

О 15-вершинной триангуляции кватернионной проективной плоскости

Городков Денис Александрович, МИАН

Научный руководитель – д.ф.-м.н. Александр Александрович Гайфуллин

1 Введение

Задаче о нахождении минимальной триангуляции многообразия посвящено большое количество работ, хороший обзор по этой теме представлен Ф. Лутцем в [8]. Особенно интересны случаи, когда триангуляция многообразия обладает дополнительными свойствами, например, богатой группой симметрий. Общеизвестна минимальная триангуляция $\mathbb{R}P^2$ в 6 вершин, интересная своей симметричностью. В работе 1983 года [7] В. Кюнель и Т.Ф. Банхоф построили симплициальный комплекс CP^2_9 с 9 вершинами и доказали, что он является минимальной по количеству вершин триангуляцией CP^2 , а также обладает группой симметрий порядка 54. Исходя из аналогичных соображений У. Брем и В. Кюнель (см. [2]) построили комплекс M_{15}^8 (а также два кусочно линейно гомеоморфных ему комплекса \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$) и выдвинули гипотезу, что он является минимальной триангуляцией $\mathbb{H}P^2$.

Одно из основных соображений этой статьи заключается в следующем: как и $\mathbb{H}P^2$, M_{15}^8 – многообразие, «похожее на проективную плоскость», в смысле Илса-Кёйпера (см. [4]).

Согласно статье [4], такие многообразия в размерности 8 различимы по своим числам Понтрягина. Если доказать, что числа Понтрягина у M_{15}^8 совпадают с числами Понтрягина $\mathbb{H}P^2$, то эти многообразия гомеоморфны, то есть M_{15}^8 является триангуляцией $\mathbb{H}P^2$.

Заметим, что в силу формулы Рохлина о сигнатуре для 8-мерного многообразия достаточно посчитать первый класс Понтрягина.

На момент написания статьи [2] имелись различные подходы для вычисления первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия ([12, 13, 9, 3]), однако все их объединяет существенная сложность вычислений, из-за которой тяжело посчитать класс даже для простейших примеров (см. [10]).

В 2004 году в [14] (см. также [16, 15]) был описан комбинаторный алгоритм подсчета первого рационального класса Понтрягина комбинаторного многообразия. Во-первых, этот алгоритм полностью комбинаторный, то есть подсчет не требует никаких дополнительных данных кроме самой структуры комбинаторного многообразия. Во-вторых, алгоритм реально применим на практике, объем вычислений существенно меньше, чем в предыдущих работах на эту тему.

Используя этот алгоритм, в данной работе получен следующий результат.

Теорема 1.1. $p_1(M_{15}^8) = 2u = p_1(\mathbb{H}P^2)$, где u – порождающая $H^4(M_{15}^8, \mathbb{Q}) \cong H^4(\mathbb{H}P^2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, являющаяся образом порождающей $H^4(M_{15}^8, \mathbb{Z}) \cong H^4(\mathbb{H}P^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ при естественном вложении $H^4(\cdot, \mathbb{Z}) \subset H^4(\cdot, \mathbb{Q})$.

Следствие 1.1. M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ являются минимальными триангуляциями $\mathbb{H}P^2$ по количеству вершин.

При доказательстве теоремы алгоритм был реализован на компьютере при использовании языка программирования GAP ([6]).

2 Многообразия Илса-Кёйпера

Классическое определение функции Морса можно обобщить на случай топологического или комбинаторного многообразия следующим образом.

Приведем одно из первых утверждений теории Морса:

Предложение 1. Пусть M^n – гладкое многообразие, $a \in M$ – неособая точка функции Морса $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда существует гладкая система координат $\{x^i\}$ в окрестности точки a и константа λ_a , такие что $x^n = \lambda_a(f(x) - f(a))$ в окрестности точки a . Если a является критической точкой индекса k , то существует гладкая система координат $\{x^i\}$ в окрестности точки a и константа λ_a , такие что $-\sum_{i=1}^k (x^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (x^i)^2 = \lambda_a(f(x) - f(a))$ в окрестности точки a .

Это ключевое для теории Морса утверждение можно взять за определение функции Морса в гладком случае. В топологическом и комбинаторном случае используется именно этот подход, так как он не использует гладкости функции f .

В случае комбинаторного многообразия K функция f рассматривается как функция на геометрической реализации многообразия $|K|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцией Морса на топологическом (комбинаторном) многообразии X называется непрерывная (кусочно линейная) функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая что в окрестности любой точки $a \in X$ существует непрерывная система координат $\{x^i\}$ и константа λ_a , и в этой окрестности выполняется одно из двух условий (1) и (2) ((1) и (2')) :

1. $x^n = \lambda_a(f(x) - f(a))$ – такая точка a называется регулярной;
2. $-\sum_{i=1}^k (x^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (x^i)^2 = \lambda_a(f(x) - f(a))$ – такая точка a называется особой индекса k в топологическом случае;
- 2'. $-\max\{|x^1|, \dots, |x^k|\} + \max\{|x^{k+1}|, \dots, |x^n|\} = \lambda_a(f(x) - f(a))$ – такая точка a называется особой индекса k в комбинаторном случае.

Естественной задачей является рассмотрение многообразий, допускающих функции Морса с малым количеством критических точек. Общеизвестно, что наличие у функции Морса двух критических точек гарантирует, что многообразие гомеоморфно сфере. В случае трех критических точек, как показали Илс и Кёйпер, результаты сложнее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Многообразие Илса-Кёйпера – это топологическое (гладкое, комбинаторное) многообразие, на котором существует непрерывная (соответственно гладкая, кусочно линейная) функция Морса с тремя критическими точками.

Теорема 2.1 (Илс, Кёйпер [4]). Пусть на многообразии X^n задана функция Морса $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ с ровно тремя критическими точками. Тогда:

1. Размерность и когомологии.

Размерность X^n может быть равна только $n = 2m = 0, 2, 4, 8, 16$, причем кольцо когомологий $H^*(X)$ совпадает с кольцом когомологий трех точек (в случае $n = 0$), вещественной ($n = 2$), комплексной ($n = 4$), кватернионной ($n = 8$) или октавной ($n = 16$) проективной плоскости.

2. Гомотопический тип.

Если $n = 0$, то X состоит из трех точек. Если $n = 2$, то X гомеоморфно вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. При $n = 4$ возможен один гомотопический тип X , соответствующий, при $n = 8$ – шесть гомотопических типов, а при $n = 16$ – шестьдесят гомотопических типов.

3. Топологически, X – компактификация евклидова пространства \mathbb{R}^{2m} m -сферой S^m .

4. С комбинаторной точки зрения, имеется бесконечно много различных примеров искомых многообразий в размерностях $n = 8$ и $n = 16$. Они различимы по своим рациональным числам Понтрягина. При этом не все они допускают введение гладкой структуры.

5. С дифференциальной точки зрения (в категории гладких многообразий), имеется бесконечное множество возможных X в размерностях 8 и 16. Ассоциированные комбинаторные структуры классифицируются по своим рациональным числам Понтрягина. В размерности $n = 2$ имеется лишь вещественная проективная прямая. В размерности $n = 4$ полных результатов нет.

3 Комплексы Брема-Кюнеля

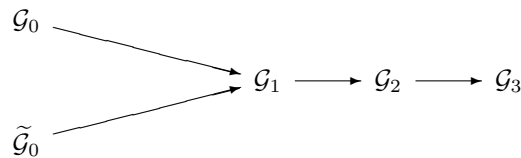
В статье [7] был построен 9-вершинный симплициальный комплекс CP_9^2 . Он обладает несколькими замечательными свойствами :

1. Среди всех комбинаторных многообразий размерности 4, не гомеоморфных сфере, он имеет наименьшее количество вершин.
2. Любые 3 вершины CP_9^2 образуют симплекс, принадлежащий триангуляции (это свойство также называют 3-смежностью).
3. Этот комплекс является минимальной по количеству вершин триангуляцией CP^2 .
4. CP_9^2 инвариантен относительно действия двулистного накрытия группы Гейзенберга над \mathbb{Z}_3 .

Брем и Кюнель (см. [2]) построили три 15-вершинных комбинаторных многообразия M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ с аналогичными свойствами в 8-мерном случае для нахождения минимальной триангуляции кватернионной проективной плоскости HP^2 .

1. Среди всех комбинаторных многообразий размерности 4, не гомеоморфных сфере, они имеют наименьшее количество вершин.
2. Любые 5 вершин любого из комплексов M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 , $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ образуют симплекс (эти комплексы 5-смежны).
3. Группа автоморфизмов M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ – группа икосаэдра A_5 , A_4 и S_3 соответственно.

Построение комплексов будет основано на явном построении действия некоторых групп на множестве вершин. Действия групп на множестве вершин мы будем задавать в виде подгруппы группы перестановок на 15 элементах S_{15} . Все изображенные ниже гомоморфизмы инъективны.



Рассмотрим следующие перестановки :

$$P = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 12\ 13\ 14\ 15)$$

$$T = (3\ 10)(4\ 14)(5\ 8)(6\ 11)(7\ 12)(13\ 15)$$

$$U = (1\ 6\ 11)(2\ 7\ 12)(3\ 8\ 13)(4\ 9\ 14)(5\ 10\ 15)$$

Дополнительно нам понадобятся

$$S = (1\ 6\ 11)(2\ 15\ 14)(3\ 13\ 8)(4\ 7\ 5)(9\ 12\ 10) = P^{-1}TP^{-2}TP^{-2}$$

$$R = (2\ 5)(3\ 4)(7\ 10)(8\ 9)(12\ 15)(13\ 14) = S^{-1}P^2SP^{-1}S$$

Тогда зададим $\mathcal{G}_2 = \langle P, T \rangle$, $\mathcal{G}_3 = \langle P, T, U \rangle$, $\mathcal{G}_1 = \langle P, S \rangle$, $\mathcal{G}_0 = \langle R, S \rangle$, $\widetilde{\mathcal{G}}_0 = \langle PRP^{-1}, S \rangle$.

Группа $\mathcal{G}_1 \cong A_5$ будет являться группой автоморфизмов M_{15}^8 , а группы \mathcal{G}_0 и $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ – группы автоморфизмов комплексов \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ соответственно.

Комплексы M_{15}^8 , \widetilde{M}_{15}^8 и $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ распадаются на две части : у них имеется общий кусок из 415 8-симплексов \mathcal{K}_0 , который описывается как объединение орбит действия \mathcal{G}_1 на 12 явно указанных симплексах :

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 6, 8, 11, 13, 14, 15\} \\
B &= \{1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \\
C &= \{1, 2, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15\} \\
D &= \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15\} \\
E &= \{1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14\} \\
F &= \{1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 14, 15\} \\
G &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13\} \\
H &= \{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\} \\
I &= \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\
J &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15\} \\
K &= \{1, 2, 3, 7, 8, 10, 12, 13, 14\} \\
M &= \{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}
\end{aligned}$$

Чтобы определить оставшиеся 75 8-симплексов для каждого из комплексов, рассмотрим симплексы

$$\begin{aligned}
L_{(1)} &= \{3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15\} \\
N_{(1)} &= \{3, 4, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15\}
\end{aligned}$$

и возьмем их образы под действием P .

$$\begin{aligned}
L_{(n)} &= P^{n-1}L_{(1)}, & N_{(n)} &:= P^{n-1}N_{(1)} \\
\tilde{L}_{(n)} &= P^{n-1}TL_{(1)}, & \tilde{N}_{(n)} &:= P^{n-1}TN_{(1)}
\end{aligned}$$

Наконец, обозначим $\mathcal{L}_n = L_{(n)} \cup N_{(n)}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_n = \tilde{L}_{(n)} \cup \tilde{N}_{(n)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5; \\
\tilde{\mathcal{K}}_1 &= \tilde{\mathcal{L}}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5; \\
\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_1 &= \tilde{\mathcal{L}}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \tilde{\mathcal{L}}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5.
\end{aligned}$$

Тогда искомые комплексы записываются в виде

$$M_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1; \quad \widetilde{M}_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \tilde{\mathcal{K}}_1; \quad \widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8 = \mathcal{K}_0 \cup \tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_1.$$

Эти три комплекса кусочно линейно гомеоморфны друг другу. Кроме того, группа симметрий M_{15}^8 изоморфна A_5 , группа симметрий \widetilde{M}_{15}^8 изоморфна S_4 , а группа симметрий $\widetilde{\widetilde{M}}_{15}^8$ изоморфна группе S_3 .

Конкретные размерности $n = 2, 4, 8, 16$ также появляются в работе [1]. Авторы рассматривают всевозможные комбинаторные многообразия и исследуют ограничения, которые количество вершин многообразия накладывает на его размерность.

Теорема 3.1 ([1]). *Пусть M^d – компактное комбинаторное многообразие с n вершинами. Тогда если $n < \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 3$, то M PL-гомеоморфно сфере, а если $n = \frac{3d}{2} + 3$, то M может быть не PL-гомеоморфным сфере только в случае, если $n = 2, 4, 8$ или 16 . В этом случае M^d является многообразием Илса-Кюйпера.*

В своей статье Брем и Кюнель выдвигают гипотезу:

Гипотеза 3.1 ([2]). M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно $\mathbb{H}P^2$.

При этом из результатов, описанных в предыдущем разделе, а также из теоремы 3.1 следует, что

Предложение 2. *Если $p_2([M_{15}^8]) = p_2([\mathbb{H}P^2])$, то M_{15}^8 кусочно линейно гомеоморфно $\mathbb{H}P^2$ и является его триангуляцией, минимальной по количеству вершин.*

4 Алгоритм Гайфуллина вычисления первого класса Понтрягина

4.1 Комплекс \mathcal{T}^n и граф Γ_2

4.1.1 Комплекс \mathcal{T}^n

Результаты этого раздела подробно изложены в статьях [14, 15].

Обозначим \mathcal{T}_n абелеву группу всех ориентированных комбинаторных сфер размерности $(n-1)$ с соотношениями $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$ при $L_1 \cong L_2$, а также $\langle -L \rangle = -\langle L \rangle$.

Основным ограничением на используемую формулу для класса Понтрягина является ее локальность. Пусть $f \in \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$, K^m – ориентированное комбинаторное многообразие. Введем обозначение

$$f_{\sharp}(K) = \sum_{\sigma \in K, \dim \sigma = m-n} f(\langle \text{link } \sigma \rangle) \sigma.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функция $f \in \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q}) = \mathcal{T}^n$ называется локальной формулой для однородного полинома $F \in \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$, если для любого K цепь $f_{\sharp}(K)$ является циклом, представитель которого в гомологиях двойственен по Пуанкаре классу $F(p_1(K), p_2(K), \dots)$.

Относительно операций формальной суммы и джойна множество

$$\mathcal{T}_* = \bigoplus_n \mathcal{T}_n$$

превращается в суперкоммутативную ассоциативную градуированную алгебру. На ней можно ввести дифференциал

$$\partial \langle L \rangle = \sum_{v \in V(L)} \langle \text{link } v \rangle.$$

Обозначим через $\mathcal{T}^n(\Lambda)$ абелеву группу всех функций $f: \mathcal{T}_n \rightarrow G$ с условием $f(-L) = -f(L)$. Определим дифференциал $\delta: \mathcal{T}^n \rightarrow \mathcal{T}^{n+1}$ следующим образом:

$$(\delta f)(L) = \sum_{v \in V(L)} f(\langle \text{link } v \rangle)$$

Мы получили, что

$$\mathcal{T}^* = \bigoplus_n \text{Hom}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Q})$$

является суперкоммутативной ассоциативной дифференциальной градуированной коалгеброй с повышающим ориентацию дифференциалом δ .

Тогда верна следующая

Теорема 4.1 (А.А. Гайфуллин, [14]). *Следующие три условия на функцию $f \in \mathcal{T}^n(\mathbb{Q})$ эквивалентны:*

1. *цепь $f_{\sharp}(K)$ является циклом для любого ориентированного комбинаторного многообразия K тако- го, что $\dim K \geq n$;*
2. *f является локальной формулой для некоторого однородного полинома от рациональных классов Понтрягина;*
3. *f – коцикл комплекса \mathcal{T}^* , т.е. $\delta f = 0$.*

Когомологичные коциклы комплекса \mathcal{T}^ являются локальными формулами для одного и того же од- нородного полинома от рациональных классов Понтрягина. Более того, для любого такого полинома существует локальная формула.*

Таким образом, чтобы найти локальную формулу для p_1 (с точностью до пропорциональности) доста- точно найти такие функции $f \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, что $\delta f = 0$.

4.1.2 Бивездные преобразования

Для дальнейших рассуждений нам потребуется понятие бивездного преобразования.

Пусть K – симплициальное многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть τ – симплекс такой, что $\tau \notin K$, но все его собственные подмножества лежат в K (такой симплекс будем иногда называть *пустым*). Пусть также $\sigma \in K$ такой, что $\sigma * \partial\tau$ – комплекс полной размерности. Тогда *флипом* (*бивездным преобразованием*, *движением Пахнера*) β назовем преобразование K , переводящее $\sigma * \partial\tau$ в $\tau * \partial\sigma$. Также будем обозначать $\beta = \beta_\sigma$ и называть β бивездным преобразованием, ассоциированным с σ .

На 1 изображен вид бивездных преобразований в размерности 2.



Рис. 1: Флипы в размерности 2

Теорема 4.2 (Пахнер, [11]). Пусть K_1 и K_2 – кусочно линейно гомеоморфные комбинаторные многообразия. Тогда комбинаторное многообразие K_1 может быть переведено в комбинаторное многообразие K_2 при помощи конечной последовательности бивездных преобразований и изоморфизмов.

Так как любые две комбинаторных сферы соединяются последовательностью бивездных преобразований, то достаточно показать, как меняется значение $f(\langle L \rangle)$ (где L – трехмерная комбинаторная сфера) при бивездных преобразованиях.

Будем называть бивездные преобразования *эквивалентными*, если они соединяют изоморфные комбинаторные многообразия. Если бивездное преобразование эквивалентно своему обратному, будем называть его *несущественным*.

4.1.3 Граф Γ_2

В этом разделе мы расскажем о некоторых результатах А.А. Гайфуллина в статье [14].

Введем дополнительную конструкцию – граф Γ_n . Вершинами этого графа являются ориентированные комбинаторные сферы размерности n . Две вершины L_1 и L_2 соединены ребром β , если имеется существенное бивездное преобразование $\beta: L_1 \rightarrow L_2$.

Рассмотрим группы $C_{\mathbb{Z}_2}^i(\Gamma_n, \mathcal{Q})$ и $H_{\mathbb{Z}_2}^i(\Gamma_n, \mathcal{Q})$ соответственно эквивариантных коцепей и когомологий графа Γ_n относительно группы \mathbb{Q} и действующей на ней изменением знака группе \mathbb{Z}_2 . Обозначим дифференциал комплекса коцепей через d .

Так как граф Γ_n связан, $H_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathcal{Q}) = 0$. Очевидно, что $C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathcal{Q}) = \mathcal{T}^{n+1}(\mathbb{Q})$. Тогда дифференциал δ можно рассмотреть и как отображение

$$\delta: C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_n, \mathcal{Q}) \rightarrow C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_{n+1}, \mathcal{Q})$$

Определим аналогичный дифференциал для $C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_*, \mathcal{Q})$.

$$\delta: C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_n, \mathcal{Q}) \rightarrow C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_{n+1}, \mathcal{Q})$$

$$(\delta h)(\{\beta\}) := (-1)^n \sum_{v \in U(\beta)} h(\{\beta_v\})$$

Непосредственной проверкой доказываем, что $d\delta = \delta d$, поэтому d является цепным отображением комплекса $C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_*, \mathcal{Q})$ в комплекс $C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_*, \mathcal{Q})$ (по отношению к дифференциалу δ).

Предложение 3 ([14]). d цепно гомотопна нулю как цепное отображение комплексов.

Путем анализа получившихся из цепного отображения диаграмм и из соображений размерности А.А. Гайфуллин показал, что искомая группа $\ker[\mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})]$ изоморфна следующей:

$$\ker[\mathcal{T}^4(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{T}^5(\mathbb{Q})] = \ker[C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_3, \mathcal{Q}) \xrightarrow{\delta} C_{\mathbb{Z}_2}^0(\Gamma_3, \mathcal{Q})] \cong A$$

$$a \in A \Leftrightarrow [a] \in \ker[H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2, \mathcal{Q}) \xrightarrow{\delta^*} H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_3, \mathcal{Q})] = N$$

Группа N посчитана в [14]. Она одномерна как \mathbb{Q} -модуль и порождена элементом $c \in H_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2, \mathcal{Q})$. Значение этого класса было явно вычислено А.А. Гайфуллиным на некотором наборе циклов в графе Γ_2 , которые мы будем называть элементарными(2). Значение на элементарном цикле зависит от количества примыкающих к некоторым ребрам треугольников, обозначенных на 2 p и q . Этот набор важен тем, что любой цикл в графе Γ_2 можно представить в виде линейной комбинации элементарных.

Таким образом, для каждого коцикла $h \in C_{\mathbb{Z}_2}^1(\Gamma_2; \mathcal{Q})$, представляющего класс когомологий c , можно явно указать функцию $f = d^{-1}\delta(h) \in \mathcal{T}^4(\mathbb{Q})$, которая является локальной формулой для класса λp_1 для некоторой рациональной константы λ . Непосредственный подсчет (например, для 9-вершинной триангуляции CP^2 , построенной в [7]) показывает, что $\lambda = 1$.

Для явного описания какой-либо локальной формулы нужно выбрать конкретного представителя класса когомологий h . В [14] выбран следующий способ. Укажем явно для каждой вершины $\{L\}$ графа Γ_2 цепь ξ такую, что $\partial\xi_{\{L\}} = \{L\} - \{\partial\Delta^3\}$. Рассмотрим все бизвездные преобразования $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, понижающие сложность комбинаторной сферы L , причем $\forall i \beta_i: L \rightarrow L_i$. Тогда положим

$$\xi_{\{L\}} = \sum_{i=1}^r (\xi_{\{L_i\}} - \{\beta_i\}).$$

Искомый коцикл теперь выписывается по формуле

$$h(\{\beta\}) = \langle c, \{\beta\} + \{\xi_{L_1}\} - \{\xi_{L_1}\} \rangle.$$

Заметим, что этот выбор коцикла сохраняет локальность формулы, так как зависит только от комбинаторного типа L .

Итак, сформулируем вывод. Если $\beta: L_1 \rightarrow L_2$ – бизвездное преобразование, то

$$f(L_2) - f(L_1) = \sum_v h(\beta_v),$$

где v – вершина, участвующая в бизвездном преобразовании, $h \in C^1(\Gamma_2, \mathcal{Q})$ – коцикл графа Γ_2 . Все локальные формулы для первого класса Понтрягина, с точностью до умножения на рациональное число, представимы в таком виде, причем для любой формулы класс когомологий $c \in H^1(\Gamma_2, \mathcal{Q})$ коцикла h одинаков.

4.2 Алгоритм разложения цикла в графе Γ_2 в виде линейной комбинации элементарных

Данный алгоритм был получен А.А. Гайфуллиным в работе [16], однако некоторые из случаев были пропущены. Мы устраняем здесь эту неточность.

Дан цикл в графе Γ_2 , то есть замкнутая последовательность флипов.

Выделим в графе Γ_2 два типа циклов, которые мы будем называть *элементарными циклами* соответственно первого и второго типа. Циклы первого типа изображены на 2, второго - на рис. 3.

Введем обозначение. Если σ_1 и σ_2 – симплексы в L такие, что определены меняющие их флипы и нет симплекса в L , содержащего и σ_1 , и σ_2 , то обозначим $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ следующий цикл :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta_{\sigma_1}} & L_1 \\ \uparrow \beta_{\sigma_2}^{-1} & & \downarrow \beta_{\sigma_2} \\ L_3 & \xleftarrow{\beta_{\sigma_1}^{-1}} & L_2 \end{array}$$

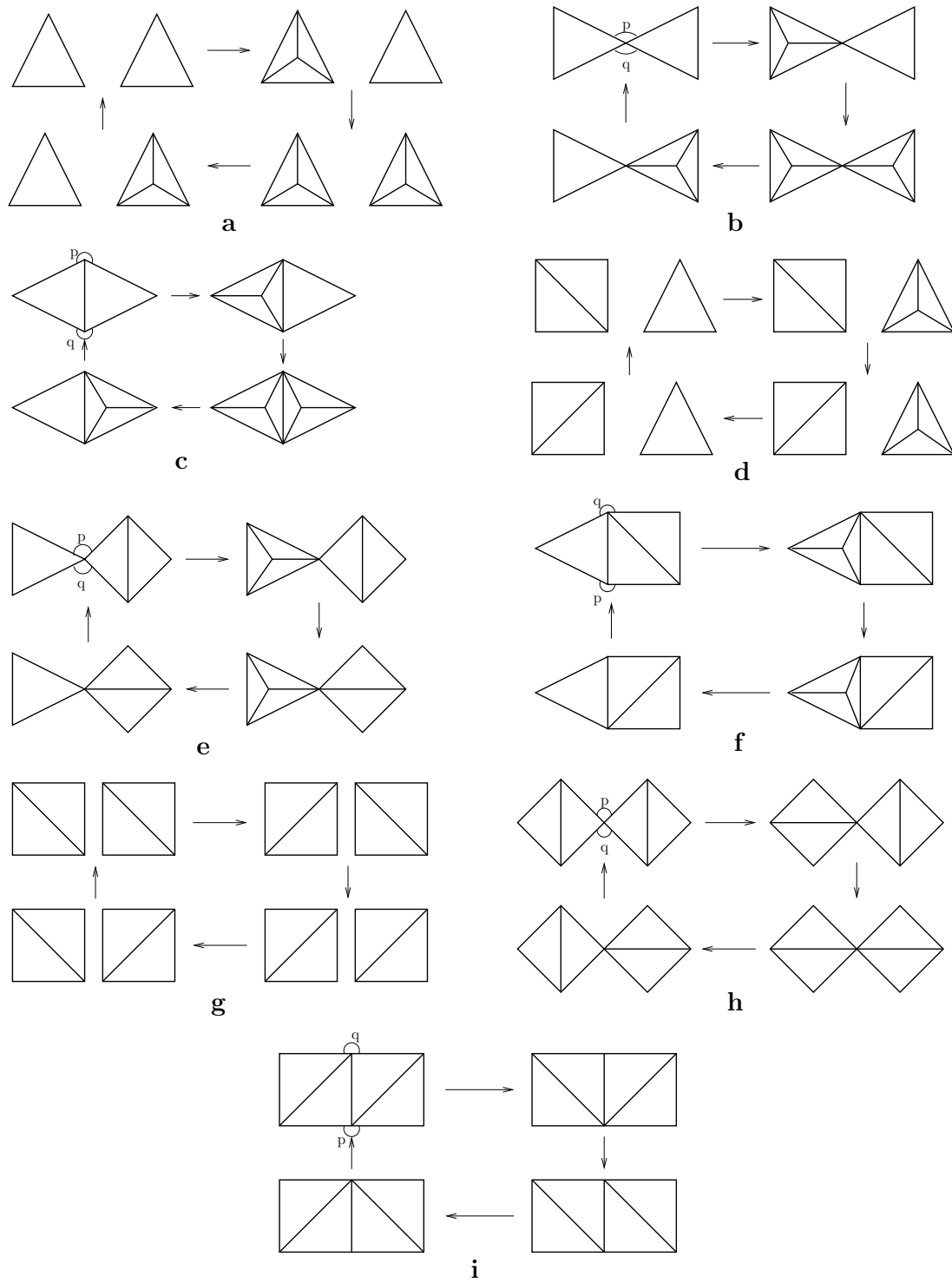


Рис. 2: Элементарные циклы первого типа.

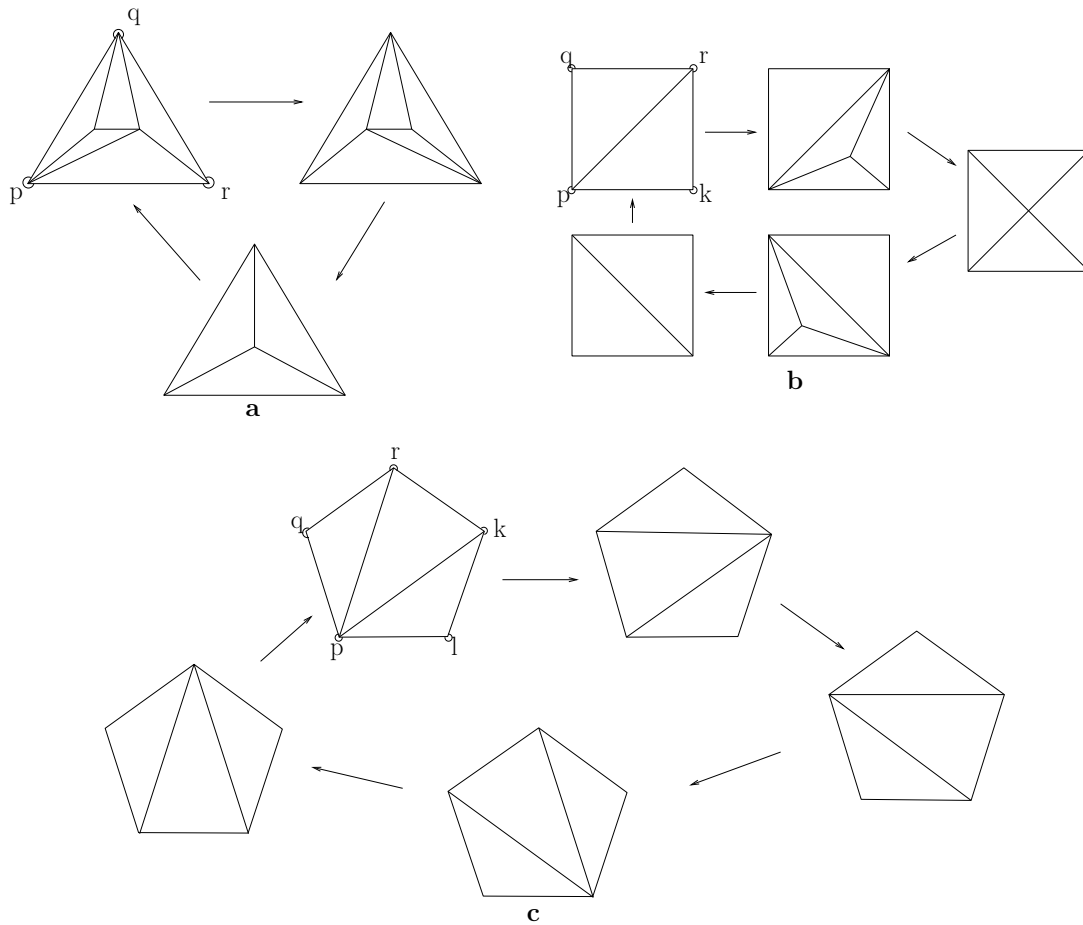


Рис. 3: Элементарные циклы второго типа.

Введем понятие *сложности* вершины графа Γ_2 как двумерной комбинаторной сферы L с k вершинами.

$$a(L) = \begin{cases} k, & \text{если } L \text{ содержит хотя бы одну вершину степени } 3; \\ k + \frac{1}{3}, & \text{если } L \text{ содержит вершину степени } 4, \text{ но не содержит вершин степени } 3; \\ k + \frac{2}{3}, & \text{если } L \text{ не содержит вершин степени } 3 \text{ и } 4. \end{cases}$$

Теперь определим *сложность* флипа (ребра графа Γ_2) $\beta: L_1 \rightarrow L_2$.

$$a(\beta) = \begin{cases} \max(a(L_1), a(L_2)), & \text{если } a(L_1) \neq a(L_2); \\ a(L_1) + \frac{1}{6}, & \text{если } a(L_1) = a(L_2). \end{cases}$$

Тогда сложность любой комбинаторной сферы $a(L) \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а сложность любого флипа $a(\beta) \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Обозначим Γ_2^a множество всех вершин и ребер графа Γ_2 со сложностью, не превышающей a . Тогда если любой цикл, лежащий в графе Γ_2^a , будет представлен в виде суммы цикла из $\Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$ и элементарных циклов, то по индукции мы сможем представить весь цикл в виде линейной комбинации элементарных.

На каждом шаге будем рассматривать наименьшее возможное a для цикла.

Пусть $a = k + \frac{b}{6}$, тогда достаточно доказать вышенаписанное для каждого $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Разберем отдельно случаи четного и нечетного b .

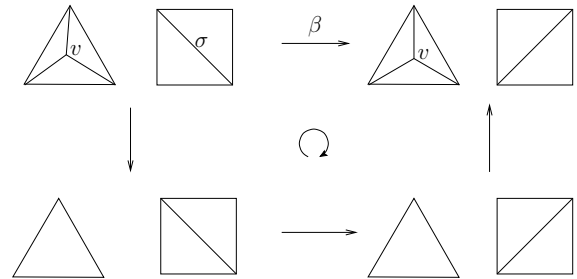
Случай нечетного b . В случае нечетного b в цикле есть преобразование наибольшей сложности

$$\beta_\sigma: L_1 \longrightarrow L_2,$$

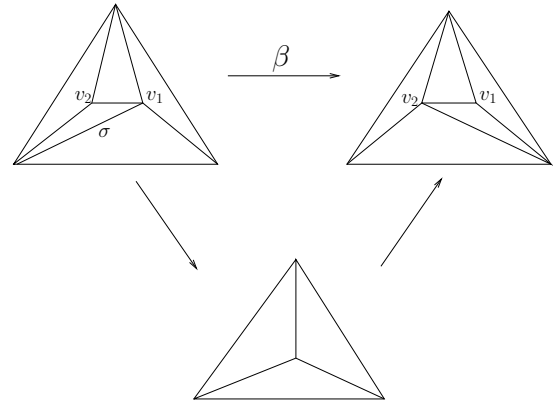
соединяющее две комбинаторных сферы одинаковой сложности $k + \frac{b-1}{6}$ и ассоциированное с симплексом σ .

$b = 1$. При $b = 1$ обе комбинаторные сферы L_1 и L_2 содержат вершины степени 3. Обозначим эти вершины v_1 и v_2 соответственно.

Если эти вершины совпадают, то определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$. Носитель цепи $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, v)$ лежит в графе Γ_2^k .

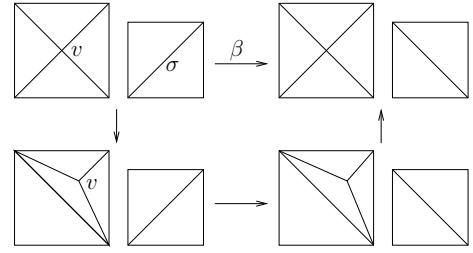


Если эти вершины не совпадают, то цикл $\gamma(L_1, \sigma, v)$ не определен, зато можно воспользоваться элементарным циклом второго типа.

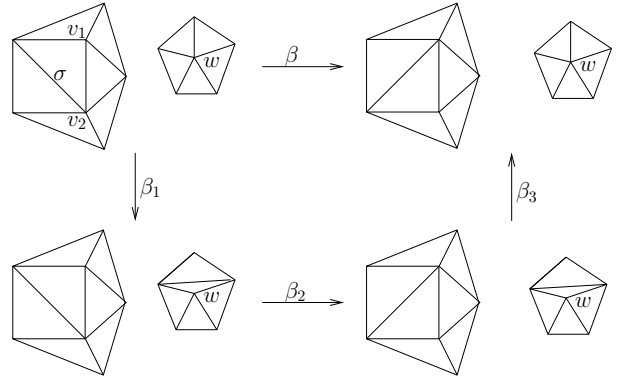


$b = 3$. При $b = 3$ комбинаторные сферы L_1 и L_2 не содержат вершин степени 3, но содержат вершину степени 4. Разобьем ситуацию на два случая.

1. Существует вершина степени 4 в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2 (обозначим ее v). Тогда эта вершина не участвует в бизвездном преобразовании β . Тогда несложно показать, что одна из диагоналей четырехугольника $\text{link } v$ должна присутствовать в обеих комбинаторных сферах L_1 и L_2 .

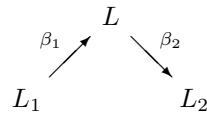


2. Существует две вершины v_1 и v_2 , участвующие в β , такие что $\deg_{L_1} v_1 = 4$, $\deg_{L_2} v_2 = 4$. Тогда, используя эйлерову характеристику, несложно показать, что в L_1 найдется хотя бы 8 вершин степени 5. Тогда одна из них не входит в $\text{link } v_1 \cup \text{link } v_2$, назовем ее w . Хотя бы для одного ребра, выходящего из w , существует бизвездное преобразование, ассоциированное с ним. Таким образом, получим три флипа β_1 , β_2 и β_3 , каждый из которых можно упростить согласно предыдущему случаю.



$b = 5$. Каждая из комбинаторных сфер L_1 и L_2 не содержит вершин степени 3 и 4. В этом случае L_1 содержит хотя бы 12 вершин степени 5. Среди этих 12 вершин обязательно найдется вершина w , не участвующая в β . Обозначим вершины $\text{link } w$ u_1, u_2, u_3, u_4 и u_5 в некотором направлении обхода вокруг w . Из пяти диагоналей в пятиугольнике $\text{link } w$ не более двух присутствуют в каждой из комбинаторных сфер L_1 и L_2 . Значит, хотя бы одна отсутствует в обеих сферах. Без ограничения общности, пусть это диагональ $u_2 u_5$. Тогда определен цикл $\gamma(L_1, \sigma, w u_1)$ и цикл $\{\beta\} - \gamma(L_1, \sigma, w u_1)$ лежит в графе $\Gamma_2^{k+\frac{3}{2}}$.

Случай четного b . В случае четного b флипы наибольшей сложности разбиваются на пары следующих подряд флипов:



Здесь $a(L) > a(L_1)$, $a(L) > a(L_2)$, $a(\beta_1) = a(\beta_2) = a(L)$. Пусть $\beta_1 = \beta_{L, \sigma_1}^{-1}$, $\beta_2 = \beta_{L, \sigma_2}$.

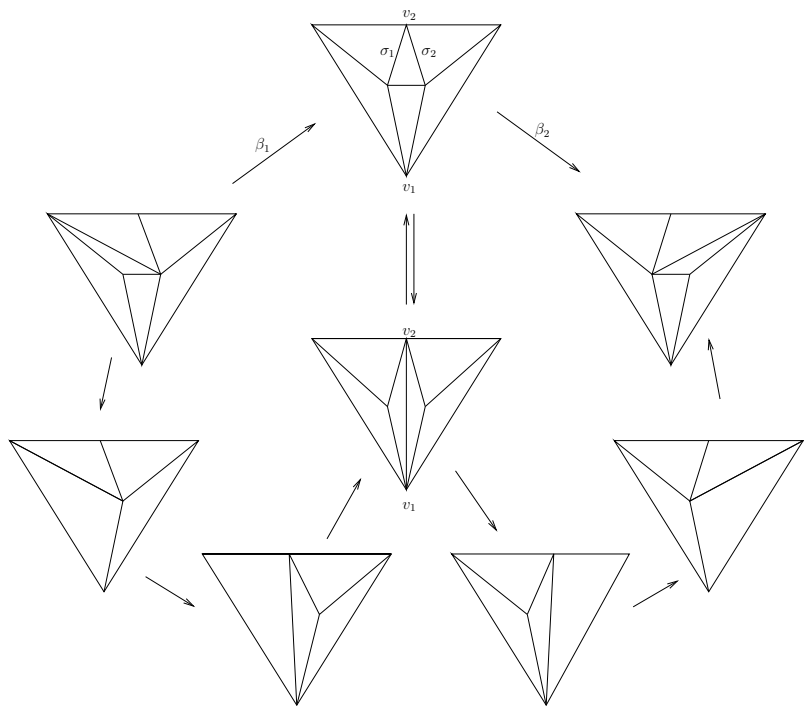
$b = 0$. Преобразования β_1^{-1} и β_2 уменьшают количество вершин. Цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ определен всегда, если в L больше 5 вершин.

$b = 2$. Комплексы L_1 и L_2 содержат вершины степени 3, а L не содержит вершин степени 3, но содержит вершины степени 4. Тогда σ_1 и σ_2 – ребра, выходящие из вершин степени 4.

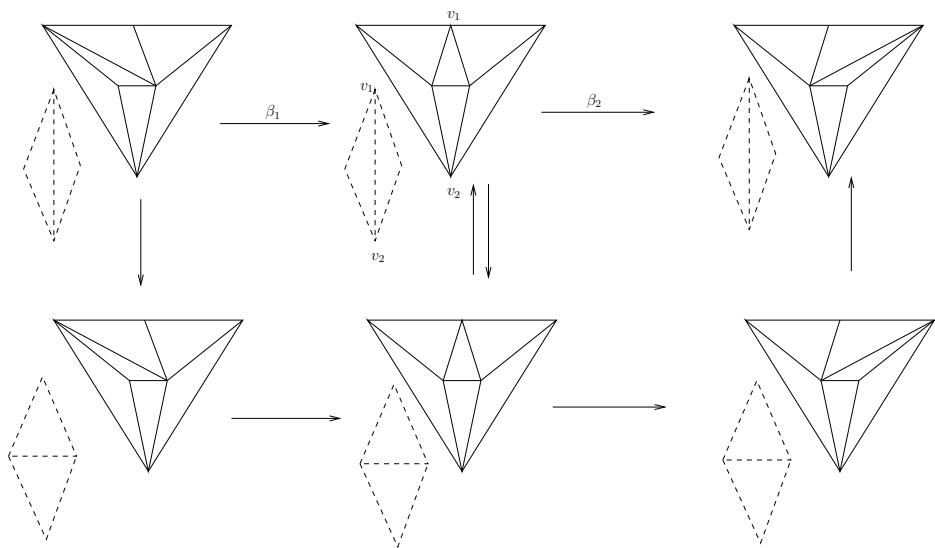
Если цикл $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ определен, то $\{\beta_1\} + \{\beta_2\} - \{\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)\} \in \Gamma_2^{a-\frac{1}{6}}$. При этом возможно, что вклад элементарного цикла $\gamma(L, \sigma_1, \sigma_2)$ ненулевой.

Цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ не определен в следующих случаях:

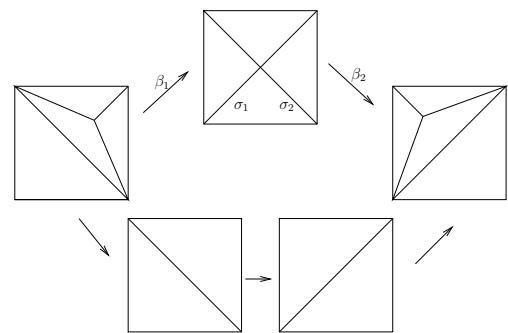
1. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь треугольнике Δ комбинаторной сферы, причем общая вершина на этих рёбер имеет степень, большую 4. В этом случае возникает дополнительное ребро, обозначенное $[v_1, v_2]$. Поэтому если это ребро присутствует, то изображенный способ упростить цикл не годится.



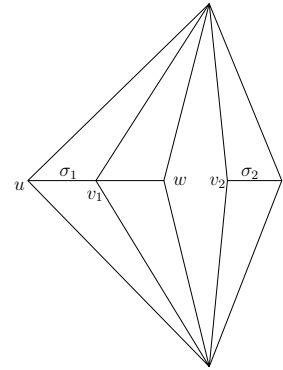
Если ребро $[v_1, v_2]$ уже лежит в комплексе L , то удалим его, добавив дополнительный цикл. Добавленные элементарные циклы не увеличивают сложности сфер, а полученная ситуация эквивалентна предыдущему случаю.



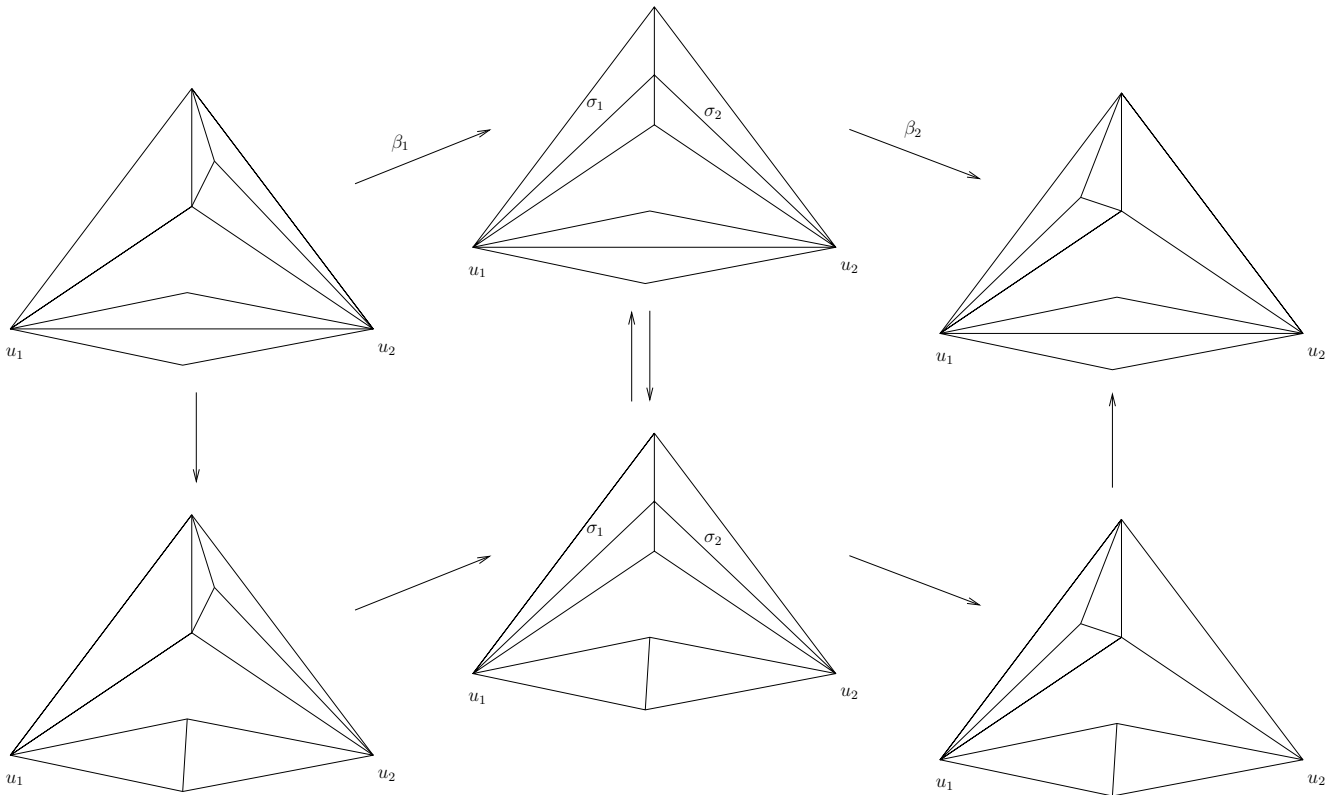
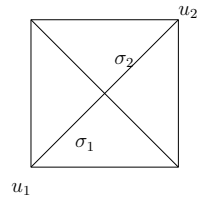
2. Рёбра σ_1 и σ_2 содержатся в каком-нибудь треугольнике Δ комбинаторной сферы, причем общая вершина этих рёбер имеет степень, равную 4. В этом случае упростить цикл можно одним элементарным циклом второго типа.



3. Рёбра σ_1 и σ_2 не лежат в одном треугольнике, но их линки в L совпадают, так что коммутация преобразований β_{σ_1} и β_{σ_2} невозможна. Тогда имеется два различных случая: σ_1 и σ_2 могут иметь или не иметь общую вершину. Пусть они не пересекаются. Тогда пусть v_1 - вершина степени 4, принадлежащая σ_1 . Ребро uw не может лежать в комбинаторной сфере L , а значит определено преобразование $\beta_3 = \beta_{uw}^{-1}$. $\beta_1 + \beta_3$ можно разложить в сумму линейную комбинацию элементарных циклов и цепей с носителем в графе $\Gamma^{k+\frac{1}{6}}$ согласно предыдущему случаю, а разность $\beta_2 - \beta_3$ - с помощью цикла $\Gamma(L, \sigma_2, uw)$.



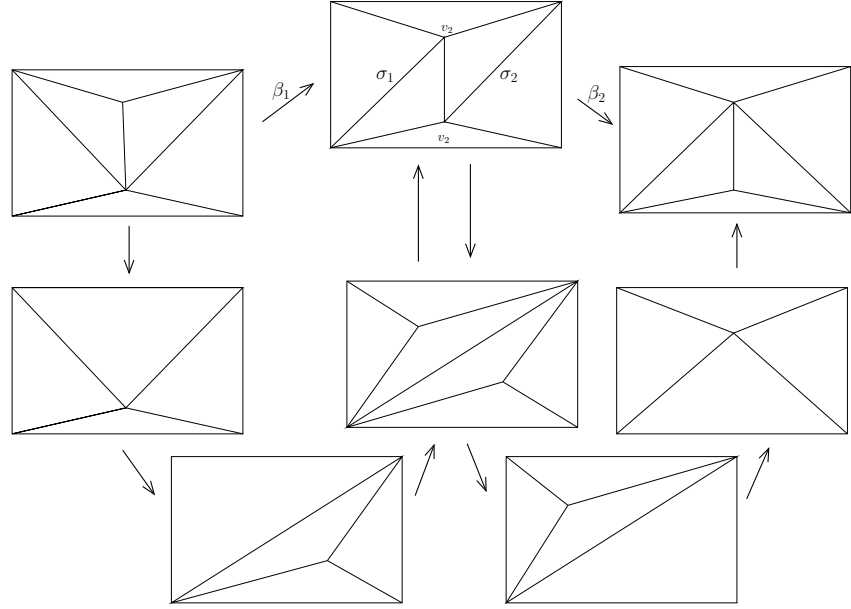
Если у σ_1 и σ_2 есть общая вершина, то упростить цикл можно воспользовавшись циклом второго типа наподобие случая (2). При этом в изображенном четырехугольнике должна отсутствовать диагональ u_1u_2 , так как она используется в этом цикле.



Остался последний случай - когда диагональ u_1u_2 присутствует в сфере L . Его можно разрешить наподобие аналогичного шага в случае (1) (на рисунке выше). После вычитания такого цикла мы сводим задачу к предыдущему случаю.

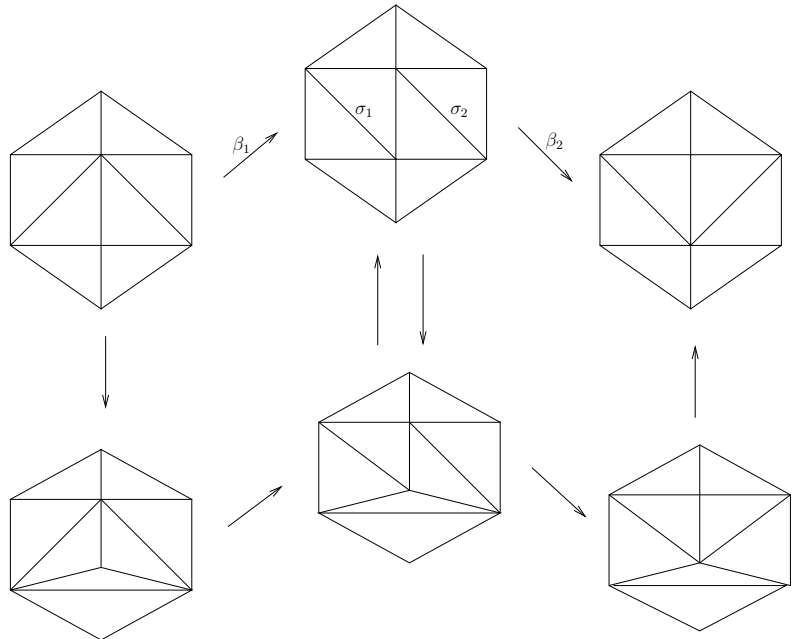
Итак, все случаи, когда цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2)$ не определен, разобраны.

Имеется единственный случай, когда этот цикл не понижает сложности цикла. Это происходит, если у вершин v_1 и v_2 (обозначения на рисунке) одинаковая степень. В этом случае цикл не упрощается путем вычитания $\gamma(L_1, \sigma_1, \sigma_2$. Чтобы упростить его, достаточно двух элементарных преобразований второго типа.



b = 4. Комбинаторная сфера L не содержит вершин степени 3 и 4, σ_1 и σ_2 – ребра, выходящие из вершин степени 5. L содержит не менее 12 вершин степени 5, при этом в бизвездных преобразованиях β_1 и β_2 участвуют (изменяют свои линки) не более 8 вершин. Значит, существует вершина степени 5 (обозначим ее v), общая для L_1, L_2 и L . Среди 5 отрезков, выходящих из v , найдутся хотя бы 3, с которыми определены бизвездные преобразования в L , ассоциированные с ними. Обозначим их e_1, e_2 и e_3 . Тогда цикл $\gamma(L_1, \sigma_1, e_i)$ может быть не определен только для одного из ребер e_i . Значит, существует i такое, что определены оба цикла $\gamma(L_1, \sigma_1, e_i)$ и $\gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$. Тогда носитель цепи $\beta_1 + \beta_2 - \gamma(L_1, \sigma_1, e_i) + \gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$ лежит в $\Gamma^{k+\frac{1}{2}}$ за исключением одного случая.

При $b = 4$ по причинам, аналогичным случаю $b = 2$, цикл $-\gamma(L_1, \sigma_1, e_i) + \gamma(L_1, \sigma_2, e_i)$ не всегда понижает сложность цикла. Способ устранить этот случай указан на рисунке.



Итак, мы доказали, что

Теорема 4.3. *Любой цикл в графе Γ_2 разлагается в линейную комбинацию элементарных.*

4.3 Значения класса когомологий c на элементарных циклах

В [14] были также посчитаны значения класса когомологий c на элементарных циклах. Они зависят от количества треугольников, соседних с изменяемыми при бизвездных преобразованиях вершинами.

Рассмотрим две функции от целочисленных переменных:

$$\rho(p, q) = \frac{q - p}{(p + q + 2)(p + q + 3)(p + q + 4)}$$

$$\omega(p) = \frac{1}{(p + 2)(p + 3)}$$

Тогда значения класса когомологий c на элементарных циклах задаются следующей таблицей :

1 тип: a, d, g	0
1 тип: b, e, h	$\rho(p, q)$
1 тип: c, i	$\rho(0, q) - \rho(0, p)$
1 тип: f	$\rho(0, q) + \rho(0, p)$
2 тип: a	$\omega(p) - \omega(q) + \omega(r) - \frac{1}{12}$
2 тип: b	$\omega(p) - \omega(q) - \omega(r) + \omega(k)$
2 тип: c	$\omega(p) + \omega(q) + \omega(r) + \omega(k) + \omega(l) - \frac{1}{12}$

4.4 Основные шаги алгоритма

Рассмотрим симплициальный комплекс L . Зафиксируем на нем ориентацию.

Алгоритм подсчета разбит на несколько действий :

1. Найти последовательности флипов, сводящие линк каждого $(n-4)$ -симплекса комплекса L к границе стандартного симплекса.
2. Для каждой вершины v линка каждого $(n-4)$ -симплекса σ рассмотрим $link_{link\sigma}(v)$. Тогда каждый из полученных комплексов является 2-мерной комбинаторной сферой. Индуцируем последовательности флипов на эти комплексы как на подкомплексы $link\sigma$.
3. Для каждой получившейся цепочки флипов, сводящей 2-мерную комбинаторную сферу к границе 3-симплекса, замкнуть эту цепь в цикл в комплексе Γ_2 любым способом, однозначно строящимся по комбинаторному типу исходной сферы.
4. Получившиеся циклы - циклы в графе Γ_2 . Разложить эти циклы в виде линейной комбинации элементарных циклов.
5. Посчитать вклад каждого элементарного цикла, получить для каждого σ вклад $f(\langle link\sigma \rangle)$ и построить цикл

$$f_{\sharp}(L) = \sum_{\sigma \in L, \dim \sigma = n-4} f(\langle link\sigma \rangle) \sigma,$$

представляющий элемент в гомологиях, двойственный к первому классу Понтрягина.

5 Особенности реализации

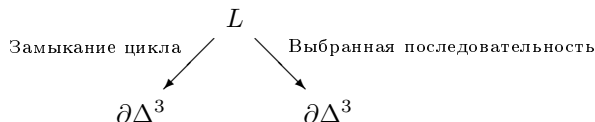
Итак, задача сведена к тому, чтобы посчитать $p_1(M_{15}^8)$. Будем делать это с помощью только что описанного алгоритма.

В M_{15}^8 3003 4-симплекса, и даже если использовать то, что большое количество этих симплексов переводятся друг в друга вместе со всем M_{15}^8 при автоморфизмах, получится не менее 60 комбинаторных типов $\text{link } \sigma^4$. Поэтому подсчет вручную с использованием алгоритма Гайфуллина – крайне трудоемкая задача. Однако этот алгоритм полностью комбинаторный, поэтому его можно реализовать с помощью компьютера.

При этом алгоритм надо немного изменить. Проверка изоморфизма комбинаторных сфер на компьютере требует большого времени. Алгоритм, приведенный выше, приведен для классов изоморфизма комбинаторных многообразий и, соответственно, не зависит от нумерации комплекса.

Для хранения комплекса в памяти компьютера и его изменения нужно пронумеровать вершины. Тогда все симплексы будут записываться как некоторое множество чисел без повторений. Симплексы совпадают, если совпадают такие множества. Поэтому удобно хранить каждый симплекс как упорядоченное множество чисел, чтобы избежать различных записей.

В этом случае бизвездные преобразования соединяют по-разному занумерованные комплексы. Кроме того, при замыкании в цикл бизвездных преобразований получаемое бизвездные преобразования может соединять комплексы с разными нумерациями. При этом эту нестыковку нумерации можно передвинуть в любое место цикла, так как нумерации можно согласовать на любой цепи, но не на цикле. В итоге границы симплекса $\partial\Delta^3$ будут занумерованы двумя разными способами.



Заметим, что среди всех используемых в алгоритме в [16] элементарных циклов, только цикл типа (2a) не сохраняет нумерацию вершин ни при одной нумерации. Это легко преодолеть, изменив этот цикл на эквивалентный 12 (который, если проследить доказательство в [16], возникает в нем исходно).

После этого изменения, если исходный цикл сохранял нумерацию везде, кроме замыкания в $\partial\Delta^3$, то и при представлении в виде линейной комбинации элементарных все участвующие флипы будут сохранять нумерацию.

Цикл замыкается по границе 3-мерного симплекса. Любые две по-разному пронумерованные границы симплекса можно перевести друг в друга бизвездными преобразованиями, при которых не будет появляться больше одной дополнительной вершины, поэтому можно добавить эти преобразования, не изменив значение формулы на цикле. При реализации эти преобразования можно не добавлять ровно потому, что они не дают вклада в формулу.

Вторая особенность реализации заключается в том, что для того, чтобы замкнуть полученную при помощи BISTELLAR цепь, использовать не затратный рекурсивный алгоритм, который проходит по всем возможным бизвездным преобразованиям, понижающим сложность комбинаторной сферы, а выбрать один фиксированный цикл, упрощающий сферу, строящийся по нумерации однозначно.

Таким образом, для каждой получившейся цепочки флипов, сводящей 2-мерную комбинаторную сферу к границе 3-симплекса, надо замкнуть эту цепь в цикл любым образом, однозначно строящимся по нумерации вершин сферы. Например, можно делать по очереди первое возможное лексикографически бизвездное преобразование, понижающее сложность комбинаторной сферы и таким образом по индукции дойти до симплекса.

Проблема такого замыкания состоит в том, что, в отличие от предложенного в [14], оно не сохраняет локальности формулы, потому что оно зависит от нумерации комплекса. Докажем, что при этом полученная в результате цепь из $H_4(X, \mathbb{Q})$ будет представлять тот же класс гомологий, что и указанная в [14].

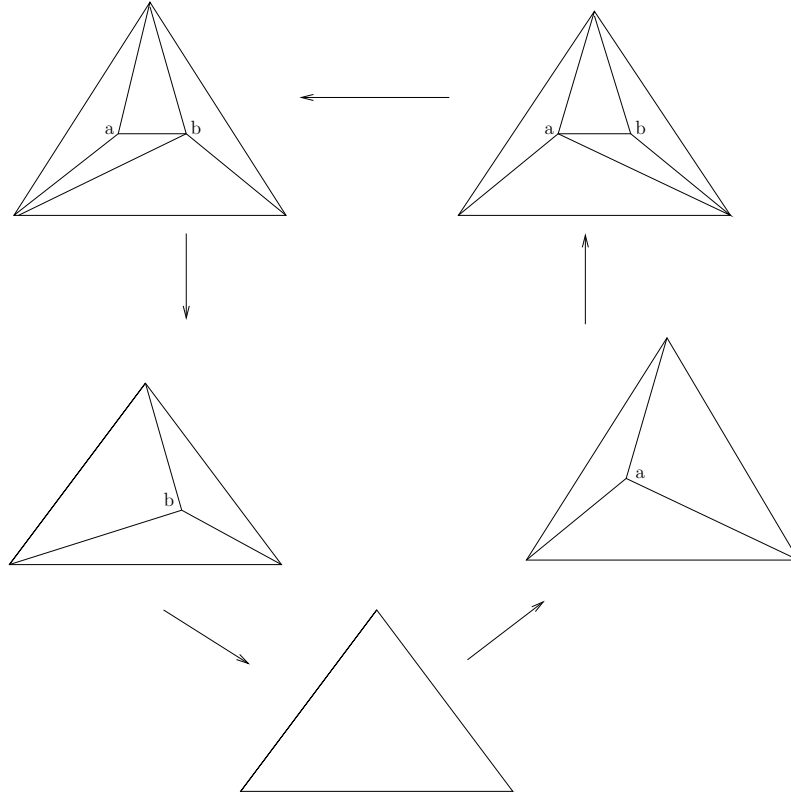


Рис. 12: Измененный элементарный цикл типа (2а)

Лемма 5.1. *Класс гомологий, получаемый в алгоритме подсчета первого класса Понтрягина, не зависит от выбора замыкания цепи в графе Γ_2 в случае, когда это замыкание однозначно строится по нумерации 2-мерной сферы.*

Доказательство. Пусть f – локальная формула, полученная при помощи алгоритма [14], а g – нелокальная формула, определенная выше.

Тогда докажем, что получаемые с их помощью циклы отличаются на границу. В этом случае их представители в гомологиях совпадут.

Пусть L – произвольное комбинаторное многообразие размерности n . По определению,

$$f_{\sharp}(L) - g_{\sharp}(L) = \sum_{\sigma^{n-4} \in K} (f(\langle \text{link } \sigma \rangle) - g(\langle \text{link } \sigma \rangle)) \sigma$$

Рассмотрим коэффициент при каждом симплексе σ . Он получается следующим образом: сначала комбинаторная сфера $\text{link } \sigma$ сводится к границе трехмерного симплекса, затем полученная цепь бизвездных преобразований индуцируется на линк каждой вершины этой сферы, тогда получается цепь в комплексе Γ_2 , которую для функции f мы замыкаем одним образом, а для g – другим. Тогда мы получим два цикла преобразований, разность вкладов на которых даст нам искомый коэффициент. Вклад на разности циклов равен разности их вкладов, поэтому рассмотрим разность этих двух циклов как циклов в комплексе Γ_2 . Преобразования, индуцированные из сведения трехмерной сферы к границе симплекса, сократятся, и останется цикл, образованный двумя построенными замыканиями.

Таким образом, полученный цикл зависит только от комбинаторного типа и нумерации двумерной комбинаторной сферы $\text{link}_{\text{link } \sigma} v$, где v – вершина $\text{link } \sigma$.

Укажем теперь явно цепь, границей которой будет являться $f_{\sharp}(L) - g_{\sharp}(L)$. Каждый из объектов $\text{link}_{\text{link } \sigma} v$ – двумерная комбинаторная сфера, являющийся линком $(n-3)$ -мерного симплекса. Обозначим

этот симплекс τ . Тогда положим коэффициент при τ равным значению на двумерной комбинаторной сфере $\text{link } \tau$ формулы $f_{\sharp}(L) - g_{\sharp}(L)$. Его граница совпадает с $f_{\sharp}(L) - g_{\sharp}(L)$. □

5.1 Описание программы

Программа написана на языке программирования GAP (Groups, Algorithms, Programming) [6], так как на этом языке используемая для упрощения 3-мерной комбинаторной сферы программа BISTELLAR.

Работу программы можно разделить на следующие основные этапы.

Для каждого $(n - 4)$ -мерного симплекса делаются следующие 2 процедуры:

1. создание цикла η из бизвездных преобразований;
2. разложение этого цикла на элементарные и подсчет соответствующих значений локальной формулы.

Таким образом, получается цикл

$$f_{\sharp}(K) = \sum_{\sigma \in K, \dim \sigma = n-4} f(\langle \text{link } \sigma \rangle) \sigma.$$

Последний этап программы – это подсчет класса гомологий, в котором лежит полученная цепь. Для подсчета гомологий исходного комплекса используется пакет языка GAP – `simpcomp` ([5]).

Этот пакет дает возможность в явном виде выписать представители порождающих группу H_{n-4} как симплициальные циклы. Найденный в программе цикл $f_{\sharp}(K)$ нужно представить в виде линейной комбинации этих представителей и $(n - 3)$ -границ. Программа решает эту линейную систему и выдает ответ.

В течение всей работы программы нужно следить за ориентацией каждого комплекса. Ориентация комплекса в программе задается парой $[j, \pm 1]$, где j – номер симплекса в комплексе (как лексикографически упорядоченном массиве симплексов максимальной размерности), а второй элемент – ориентация этого симплекса. Тогда ориентация всего комплекса однозначно определена.

Слова благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Александру Александровичу Гайфуллину за постановку интересной задачи, за ценные обсуждения и постоянное внимание к этой работе.

Список литературы

- [1] U. Brehm and W. Kühnel. Combinatorial manifolds with few vertices. *Topology*, 26:465–473, 1987.
- [2] U. Brehm and W. Kühnel. 15-vertex triangulations of 8-manifolds. *Math. Ann.*, 294:167–193, 1992.
- [3] J. Cheeger. Spectral geometry of singular Riemannian spaces. *J. Differential Geom.*, 18:575–657, 1983.
- [4] J. Eells and N.H. Kuiper. Manifolds which are like projective planes. *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.*, 14:181–222, 1962.
- [5] F. Effenberger and J. Spreer. `simpcomp` - a GAP toolkit for simplicial complexes, Version 2.0.0, 2013.
- [6] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.7*, 2015.
- [7] W. Kühnel and T.F. Banchoff. The 9-vertex complex projective plane. *Math. Intell.*, 5(3):11–22, 1983.
- [8] F.H. Lutz. Triangulated manifolds with few vertices: Combinatorial manifolds.
- [9] R. MacPherson. The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class. *Berlin: Springer*, (497):105–124, 1978.

- [10] L. Milin. A combinatorial computation of the first Pontryagin class of the complex projective plane. *Geom.Dedicata*, 49:253–291, 1994.
- [11] U. Pachner. Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.*, (57):69–86, 1987.
- [12] А.М. Габриэлов, И.М. Гельфанд, and М.В. Лосик. Комбинаторное вычисление характеристических классов. *Функци. анализ и его прил.*, 10(2):12–28, 1975.
- [13] А.М. Габриэлов, И.М. Гельфанд, and М.В. Лосик. Комбинаторное вычисление характеристических классов. *Функци. анализ и прил.*, 9(2):12–28, 1975.
- [14] А.А. Гайфуллин. Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина. *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, 68(5):13–66, 2004.
- [15] А.А. Гайфуллин. Построение комбинаторных многообразий заданными линиями вершин. *Изв. РАН*, 72(5):3–62, 2008.
- [16] А.А. Гайфуллин. Пространства конфигураций, бизвездные преобразования и комбинаторные формулы для первого класса Понтрягина. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, 268:1–18, 2010.