

При каждой вершине v многогранника P есть касательный конус C_v . Теорема Бриона — это следующее тождество в поле рациональных функций.

Теорема 4.1 ([14, 15]).

$$\sigma(P) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma(C_v).$$

В книгах [10, 11] можно найти весьма удачное обсуждение этих вопросов.

Для того чтобы сформулировать обобщение теоремы 4.1 введем следующие объекты. Обозначим множество граней рационального выпуклого многогранника P через \mathcal{F}_P . Для произвольного коммутативного кольца R рассмотрим отображение $\varphi : \mathcal{F}_P \rightarrow R$. Такое отображение задает функцию $g : P \rightarrow R$ по правилу $g(x) = \varphi(f)$, где f — минимальная грань, содержащая x .

Далее, введем взвешенную производящую функцию

$$S_\varphi(P) = \sum_{a \in P \cap \mathbb{Z}^n} g(a) \exp(a) \in R[[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]].$$

Предложение 4.1. Существует многочлен $Q \in R[x_1, \dots, x_n]$ такой, что $QS_\varphi(P) \in R[[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]]$.

Доказательство. Это следует из того, что можно предъявить конечный набор рациональных подмногогранников в P , на каждом из которых g постоянна, и при этом такой, что их объединение содержит все целые точки в P .

Конкретно, для каждой грани рассмотрим ее образ при гомотетии с центром в некоторой ее внутренней рациональной точке и с рациональным коэффициентом $0 < \alpha < 1$ достаточно большим, чтобы этот образ содержал все внутренние целые точки грани. $\{P_i\}$, множество всех таких образов вместе со всеми вершинами P будет обладать нужными свойствами.

Q теперь можно положить равным произведению знаменателей всех функций $\sigma(P_i)$.

Полезное для нас наблюдение состоит в том, что, как и в невзвешенном случае, Q можно на самом деле взять равным произведению $1 - e^\varepsilon$ по всем образующим ε ребер многогранника P . \square

Нами определен взвешенный аналог целоточечной свертки:

$$\sigma_\varphi(P) = \frac{QS_v(P)}{Q} \in R(x_1, \dots, x_n).$$

Если u вершина P , то существует очевидное вложение $\mathcal{F}_{C_u} \hookrightarrow F_P$. Отображение φ поэтому естественным образом определено на множестве \mathcal{F}_{C_u} . Взвешенную версию теоремы Бриона можно теперь сформулировать следующим образом.

Теорема 4.2. $\sigma_\varphi(P) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma_\varphi(C_v)$.

Доказательство. Вспомним набор многогранников $\{P_i\}$ из предыдущего предложения. Элементы набора находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями P . Нетрудно видеть, что, выписав обычную теорему Бриона для каждого из P_i и сложив их все с коэффициентами — значениями φ в соответствующих гранях, мы получим в точности искомое равенство. \square

При желании, утверждение можно обобщить, вместо R взяв произвольную абелеву группу. Нас, однако, будет интересовать исключительно случай $R = \mathbb{Z}[t]$.

5. Применение взвешенной теоремы Бриона в финитном случае

Сперва мы покажем, как выглядит рассуждение в более простом финитном варианте.

Рассмотрим вещественное пространство размерности $\binom{n+1}{2}$, координаты в котором занумерованы парами (i, j) с $i \in [0, n-1]$ и $j \in [1, n-i]$. Элементы \mathbf{GT}_λ тогда можно считать целыми точками в нашем пространстве. Они в точности образуют множество целых точек многогранника Гельфанда-Цетлина GT_λ . По определению, многогранник Гельфанда-Цетлина состоит из точек, для координат $s_{i,j}$ которых выполняются неравенства (2). (Нетрудно видеть, что GT_λ содержится в аффинном подпространстве размерности $\binom{n}{2}$, заданном фиксированием координат в ряду 0.)

Каждой таблице ГЦ теперь можно сопоставить два монома. Первый есть e^{μ_A} — моном от переменных x_1, \dots, x_{n-1} согласно разделу 1. Другой же — это e^A , моном от некоторого набора из $\binom{n+1}{2}$ переменных — формальная экспонента точки в $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$. Обозначим этот набор переменных $\{t_{i,j}\}$.

Моном e^{μ_A} получается из e^A при помощи специализации

$$t_{i,j} \longrightarrow x_i^{-1} x_{i+1} \quad (9)$$

(в рамках этого раздела мы полагаем $x_0 = x_n = 1$). В общем случае, результат применения (9) к рациональной функции $Q \in \mathbb{Z}[t](\{t_{i,j}\})$ мы будем обозначать $F(Q)$. В том случае, когда этот объект корректно определен, он принадлежит $\mathbb{Z}[t](x_1, \dots, x_{n-1})$.

Для того, чтобы наконец перейти к применению теоремы 4.2 нам понадобится еще одно простое наблюдение. Для таблицы ГЦ A многочлен p_A определяется тем, какие из неравенств (2) обращаются в равенство в точке A . С другой стороны, это в точности те неравенства, которыми задается наш многогранник. Таким образом, p_A определяется минимальной гранью, содержащей точку A , и мы получаем отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_{GT_\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}[t].$$

Правую часть тождества из теоремы 1.1 можно выразить, применив взвешенную теорему Бриона к GT_λ и отображению φ и затем применив специализацию F . Результат этой процедуры описывается следующей теоремой, из которой уже непосредственно вытекает сама теорема 1.1.

Теорема 5.1. У множества вершин многогранника GT_λ есть выделенное подмножество, параметризованное орбитой $W\lambda$. Для вершины из этого подмножества соответствующей $\mu \in W\lambda$ имеем

$$F(\sigma_\varphi(C_v)) = \sum_{w\lambda=\mu} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Phi^+} \left(\frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right)^{m_\alpha} \right).$$

Для всех же остальных вершин $F(\sigma_\varphi(C_v)) = 0$.

Любопытен тот факт, что для регулярного веса λ выделенное подмножество вершин есть в точности множество простых вершин. Как было сказано во введении, для случая $t = 0$ этот сценарий изложен в препринте [12].

Теорема 1.1 сама по себе является классическим результатом и, по этой причине, подробного доказательства теоремы 5.1 мы приводить не будем. Тем не менее, эта теорема весьма нетрудно выводится из результатов части II, что и будет вкратце обсуждено в ее конце.

6. Применение взвешенной теоремы Бриона в аффинном случае

Перейдем к обсуждению основного случая, аффинного. Идейно ситуация окажется довольно похожей, но заметно более сложной технически, в

частности по причине бесконечномерности.

Рассмотрим вещественное счетномерное пространство Ω бесконечных в обе стороны последовательностей x , в которых $x_i = 0$ при $i \gg 0$ и $x_i = x_{i-n}$ при $i \ll 0$ (члены последовательности $x \in \Omega$ мы будем обозначать $x_i, i \in \mathbb{Z}$). В Ω выделена решетка целых точек $\mathbb{Z}^\infty \subset \Omega$. В Ω также содержится аффинное подпространство V последовательностей, в которых $x_i = a_{i \bmod n}$ при $i \ll 0$. Введенные ранее функции $p(x)$ и $s_{i,j}(x)$ определены в точности при $x \in V$.

Введем функционалы χ_i на Ω в точке x принимающие значение $x_{i-n+1} + \dots + x_i$. Тогда Π_λ есть в точности $\Pi \cap \mathbb{Z}^\infty$, где $\Pi \subset V$ — "многогранник", заданный неравенствами $x_i \geq 0$ и $\chi_i(x) \leq k$ для всех i .

Зачастую нам будет удобнее иметь дело со сдвинутым многогранником

$$\bar{\Pi} = \Pi - T^0.$$

Геометрические и комбинаторные свойства его точно такие же, преимущество состоит в том, что $\bar{\Pi}$ лежит в подпространстве $\bar{V} \subset \Omega$ последовательностей с конечным числом ненулевых членов. Для краткости мы будем использовать $-$ для обозначения сдвига на $-T^0$ в следующих двух смыслах. Если X — точка или подмножество в V , то $\bar{X} = X - T^0$. Если же Φ — отображение, принимающее значения в точках или подмножествах V , то $\bar{\Phi}(\bar{X}) = \Phi(X)$.

Для каждой точки $x \in \bar{V}$ определена ее формальная экспонента e^x — конечный моном от бесконечного набора переменных $\{t_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того, для любого $A \in \Pi_\lambda$ вес $\mu_A - \lambda$ есть целочисленная линейная комбинация корней $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, -\delta$. Исходя из этого, $e^{\mu_A - \lambda}$ мы будем рассматривать как моном от переменных z_1, \dots, z_{n-1}, q . Формулы (4) и (5) показывают, что $e^{\mu_A - \lambda}$ может быть получен из e^A при помощи специализации

$$t_i \longrightarrow z_{i \bmod (n-1)} q^{\lfloor \frac{i}{n-1} \rfloor}, \quad (10)$$

где остаток берется из $[1, n-1]$. В общем случае, мы будем обозначать такое преобразование символом G , применяя его к (некоторым) выражениям от переменных t_i .

Мы теперь опишем наш подход к написанию (взвешенного) тождества типа Бриона для многогранника $\bar{\Pi}$. Грани многогранников Π и $\bar{\Pi}$ определяются естественным образом (что будет сделано в части III). Будет также показано, что $p(x)$ определяется минимальной гранью многогранника Π , содержащей x , (при $x \in \Pi$). Мы получаем отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_\Pi \rightarrow \mathbb{Z}[t]$$

такое, что $p(x) = \varphi(f)$, где f — минимальная грань, содержащая x . Обозначим теперь

$$S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi}) = \sum_{x \in \bar{\Pi} \cap \mathbb{Z}^\infty} \bar{p}(x) e^x.$$

Наше тождество будет рассматриваться в кольце \mathfrak{S} рядов Лорана от q с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}[t](z_1, \dots, z_{n-1})$, причем таких, которые содержат лишь конечное число членов с отрицательной степенью q . У этого кольца есть следующее, удобное для нас свойство. Рассмотрим последовательность мономов y_1, y_2, \dots от z_1, \dots, z_{n-1}, q . Если лишь конечное число из y_i содержат q в неположительной степени и ни один из них не равен 1, то произведение

$$(1 - y_1)(1 - y_2) \dots \quad (11)$$

является обратимым элементом кольца \mathfrak{S} .

Каждой вершине \bar{v} многогранника $\bar{\Pi}$ будет сопоставлен ряд $\tau_{\bar{v}} \in \mathfrak{S}$. В определенном смысле, этот ряд есть результат применения специализации G к "целоточечной свертке" касательного конуса $C_{\bar{v}}$. Наше тождество имеет следующий вид.

Теорема 6.1. В \mathfrak{S} имеем

$$G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi})) = \sum_{\bar{v} \text{ вершина } \bar{\Pi}} \tau_{\bar{v}}.$$

Далее, теорему 3.1 можно переписать в виде

$$P_{\lambda} = e^{\lambda} G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi})). \quad (12)$$

В силу этого, основная теорема 3.1 следует из следующего утверждения, аналогичного теореме 5.1.

Теорема 6.2. В множестве вершин многогранника Π выделяется подмножество, занумерованное орбитой $W\lambda$, со следующими свойствами.

- а) Если вершина v принадлежит выделенному подмножеству и соответствует $\mu \in W\lambda$, то

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{1}{W_{\lambda}(t)} \sum_{w\lambda=\mu} \frac{e^{w\lambda-\lambda w} \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - te^{-\alpha})^{m_{\alpha}} \right)}{w \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_{\alpha}} \right)}.$$

- б) Для всех остальных вершин v имеет место $\tau_{\bar{v}} = 0$.

Выражение в правой части в пункте а) — элемент кольца \mathfrak{S} потому, что каждый из знаменателей имеет вид (11).

Часть II

Комбинаторные инструменты: обобщенные многогранники Гельфанда-Цетлина

В этой части мы обсудим определенное семейство многогранников, обобщающих многогранники Гельфанда-Цетлина. Полученные результаты будут приложены к доказательству теоремы 6.2 в следующей части.

7. Ординарные подграфы и соответствие с многогранниками

Бесконечную квадратную решетку рассмотрим в качестве графа \mathcal{R} , вершины которого — узлы решетки, а ребра — соединяющие их отрезки. Решетку и граф мы будем представлять себе повернутыми на 45° , т.е. так чтобы отрезки образовывали угол в 45° с горизонталью.

Вершины графа \mathcal{R} мы занумеруем парами целых чисел так же, как и элементы бесконечных таблиц ГЦ. А именно, множество вершин (i, \cdot) образуют ряд — множество вершин, расположенных на данной горизонтальной прямой. Внутри каждого ряда второе число возрастает слева направо, причем так, чтобы непосредственно над вершиной (i, j) располагались вершины $(i-1, j)$ и $(i-1, j+1)$.

Подграф $\Gamma \subset \mathcal{R}$ будем называть ординарным, если он обладает следующими свойствами.

1. Γ конечный связный полный подграф.
2. Если $(i, j) \in \Gamma$ (т.е. (i, j) является вершиной Γ) и $(i, j+1) \in \Gamma$, то тогда и $(i+1, j) \in \Gamma$.
3. Пусть a_Γ — самый верхний ряд, содержащий вершины подграфа Γ . Тогда для любого $i > a_\Gamma$ из $(i, j) \in \Gamma$ и $(i, j+1) \in \Gamma$ следует $(i-1, j+1) \in \Gamma$.

$((i-1, j+1)$ и $(i+1, j)$ — это в точности два общих соседа вершин (i, j) и $(i, j+1)$.) Приведем несколько примеров таких подграфов.

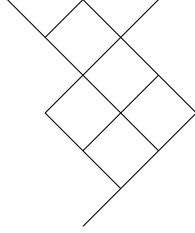


Рис. 1

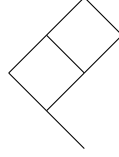


Рис. 2

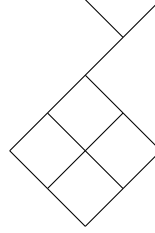


Рис. 3

Можно, например, отметить, что любой ординарный подграф содержит ровно одну вершину в самом своем нижнем ряду.

Пусть l_Γ — количество вершин в верхнем ряду ординарного подграфа Γ . Каждому Γ и невозрастающей последовательности целых чисел b_1, \dots, b_{l_Γ} мы сопоставляем конечномерный рациональный многогранник $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ в счетномерном пространстве, координаты в котором соответствуют вершинам \mathcal{R} . Рассмотрим точку s в этом пространстве с координатами $(s_{i,j})$. По определению, $s \in D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ если и только если выполнены следующие условия.

1. Для всех $(i, j) \notin \Gamma$ имеем $s_{i,j} = 0$.
2. l_Γ координат в ряду a_Γ равны b_1, \dots, b_{l_Γ} слева направо.
3. Если $(i, j) \in \Gamma$, то $s_{i-1,j} \geq s_{i,j}$ при условии, что $(i-1, j) \in \Gamma$, и $s_{i,j} \geq s_{i-1,j+1}$ при условии, что $(i-1, j+1) \in \Gamma$. Другими словами, для любых двух смежных вершин графа Γ выполняется соответствующее неравенство типа (2).

Это определение естественным образом обобщает многогранники Гельфанда-Цетлина, ибо последние имеют вид $D_{\mathcal{T}}(b_1, \dots, b_n)$, где $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ — ординарный подграф, вершины которого есть (i, j) с $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-i$.

Каждая точка $s \in D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ задает подграф в Γ , вершины которого есть все вершины Γ , а ребра — те ребра Γ , для которых равны две соответствующих координаты в s . Ясно, что минимальная грань многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, содержащая s , определяется в точности соответствующим подграфом. Отсюда получаем нижеследующее описание граней.

Предложение 7.1. Грани $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подграфами в Γ , содержащими все вершины и обладающими следующими свойствами.

1. Если две смежные вершины Γ лежат в одной и той же компоненте связности подграфа, то они являются смежными в подграфе.
2. Если (i, j) и $(i, j+1)$ лежат в одной компоненте связности подграфа, то там же лежат и $(i+1, j)$ и $(i-1, j+1)$ (вторая при условии, что $i > a_\Gamma$).

3. i -ая и j -ая слева вершины в ряду a_Γ лежат в одной компоненте подграфа тогда и только тогда, когда $b_i = b_j$.

Грань, соответствующая подграфу Δ , состоит из точек, у которых равны друг другу любые две координаты, соответствующие смежным в Δ вершинам. Размерность грани есть число компонент связности в Δ , не содержащих вершин из ряда a_Γ .

Доказательство. Если подграф обладает вышеперечисленными свойствами, то нетрудно указать точку $(s_{i,j}) \in D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ такую, что для вершин $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \Gamma$ равенство $s_{i_1, j_1} = s_{i_2, j_2}$ выполнено тогда и только тогда, когда (i_1, j_1) и (i_2, j_2) лежат в одной компоненте связности в Δ .

Утверждение о размерности грани следует из того, что любая координата, лежащая в одной компоненте с координатой из верхнего ряда, фиксирована и равна соответствующему b_i . Таким образом, число степеней свободы при выборе координат есть число компонент, которые вершин из ряда a_Γ не содержат. \square

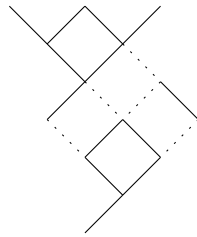
Обозначим Δ_f подграф, отвечающий грани f многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$. Отметим, что любая компонента связности такого графа Δ_f сама по себе является ординарным подграфом.

Определим теперь весовую функцию

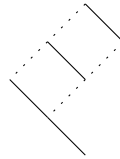
$$\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma}) : \mathcal{F}_{D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})} \rightarrow \mathbb{Z}[t].$$

Значение $\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})(f)$ определяется в терминах подграфа Δ_f , а именно, оно равно $\prod (1 - t^l)^{d_l}$, где d_l — следующее данное. Число пар (E, i) , где E — связная компонента графа Δ_f , а $i > a_\Gamma$ — целое число, такие, что E содержит ровно $l - 1$ вершину в ряду $i - 1$ и l вершин в ряду i .

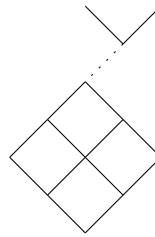
Ниже приведено по примеру подграфа, отвечающего грани, для каждого из рисунков 1-3 вместе с размерностью грани и значением веса $\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})(f)$.



$$\dim = 2 \\ (1 - t)^2(1 - t^2)$$



$$\dim = 2 \\ (1 - t)^2$$



$$\dim = 1 \\ (1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)$$

Для любого набора целых чисел $b_1 \geq \dots \geq b_{l_\Gamma}$ выражение

$$\sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})}(D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})) \tag{13}$$

есть рациональная функция от переменных $\{t_{i,j}\}$, соответствующих вершина графа \mathcal{R} . Нам, однако, будет в первую очередь интересовать результат применения замены

$$t_{i,j} \longrightarrow x_i^{-1} x_{i+1}$$

к выражению (13). Мы будем обозначать эту специализацию F , формально она совпадает с F , определенным в (9). Рациональную функцию, получающуюся из (13) под действием F мы будем обозначать $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$.

Определить F можно и так. Для точки $s = (s_{i,j})$ с конечным числом ненулевых координат степень переменной x_i в мономе $F(e^s)$ есть сумма элементов массива s в ряду $i - 1$ минус сумма элементов в ряду i .

Первое наблюдение относительно функций $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ состоит в том, что они корректно определены, т.е. приведенный знаменатель выражения (13) не зануляется под действием F . Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим ребро e многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$. Пусть ε — направляющий вектор ребра e . Согласно предложению 7.1, подграф Δ_e содержит ровно одну компоненту связности, не включающую вершин из ряда a_Γ . Пусть r — верхний ряд, содержащий вершины из этой компоненты (вершина компоненты в нем ровно одна). Легко проверить, что переменная x_r содержится в $F(e^\varepsilon)$ в ненулевой степени. После этого остается воспользоваться замечанием в конце доказательства теоремы 4.2.

Теперь сформулируем утверждение, которое окажется ключом к доказательству части b) теоремы 6.2.

Теорема 7.1. Пусть Γ — ординарный подграф такой, что для некоторого $i \geq a_\Gamma$ число вершин этого подграфа в ряду $i + 1$ больше, чем в ряду i . Тогда $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma}) = 0$ для любой невозрастающей последовательности целых чисел $b_1 \geq \dots \geq b_{l_\Gamma}$.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится тождество, связывающее между собой особый случай, в котором все b_i одинаковы, с общим случаем, в котором они попарно различны. Заметим, что $D_\Gamma(b, \dots, b)$ — это всегда конус, вершину такого конуса мы будем обозначать $v_\Gamma(b)$.

Лемма 7.1. Пусть v_1, \dots, v_m — вершины многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, где $b_1 > \dots > b_{l_\Gamma}$ — целые числа. Обозначим соответствующие касательные конусы C_1, \dots, C_m . Тогда выполнено тождество

$$[l_\Gamma]_t! \sigma_{\varphi_\Gamma(b, \dots, b)}(D_\Gamma(b, \dots, b)) = \sum_{i=1}^m e^{v_\Gamma(b) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})}(C_i)$$

(слагаемые в правой части есть просто целочечные свертки конусов C_i , сдвинутых на $v_\Gamma(b) - v_i$).

Для вывода этого тождества нам понадобится понимание того, как ведет себя теорема Бриона при вырождении многогранников. Доказательство леммы, соответственно, будет дано после того, как мы обсудим этот вопрос в разделе 8.

Доказательство теоремы 7.1. Мы будем доказывать утверждение теоремы индукцией по числу вершин в Γ , последовательно разбирая три случая.

Случай 1. Ни один ряд не содержит более двух вершин графа Γ . Этот случай включает в себя базу индукции. К сожалению, разбор этого случая — наиболее вычислительная часть этой работы, хотя применяемый нами подход достаточно прямолинеен.

Во-первых, если для некоторого $i > a_\Gamma$ граф Γ содержит одну вершину в ряду i и две вершины в ряду $i + 1$, то можно сразу воспользоваться предположением индукции. Для этого рассмотрим граф Γ' , получающийся из Γ удалением всех вершин в рядах выше i . Рассмотрим теперь сечение многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, получаемое фиксированием всех координат в рядах i и выше. Вклад каждого такого сечения в $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ равен нулю по предположению индукции, примененному к Γ' .

Таким образом мы можем работать в предположении, что Γ содержит одну вершину в ряду a_Γ и две вершины в ряду $a_\Gamma + 1$. Рисунок 2 — пример такого графа. Кроме того, мы можем считать, что $b_1 = 0$, ибо любое $\psi_\Gamma(b)$ получается из $\psi_\Gamma(0)$ домножением на моном. Мы вычислим $\psi_\Gamma(0)$, разбивая $D_\Gamma(0)$ на сечения, получаемые фиксированием двух координат в ряду $a_\Gamma + 1$. Пусть Γ' получается из Γ удалением вершины в верхнем ряду, тогда

$$\psi_\Gamma(0) = \sum_{b_1 \geq 0, b_2 \leq 0} c_{b_1, b_2} \psi_{\Gamma'}(b_1, b_2), \quad (14)$$

где

$$c_{b_1, b_2} = \begin{cases} (1-t)^2 & \text{при } b_1 > 0 > b_2, \\ (1-t) & \text{при } b_1 > 0 = b_2 \text{ или } b_1 = 0 > b_2, \\ (1-t^2) & \text{при } b_1 = b_2 = 0. \end{cases}$$

Конечно же, равенству (14) нужно придать строгий смысл. Делается это стандартным образом и вдаваться в подробности мы не будем. Идея состоит в том, что у всех функций $\psi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ вместе с $\psi_\Gamma(0)$ есть общий конечный знаменатель (что будет показано ниже), при домножении на который (14) превращается в тождество между формальными рядами Лорана.

Теперь для некоторой пары $b_1 > b_2$ рассмотрим вершины многогранника $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$. Нетрудно видеть, что среди соответствующих подграфов Δ_v есть ровно два, обе компоненты связности которых — графы-пути. Вот эти два подграфа для примера на рисунке 2.



Пусть r — наименьшее число такое, что Γ содержит две вершины из ряда $r - 1$, но одну из ряда r . Два упомянутых соответствующих вершинам подграфа различаются тем, что в одном случае вершина в ряду r соединена с соседом слева сверху (вершина v_1), а в другом — с соседом справа сверху (вершина v_2).

Предложение 7.2. Рассмотрим вершину v многогранника $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ отличную v_1 от v_2 и с касательным конусом C_v . Из предположения индукции следует, что

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_v)) = 0.$$

Доказательство. Пусть Γ_1 и Γ_2 — компоненты связности графа Δ_v , тогда

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_v)) = \psi_{\Gamma_1}(b_1)\psi_{\Gamma_2}(b_2).$$

Тот факт, что одна из этих компонент не является графом-путем означает, что она попадает в рамки предположения индукции и соответствующий множитель в правой части равен нулю. \square

Взвешенная теорема Бриона, примененная к многограннику $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$, таким образом дает

$$\psi_{\Gamma'}(b_1, b_2) = F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_1)) + F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_2)),$$

где C_1 и C_2 — соответствующие касательные конусы. Два слагаемых в правой части не слишком трудно вычислить явно, что мы и сделаем.

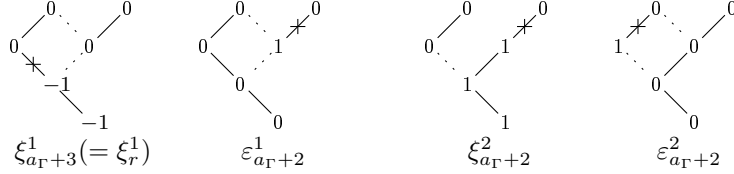
Оба конуса C_1 и C_2 являются симплицальными и унимодулярными, что можно установить посмотрев на минимальные целочисленные образующие их ребер. Пусть d_{Γ} — самый нижний ряд, содержащий вершины из Γ , тогда множество этих образующих удовлетворяет следующему описанию.

Предложение 7.3. Координаты такой образующей принимают всего два разных значения: 0 и либо -1 , либо 1 . Для любого $i \in [a_{\Gamma} + 2, r - 1]$ есть ровно одна образующая, содержащая по одной ненулевой координате в каждом ряду из промежутка $[i, r - 1]$, и всеми остальными координатами равными 0. Кроме того, для любого $i \in [a_{\Gamma} + 2, d_{\Gamma}]$ есть ровно одна образующая, содержащая по одной ненулевой координате в каждом ряду из промежутка $[i, d_{\Gamma}]$, и всеми остальными координатами равными 0.

Доказательство. В соответствии с предложением 7.1, для любого ребра e одного из конусов C_1 и C_2 подграф Δ_e получается из, соответственно, Δ_{v_1} или Δ_{v_2} удалением одного ребра. Тогда у Δ_e действительно ровно одна из трех компонент не будет содержать вершин в ряду $a_{\Gamma} + 1$. У соответствующей образующей все координаты в этой компоненте равны либо 1 , либо -1 , в зависимости от направления удаленного ребра. Все остальные координаты равны нулю.

Для каждого из ребер графов Δ_{v_1} и Δ_{v_2} можно теперь рассмотреть получающийся при удалении этого ребра граф и получить таким образом утверждение предложения. \square

Образующие, описанные во втором предложении предложения 7.3, обозначим ε_i^1 и ε_i^2 соответственно. Образующие, описанные в третьем предложении, обозначим ξ_i^1 и ξ_i^2 . Вот некоторые из образующих, появляющихся в нашем примере, крестом помечено удаляемое ребро.



Легко убедиться в том, что для $i \in [a_\Gamma + 2, r - 1]$ выполняется $F(e^{\varepsilon_i^1}) = F(e^{\varepsilon_i^2})$, а для $i \in [a_\Gamma + 2, d_\Gamma], i \neq r$ выполняется $F(e^{\xi_i^1}) = F(e^{\xi_i^2})$. Однако $F(e^{\xi_r^1}) = x_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}$, в то время как $F(e^{\xi_r^2}) = x_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}$.

Последний вопрос, требующий обсуждения прежде чем мы приведем итоговое вычисление — это значения $\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ на гранях конусов C_1 и C_2 .

Предложение 7.4. Для грани f любого из двух конусов имеет место

$$\psi_{\Gamma'}(b_1, b_2)(f) = (1 - t)^{\dim f}.$$

Доказательство. Число компонент связности графа Δ_f равно $\dim f + 2$, в силу чего он получается из Δ_{v_1} или Δ_{v_2} удалением $\dim f$ ребер. Определение $\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ тут же выдает вес $(1 - t)^{\dim f}$. \square

Вышеизложенные факты дают равенства

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_1)) = F(e^{v_1}) \frac{1 - tx_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}} Z$$

и

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_2)) = F(e^{v_2}) \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}} Z,$$

где

$$Z = F \left(\prod_{i=a_\Gamma+2}^{r-1} \frac{1 - te^{\varepsilon_i^1}}{1 - e^{\varepsilon_i^1}} \prod_{\substack{i \in [a_\Gamma+2, d_\Gamma] \\ i \neq r}} \frac{1 - te^{\xi_i^1}}{1 - e^{\xi_i^1}} \right).$$

Кроме того, из леммы 7.1 следует, что

$$\psi_{\Gamma'}(0, 0) = F(e^{v_{\Gamma'}(0)}) \frac{1}{1+t} \left(\frac{1 - tx_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}} + \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}} \right) Z = F(e^{v_{\Gamma'}(0)}) Z.$$

Т.к. $F(e^{v_1}) = x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1-b_2} x_r^{b_2} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_1}$ и $F(e^{v_2}) = x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1-b_2} x_r^{b_1} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_2}$ и $e^{v_{\Gamma'}(0)} = 1$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z} \sum_{b_1 \leq 0, b_2 \geq 0} c_{b_1, b_2} \psi_{\Gamma'}(b_1, b_2) &= \\
& \frac{1 - tx_r x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}}{1 - x_r x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}} \left((1-t)^2 \sum_{b_1 > 0 > b_2} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1-b_2} x_r^{b_2} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_1} + \right. \\
& (1-t) \sum_{b_1 > 0} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_1} + (1-t) \sum_{b_2 < 0} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_2} x_r^{b_2} \left. \right) + \\
& \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}}{1 - x_r^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}} \left((1-t)^2 \sum_{b_1 > 0 > b_2} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1-b_2} x_r^{b_1} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_2} + \right. \\
& (1-t) \sum_{b_1 > 0} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_1} x_r^{b_1} + (1-t) \sum_{b_2 < 0} x_{a_{\Gamma+1}}^{-b_2} x_{d_{\Gamma+1}}^{b_2} \left. \right) + 1 - t^2 = \\
& \frac{1 - tx_r x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}}{1 - x_r x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}} \left((1-t)^2 \frac{x_r^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}}{(1 - x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_{d_{\Gamma+1}})(1 - x_{a_{\Gamma+1}} x_r^{-1})} + \right. \\
& (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}}{1 - x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}} + (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma+1}} x_r^{-1}}{1 - x_{a_{\Gamma+1}} x_r^{-1}} \left. \right) + \\
& \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}}{1 - x_r^{-1} x_{d_{\Gamma+1}}} \left((1-t)^2 \frac{x_r x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}}{(1 - x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_r)(1 - x_{a_{\Gamma+1}} x_{d_{\Gamma+1}}^{-1})} + \right. \\
& (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_r}{1 - x_{a_{\Gamma+1}}^{-1} x_r} + (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma+1}} x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}}{1 - x_{a_{\Gamma+1}} x_{d_{\Gamma+1}}^{-1}} \left. \right) + 1 - t^2 = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство проверяется напрямую, например, машинно.

Случай 2. Хотя бы два b_i различны между собой (и мы вне случая 1).

Достаточно показать, что для любой вершины v многогранника $D_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})$ с касательным конусом C_v вклад $F(\sigma_{\varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})}(C_v))$ нулевой.

В силу предложения 7.1, число связанных компонент в Δ_v есть число различных b_i . Обозначим связанные компоненты G_1, \dots, G_m с условием, что G_i содержит вершины из верхнего ряда с номерами с l_i по r_i . Мы получаем разложение

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})}(C_v)) = \prod_{i=1}^m \psi_{G_i}(b_{l_i}, \dots, b_{r_i}).$$

Объясняется это разложение тем, что C_v является сдвигом прямого произведения конусов $D_{G_i}(b_{l_i}, \dots, b_{r_i})$ и для любой грани $f = \bigoplus_{i=1}^m f_i$ конуса C_v выполняется

$$\varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}}) = \prod_{i=1}^m \varphi_{G_i}(b_{l_i}, \dots, b_{r_i})(f_i).$$

Предположение индукции, однако, показывает, что хотя бы один из сомножителей $\psi_{G_i}(b_{l_i}, \dots, b_{r_i})$ равен нулю.

Случай 3. Имеет место $b_1 = b_{l_\Gamma}$ (и мы вне случая 1).

Рассмотрим любой набор целых чисел $b'_1 > \dots > b'_{l_\Gamma}$ и пусть v_1, \dots, v_m — вершины многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$, касательные конусы обозначим C'_1, \dots, C'_m . Лемма 7.1 показывает, что

$$\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma}) = \frac{1}{[l_\Gamma]_t!} F \left(\sum_{i=1}^m e^{v_\Gamma(b_1) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})}(C'_i) \right).$$

Рассуждение, приведенное в случае 2, показывает, что каждое из слагаемых в правой части равно нулю. \square

8. Взвешенная теорема Бриона для вырожденных многогранников

Для доказательства леммы 7.1 оказывается полезным задаться следующим вопросом: как ведет себя взвешенная теорема Бриона, когда многогранник вырождается в результате переноса некоторых гиперграней? Поясним, что имеется в виду.

Рассмотрим конечномерный рациональный многогранник Σ , заданный неравенствами $f_i(x) \leq c_i$. Мы требуем, чтобы все эти неравенства были существенными, т.е. чтобы каждое из них задавало некоторую гипергрань многогранника. Теперь рассмотрим многогранник Σ' , заданный набором неравенств $f_i(x) \leq d_i$. Мы будем называть Σ' вырождением Σ , если каждая из гиперплоскостей $\{f_i(x) = d_i\}$ имеет непустое пересечение с Σ' (но при этом не все эти пересечения обязательно являются гипергранями). Можно представлять себе, что Σ' получился из Σ в результате последовательных параллельных переносов ограничивающих его гиперплоскостей, но при этом таким образом, что ни одна из них ни в какой момент не переставала пересекать многогранник. То, что некоторые из пересечений теперь имеют размерность больше 1 означает, что комбинаторная структура многогранника в результате переносов изменилась, т.е. некоторые грани "схлопнулись" в грани меньшей размерности.

Для грани f многогранника Σ пусть S — множество таких i , что f содержится в гиперплоскости $\{f_i(x) = c_i\}$. Рассмотрим пересечение $\Sigma' \cap \bigcap_{i \in S} \{f_i(x) = d_i\}$, оно является гранью многогранника Σ' , обозначим эту грань $\pi(f)$. Таким образом, нами получено сюръективное отображение $\pi : \mathcal{F}_\Sigma \rightarrow \mathcal{F}_{\Sigma'}$, причем такое, что $\dim f \geq \dim \pi(f)$.

Полезным фактом является то, что, в отношении теоремы Бриона, изменение комбинаторной структуры в результате наших параллельных переносов можно проигнорировать. Другими словами, имеет место следующее

равенство.

$$\sigma(\Sigma') = \sum_{v \text{ вершина } \Sigma} e^{\pi(v)-v} \sigma(C_v), \quad (15)$$

где C_v — касательный конус и использован тот факт, что $\pi(v)$ обязательно вершина.

Цель данного раздела — сформулировать и доказать соответствующее утверждение во взвешенном случае.

Лемма 8.1. Рассмотрим систему весов $\varphi : \mathcal{F}_\Sigma \rightarrow R$ для некоторого коммутативного кольца R . Далее, определим $\varphi' : \mathcal{F}_{\Sigma'} \rightarrow R$ по правилу

$$\varphi'(f') = \sum_{f \in \pi^{-1}(f')} (-1)^{\dim f - \dim f'} \varphi(f).$$

Тогда имеет место

$$\sigma_{\varphi'}(\Sigma') = \sum_{v \text{ вершина } \Sigma} e^{\pi(v)-v} \sigma_\varphi(C_v)$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой вершины v' многогранника Σ' с касательным конусом $C_{v'}$ выполняется

$$\sigma_{\varphi'}(C_{v'}) = \sum_{\substack{\text{вершина } v \\ \pi(v)=v'}} e^{v'-v} \sigma_\varphi(C_v).$$

Рассмотрим грань f такую, что $\pi(f)$ содержит v' . Пусть v_1, \dots, v_m — вершины грани f такие, что $\pi(v_i) = v'$. Пусть C_i — грань конуса C_{v_i} отвечающая (содержащая) f и пусть, кроме того, C' — грань $C_{v'}$, отвечающая $\pi(f)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sigma(\text{Int}(C_i - v_i + v')) &= (-1)^{\dim f} \sum_{i=1}^m \sigma(-(C_i - v_i) + v') = \\ &= (-1)^{\dim f} \sigma(-(C' - v') + v') = (-1)^{\dim f - \dim \pi(f)} \sigma(\text{Int}(C')), \end{aligned}$$

где Int обозначает относительную внутренность грани, т.е. грань без границы, $X + a$ обозначает результат переноса множества X на вектор a , а $-X$ обозначает образ X при отражении относительно начала координат. Первое и третье равенства следуют из взаимности Стэнли (см. [11]), второе же равенство есть результат применения тождества (15) к конусу $-(C' - v') + v'$, рассматриваемому как вырождение многогранника $\bigcap_{i=1}^m C_i$. (Мы считаем, что относительная внутренность точки есть сама эта точка, а не пустое множество.)

Остается просуммировать полученные выше равенства с коэффициентами $\varphi(f)$ по f , для которых $\pi(f)$ содержит v' , и получить таким образом нужное равенство. \square

9. Доказательство леммы 7.1

В этом разделе мы докажем некоторое обобщение леммы.

Пусть дан ординарный граф Γ , строго убывающая последовательность целых чисел b_1, \dots, b_{l_Γ} и последовательность целых чисел $b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma}$ убывающая, но не строго (т.е. хотя бы два b'_i совпадают). Пусть m — число различных b'_i , причем j -ое по величине из этих m значений встречается l_i раз.

Многогранник $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$ является вырождением многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, пусть

$$\pi : \mathcal{F}_{D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})} \rightarrow \mathcal{F}_{D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})}$$

— соответствующее отображение. Кроме того, обозначим v_1, \dots, v_N вершины многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, а касательные конусы — C_1, \dots, C_N . Тогда упомянутое обобщение выглядит следующим образом.

Лемма 9.1.

$$[l_1]_t! \dots [l_m]_t! \sigma_{\varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})} (D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})) = \sum_{i=1}^N e^{\pi(v_i) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})} (C_i).$$

Однако, с учетом леммы 8.1, это обобщение немедленно следует из того тождества.

Лемма 9.2. Для любой грани f многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$ выполняется равенство

$$[l_1]_t! \dots [l_m]_t! \varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})(f) = \sum_{g \in \pi^{-1}(f)} (-1)^{\dim g - \dim f} \varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})(g).$$

Доказательство. Начнем с описания отображения π в терминах соответствующих граням подграфов. Рассмотрим грань g многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$.

Каждому ребру графа Δ_g соответствует гиперплоскость, которая пересекает $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ по гипергранни, содержащий g . Образы этих гиперплоскостей при соответствующих параллельных переносах ограничивают $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$, но уже не обязательно пересекают его по гипергранням. По определению, $\pi(g)$ есть максимальная грань многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$, содержащаяся во всех этих (перенесенных) гиперплоскостях.

В переводе на язык подграфов получаем следующее. Подграф $\Delta_{\pi(g)}$ есть минимальный подграф, содержащий все ребра Δ_g и при этом действительно отвечающий некоторой грани многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$, т.е. удовлетворяющий трем условиям из предложения 7.1.

Лемма будет доказываться индукцией по числу вершин в Γ . База индукции — случай, в котором Γ состоит из трех вершин, двух в ряду a_Γ и одной в ряду $a_\Gamma + 1$. В этом случае мы имеем дело с вырождением отрезка в точку и доказываемое тождество гласит $1 + 1 - (1 - t) = [2]_t! \cdot 1 = 1 + t$. Перейдем к шагу индукции, рассматривая последовательно два случая.

Случай 1. Граф Δ_f не связан.

Пусть G_1, \dots, G_m — те связанные компоненты графа Δ_f , которые содержат вершины из ряда a_Γ . Вес $\varphi(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})(f)$ является произведением по множеству связанных компонент графа Δ_f . Пусть R — то же произведение, но по всем компонентам, кроме этих G_j .

Данное выше описание π показывает, что любая компонента в Δ_f , отличная от всех G_j , является одновременно связной компонентой любого Δ_g с $g \in \pi^{-1}(f)$. Таким образом $\varphi(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})(g)$ есть произведение R и сомножителей, отвечающих компонентам, содержащимся в одной из G_j .

Выпишем предположение индукции для каждого из вырождений $D_{G_j}(b_1, \dots, b_{l_j})$ в $D_{G_j}(b, \dots, b)$ (для любого целого b). Из вышесказанного следует, что перемножив выписанные равенства и домножив обе части на $(-1)^{\dim f} R$ мы в точности получим требуемое.

Случай 2. Граф Δ_f связан, т.е. $\Delta_f = \Gamma$. Это означает, что $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{l_\Gamma})$ является конусом, все b'_i равны между собой и f — вершина конуса.

Для краткости обозначим значение всех b'_i через b . Прообраз $\pi^{-1}(f)$ состоит в точности их ограниченных граней многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ потому, как, для любого вырождения, $\pi(f)$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничено f .

Предложение 9.1. Грань g многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$ ограничена тогда и только тогда, когда граф Δ_g обладает следующими двумя свойствами.

Если вершины (i, j) и $(i + 1, j - 1)$ обе являются самыми левыми в Γ в своих рядах, то Δ_g содержит соединяющее их ребро.

Аналогично, если вершины (i, j) и $(i + 1, j)$ обе являются самыми правыми в Γ в своих рядах, то Δ_g содержит соединяющее их ребро.

Доказательство. Ясно, что в случае выполнения этих условий, каждая координата любой точки в g лежит между b_1 и b_{l_Γ} . В обратную сторону, если первое условие нарушается, то g содержит точки, у которых координата $i + 1, j - 1$ сколь угодно велика. Аналогично, если нарушается второе условие, то g содержит точки, у которых координата $i + 1, j - 1$ сколь угодно велика (по абсолютному значению). \square

Пусть Γ' — граф, получающийся из Γ при удалении верхнего ряда. Выберем произвольную ограниченную грань g многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{l_\Gamma})$, пусть Δ' — граф, получающийся из Δ_g при удалении вершин в ряду a_Γ . Граф Δ' является подграфом в Γ' .

Поскольку все вершины верхнего ряда графа Δ_g лежат в разных компонентах связности, каждая компонента в Δ' содержит не более двух вершин из верхнего ряда $a_{\Gamma'} (= a_\Gamma + 1)$. Зафиксируем такую невозрастающую последовательность $c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}}$, что $c'_i = c'_{i+1}$ тогда и только тогда, когда i -ая и $i + 1$ -ая слева вершины в верхнем ряду графа Δ' находятся в одной компоненте связности.

Далее, пусть $c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}}$ — строго убывающая последовательность целых чисел. Таким образом, имеется три многогранника: $D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})$, затем

$D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})$ и, наконец, конус $D_{\Gamma'}(c, \dots, c)$ (где c произвольное целое число).

Второй многогранник является вырождением первого, а конус — вырождением их обоих. Введем три соответствующих отображения между множествами граней:

$$\begin{aligned}\pi' &: \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})} \rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c, \dots, c)}, \\ \rho &: \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})} \rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})} \text{ и} \\ v &: \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})} \rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c, \dots, c)}.\end{aligned}$$

Предположение индукции для вершины f' конуса $D_{\Gamma'}(c, \dots, c)$ гласит

$$[l_{\Gamma'}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f') = \sum_{h \in (\pi')^{-1}(f')} (-1)^{\dim h} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})(h). \quad (16)$$

Далее, Δ' соответствует некоторой грани многогранника $D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})$, обозначим ее g' (т.е. $\Delta' = \Delta_{g'}$). Пусть d — число пар $c'_i = c'_{i+1}$. Предположение индукции в применении к g' гласит

$$(1+t)^d \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})(g') = \sum_{h \in \rho^{-1}(g')} (-1)^{\dim h - \dim g'} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})(h). \quad (17)$$

Обозначим I_g граф, получаемый из Δ_g при удалении всех вершин ниже ряда $a_{\Gamma} + 1$, т.е. при оставлении только двух верхних рядов. Для ограниченных граней многогранника $D_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})$ будем писать $g_1 \sim g_2$ если и только если $I_{g_1} = I_{g_2}$. Грани в классе эквивалентности грани g находятся во взаимно однозначном соответствии с ограниченными гранями многогранника $D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})$. При этом грани g_1 соответствует g'_1 (определяемая аналогично g').

Из предыдущего абзаца следует, что суммирование тождеств (17) по всем $g_1 \sim g$ дает

$$(1+t)^d \sum_{g'_1 \in v^{-1}(f')} (-1)^{\dim g'_1} \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})(g'_1) = \sum_{h \in (\pi')^{-1}(f')} (-1)^{\dim h} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{l_{\Gamma'}})(h), \quad (18)$$

где $v^{-1}(f')$ — в точности множество ограниченных граней многогранника $D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})$. Сумма в правой части берется по $(\pi')^{-1}(f')$ т.к. $\pi' = v\rho$.

Обозначим e число таких вершин в ряду $a_{\Gamma} + 1$, что в Δ_g они не соединены ни с какой вершиной в ряду a_{Γ} . Для любого $g_1 \sim g$ имеем

$$\varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})(g_1) = (1-t)^e (1-t^2)^d \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{l_{\Gamma'}})(g'_1). \quad (19)$$

Теперь подставим (16) в (18) и затем подставим (19) в результат. С учетом того, что $\dim g_1 = \dim g'_1 + e$, получаем

$$\sum_{g_1 \sim g} (-1)^{\dim g_1} \varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{l_{\Gamma}})(g_1) = (-1)^e (1-t)^{d+e} [l_{\Gamma'}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f'). \quad (20)$$

Обозначим $\nu(I_g)$ коэффициент $(-1)^e(1-t)^{d+e}$ (и d и e определяются графом I_g).

Однако

$$[l_\Gamma]_t! \varphi_\Gamma(b, \dots, b)(f) = \kappa_\Gamma [l_{\Gamma'}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f'),$$

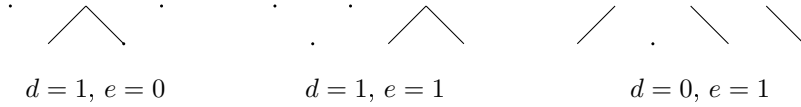
где

$$\kappa_\Gamma = \begin{cases} \frac{1-t^{l_\Gamma}}{1-t} & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma - 1, \\ 1 & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma, \\ 1-t & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma + 1. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, суммируя тождества (20) при g пробегающем некоторое множество S представителей отношения \sim , получаем, что доказать остается лишь следующее.

Предложение 9.2. $\sum_{g \in S} \nu(I_g) = \kappa_\Gamma$

Доказательство. I_g — граф, расположенный в двух рядах. Каждая вершина в нижнем ряду либо соединена с одной или обеими вершинами, находящимися непосредственно над ней, либо является изолированной. Тот факт, что грань g ограничена, означает наличие следующих двух ограничений. Если у самой левой вершины в нижнем ряду нет соседа слева сверху (он не входит в граф), то она обязательно соединена со своим соседом справа сверху. Симметрично, если самая правая вершина в нижнем ряду не имеет соседа справа сверху, то она обязательно соединена со своим соседом слева сверху. (Здесь мы используем предложение 9.1). Приведем по примеру для каждого из трех случаев в определении (21).



Нетрудно видеть, что в каждом из трех случаев число возможных I_g равно $3^{l_\Gamma-1}$.

Обозначим

$$\sum_{g \in S} \nu(I_g) = \begin{cases} \Sigma_{l_\Gamma}^- & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma - 1, \\ \Sigma_{l_\Gamma}^0 & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma, \\ \Sigma_{l_\Gamma}^+ & \text{при } l_{\Gamma'} = l_\Gamma + 1. \end{cases}$$

Предложение напрямую следует из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \Sigma_{l+1}^- &= -(1-t)\Sigma_l^- + \Sigma_l^- + \Sigma_l^0, \\ \Sigma_{l+1}^0 &= -(1-t)\Sigma_l^- + (1-t)\Sigma_l^- + \Sigma_l^0, \\ \Sigma_{l+1}^+ &= -(1-t)\Sigma_l^0 + (1-t)\Sigma_l^0 + \Sigma_l^+. \end{aligned}$$

□

Мы завершили рассмотрение случая 2 и, тем самым, доказательство шага индукции. □

10. Приложение к финитному случаю

Теорема 5.1 достаточно легко выводится из результатов, полученных выше. Вкратце опишем это рассуждение, не вдаваясь в подробности.

Пусть λ — целочисленный доминантный \mathfrak{sl}_n -вес. Мы уже упоминали, что многогранник GT_λ естественным образом отождествляется с $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$. Более того, для любой целой точки A в GT_λ выполняется равенство

$$p_A = \varphi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)(f),$$

где f — минимальная грань, содержащая A . Таким образом,

$$\sum_{A \in GT_\lambda} p_A e^{\mu_A} = \psi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)|_{x_0=x_n=1}.$$

Теперь можно определить выделенное подмножество вершин, фигурирующее в теореме 5.1. К нему относятся те вершины v (многогранника $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$), для которых не существует такой компоненты E графа Δ_v и такого ряда $i > 0$, что E содержит больше вершин в ряду i , чем в ряду $i-1$. Будем называть вершины из этого множества "существенными".

В самом деле, пусть разбиение $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ имеет тип l_1, \dots, l_m , т.е. r -ая по величине часть встречается l_r раз. Тогда в любом из графов Δ_v ровно m компонент связности, выберем v и обозначим компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Пусть C_v — касательный конус к $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ в v , тогда

$$C_v = D_{\Gamma_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{l_1}) \times D_{\Gamma_2}(\lambda_{l_1+1}, \dots, \lambda_{l_1+l_2}) \times \dots$$

и, следовательно,

$$F(\sigma_{\varphi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)}(C_v)) = \psi_{\Gamma_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{l_1}) \psi_{\Gamma_2}(\lambda_{l_1+1}, \dots, \lambda_{l_1+l_2}) \dots$$

Равенство нулю вкладов несущественных вершин следует теперь из теоремы 7.1.

Перейдем к рассмотрению существенных вершин. В случае регулярного веса λ нетрудно установить следующее (что делается в работе [12]). Число существенных вершин есть $n!$. Для каждого $w \in W$ есть ровно одна существенная вершина с $\mu_v = w\lambda$, которую мы обозначим v_w . Касательный конус C_{v_w} в v_w симплиціален и унимодулярен. Пусть $\varepsilon_{w,1}, \dots, \varepsilon_{w,\binom{n}{2}}$ — образующие этого конуса. Множество

$$\left\{ F(e^{\varepsilon_{w,1}}), \dots, F\left(e^{\varepsilon_{w,\binom{n}{2}}}\right) \right\}$$

совпадает с множеством $\{e^{-w\alpha}, \alpha \in \Phi^+\}$. Также нетрудно видеть, что для любой грани f конуса C_{v_w} выполняется равенство $\varphi(f) = (1-t)^{\dim f}$ (в обозначениях раздела 5).

В совокупности эти факты дают формулу для вклада существенной вершины, приведенную в теореме 5.1.

Случай особого λ сводится к случаю регулярного. В самом деле, пусть λ^1 — любой регулярный целочисленный доминантный вес. GT_λ тогда является вырождением многогранника GT_{λ^1} . Обозначив π соответствующее отображение, имеем $\pi(v_{w_1}^1) = \pi(v_{w_2}^1)$ (существенные вершины многогранника GT_{λ^1}) тогда и только тогда, когда $w_1\lambda = w_2\lambda$. Наше вырождение совпадает с вырождением $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{n-1}^1, 0)$ в $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$, что позволяет нам применить лемму 9.1, согласно которой для вершины v многогранника GT_λ имеем

$$F(\sigma_\varphi(C_v)) = \frac{1}{[l_1]_t! \dots [l_m]_t!} \sum_{\pi(v_w^1)=v} F(e^{v-v_w^1} \sigma_{\varphi^1}(C_{v_w^1})).$$

С учетом разобранного уже регулярного случая, из этого тождества получаем утверждение теоремы 5.1 в случае особого λ .

Структура доказательства теоремы 6.2, которому посвящена часть III, будет по существу такой же как у вышеизложенного рассуждения. Однако построение различных предельных переходов, вызванных бесконечностью рассматриваемых многогранников, потребует значительных дополнительных усилий.

В завершение этой части покажем, каким образом, применяя лемму 9.2, можно вывести любопытное тождество. Пусть снова λ — целочисленный доминантный \mathfrak{sl}_n -вес, а вес λ^1 к тому же еще и регулярный. Применим лемму 9.2 к вырождению $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_{n-1}^1, 0)$ в $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$, а затем к вырождению $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ в $D_{\mathcal{T}}(0, \dots, 0)$ (т.е. в точку). Скомбинирав полученные тождества получим следующее.

Теорема 10.1.

$$\sum_{f \text{ грань } GT_\lambda} (-1)^{\dim f} \varphi(f) = \binom{n}{l_1, \dots, l_m}_t,$$

где l_1, \dots, l_m тип разбиения $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$, а в правой части стоит t -мультиномиальный коэффициент.

В частности, когда λ сам является регулярным, в правой части получаем просто $[n]_t!$.

Часть III

Структура многогранника Π и доказательство теоремы 6.2

В рамках этой части λ — фиксированный ненулевой целочисленный доминантный $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -вес (n так же фиксировано). Все определения, данные в части I, понимаются с учетом этих значений.

11. Теорема типа Бриона для $\bar{\Pi}$

Бесконечномерный многогранник Π был определен в части 6.

Непустое подмножество $f \subset \Pi$ будем называть его гранью в том случае, если оно имеет вид пересечения Π и некоторого набора пространств

$$E_i = \{x | x_i = 0\} \cap V$$

и

$$H_i = \{x | \chi_i(x) = k\} \cap V.$$

Грани образуют решетку относительно включения, минимальные элементы этой решетки будем называть "вершинами" многогранника.

Предложение 11.1. Вершины есть в точности те точки $x \in \Pi$, которые содержатся хотя бы в одном из пространств E_i и H_i для любого i .

Доказательство. Определим

$$\Pi^l = \Pi \cap \bigcap_{i \leq l} H_i.$$

В статье [13] предложение доказано для точек, принадлежащих Π^0 . Однако любое Π^l получается из Π^0 при помощи оператора $(x_i) \rightarrow (x_{i+l})$, и, следовательно, предложение верно для любой точки, лежащей в каком-либо Π^l . Остается заметить, что множества Π^l исчерпывают Π . \square

Теперь заметим, что для любой точки $x \in V$ равенство $s_{i,j}(x) = s_{i-1,j}(x)$ равносильно $x \in H_{in+j(n-1)}$, а $s_{i,j}(x) = s_{i-1,j+1}(x)$ равносильно $x \in E_{in+j(n-1)}$. Таким образом, t -вес $p(x)$ зависит только от минимальной грани в Π , содержащей x . Каждая точка многогранника содержится в какой-либо конечномерной грани, другими словами, для любой точки минимальная содержащая ее грань конечномерна. Ясно, что и для каждой конечномерной грани f можно взять точку x такую, что f — минимальная содержащая x грань. Положив $\varphi(f) = p(x)$ получим (корректно определенное) отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_\Pi \rightarrow \mathbb{Z}[t]$$

из множества конечномерных граней многогранника Π .

Определим теперь ряды τ_v , упомянутые в части 6.

В каждой вершине v многогранника Π опять же есть касательный конус

$$C_v = \{v + \alpha(x - v), x \in \Pi, \alpha \geq 0\}.$$

Каждой грани f , содержащей v , соответствует грань конуса C_v :

$$f_v = \{v + \alpha(x - v), x \in f, \alpha \geq 0\}.$$

Для каждого ребра (одномерной грани) e , содержащей v определим его образующую как минимальный целочисленный вектор ε такой, что $v + \varepsilon \in e$.

Пусть $\{\varepsilon_{v,i}, i > 0\}$ — множество образующих ребер, содержащих данную вершину v . Любая точка конуса C_v получается из v прибавлением неотрицательной линейной комбинации этих $\varepsilon_{v,i}$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Для монома Лорана y от z_1, \dots, z_{n-1} , q обозначим $\deg y$ степень, в которой q входит в y .

Предложение 11.2. Для любой вершины v и $N \in \mathbb{Z}$ существует лишь конечное число таких i , что $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < N$. (Определение G см. в (10).)

Доказательство. Воспользуемся следующим наблюдением. Для любого целого M существует лишь конечное число таких вершин u , что $\deg G(e^{\bar{u}}) < M$. Например, это следует из того, что сумма таких мономов по всем целым точкам в Π (в том числе вершинам) есть $e^{-\lambda} \text{char } L_\lambda$.

Каждое ребро многогранника Π является отрезком, соединяющим две вершины. Другими словами, для каждого $\varepsilon_{v,i}$ существует такое натуральное число K , что $v + K\varepsilon_{v,i}$ также является вершиной (которую мы обозначим u_i). Пусть l — номер первой (самой левой) ненулевой координаты некоторого $\varepsilon_{v,i}$ и пусть эта координата равна c . Тогда $\chi_l(u_i) = \chi_l(v) + Kc$, откуда $K \leq k$.

Однако

$$\deg G(e^{\bar{u}_i}) - \deg G(e^{\bar{v}}) = K \deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}).$$

Таким образом, бесконечность числа таких $\varepsilon_{v,i}$, что $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < N$, противоречила бы наблюдению, сделанному в начале доказательства. \square

Предложение 11.3. Рассмотрим конечномерный рациональный многогранный конус C и отображение $\psi : \mathcal{F}_C \rightarrow R$ для некоторого коммутативного кольца R . Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — образующие ребер конуса. Тогда выражение

$$(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m}) S_\psi(C) \tag{22}$$

является линейной комбинацией экспонент точек вида

$$v + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_m \varepsilon_m,$$

где все $\alpha_i \in [0, 1]$.

Доказательство. Триангулируем C набором симплицальных конусов, каждый из которых порожден некоторым набором векторов ε_i . Пусть T — грань одного из конусов триангуляции, мы можем считать, что она порождена векторами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$. Выражение

$$(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_l}) S(\text{Int}(T))$$

есть в точности сумма экспонент всех целых точек полуоткрытого параллелепипеда

$$\{v + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_l \varepsilon_l, \alpha_i \in (0, 1]\}.$$

Пусть f — минимальная грань C , содержащая T . Ясно, что

$$\psi(f)(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m}) S(\text{Int}(T))$$

действительно является суммой экспонент искомого вида. Однако выражение (22) есть сумма вышеприведенных выражений по всем T и еще слагаемого $\varphi(u)e^u$, где u — вершина конуса C . \square

Обозначим $C_{\bar{v}} = \overline{C}_v$. Образующие конуса $C_{\bar{v}}$ есть в точности то же самое множество $\{\varepsilon_{v,i}\}$. В нижеследующих рассуждениях мы будем часто переходить от рассмотрения $C_{\bar{v}}$ и его атрибутов к C_v и обратно, читателю следует не упускать из виду обозначение $\bar{}$ и помнить, что, в определенном смысле, устроены эти конусы идентично.

В любой точке $x \in C_v$ мы полагаем

$$p_v(x) = \varphi \left(\min_{x \in f_v} f \right)$$

и определяем формальный ряд Лорана от переменных t_i

$$S_{\bar{\varphi}}(C_{\bar{v}}) = \sum_{x \in C_{\bar{v}} \cap \mathbb{Z}^{\infty}} \bar{p}_v(x) e^x.$$

Рассмотрим конус $C_v - v = C_{\bar{v}} - \bar{v}$ с вершиной в начале координат. Как и для любого конечномерного конуса с вершиной в начале координат, ряды Лорана, имеющие ненулевые коэффициенты только при экспонентах целых точек из $C_v - v$, образуют кольцо. И $e^{-v} S_{\bar{\varphi}}(C_{\bar{v}})$ и

$$(1 - e^{\varepsilon_{v,1}})(1 - e^{\varepsilon_{v,2}}) \dots$$

принадлежат этому кольцу, а, значит, можно рассмотреть их произведение

$$Q_v = S_{\bar{\varphi}}(C_{\bar{v}})(1 - e^{\varepsilon_{v,1}})(1 - e^{\varepsilon_{v,2}}) \dots$$

Лемма 11.1. $G(Q_v)$ — корректно определенный элемент кольца \mathfrak{S} (см. раздел 6).

Доказательство. Необходимо показать, что для любого целого числа N среди тех мономов e^x , которые присутствуют в Q_v с ненулевым коэффициентом, лишь конечное число удовлетворяют $\deg G(e^x) < N$.

Для $l \gg 0$ пересечение

$$C_{v,l} = C_{\bar{v}} \cap \bigcap_{i < -l} \bar{H}_i \cap \bigcap_{i > l} \bar{E}_i$$

есть конечномерный конус с вершиной \bar{v} и является гранью конуса $C_{\bar{v}}$. Таким образом задана возрастающая последовательность граней, исчерпывающая $C_{\bar{v}}$. Каждое ребро конуса $C_{v,l}$ является также ребром конуса

$C_{\bar{v}}$, фиксируем некоторое l и будем считать, что $C_{v,l}$ порожден векторами $\varepsilon_{v,1}, \dots, \varepsilon_{v,m}$. Далее, обозначим

$$Q_{v,l} = (1 - e^{\varepsilon_{v,1}}) \dots (1 - e^{\varepsilon_{v,m}}) S_{\bar{\varphi}}(C_{v,l}),$$

где $\bar{\varphi}$ вычисляется в гранях конуса $C_{v,l}$ естественным образом. Ясно, что коэффициент при e^x в $Q_{v,l}$ равен коэффициенту при e^x в Q_v при $l \gg 0$. Мы докажем лемму, показав, что при $l \gg 0$ разность $Q_{v,l} - Q_{v,l-1}$ имеет нулевой коэффициент при любом e^x с $\deg G(e^x) < N$.

Пусть S — множество тех $\varepsilon_{v,i}$, для которых $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < 0$ и пусть

$$K = \deg \left(\prod_{\varepsilon_{v,i} \in S} G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \right).$$

Покажем, что коэффициент при любом e^x с $\deg G(e^x) < N$ в $Q_{v,l} - Q_{v,l-1}$ равен нулю, когда выполнено следующее. Каждое $\varepsilon_{v,i}$, являющееся образующей ребра в $C_{v,l}$, но не в $C_{v,l-1}$, удовлетворяет $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \geq N - K$. В силу предложения 11.2, это верно при $l \gg 0$. Выберем (фиксируем) любое l , для которого это верно.

Из предложения 11.3 следует, что для любого e^x , входящего в $Q_{v,l}$ с ненулевым коэффициентом, вектор x имеет вид

$$\bar{v} + \alpha_1 \varepsilon_{v,1} + \dots + \alpha_m \varepsilon_{v,m}, \alpha_i \in [0, 1].$$

(Где конус $C_{v,l}$ опять же порожден векторами $\varepsilon_{v,1}, \dots, \varepsilon_{v,m}$.)

Однако если коэффициент при e^x не равен нулю в $Q_{v,l} - Q_{v,l-1}$, то x обязано лежать вне $C_{v,l-1}$, т.е. для некоторого $\varepsilon_{v,i}$, образующей ребра в $C_{v,l}$ но не в $C_{v,l-1}$, имеет место $\alpha_i > 0$. Это вызвано тем, что $C_{v,l-1}$ является гранью конуса $C_{v,l}$.

Фиксируем e^x , входящее с ненулевым коэффициентом в $Q_{v,l} - Q_{v,l-1}$, пусть

$$x = \bar{v} + \alpha_1 \varepsilon_{v,1} + \dots + \alpha_m \varepsilon_{v,m}, \alpha_i \in [0, 1].$$

Мы покажем, что

$$\sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,l-1}}} \alpha_i \geq 1.$$

Доказательство тем самым будет завершено, т.к.

$$\deg G(e^x) \geq K + (N - K) \sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,l-1}}} \alpha_i.$$

Этот последний факт мы докажем с использованием следующего свойства векторов $\varepsilon_{v,i}$. Все ненулевые координаты в $\varepsilon_{v,i}$ равны либо 1, либо -1 (см. пункт (с) предложения 3.2 в работе [13]).

В силу того, что $\bar{v} \in C_{v,l}$, имеем $\bar{v}_i = 0$ при $i < -l$ и $i > l$. Далее, у $\varepsilon_{v,i}$, образующее ребро в $C_{v,l}$ но не в $C_{v,l-1}$, координата с номером $-l - 1$

или с номером $l + 1$ является ненулевой. Более того, из $v \in H_{-l-1}$ и $v \in E_{l+1}$ получаем следующее. Если координата с номером $-l - 1$ ненулевая, то она равна -1 в силу неравенства $\chi_{-l-1}(v + \varepsilon_{v,i}) \leq k$. Аналогично, если координата номер $l + 1$ не равна нулю, то она равна 1 в силу $v + \varepsilon_{v,i} \geq 0$. Отсюда делаем вывод, что если

$$\sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,l}}} \alpha_i < 1,$$

то координата точки x с номером $-l - 1$ или $l + 1$ не может быть целой. \square

Теперь мы, наконец, можем дать определение:

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{G(Q_v)}{(1 - G(e^{\varepsilon_{v,1}}))(1 - G(e^{\varepsilon_{v,2}})) \dots}. \quad (23)$$

В рамках этого раздела мы будем предполагать, что $G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \neq 1$ для любых v и i . Доказано это будет в конце следующего раздела. Тогда из предложения 11.2 следует, что знаменатель действительно является обратимым элементом кольца \mathfrak{S} .

Из вышеприведенного доказательства видно, что $G(Q_v)$ не содержит мономов со степенью q меньше $\deg G(e^{\bar{v}}) + K$ (в обозначениях доказательства). Кроме того, очевидно, знаменатель в (23) не содержит степеней q меньших, чем K . Таким образом, $\tau_{\bar{v}}$ содержит исключительно мономы со степенью q не меньше $\deg G(e^{\bar{v}})$.

Далее, рассмотрим конус $C_{v,l}$ из доказательства, пусть он порожден векторами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Аналогично вышесказанному, $G(Q_{v,l})$ не содержит степеней q , меньших $\deg G(e^{\bar{v}}) + K$, а

$$G((1 - e^{\varepsilon_{v,1}}) \dots (1 - e^{\varepsilon_{v,m}}))$$

не содержит степеней q меньших K . Следовательно частное $G(Q_{v,l})$ и произведения выше можно рассмотреть как $\tau_{\bar{v},l} \in \mathfrak{S}$, также содержащий только степени q не меньшие $\deg G(e^{\bar{v}})$. (Как рациональная функция это частное есть, конечно же, $G(\sigma_{\bar{\varphi}}(C_{v,l}))$.)

Сделанные наблюдения позволяют нам перейти к доказательству основного утверждения этого раздела.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть

$$\bar{\Pi}_l = \Pi \cap \bigcap_{i < -l} \bar{H}_i \cap \bigcap_{i > l} \bar{E}_i.$$

Из теоремы 4.2 следует, что

$$G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi}_l)) = \sum_{\bar{v} \text{ вершина } \bar{\Pi}_l} \tau_{\bar{v},l}. \quad (24)$$

Очевидно, ряд от q , стоящий в левой части, покоэффициентно сходится к $G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi}))$ при $l \rightarrow \infty$. Кроме того, для любого v ряды $\tau_{\bar{v},l}$ покоэффициентно сходятся к $\tau_{\bar{v}}$.

Наблюдения, предшествующие доказательству показывают, что для любого целого N существует лишь конечное число вершин v , для которых $\tau_{\bar{v},l}$ содержит степени q меньше N . Следовательно, можно определить бесконечную сумму

$$\sum_{\bar{v} \text{ вершина } \bar{\Pi}} \tau_{\bar{v}},$$

и выражения в правой части (24) покоэффициентно сходятся к этой бесконечной сумме. \square

12. Соответствие между гранями Π и подграфами решетки

Сперва определим подграф $\Theta(x) \subset \mathcal{R}$ для каждой точки $x \in \Pi$. Вершины в $\Theta(x)$ — это все вершины \mathcal{R} . Ребро в \mathcal{R} , соединяющее (i_1, j_1) с (i_2, j_2) , входит в $\Theta(x)$ если и только если $s_{i_1, j_1}(x) = s_{i_2, j_2}(x)$.

Теперь для конечномерной грани f выберем точку x такую, что f — минимальная грань, содержащая x . Видно, что подграф $\Theta(x)$ не зависит от выбора x и можно определить $\Theta_f = \Theta(x)$. Видно также, что при $f \subset g$ граф Θ_g является подграфом в Θ_f .

Равенство (7) показывает, что Θ_f инвариантен относительно переноса $(i, j) \rightarrow (i - n + 1, j + n)$. Это означает, что компоненты связности в Θ_f разбиты на классы эквивалентности: две компоненты эквивалентны если их можно отождествить многократным применением этого переноса. Выберем набор представителей и обозначим объединение этих компонент $\Delta_f \subset \Theta_f$.

Сверх того, равенство (7) так же показывает, что вершины (i, j) и $(i - n + 1, j + n)$ никогда не лежат в одной компоненте Θ_f . Это означает, что для каждого целого числа l существует ровно одна вершина $(i, j) \in \Delta_f$ для которой $in + j(n - 1) = l$. Обозначим эту вершину $(\eta_f(l), \theta_f(l))$. Кроме того, видно, что ребра Δ_f находятся во взаимно однозначном соответствии с гиперплоскостями E_l и H_l , содержащими f .

Рассмотрим теперь вершину v многогранника Π . В пространстве V введем замену координат, заданную графом Δ_v . Новые координаты нумеруются парами (i, j) такими, что (i, j) входит в Δ_v . Соответствующая координата точки x есть просто $s_{i, j}(x)$. Определение (6) в купе с замечаниями выше показывает, что это действительно невырожденная замена координат, переводящая целые точки в целые точки и наоборот.

Предложение 12.1. Точка $x \in V$ принадлежит C_v тогда и только тогда, когда для каждого ребра графа Δ_v , соединяющего вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) , координаты $s_{i_1, j_1}(x)$ и $s_{i_2, j_2}(x)$ удовлетворяют соответствующему неравенству.

Доказательство. Это следует из того, что $x \in C_v$ если и только если $x_l \geq 0$ при $v \in E_l$ и $\chi_l(x) \leq k$ при $v \in H_l$. \square

Мы дадим обширный список свойств определенных нами объектов.

Предложение 12.2. Для любой вершины v многогранника Π каждая вершина графа Δ_v соединена хотя бы с одним из двух соседей сверху.

Доказательство. Это напрямую следует из предложения 11.1. \square

Предложение 12.3. Если (i, j) и $(i, j + 1)$ находятся в одной компоненте графа Δ_v , то $(i - 1, j + 1)$ и $(i + 1, j)$ (т.е. два общих соседа первых двух вершин) также лежат в той же самой компоненте.

Доказательство. Это следует из того, что $s_{i,j}(v)$ является бесконечной таблицей Гельфанда-Цетлина. \square

Далее представим себе граф-цикл с n вершинами, занумерованными числами $0, \dots, n - 1$, а также его подграф, определяющийся по следующему правилу. Вершины i и $i + 1$ смежны в подграфе если и только если $a_{i+1} = 0$ (все индексы берутся по модулю n). Т.к. $\lambda \neq 0$ этот подграф состоит из $m(\lambda)$ компонент — графов путей размеров $l_1, \dots, l_{m(\lambda)}$. Числа $m(\lambda)$ и $l_1, \dots, l_{m(\lambda)}$ — важные характеристики веса λ . Сразу же заметим, что стабилизатор

$$W_\lambda \simeq S_{l_1} \times \dots \times S_{l_m}$$

и

$$W_\lambda(t) = [l_1]_t! \dots [l_m]_t!$$

Предложение 12.4. Для любой вершины v многогранника Π число связанных компонент в Δ_v равно $m(\lambda)$. Сверх того, их можно обозначить $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$ таким образом, чтобы при $i \ll 0$ компонента Γ_r содержала ровно l_r вершин из ряда i .

Доказательство. Выберем $r \in [1, m(\lambda)]$. В силу определения чисел l_r , найдется целое число I_r со следующими свойствами.

1. Для $l < I_r + n^2$ выполнено $v_l = a_{l \bmod n}$.
2. $v_{I_r} = v_{I_r-1} = \dots = v_{I_r-l_r+2} = 0$.
($l_r - 1$ подряд идущих членов.)
3. $v_{I_r+1} \neq 0$ и $v_{I_r-l_r+1} \neq 0$.

Отсюда следуют такие утверждения об бесконечной таблице ГЦ $(s_{i,j}(v))$. Элемент $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)}(v)$ и каждый из $l_r - 1$ непосредственно справа от него (т.е. до $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)+l_r-1}(v)$ включительно) равны своим соседям слева сверху. Это в силу свойства 1 выше. Кроме того, $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)}(v)$ и $l_r - 2$ элемента непосредственно справа от него равны своим соседям справа сверху. Это в силу свойства 2. Однако $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)-1}(v)$ не равен своему соседу слева

сверху $s_{\eta_v(I_r)-1, \theta_v(I_r)}(v)$, а $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)+l_r-1}(v)$ не равен своему соседу справа сверху $s_{\eta_v(I_r)-1, \theta_v(I_r)+l_r}(v)$. Об этом свидетельствует свойство 3.

Мы установили, что вершина $(\eta_v(I_r), \theta_v(I_r))$ лежит в одной компоненте с $l_r - 1$ вершиной справа от нее, а также со своим соседом сверху слева и с $l_r - 1$ вершиной справа от этого соседа. Кроме этого, мы установили, что других вершин из рядов $\eta_v(I_r)$ и $\eta_v(I_r) - 1$ в этой компоненте нет.

Видно, что действительно найдутся такие компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$, что при

$$i \leq \min_r(\eta_v(I_r))$$

компонента Γ_r содержит ровно l_r вершин из ряда i . Осталось отметить, что при $l \leq \min_r(I_r)$ вершина $(\eta_v(l), \theta_v(l))$ содержится в одной из этих $m(\lambda)$ компонент. Таким образом, других компонент в графе нет, ибо, согласно предложению 12.2, любая компонента в Δ_v обязана содержать вершины в сколь угодно высоких рядах. \square

Предложение 12.5. Для точки $x \in C_v$ при $(i, j) \in \Delta_v$ и $i \ll 0$ имеет место $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$.

Доказательство. Очевидно, существует такое целое число M , что

$$s_{\eta_v(l), \theta_v(l)}(x) = s_{\eta_v(l), \theta_v(l)}(v)$$

при $l < M$. Однако, согласно предложению 12.4, при $i \ll 0$ и $\eta_v(l) = i$ имеет место неравенство $l < M$. \square

Другое предложение описывает устройство Δ_v в рядах $i \gg 0$.

Предложение 12.6. Лишь одна из $m(\lambda)$ компонент графа Δ_v содержит вершины (i, j) с неограниченно большими i . При $i \gg 0$ эта компонента содержит ровно одну вершину в ряду i .

Доказательство. При $l \gg 0$ выполняется $v_l = 0$, откуда

$$s_{\eta_v(l), \theta_v(l)}(v) = s_{\eta_v(l)-1, \theta_v(l)+1}(v).$$

Следовательно, для любого $l > 0$ имеет место

$$(\eta_v(l), \theta_v(l)) = (\eta_v(l-1) + 1, \theta_v(l-1) - 1)$$

и соответствующее ребро лежит в Δ_v . Предложение следует. \square

Предложение 12.7. Для точки $x \in C_v$ все координаты $s_{i,j}(x)$ с $(i, j) \in \Delta_v$ и $i \gg 0$ одинаковы

Доказательство. При $l \gg 0$ выполнено $x_l = 0$, что означает, что $s_{\eta_v(l), \theta_v(l)}(x) = s_{\eta_v(l-1), \theta_v(l-1)}(x)$. Теперь воспользуемся предложением 12.6. \square

Как для точки $x \in C_v$ выразить моном $G(e^{\bar{x}})$ через координаты $s_{i,j}(x)$? Ответ мы даем в терминах чисел

$$s_{i,j}(x, v) = s_{i,j}(x) - s_{i,j}(v).$$

Предложение 12.8. Для любой целой точки $x \in C_v$ степень, в которой z_r входит в $G(e^{\bar{x}-\bar{v}})$ равна

$$\sum_{i \equiv r \pmod{n-1}} \left(\sum_{(i,j) \in \Delta_v} s_{i,j}(x,v) - \sum_{(i-1,j) \in \Delta_v} s_{i-1,j}(x,v) \right).$$

Доказательство. Формула (4) показывает, что $G(e^{\bar{x}-\bar{v}})$ содержит z_r в степени

$$\sum_{l \equiv r \pmod{n-1}} (x_l - v_l) = \sum_{l \equiv r \pmod{n-1}} (s_{\eta_v(l), \theta_v(l)}(x,v) - s_{\eta_v(l-1), \theta_v(l-1)}(x,v)).$$

Остается применить

$$l = n\eta_v(l) + (n-1)\theta_v(l) \equiv \eta_v(l) \pmod{n-1}.$$

Предложения 12.5 и 12.7 показывают, что во всех рассматриваемых суммах число ненулевых слагаемых конечно. \square

Предложение 12.9. Для целой точки $x \in C_v$ имеет место равенство

$$\deg G(e^{\bar{x}-\bar{v}}) = \sum_{i \equiv 0 \pmod{n-1}} \sum_{(i,j) \in \Delta_v} (-s_{i,j}(x,v) + S_{i,j}),$$

где $S_{i,j} = 0$ при $in + j(n-1) < 0$ и $S_{i,j} = \sum_l (x_l - v_l)$ при $in + j(n-1) \geq 0$.

Доказательство. Из (5) выводим

$$\begin{aligned} \deg G(e^{\bar{x}-\bar{v}}) &= - \sum_{r < 0} \sum_{l \leq r(n-1)} (x_l - v_l) + \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (x_l - v_l) - \sum_{l \leq r(n-1)} (x_l - v_l) \right) = \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} (S_{\eta_v(r(n-1)), \theta_v(r(n-1))} - s_{\eta_v(r(n-1)), \theta_v(r(n-1))}(x,v)). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что $\eta_v(r(n-1)) \equiv 0 \pmod{n-1}$. Опять же, во всех рассматриваемых суммах конечное число ненулевых слагаемых. \square

Далее, t -вес $\varphi(f)$ легко интерпретировать в терминах графа Δ_f .

Предложение 12.10. Для конечномерной грани f и целого числа $l > 0$ пусть d_l — число пар (Γ, i) , где Γ связная компонента Δ_f , а i целое число, такие, что Γ содержит l вершин из ряда i и $l-1$ вершин из ряда $i-1$. Тогда $\varphi(f) = \prod (1 - t^l)^{d_l}$.

Доказательство. Это напрямую следует из определений. \square

Предложение 12.11. Для конечномерной грани f выполняется равенство

$$\dim f = |\{\text{компоненты графа } \Delta_f\}| - m(\lambda).$$

Доказательство. Если f вершина, это следует из предложения 12.4. Если же f не вершина то у нее есть непустая внутренность той же размерности.

Выберем $x \in V$ из внутренней f . Любые две вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) графа Δ_f , являющиеся смежными в \mathcal{R} , удовлетворяют $s_{i_1, j_1}(x) = s_{i_2, j_2}(x)$ тогда и только тогда, когда они также являются смежными в Δ_f .

Выберем вершину v грани f . Поскольку $\Theta_f \subset \Theta_v$, можно считать, что $\Delta_f \subset \Delta_v$. Предложения 12.5 и 12.4 показывают, что ровно $m(\lambda)$ компонент графа Δ_f имеют вершины в сколь угодно высоких рядах. Если (i, j) вершина одной из таких компонент, то $s_{i, j}(x) = s_{i, j}(v)$. Таким образом, из предыдущего абзаца видно, что у нас ровно $|\{\text{компоненты графа } \Delta_f\} - m(\lambda)$ степеней свободы при выборе координат $s_{i, j}(x)$. \square

Мы завершим этот раздел, показав (как и было обещано), что

$$G(e^{\varepsilon_{v, l}}) \neq 1.$$

Рассмотрим вершину v многогранника и ребро e , содержащее v . Можно считать, что Δ_e — подграф в Δ_v . Согласно предложению 12.11 граф Δ_e содержит $m(\lambda) + 1$ связанных компонент, из которых всего одна не содержит вершин в сколь угодно высоких рядах. Обозначим эту компоненту $\Gamma_e \subset \Delta_e$. Пусть $\varepsilon_{v, l}$ — образующая ребра e .

Предложение 12.12. Во введенных обозначениях числа

$$s_{i, j}(\varepsilon_{v, l}) = s_{i, j}(v + \varepsilon_{v, l}) - s_{i, j}(v),$$

где (i, j) пробегает все вершины графа Δ_e , описываются следующим образом. Если (i, j) лежит вне Γ_e , то $s_{i, j}(\varepsilon_{v, l}) = 0$. Для всех же вершин (i, j) компоненты Γ_e значение $s_{i, j}(\varepsilon_{v, l})$ одинаково и равно либо -1 или 1 .

Доказательство. Предложение 12.5 показывает, что для точки x ребра e и вершины (i, j) не из Γ_e действительно имеет место $s_{i, j}(x) = s_{i, j}(v)$. Более того, по определению, все координаты $s_{i, j}(x)$ точки $x \in e$, для которых (i, j) вершина Γ_e , обязаны быть одинаковыми. Взяв $x = v$ и $x = v + \varepsilon_{v, l}$ получаем утверждение предложения. \square

Предложение 12.13. Для любой вершины v многогранника Π и образующей $\varepsilon_{v, l}$ выполняется $G(e^{\varepsilon_{v, l}}) \neq 1$.

Доказательство. Пусть e — соответствующее ребро.

$$G(e^{\varepsilon_{v, l}}) = G(e^{(\bar{v} + \varepsilon_{v, l}) - \bar{v}}).$$

Этот моном можно вычислить при помощи предложений 12.8 и 12.9. Точнее говоря, видно, что возможны три случая.

1. Γ_e конечна и не содержит вершин в рядах i с $i \equiv 0 \pmod{n-1}$. Из предложения 12.8 получаем, что в ненулевой степени входит переменная $z_{i_0 \pmod{n-1}}$, где i_0 самый высокий ряд, содержащий вершины из Γ_e .

2. Γ_e конечна и содержит хотя бы одну вершину в ряду $i \equiv 0 \pmod{n-1}$. Тогда $\deg G(e^{\varepsilon v, l}) \neq 0$ поскольку для вершин (i, j) графа Δ_e с $i \gg 0$ выполняется $s_{i,j}(\varepsilon v, l) = 0$ и, таким образом, все значения $S_{i,j}$ из предложения 12.9 равны нулю.
3. Γ_e бесконечна. Это означает, что при $i \gg 0$ у Γ_e лишь одна вершина в ряду i . Предложение 12.8 показывает, что тогда сумма степеней вхождения всех z_r равна 1.

□

13. Доказательство теоремы 6.2

В этом разделе мы наконец применим технику, разработанную в части II, комбинируя ее с предложениями из предыдущего раздела.

Вершина v многогранника Π будет фиксирована на протяжении всего раздела. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$ — компоненты связности графа Δ_v . Для всех вершин (i, j) , лежащих внутри одной компоненты Γ_r , числа $s_{i,j}(v)$ одинаковы, пусть они равны b_r .

Возьмем число M_v такое, что при $i \geq M_v$ у Δ_v ровно одна вершина в ряду i , а при $i \leq -M_v$ у компоненты Γ_r ровно l_r вершин в ряду i . Кроме того потребуем, чтобы для любой вершины (i, j) графа Δ_v с $i \leq -M_v$ выполнялось $in + j(n-1) < 0$. Такое M_v найдется благодаря предложениям 12.4 и 12.6.

Для $l \geq M_v$ обозначим D_l сечение конуса C_v , состоящее из точек со следующими двумя свойствами.

1. При $i \leq -l$ для всех вершин (i, j) графа Δ_v выполняется $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$.
2. При $i \geq l$ все координаты $s_{i,j}(x)$ такие, что (i, j) — вершина Δ_v , равны друг другу.

Важное замечание: D_l — конечномерная грань конуса C_v . В самом деле, D_l по определению является пересечением C_v и всех гиперплоскостей $E_i \ni v$ и $H_i \ni v$ кроме конечного числа.

Далее, рациональная функция $G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\bar{D}_l))$ может быть рассмотрена как элемент кольца \mathfrak{S} , обозначим этот элемент σ_l .

Лемма 13.1. Последовательность рядов (σ_l) поэффициентно сходится к ряду $\tau_{\bar{v}}$.

Доказательство. Мы считаем, что $G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\bar{D}_l))$ — дробь, в знаменателе которой стоит произведение множителей $1 - G(e^\varepsilon)$ по всем образующим ε ребер конуса D_l . Ясно, что последовательность этих знаменателей поэффициентно сходится к

$$(1 - G(e^{\varepsilon v, 1}))(1 - G(e^{\varepsilon v, 1})) \dots$$

Остается показать, что числители по коэффициентно сходятся к Q_v .

Это делается полностью аналогично тому, как доказывалась лемма 11.1. Единственное отличие: в последнем абзаце нужно применить описание образующих из предложения 12.12 вместо взятого из [13]. \square

Теперь рассмотрим граф $\Delta_{v,l}$, являющийся полным подграфом Δ_v , получаемым удалением всех рядов с номерами меньшими $-l$ и большими l . Граф $\Delta_{v,l}$ состоит из $m(\lambda)$ связных компонент, каждая из которых является ординарным подграфом. Для этих компонент будем использовать обозначение $\Gamma_r^l \subset \Gamma_r$.

Существует естественная биекция (изометрия)

$$\xi_l : D_{\Gamma_1^l}(b_1, \dots, b_1) \times \dots \times D_{\Gamma_{m(\lambda)}^l}(b_{m(\lambda)}, \dots, b_{m(\lambda)}) \rightarrow D_l.$$

(Каждый множитель справа является конусом с вершиной $v_{\Gamma_r^l}(b_r)$.) Координата

$$s_{i,j}(\xi_l(x_1 \times \dots \times x_{m(\lambda)})) \quad (25)$$

есть просто соответствующая координата того x_r , для которого $(i, j) \in \Gamma_r^l$. При $i < -l$ координата (25) совпадает с $s_{i,j}(v)$, а все координаты, для которых $i \geq l$, равны между собой. В силу предложения 12.1 это отображение действительно является биекцией. Также существует и аналогичная биекция $\bar{\xi}_l$ с образом \bar{D}_l .

Согласно предложениям 12.8 и 12.9, а также за счет того, что $l \geq M_v$, существует специализация Ψ_l , заменяющая каждое x_i мономом от z_1, \dots, z_{n-1}, q , со следующим свойством. Для любого набора целых точек $\{x_r \in D_{\Gamma_r^l}(b_r, \dots, b_r)\}$ имеет место равенство

$$G\left(e^{\bar{\xi}_l(x_1 \times \dots \times x_{m(\lambda)})}\right) = G(e^{\bar{v}})\Psi_l\left(\prod_{r=1}^{m(\lambda)} F\left(e^{(x_r - v_{\Gamma_r^l}(b_r))}\right)\right). \quad (26)$$

Нетрудно дать и явное описание специализации Ψ_l , такое нам, однако, не понадобится.

Из предложения 12.10 и $l \geq M_v$ следует, что для любой грани конуса D_l

$$f = \xi_l(f_1 \times \dots \times f_{m(\lambda)}),$$

где f_r — грань конуса $D_{\Gamma_r^l}(b_r, \dots, b_r)$, выполнено следующее.

$$\varphi(f) = \prod_{r=1}^{m(\lambda)} \varphi_{\Gamma_r^l}(b_r, \dots, b_r)(f_r). \quad (27)$$

Комбинируя (26) и (27) получаем, наконец

$$G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\bar{D}_l)) = G(e^{\bar{v}})\Psi_l\left(\prod_{r=1}^{m(\lambda)} F\left(e^{-v_{\Gamma_r^l}(b_r)}\right)\psi_{\Gamma_r^l}(b_r, \dots, b_r)\right). \quad (28)$$

Настало время определить выделенное подмножество вершин из теоремы 6.2. Вершины из этого подмножества мы снова будем называть "существенными". Вершина v многогранника Π не является существенной, если и только если в графе Δ_v есть компонента связности E со следующим свойством. Для некоторого $i \in E$ больше вершин в ряду $i + 1$, чем в ряду i .

В силу, опять же, того, что $l \geq M_v$, для любой несущественной вершины v одна из компонент Γ_r^l содержит больше вершин в некотором ряду, чем на ряд выше. Скомбинировав (28) с теоремой 7.1, а затем применяя лемму 13.1, получаем часть б) теоремы 6.2.

Перейдем к рассмотрению существенной вершины v . Сперва обсудим случай регулярного λ , т.е. такого, для которого все a_i ненулевые. В этом случае у Δ_v ровно n компонент связности, при $i \ll 0$ каждая из них содержит ровно одну вершину в ряду i . (Предложение 12.4.)

Предложение 13.1. Для регулярного λ вершина v многогранника Π является несущественной тогда и только тогда, когда для некоторого l выполняются одновременно $v_l = 0$ и $v_{l+n-1} \neq 0$.

Доказательство. Если v несущественна, то в некоторой компоненте графа Δ_v лежит всего одна вершина $(i-1, j)$ из ряда $i-1$ и ровно две вершины $(i, j-1)$ и (i, j) из ряда i . Это, в частности, означает, что $v_{in+(j-1)(n-1)} = 0$, но $v_{in+j(n-1)} \neq 0$, откуда следует, что "только тогда".

В обратную сторону, если $v_l = 0$ и $v_{l+n-1} \neq 0$, то в Δ_v найдется вершина $(\eta_v(l), \theta_v(l))$, которая соединена с соседом справа сверху, и вершина $(\eta_v(l+n-1), \theta_v(l+n-1))$ при этом со своим соседом справа сверху не соединена. Отсюда следует, что $(\eta_v(l+n-1), \theta_v(l+n-1))$ соединена с соседом слева сверху (предложение 12.2). Этот сосед слева сверху тогда есть $(\eta_v(l-1), \theta_v(l-1))$, он же сосед справа сверху вершины $(\eta_v(l), \theta_v(l))$. Таким образом, соответствующая компонента содержит две вершины из ряда $\eta_v(l)$, откуда следует несущественность вершины v . \square

Такое описание существенных вершин для случая регулярного λ совпадает с соответствующим определением в [13]. Из [4] и [13] можно извлечь следующие сведения.

Предложение 13.2. а) Для регулярного λ существенные вершины нумеруются элементами группы Вейля W . Если v_w — вершина, соответствующая $w \in W$, то $e^{\mu_{v_w}} = w\lambda$.

б) Все конусы D_l являются симплицальными и унимодулярными.

в) Мультимножество $\{G(e^{\varepsilon_{v_w, i}})\}$ совпадает с мультимножеством $\{e^{-w\alpha}, \alpha \in \Phi^+\}$, где каждое α учитывается m_α раз.

По существу, остается доказать следующее.

Предложение 13.3. Пусть λ регулярно и v — существенная вершина. Тогда для любой грани f конуса D_l имеет место

$$\varphi(f) = (1-t)^{\dim f}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что Δ_f — подграф в Δ_v .

Все n связных компонент графа Δ_v бесконечные графы-пути, $n - 1$ из которых бесконечны в одном направлении ("вверх"), а один бесконечен в обоих направлениях. С учетом предложения 12.10 получаем, что $\varphi(f) = (1 - t)^d$, где d — число вершин в графе Δ_f , не соединенных с вершинами из ряда выше.

Однако предложение 12.11 показывает, что $\dim f = d$. \square

В сочетании с частью b) предложения 13.2, предложение выше показывает, что $G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\bar{D}_l))$ есть произведение $F(e^{\bar{v}}) = e^{\mu_v - \lambda}$ и дробей

$$\frac{1 - tF(e^\varepsilon)}{1 - F(e^\varepsilon)}$$

по всем образующим ε ребер конуса D_l . Применяя части a) и c) предложения 13.2, а затем лемму 13.1 получаем часть a) теоремы 6.2 для случая регулярного веса.

Перейдем к лучаю особого веса λ , т.е. веса, для которого хотя бы одно $a_i = 0$. Этот случай будет сведен к регулярному случаю, поэтому мы введем λ^1 — произвольный целочисленный доминантный регулярный вес. Объекты, отвечающие λ^1 , мы будем обозначать при помощи верхнего индекса 1 , например: Π^1, φ^1, E_l^1 и т.п.

В силу предложения 13.1 существенные вершины многогранника Π^1 нумеруются бесконечными в обе стороны последовательностями $y = (y_i)$ с $y_i \in \{0, 1\}$, удовлетворяющими следующим требованиям.

1. $y_l = 0$ при $l \gg 0$.
2. $y_l = 1$ при $l \ll 0$.
3. Если $y_l = 0$, то и $y_{l+n-1} = 0$.

Вершина v_y^1 многогранника Π^1 , соответствующая такой последовательности, однозначно определяется следующим образом: если $y_l = 0$, то $v_y^1 \in E_l^1$, а если $y_l = 1$, то $v_y^1 \in H_l^1$. Тот факт, что все a_i^1 положительны, означает, что разным y соответствуют разные v_y^1 . Т.к. существенные вершины многогранника Π^1 нумеруются группой Вейля W , каждому y соответствует $w_y \in W$ такой, что $v_y^1 = v_{w_y}^1$. Видно, что w_y однозначно определяется по y и не зависит от λ_1 .

Каждая последовательность y также задает вершину v_y многогранника Π по тому же правилу. Однако некоторые из этих v_y совпадают между собой.

Предложение 13.4. Вершины v_y — это в точности существенные вершины в Π . Для любого y имеет место равенство $\mu_{v_y} = w_y \lambda$.

Доказательство. Если вершина v_y^1 содержится в гиперплоскости H_l^1 или E_l^1 , то вершина v_y содержится в гиперплоскости H_l или E_l соответственно.

Поэтому можно считать, что граф $\Delta_{v_y^1}$ является подграфом в Δ_{v_y} (с тем же множеством вершин).

Однако если компонента E графа Δ_{v_y} содержит больше вершин из ряда i чем из ряда $i - 1$, то тем же свойством будет обладать и одна из содержащихся в E компонент графа $\Delta_{v_y^1}$. Это противоречило бы существенности вершины v_y^1 .

Обратно, каждая компонента в Δ_{v_y} содержит в любом ряду не больше вершин, чем на ряд ниже. Это следует из того, что любая компонента в Δ_{v_y} является объединением компонент графа $\Delta_{v_y^1}$, а последние обладают соответствующим свойством.

Для доказательства второй части заметим, что, вне зависимости от регулярности λ , точка v_y линейно зависит от λ , а μ_{v_y} линейно зависит от v_y . Значит, μ_{v_y} линейно зависит от λ . \square

Таким образом, мы установили, что существенные вершины в Π действительно соответствуют элементам орбиты $W\lambda$.

Для доказательства части а) теоремы 6.2 для особых λ достаточно показать, что

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{1}{[l_1]_t! \dots [l_{m(\lambda)}]_t!} \sum_{v_y=v} G\left(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}\right) \tau_{\bar{v}_y^1}. \quad (29)$$

Для вершины v_y^1 такой, что $v_y = v$, и целого числа $l \geq M_{v_y^1}$ обозначим $D_{y,l}^1$ соответствующую грань конуса $C_{v_y^1}$. Выберем l , превосходящее M_v и все $M_{v_y^1}$ с $v_y = v$. В силу леммы 13.1, тождество (29) последует из равенства

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}}\left(\bar{D}_l\right)\right) = \frac{1}{[l_1]_t! \dots [l_{m(\lambda)}]_t!} \sum_{v_y=v} G\left(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}\right) G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\bar{D}_{y,l}^1\right)\right). \quad (30)$$

Для любого v_y^1 с $v_y = v$ все координаты $s_{i,j}^1(v_y^1)$ с $(i,j) \in \Delta_v$ и $i \leq -l$ равны между собой. Обозначим c_1^r, \dots, c_r^r последовательность тех чисел $s_{-l,j}^1(v_y^1)$, для которых $(-l,j) \in \Gamma_r$. Кроме того, заметим, что для любого v_y^1 с $v_y = v$ все координаты $s_{i,j}^1(v_y^1)$ с $(i,j) \in \Delta_v$ и $i \geq l$ также равны между собой. Пусть $D_l^1 \subset V^1$ — многогранник, состоящий из таких точек x^1 , что

1. Для любого $i \leq -l$ те координаты $s_{i,j}^1(x^1)$, для которых $(i,j) \in \Gamma_r$, образуют последовательность c_1^r, \dots, c_r^r при чтении слева направо.
2. Все координаты $s_{i,j}^1(x^1)$ в рядах $i \geq l$ равны между собой.
3. Координаты $s_{i,j}^1(x^1)$ удовлетворяют всем неравенствам, соответствующим ребрам графа Δ_v .

Любая вершина многогранника D_l^1 является вершиной многогранника Π^1 и любая грань в D_l^1 естественным образом задает грань в Π^1 . Это позволяет считать функцию φ^1 определенной на гранях многогранника D_l^1 . Вершины D_l^1 , являющиеся существенными вершинами Π^1 , есть в точности

вершины вида v_y^1 с $v_y = v$. Применим к D_l^1 взвешенную теорему Бриона, а затем применим специализацию G :

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\bar{D}_l^1\right)\right) = \sum_{v_y=v} G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\bar{D}_{l,y}^1\right)\right).$$

То, что вклады всех остальных вершин нулевые, следует из уже доказанной части b) теоремы 6.2.

D_l является вырождением многогранника D_l^1 , пусть π — соответствующее отображение между множествами граней. Учитывая предыдущий абзац, из леммы 8.1 выводим

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}'}\left(\bar{D}_l\right)\right) = \sum_{v_y=v} G\left(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}\right) G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\bar{D}_{y,l}^1\right)\right),$$

где, по определению, для грани f многогранника D_l :

$$\varphi'(f) = \sum_{g \in \pi^{-1}(f)} (-1)^{\dim g - \dim f} \varphi^1(g).$$

Остается лишь показать, что для любого f выполнено

$$\varphi'(f) = [l_1]_t! \dots [l_{m(\lambda)}]_t! \varphi(f). \quad (31)$$

В самом деле, существует естественная биекция (изометрия)

$$\xi_l^1 : D_{\Gamma_1^l}(c_1^1, \dots, c_{l_1}^1) \times \dots \times D_{\Gamma_{m(\lambda)}^l}(c_1^{m(\lambda)}, \dots, c_{l_{m(\lambda)}}^{m(\lambda)}) \rightarrow D_l^1.$$

Более того, для грани g многогранника D_l^1 имеем

$$\varphi^1(g) = \prod_{r=1}^{m(\lambda)} \varphi_{\Gamma_r^l}(c_1^r, \dots, c_{l_r}^r)(g_r),$$

где $g = \xi_l^1(g_1 \times \dots \times g_{m(\lambda)})$.

Вспомним, что $D_{\Gamma_r^l}(b_r, \dots, b_r)$ является вырождением $D_{\Gamma_r^l}(c_1^r, \dots, c_{l_r}^r)$, пусть π_r соответствующее отображение. Ясно, что для $g = \xi_l^1(g_1 \times \dots \times g_{m(\lambda)})$ (грани в D_l^1) выполняется

$$\pi(g) = \xi_l(\pi_1(g_1) \times \dots \times \pi_{m(\lambda)}(g_{m(\lambda)})).$$

Значит, равенство (31) для грани $f = \xi_l(f_1 \times \dots \times f_{m(\lambda)})$ можно получить, перемножив между собой тождества, предоставляемые леммой 9.2 для вырождений π_r и граней f_r соответственно.

Нами доказана теорема 6.2 из которой, посредством теоремы 6.1, следует основной результат 3.1.

Список литературы

- [1] B. Feigin, I. Makhlin, A Combinatorial Formula for Affine Hall-Littlewood Functions via a Weighted Brion Theorem, <http://arxiv.org/abs/1505.04269>
- [2] A. V. Stoyanovsky, B. L. Feigin, Functional models for representations of current algebras and semi-infinite Schubert cells, *Functional Analysis and Its Applications*, January–March, 1994, Volume 28, Issue 1, pp 55-72
- [3] B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, Bosonic formulas for (k, l) -admissible partitions, *Ramanujan J.*, 7 (4), 485-517 (2003).
- [4] B. Feigin, M. Jimbo, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin, Addendum to ‘Bosonic Formulas for (k, l) -Admissible Partitions’, *The Ramanujan Journal*, December 2003, Volume 7, Issue 4, 519-530.
- [5] S. Fishel, I. Grojnowski, and C. Teleman, The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the Loop Grassmannian, *Ann. of Math. (2)*, 168(1):175–220, 2008.
- [6] I. Cherednik, A New Take on Spherical, Whittaker and Bessel Functions, arXiv:0904.4324v2, 2009.
- [7] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1995.
- [8] R. Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press, 2005.
- [9] S. Viswanath, Kostka-Foulkes polynomials for symmetrizable Kac-Moody algebras, *Sém. Lothar. Combin.*, 58:Art. B58f, 2008.
- [10] A. I. Barvinok, *Integer Points in Polyhedra*, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [11] M. Beck, S. Robins, *Computing the Continuous Discretely*, Springer, 2009.
- [12] Igor Makhlin, Weyl’s Formula as the Brion Theorem for Gelfand-Tsetlin Polytopes, arXiv:1409.7996.
- [13] Igor Makhlin, Characters of Feigin-Stoyanovsky subspaces and Brion’s theorem, *Functional Analysis and Its Applications*, January 2015, Volume 49, Issue 1, pp 15-24
- [14] M. Brion, Points entiers dans les polyèdres convexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 21 (1988), no. 4, 653-663.
- [15] A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii, “Finitely additive measures of virtual polyhedra”, *Algebra i Analiz*, 4:2 (1992), 161–185