О некоторых новых пространствах функций переменной гладкости.

А. И. Тюленев *

17 сентября 2014 г.

1 Введение

В этой статье мы рассмотрим некоторые новые модификации функциональных пространств типа пространств Бесова переменной гладкости. Пространствам функций переменной гладкости (типа пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля) и их различным обобщениям посвящена обширная литература. Укажем лишь работы [2], [3], [4], [24], [25], [26], [29], [28], [36] (см. также многочисленные ссылки в этих работах).

Интересно отметить, что в большей части имеющихся к настоящему времени работ изучались пространства переменной гладкости, элементами которых являются распределения из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$. В связи с этим основными инструментами исследования были теория Литлвуда-Пэли и методы Фурье - анализа.

Будем говорить, что весовая последовательность (задающая переменную гладкость), $\{s_k\} = \{s_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, если для $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &1) \frac{1}{C_1} 2^{\alpha_1(k-l)} \leq \frac{s_k(x)}{s_l(x)} \leq C_1 2^{\alpha_2(k-l)}, \text{ при } l \leq k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^n; \\ &2) s_k(x) \leq C_2 s_k(y)(1 + 2^k|x-y|)^{\alpha_3} \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Константы $C_1, C_2 > 0$ в (1.1) не зависят ни от индексов k, l ни от точек x, y.

Для дальнейшего нам понадобится стандартное разложение единицы. Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $\Psi_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, $\Psi_0(x) = 1$ при $x \in B^n$, $\mathrm{supp}\Psi_0 \subset 2B^n$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $\Psi_j(x) := \Psi_0(2^{-j}x) - \Psi_0(2^{-j+1}x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

В работах [24], [25], [26], [29] пространства Бесова переменной гладкости определялись следующим образом (мы рассматриваем случай только постоянных показателей интегрируемости).

Определение 1.1. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\{s_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$. Символом $B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех распределений $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ с конечной нормой

$$\|f|B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| := \|s_j F^{-1}(\Psi_j F[f])|l_q(L_p(\mathbb{R}^n))\|. \tag{1.2}$$

*Московский Физико-Технический Институт, Москва. E-mail: tyulenev-math@yandex.ru.

В (1.2) символы F и F^{-1} обозначают прямое и обратное преобразование Фурье соответственно.

Следует отметить работы [23], [28], [36], в которых развивался аксиоматический подход к функциональным пространствам (как постоянной, так и переменной гладкости). Вместо базового пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ в норме (1.2) рассматривалось более общее функциональное пространство, удовлетворяющее определенному набору аксиом. Пространства, изучаемые в [28], [36] включают в себя шкалу пространств переменной гладкости из [25], [26] как частный случай.

На наш взгляд интерес представляют также пространства переменной гладкости, элементами которых являются локально интегрируемые в некоторой степени функции, а не распределения. Такие пространства активно изучались О. В. Бесовым. Укажем лишь работы [2], [3], [4] (см. также ссылки в этих работах). Отметим, что в указанных статьях были использованы классические методы теории функций и норма в пространстве функций переменной гладкости изначально определялась с помощью классических разностей.

В работах [24], [28] были доказаны теоремы о характеризации различных пространств функций переменной гладкости (и их обобщений) с помощью усредненных (только по шагу) разностей, изначально же норма в этих пространствах определялись с помощью декомпозиции Литлвуда-Пэли ([24]) или с помощью максимальных функций Петре ([28]). Предполагалось, что весовая последовательность $\{s_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ и дополнительно требовалось условие $\alpha_1 > 0$.

В работах [3], [4] предполагалось, что $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ и $\alpha_1 > 0$. Класс ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ отличается от класса $Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ заменой условия 2) на условие

$$2')s_k(x) \leq 2^{\alpha_3} s_k(y) \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, |x-y| \leq 2^{-k}. \tag{1.3}$$

Очевидно $Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2} \subset^{loc} Y^{\widetilde{\alpha_3}}_{\alpha_1,\alpha_2}$, где $\widetilde{\alpha_3}$ зависит лишь от α_3 и константы C_2 из 1.1. Весовой класс ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ строго шире класса $Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, поскольку содержит экспоненциально растущие на бесконечности функции.

Из анализа определений пространств Бесова переменной гладкости, которые использовались в работах [3], [4], [24], [28] мы видим, что в этих работах требовалось достаточно жесткое условие $\alpha_1 > 0$ (в том случае, если элементами этих пространств были локально интегрируемы в некоторой степени функции). Это ограничение естественно в случае, когда $s_k \equiv C_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (C_k – положительные константы), поскольку иначе мы вынуждены прибегать к теории распределений. В случае же переменной гладкости это весьма грубое условие.

Некоторые важные для приложений задачи (например задача описания следов функций из весовых пространств Соболева) требуют привлечения теории пространств функций переменной гладкости (элементами которых являются локально интегрируемые функции), в определении которых условие $\alpha_1 > 0$ не является необходимым и оказывается слишком ограничительным. В работе [35] автором были введены новые пространства $\widetilde{B}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ (при $p, q \in (1,\infty)$) и показано, что эти пространства являются следами весовых пространств Соболева $\widetilde{W}^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma)$ на плоскости размерности $1 \leq d < n$, в случае если вес γ локально удовлетворяет условию Макенхаупта (в работе [35] эти пространства обозначались символом $\overline{B}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$). При этом, весовая последовательность $\{\gamma_k\}$, вообще говоря может принадлежать весовому классу ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ при $\alpha_1 < 0$ и не принадлежать никакому классу ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha'_1,\alpha'_2}$ при $\alpha'_1 > 0$ (см. замечание 4.4 ниже). По этой причине методы работ [3], [4], [24] оказываются неприменимы для изучения пространств $\widetilde{B}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$. Также эти пространства не вписываются в аксиоматику работ [23], [28], [36].

Следует отметить, что в работе [2] пространства Бесова переменной гладкости изучались при минимально возможных ограничениях на переменную гладкость. Однако в [35] показано, что пространства, изучаемые в работах [2] (а значит и в [3], [4]) не являются вообще говоря следами пространств Соболева $\widetilde{W}^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma)$ с весом локально удовлетворяющим условию Макенхаупта.

Таким образом, требуется новый подход к пространствам функций переменной гладкости, позволяющий в частности исследовать пространство $\widetilde{B}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$, являющиеся следом весового пространств Соболева с весом γ, локально удовлетворяющим условию Макенхаупта. Для этого мы вводим при $p, q, r \in (0, \infty]$ новое пространство Бесова переменной гладкости $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ при слабых ограничениях на переменную гладкость $\{t_k\}$.

Основные отличия изучаемого нами пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ от имеющихся ранее аналогов состоят в следующем:

1) Норма в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ определяется при помощи **разностей усредненных как по шагу так и по пространственной переменной**. Кроме того, мы используем параметр r, который позволяет получить более тонкую поправку к свойствам интегрируемости функций в пространствах переменной гладкости. Важно отметить, что такая конструкция двукратно усредненных разностей была использована в работе [23] при построении эквивалентных нормировок в пространствах типа пространств Бесова и Лизоркина-Трибеля. Также такие конструкции были использованы недавно О. В. Бесовым в работах [15], [16] при изучении пространств функций нулевой гладкости. О. В. Бесовым было выяснено, что аппарат двукратно усредненных разностей оказывается более подходящим (чем усредненные лишь по шагу разности) для изучения функций, не обладающих достаточной гладкостью. Однако наши пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ не вписываются в аксиоматику работы [23] по причине слабых ограничений, которые мы налагаем на весовую последовательность $\{t_k\}$.

2) Мы вводим класс весовых последовательностей $X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ (см. определение 2.5). Необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\{t_k\}$ весовому классу $X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ выражаются в терминах не поточечных, а в некотором смысле интегральных оценок. Класс $X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ оказывается более естественным (чем класс ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$) для изучаемых нами пространств, поскольку норма в них задается при помощи разностей **усредненных как по шагу так и по пространственной переменной**. Конечно, в случае, когда $t_k \equiv C_k$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$ наши ограничения на весовую последовательность $\{t_k\}$ будут переходить в ранее известные поточечные условия. Мы покажем также, что при $\{t_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$,$\alpha_1 > 0$, $l > \alpha_2$ и постоянных $p, q \in [1, \infty)$ пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ будут совпадать с пространствами, изучаемыми в работах [24], [25], [26], [29].

Для исследования пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ мы модифицируем методы нелинейной сплайн-аппроксимации, развитые в работе [20], где они применялись при изучении классических пространств Бесова. Отметим, что изучение пространств функций переменной гладкости методами нелинейной сплайн-аппроксимации ранее не проводилось и поэтому может представлять самостоятельный интерес. Мы увидим, что многие известные к настоящему времени теоремы, которые были доказаны для различных пространств типа пространств Бесова, переменная гладкость в которых определяется весовой последовательностью $\{s_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, имеют естественные аналоги для рассматриваемых нами пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, переменная гладкость в которых определяется весовой последовательностью $\{t_k\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Так например, мы докажем различные теоремы об эквивалентных нормировках пространств типа пространств Бесова переменной гладкости, докажем теорему об атомарном разложении этих пространств. Теоремы об атомарном разложении являются мощным инструментом для исследования различных функциональных пространств. В работах [23], [26], [28], [36], эти теоремы были доказаны при условии наличия нулевых моментов высокого порядка у атомов из представления данного распределения. Число нулевых моментов, которое должны иметь атомы, определялось показателями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (которые контролируют поточечное поведение весовой последовательности, определяющей переменную гладкость). Эти условия трудно проверить в конкретных задачах. Так, например, если мы имеем информацию о равенстве нулю моментов высокого порядка у атомов из представления функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то мы не можем,вообще говоря утверждать, что равны нулю соответствующие моменты следов этих атомов на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$. По этой причине мы не можем решить ранее известными методами задачу о следах для пространств функций переменной гладкости при минимально возможных ограничениях на весовую функциональную последовательность $\{s_k\}$. В работе [29] задача о следах для пространств Бесова переменной гладкости была решена при помощи теоремы об атомарном разложении при определенных ограничениях на весовую последовательность $\{s_k\}$. Эти ограничения специально были подобраны так, чтобы избежать проверки наличия нулевых моментов у атомов из разложения следа. Одним из главных на наш взгляд преимуществ методов нелинейной сплайн-аппроксимации является тот факт, что атомарное разложение функций из соответствующих пространств Бесова реализуется при помощи атомов (сплайнов), не зависящих от функции f. Кроме того атомы имеют достаточно простую структуру и являются в многомерном случае тензорным произведением одномерных атомов. Благодаря специальному выбору этих атомов не нужно дополнительно требовать, чтобы атомы имели нулевые моменты высокого порядка. С помощью теоремы об атомарном разложении мы легко получим различные теоремы вложения и теоремы компактности для пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$. Также мы охарактеризуем след пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$.

2 Определения и вспомогательные утверждения

На протяжении всей работы мы будем придерживаться следующего соглашения. Будем использовать символы C и M для обозначения вообще говоря различных "несущественных" констант, фигурирующих в различных оценках. Иногда мы будем специально подчеркивать (если это важно для понимания оценки), от каких параметров зависит та или иная константа.

Будем называть весовой функцией (весом) измеримую функцию $\gamma : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Положим $\gamma(E) := \int\limits_E \gamma(x)\, dx$.

Символом $L_p(E)$ обозначим множество всех классов эквивалентности (состоящих из почти всюду равных функций) с нормой

$$\|f|L_p(E)\| := \left(\int\limits_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ если } 1 \le p < \infty,$$

$$\|f|L_\infty(E)\| := \operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

Для измеримой функции $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, измеримого множества E и веса γ символом $L_p(E, \gamma)$ обозначим множество всех классов эквивалентности (состоящих из почти всюду равных функций) с нормой $\|g|L_p(E, \gamma)\| := \|\gamma g|L_p(E)\|$.

Символом Q^n в дальнейшем будем обозначать открытый куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ с ребрами параллельными координатным осям. Через $r(Q^n)$ обозначим длину ребра куба Q^n, а через $|Q^n|$ – его лебегову n - мерную меру. При $\delta > 0$ символом δQ^n обозначим куб, центром которого является центр куба Q^n, а длина ребра $r(\delta Q^n) := \delta r(Q^n)$. Для $m = (m_1, .., m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ пусть $Q^n_{k,m} := \prod\limits_{i=1}^{n} (\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k})$ – открытый двоичный открытый куб с длиной ребра 2^{-k}, $\widetilde{Q}^n_{k,m} := \prod\limits_{i=1}^{n} [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k})$. Положим также $I^n := \prod\limits_{i=1}^{n} (-1, 1)$. Символом δB^n (δS^n) будем обозначать n - мерный шар (сферу) радиуса δ с центром в начале координат.

При $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ положим $x + E := \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + z, z \in E\}$.

В работе [32] В. С. Рычковым был введен класс весов $A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, обобщающий известный весовой класс Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$ (при $1 < p \le \infty$).

Определение 2.1. ([32]) Пусть $p \in (1, \infty)$, $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, если

$$C^{loc}_{\gamma,p,a} := \sup_{Q^n : r(Q^n) \le a} \frac{1}{|Q^n|} \int\limits_{Q^n} \gamma(x)\, dx \left[\frac{1}{|Q^n|} \int\limits_{Q^n} \gamma^{-\frac{p'}{p}}(x)\, dx \right]^{\frac{p}{p'}} < +\infty.$$

Определение 2.2. ([30]) Пусть $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A^{loc}_1(\mathbb{R}^n)$, если существует не зависящая от куба Q^n константа $C^{loc}_{\gamma,1,a} > 0$ такая, что для всех кубов с длиной ребра $r(Q^n) \le a$

$$\frac{1}{|Q^n|} \int\limits_{Q^n} \gamma(x)\, dx \le A\gamma(x) \text{ для почти всех точек } x \in Q^n.$$

Символом $C^{loc}_{\gamma,1,a}$ обозначим наименьшую из констант A, для которых справедливо вышеприведенное неравенство.

Определение 2.3. ([32]) Пусть $a > 0$. Будем говорить, что вес $\gamma \in A^{loc}_\infty(\mathbb{R}^n)$, если для некоторого $\alpha \in (0, 1)$

$$\sup_{r(Q^n) \le a} \left(\sup_{F \subset Q^n, |F| \ge \alpha |Q^n|} \frac{\gamma(Q^n)}{\gamma(F)} \right) < \infty.$$

Замечание 2.1. ([32]) Если вес $\gamma \in A^{loc}_\infty(\mathbb{R}^n)$, то существует число $p \in [1, \infty)$ такое, что $\gamma \in A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.2. При $p \in (1, +\infty]$ определение класса $A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ не зависит от выбора параметра a. При различных $a > 0$ константы $C^{loc}_{\gamma,p,a}$ оцениваются одна через другую ([32]). Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо и для $A^{loc}_1(\mathbb{R}^n)$.

Для $f \in L^{loc}_1(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$ через $M_{\le a} f$ обозначим локальную максимальную функцию Харди-Литтлвуда, то есть

$$M_{\le a} f(x) := \sup_{x \in Q^n, r(Q^n) \le a} \frac{1}{|Q^n|} \int\limits_{Q^n} |f(y)|\, dy.$$

Следующий фундаментальный результат обобщает классический результат Макенхаупта [33](ch.5, sect.3, theorem 1).

Теорема 2.1. *([32]) Пусть $\gamma \in A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $a > 0$. Тогда существует константа $A = A(n, p, a, \gamma) > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) \left\{ M_{\le a}[f](x) \right\}^p\, dx \le A \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) |f(x)|^p\, dx$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \gamma^{\frac{1}{p}})$.

Теорема 2.2. *(неравенство Харди для последовательностей) Пусть $0 < q \leq \infty$, $\mu \leq q$, $\beta \geq 0$, $\{a_k\}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда неравенство (с очевидными модификациями для $q = \infty$ или $\mu = \infty$)*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{qk\beta}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{qk\beta}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

справедливо с константой $C > 0$, не зависящей от последовательности $\{a_k\}$ в случаях

$$|b_k| \leq C\left(\sum_{j=k}^{\infty} |a_k|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \text{ при условии что } \beta > 0 \text{ либо} \tag{2.2}$$

$$|b_k| \leq C2^{-k\lambda}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^{j\mu\lambda}|a_k|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \text{ при условии что } \lambda > \beta. \tag{2.3}$$

Также в дальнейшем нам понадобится следующее элементарное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $r \in (0, \infty]$, $f_j \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ при $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда при $\mu \leq \min\{1, r\}$ справедливо неравенство*

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} f_j|L_r(\mathbb{R}^n)\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j|L_r(\mathbb{R}^n)\|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}. \tag{2.4}$$

Доказательство легко следует из неравенства Йенсена.

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty]$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Для функции $g \in L_r^{loc}(\Omega)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ и куба Q^n определим разности l - ого порядка формулами

$$\Delta^l(h, \Omega)g(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} C_l^j(-1)^{l+j}g(x + jh), \text{ при } [x, x + hl] \subset \Omega, \\ 0, \text{ в противном случае ;} \end{cases}$$

$$\overline{\Delta}_r^l(t, \Omega)g(x) := \left(\frac{1}{t^n}\int\limits_{tI^n} |\Delta^l(h, \Omega)g(x)|^r\, dh\right)^{\frac{1}{r}} \text{ при } x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\delta_r^l(Q^n, \Omega)g := \left(\frac{1}{[r(Q^n)]^{2n}}\int\limits_{r(Q^n)I^n}\int\limits_{Q^n} |\Delta^l(h, \Omega)g(x)|^r\, dxdh\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Положим $\Delta^l(h)g := \Delta^l(h, \mathbb{R}^n)g$, $\overline{\Delta}_r^l(t)g := \overline{\Delta}_r^l(t, \mathbb{R}^n)g$, $\delta_r^l(Q^n)g := \delta_r^l(Q^n, \mathbb{R}^n)g$

Для куба Q^n через $\omega_l(\varphi, Q^n)_r$ обозначим модуль непрерывности функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ на кубе Q^n в метрике L_r, то есть

$$\omega_l(\varphi, Q^n)_r := \sup_{|h|>0} \|\Delta^l(h, Q^n)\varphi|L_r(\mathbb{R}^n)\|.$$

Хорошо известна (см. [6] случае $r \geq 1$, [34] – общий случай) двусторонняя оценка

$$C_1\delta_r^l(Q^n,Q^n)\varphi \leq [|Q^n|]^{-\frac{1}{r}}\omega_l(\varphi,Q^n)_r \leq C_2\delta_r^l(Q^n,Q^n)\varphi. \tag{2.5}$$

Константы C_1, C_2 в (2.5) не зависят ни от функции φ, ни от куба Q^n.

Определим для куба Q^n и функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ локальное наилучшее приближение полиномами степени ниже l равенством

$$E_l(\varphi,Q^n)_r := \inf_{deg(P)<l}\|\varphi - P|L_r(Q^n)\|.$$

Определим также для куба Q^n и функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ локальное наилучшее приближение полиномами *координатной степени* ниже l (суммарная степень полинома при этом, очевидно, не превосходит $n(l-1)$) равенством

$$\widehat{E}_l(\varphi,Q^n)_r := \inf_{deg_i(P)<l}\|\varphi - P|L_r(Q^n)\|,$$

где нижняя грань взята по всем полиномам P, степень которых по переменной x_i меньше l при каждом $i \in \{1,..,n\}$.

Из результатов работы [34] следует , что

$$C_3\delta_r^l(Q^n,Q^n)\varphi \leq [|Q^n|]^{-\frac{1}{r}}E_l(\varphi,Q^n)_r \leq C_4\delta_r^l(Q^n,Q^n)\varphi. \tag{2.6}$$

При этом константы C_3, C_4 в (2.6) не зависят ни от функции φ, ни от куба Q^n.

Будем говорить, что многочлен P_Q является многочленом почти наилучшего приближения полиномами степени ниже l функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ на кубе Q^n с константой $A \geq 1$, если

$$\|\varphi - P|L_r(Q^n)\| \leq AE_l(\varphi,Q^n)_r.$$

Аналогичным образом определяется понятие многочлена почти наилучшего приближения полиномами *координатной степени* ниже l функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ на кубе Q^n с константой $A \geq 1$.

Определение 2.4. Пусть $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2 \in (0,+\infty]$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2)$. Символом $\widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ обозначим множество кратных последовательностей положительных чисел $\{t_{k,m}\} = \{t_{k,m}\}_{k\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}$, для которых выполнены следующие условия:

1) Существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$t_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}}\frac{1}{t^{\sigma_1}_{j,\widetilde{m}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \leq c_1 2^{(k-j)\alpha_1} \text{ при } 0 \leq k \leq j, m \in \mathbb{Z}^n, \tag{2.7}$$

$$t^{-1}_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}}t^{\sigma_2}_{j,\widetilde{m}}\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \leq c_2 2^{(j-k)\alpha_2} \text{ при } 0 \leq k \leq j, m \in \mathbb{Z}^n \tag{2.8}$$

(если $\sigma_1 = \infty$ или $\sigma_2 = \infty$ нужно провести соответствующие модификации выражений (2.7) или (2.8)).

2) Для всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$0 < t_{k,m} \leq 2^{\alpha_3} t_{k,\widetilde{m}}, \text{при } m, \widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n, |m_i - \widetilde{m}_i| \leq 1, i = 1, .., n, \tag{2.9}$$

Замечание 2.3. Зафиксируем индексы $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}_0$. Пусть кратная последовательность $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$. Тогда, как нетрудно показать, для $k \geq j$ и $m, \widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $iQ^n_{k,m} \bigcap Q^n_{k-j,\widetilde{m}} \neq \emptyset$, справедливы неравенства

$$C^{-1} t_{k,m} \leq t_{k-j,\widetilde{m}} \leq C t_{k,m}, \text{ где}$$

константа C зависит от i, j, n, α_3, но не зависит от $k, m, \widetilde{m}$.

Определение 2.5. Пусть параметры α_3, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ имеют тот же смысл, что и в определении 2.4. Пусть $p \in (0, \infty]$. Символом $X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ обозначим множество весовых последовательностей $\{t_k\} := \{t_k(\cdot)\}^{\infty}_{k=0}$ таких, что $t_k : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$, $t_k \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ и $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\widetilde{\alpha},\sigma}$ при $\widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2) = (\alpha_1 - \frac{n}{p}, \alpha_2 - \frac{n}{p})$, где

$$t_{k,m} := \|t_k | L_p(Q^n_{k,m})\| \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.10}$$

При этом кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$, определяемую формулой (2.10), будем в дальнейшем называть кратной последовательностью p - ассоциированной с весовой последовательностью $\{t_k\}$.

Замечание 2.4. Очевидно, кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ может оказаться p - ассоциированной с несколькими различными весовыми последовательностями. Однако, в замечании 2.7 мы увидим, что это обстоятельство не будет препятствием для дальнейших построений.

Определение 2.6. Пусть $p \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A^{loc}_{\infty}(\mathbb{R}^{n+d})$. Положим $\Xi^{d,n}_{k,m} := Q^n_{k,m} \times 2^{-k} B^d \setminus 2^{-k-1} B^d$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in Z^n$. Кратную последовательность $\widehat{\gamma}_{k,m}$ определяемую по формуле

$$\widehat{\gamma}_{k,m} := \|\gamma | L_p(\Xi^{d,n}_{k,m})\| \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$$

будем называть кратной последовательностью, порожденной весом γ.

Отметим важные для дальнейшего свойства последовательности $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$.

Лемма 2.2. *Пусть $p \in (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A^{loc}_{\infty}(\mathbb{R}^{n+d})$, кратная последовательность $\widehat{\gamma}_{k,m}$ порождена весом γ. Пусть $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$, $k, j \in \mathbb{N}_0$, $j \geq k$, $G_{j,k,m}$ – произвольное множество кубов $Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}$, тогда:*

1) справедливо неравенство

$$\sum_{Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}} \widehat{\gamma}^p_{j,\widetilde{m}} \leq C 2^{(k-j)d\delta(\gamma)} \widehat{\gamma}^p_{k,m}, \tag{2.11}$$

в котором константа $C > 0$ и число $\delta(\gamma) > 0$ не зависит от $k, j, \widetilde{m}$;

2) справедливо неравенство

$$\sum_{Q^n_{j,\widetilde{m}} \in G_{j,k,m}} \widehat{\gamma}^p_{j,\widetilde{m}} \leq C \left(\frac{|\bigcup\limits_{Q^n_{j,\widetilde{m}} \in G_{j,k,m}} Q^n_{j,\widetilde{m}}|}{|Q^n_{k,m}|} \right)^{\delta'(\gamma)} \sum_{Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}} \widehat{\gamma}^p_{j,\widetilde{m}}, \tag{2.12}$$

в котором константа $C > 0$ и число $\delta(\gamma) > 0$ не зависят ни от параметров k, j, m, ни от множества $G_{j,k,m}$;

3) при $a \geq 1$, $|m - \widetilde{m}| \leq a$, $k \geq 0$

$$2^{-\delta_3(\gamma)}\widehat{\gamma}_{k,m} \leq \widehat{\gamma}_{k,\widetilde{m}} \leq 2^{\delta_3(\gamma)}\widehat{\gamma}_{k,m},$$

где число $\delta_3(\gamma) \geq 0$ не зависит ни от $k \in \mathbb{N}_0$ ни от $m \in \mathbb{Z}^n$;

4) для любого куба $Q^n_{k,m}$ и любого куба $Q^n_{k+1,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}$ при $k \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\widehat{\gamma}_{k,m} \leq C\widehat{\gamma}_{k+1,\widetilde{m}},$$

где константа C не зависит от выбираемых кубов.

Доказательство. Для доказательства 3) достаточно взять некоторый куб Q^{n+d}, содержащий оба множества $\Xi^{d,n}_{k,m}$ и $\Xi^{d,n}_{k,\widetilde{m}}$ и воспользоваться тем, что γ^p обладает свойством удвоения на кубе Q^{n+d} с константой удвоения, зависящей лишь от константы $C^{loc}_{\gamma,p,r(Q^{n+d})}$ (доказательство последнего факта аналогично доказательству соответствующего результата в [33](ch. 5). Доказательство свойства 4) аналогично доказательству свойства 3).

Докажем свойство 1), свойство 2) доказывается аналогично. Легко видеть, что

$$\frac{|\bigcup\limits_{Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}} \Xi^{d,n}_{j,\widetilde{m}}|}{|\Xi^{d,n}_{k,m}|} \leq C2^{(k-j)d}. \tag{2.13}$$

Пользуясь определением 2.7 и замечанием 2.11 нетрудно показать, что для некоторого $\delta(\gamma) > 0$, для любого куба Q^n, $r(Q^n) \leq a$ и любого измеримого множества $F \subset Q^n$ справедливо неравенство

$$\frac{\gamma^p(F)}{\gamma^p(Q^n)} \leq C\left(\frac{|F|}{|Q^n|}\right)^{\delta(\gamma)}, \tag{2.14}$$

в котором константа $C > 0$ не зависит ни от куба Q^n ни от множества F.

Из (2.13), (2.14) следует (2.11).

Лемма доказана.

Символом $\delta_1(\gamma) := \delta_1(\gamma, n, d)$ обозначим верхнюю грань множества всех $\delta(\gamma)$, для которых справедливо (2.11), а символом $\delta_2(\gamma) := \delta_2(\gamma, n, d)$ – верхнюю грань множества всех $\delta'(\gamma)$, для которых справедливо (2.12).

Отметим, что, вообще говоря, $\delta_1 \neq \delta_2$. Действительно, пусть $\gamma^p(x_1, x_2) := x_1^\beta$, при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\beta > 0$. Тогда, очевидно $\gamma^p \in A_\infty(\mathbb{R}^2)$. При этом $\delta_1(\gamma) = \frac{1}{2}$ при любом $\beta > 0$, в то время как $\delta_2(\gamma)$ зависит от числа $\beta > 0$.

Пример 2.1. Приведем важный для дальнейшего пример последовательности $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$. Пусть $d \in \mathbb{N}_0$, $p \in (0, \infty)$, вес $\gamma^p \in A^{loc}_\infty(\mathbb{R}^{n+d})$, кратная последовательность $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ. В силу замечания 2.11 $\gamma^p \in A^{loc}_{p_0}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p_0 \in [1, \infty)$. Пусть весовая последовательность $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\alpha'_3}_{\alpha'_1,\alpha'_2}$. Положим $\{s_{k,m}\} = \|s_k|L_p(Q^n_{k,m})\|$, $t_{k,m} := \widehat{\gamma}_{k,m}s_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Тогда кратная последовательность $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ при $\alpha_3 = \alpha'_3 + \delta_3(\gamma)$, $\alpha_2 = \alpha'_2 - \frac{n}{p} - \frac{d\delta_1(\gamma)}{p}$, $\alpha_1 = \alpha'_1 - \frac{n}{p} - \frac{(n+d)p_0}{p}$, $\sigma_2 = p$ и $\sigma_1 = p\frac{p'_0}{p_0}$. Действительно, соотношения (2.8) и (2.9) легко следуют из пунктов 1) и 3) леммы 2.2. Проверим (2.7) при $p_0 > 1$, случай $p_0 = 1$ рассматривается аналогично. Имеем в силу определения 2.2

$$t_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}}\frac{1}{t^{\sigma_1}_{j,\widetilde{m}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}}\le C2^{(k-j)(\alpha_1'-\frac{n}{p})}\widehat{\gamma}_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}}\frac{1}{(\widehat{\gamma}_{j,\widetilde{m}})^{p\frac{p_0'}{p_0}}}\right)^{\frac{p_0}{pp_0'}}\le$$

$$\le C2^{(k-j)(\alpha_1'-\frac{n}{p})}\widehat{\gamma}_{k,m}2^{j(n+d)\frac{p_0}{p}}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}}\int\limits_{\Xi^{d,n}_{j,\widetilde{m}}}\gamma^{-p\frac{p_0'}{p_0}}(x)\,dx\right)^{\frac{p_0}{pp_0'}}\le$$

$$\le C2^{(k-j)(\alpha_1'-\frac{n}{p})}\widehat{\gamma}_{k,m}2^{j(n+d)\frac{p_0}{p}}\left(\int\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}}\gamma^{-p\frac{p_0'}{p_0}}(x)\,dx\right)^{\frac{p_0}{pp_0'}}\le C2^{(k-j)(\alpha_1'-\frac{n}{p}-\frac{(n+d)p_0}{p})}.$$

Определение 2.7. Пусть $l\in\mathbb{N}$, $0<p,q\le\infty$, $0<r\le p$, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, $\alpha_3\ge 0$, $\alpha_1\le\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2\in(0,+\infty]$. Положим (с очевидными модификациями в случае $p=\infty$ или $q=\infty$)

$$\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}):=\{\varphi:\varphi\in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n),\|\varphi|\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\|<+\infty\},\ \text{где}$$

$$\left\|\varphi|\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\right\|:=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}t_0^p(x)\|\varphi|L_r(x+I^n)\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|t_k\overline{\Delta}^l_r(2^{-k})\varphi|L_p(\mathbb{R}^n)\|^q\right]^{\frac{1}{q}};\tag{2.15}$$

$$\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}):=\{\varphi:\varphi\in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n),\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\|<+\infty\},\ \text{где}$$

$$\left\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\right\|:=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}t_0^p(x)\|\varphi|L_r(x+I^n)\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}\|t_k\delta^l_r(\cdot+2^{-k}I^n)\varphi|L_p(\mathbb{R}^n)\|^q\right]^{\frac{1}{q}}.\tag{2.16}$$

Замечание 2.5. Пространство $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ $(\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}))$ может оказаться тривиальным, то есть содержать лишь функции почти всюду равные нулю. Укажем условие на параметры l,p,q и последовательность $\{t_k\}$ достаточное для нетривиальности соответствующего пространства. Пусть для любого куба Q^n

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{Q^n}2^{-klp}t_k^p(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}}<\infty.$$

При выполнении вышеприведенного условия множество $C_0^{\infty}\subset\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ $(\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}))$, что легко следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, записанной для функции φ.

Замечание 2.6. Пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})$ при $p,q\in(1,\infty)$ были введены в работе [35]. Пространства $\overline{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$, были рассмотрены в [24] для весовых последовательностей $\{t_k\}\in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ при $p,q\in(0,\infty]$, $\alpha_1>0$. В работе [24] требовалось также, чтобы $l>\alpha_2$. Это условие было использовано для доказательства независимости соответствующих пространств от порядка разности l. Как уже отмечалось во введении при $p,q\in(1,\infty)$, $\alpha_1>0$, $l>\alpha_2$, $\{t_k\}\in^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ пространства близкие пространствам $\overline{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ изучались ранее О. В. Бесовым в [3],[4].

В работе [24] доказана следующая теорема. Мы приведем ее упрощенный вариант в случае постоянных p и q.

Теорема 2.3. *Пусть $p,q\in(0,\infty]$, $\alpha_1>n\left(\frac{1}{\min\{p,1\}}-1\right)\left[1+\frac{\alpha_3}{n}p\right]$, $l>\alpha_2$, $\{s_k\}\in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$. Тогда $B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\overline{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{s_k\})$ и соответствующие нормы эквивалентны.*

Пусть $p,q\in(0,\infty]$, $r\in(0,p]$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_3\geq0$, $\sigma_1,\sigma_2\in(0,\infty]$, $\{t_{k,m}\}=\{t_{k,m}\}_{k\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}_n}\in\widetilde{X}^{\alpha_3}_{\widetilde{\alpha},\sigma}$ – кратная последовательность, p - ассоциированная с допустимой весовой последовательностью $\{t_k\}\in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, $c>1$. Рассмотрим в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ следующие нормы, определяемые кратной последовательностью $\{t_{k,m}\}$:

$$\left\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\right\|^{(1)}:=\left\|\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{k,m}\left[\delta^l_r(Q^n_{k,m})\varphi\right]^p\right)^{\frac1p}\mid l_q\right\|+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac1p},\tag{2.17}$$

$$\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\},c)\|^{(2)}:=\left\|\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{k,m}\left[\delta^l_r(cQ^n_{k,m},cQ^n_{k,m})\varphi\right]^p\right)^{\frac1p}|l_q\right\|+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac1p},\tag{2.18}$$

$$\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\},c)\|^{(3)}:=\left\|\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{k,m}\left[2^{\frac{kn}{r}}E_l(\varphi,cQ^n_{k,m})_r\right]^p\right)^{\frac1p}|l_q\right\|+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac1p},\tag{2.19}$$

$$\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\},c)\|^{(4)}:=\left\|\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}t^p_{k,m}\left[2^{\frac{kn}{r}}\omega_l(\varphi,cQ^n_{k,m})_r\right]^p\right)^{\frac1p}|l_q\right\|+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac1p}.\tag{2.20}$$

Теорема 2.4. *Пусть $p,q\in(0,\infty]$, $r\in(0,p]$, $\alpha_3\geq0$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2\in(0,+\infty]$, $\{t_k\}\in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ – весовая последовательность, $\{t_{k,m}\}$ – p- ассоциированная с ней кратная последовательность. Тогда при $i=1,2,3,4$ нормы $\|\cdot|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\},c)\|^{(i)}$ являются эквивалентными нормами в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^d,\{t_k\})$.*

Доказательство. Эта теорема была доказана в [35] в случае $r=1$, $p,q\in(1,\infty)$. В общем случае доказательство аналогично. Мы не будем останавливаться на деталях.

Замечание 2.7. В замечании 2.4 отмечалось, что одна и та же кратная последовательность $\{t_{k,m}\}\in\widetilde{X}^{\alpha_3}_{\widetilde{\alpha},\sigma}$ p - ассоциирована вообще говоря не с единственной весовой последовательностью. При фиксированном $p \in (0,\infty]$, очевидно, будет существовать биекция между кратными последовательностями $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\widetilde{\alpha},\sigma}$ и множествами весовых последовательностей $\{t_k\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, для которых кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p - ассоциирована с весовой последовательностью $\{t_k\}$. Однако, если кратная последовательность $\{t_{k,m}\}$ p - ассоциирована с весовыми последовательностями $\{t_k\}$ и $\{t'_k\}$, то в силу теоремы 2.4 пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ и $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t'_k\})$ совпадают с эквивалентностью норм. При этом константа, с которой одна норма оценивается через другую зависит лишь от $n,p,q,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\sigma_1,\sigma_2$.

Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можно считать, что при фиксированном $p \in (0,\infty]$ весовая последовательность имеет вид

$$t_k(x) := 2^{nk} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}\chi_{\widetilde{Q}^n_{k,m}}(x), \widetilde{Q}^n_{k,m} := \prod_{i=1}^{n}[\frac{m_i}{2^k},\frac{m_i+1}{2^k}). \tag{2.21}$$

Учитывая (2.21) и теорему 2.4, в дальнейшем пространство $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ будем обозначать также символом $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$.

Положим $\widetilde{B}^l_{p,q}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}) := \widetilde{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$, $\widetilde{B}^l_{p}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}) := \widetilde{B}^l_{p,p,1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$.

Замечание 2.8. Сравним весовые классы $X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ и ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, предполагая, что их элементами являются последовательности вида (2.21).

Зафиксируем $-\infty < \alpha_1 \le \alpha_2 < \infty$, $\sigma_1,\sigma_2 \in [1,\infty]$. Имеем

$$\frac{t_{k,m}}{t_{j,m'}} \le t_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} \frac{1}{t^{\sigma_1}_{j,\widetilde{m}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \le 2^{(j-k)\frac{n}{\sigma_1}} t_{k,m} \sup_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} \frac{1}{t_{j,\widetilde{m}}},$$

$$\frac{t_{j,m'}}{t_{k,m}} \le t^{-1}_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} t^{\sigma_2}_{j,\widetilde{m}}\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \le 2^{(j-k)\frac{n}{\sigma_2}} t^{-1}_{k,m} \sup_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} t_{j,\widetilde{m}}$$

при условии, что $k \le j$, $m' \in \mathbb{Z}^n$, $Q^n_{j,m'} \subset Q^n_{k,m}$. Отсюда, из (1.3) и определений 2.4, 2.5 вытекают вложения ${}^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1+\frac{n}{\sigma_1},\alpha_2-\frac{n}{\sigma_2}} \subset X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p} \subset^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$.

Теорема 2.5. *Пусть $p,q \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $l \in \mathbb{N}$, $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$. Тогда пространство $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ – банахово.*

Доказательство с идейной точки зрения близко доказательству полноты классического пространства Бесова [1]. Однако для полноты картины мы приведем доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$. Тогда, как нетрудно видеть, последовательность $\{\varphi_j\}$ фундаментальна в пространстве $L_r(Q^n)$ для любого куба Q^n. В силу полноты пространства $L_r(Q^n)$ существует функция $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\varphi_j - \varphi \to 0 \text{ в } L_r(Q^n) \text{ при } j\to\infty \text{ для любого куба } Q^n. \tag{2.22}$$

Зафиксируем число $N \in \mathbb{N}$ и куб Q^n. Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{k,m}\subset Q^n}} t^p_{k,m}[\delta^l_r(Q^n_{k,m})(\varphi-\varphi_j)]^p\right)^{\frac{q}{p}} \to 0 \text{ при } j\to\infty. \tag{2.23}$$

В самом деле, пользуясь замечанием 2.3, конечной кратностью перекрытия кубов $(1+l)Q^n_{k,m}$, неравенством $1\le\frac{p}{r}$, из (2.22) для любого $k\in\{0,..,N\}$ имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{k,m}\subset Q^n}} t^p_{k,m}[\delta^l_r(Q^n_{k,m})(\varphi-\varphi_j)]^p \le C \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{k,m}\subset Q^n}} t^p_{k,m}\|(\varphi-\varphi_j)|L_r((1+l)Q^n_{k,m})\|^p\\ &\le C(N,Q^n,\alpha_3,\alpha,\sigma\})\|(\varphi-\varphi_j)|L_r((1+l)Q^n)\|^p\to 0, \text{ при } j\to\infty.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Теперь (2.23) легко следует из (2.24).

Аналогично (2.24) доказывается, что

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{0,m}\subset Q^n}} t^p_{0,m}\|(\varphi-\varphi_j)|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\to 0 \text{ при } j\to\infty. \tag{2.25}$$

В силу фундаментальности последовательности $\{\varphi_j\}$ в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$, для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $M(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $i,j\ge M(\varepsilon)$, для любого $N\in\mathbb{N}$, и любого куба Q^n будем иметь

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{k,m}\subset Q^n}} t^p_{k,m}[\delta^l_r(Q^n_{k,m})(\varphi_i-\varphi_j)]^p\right)^{\frac{q}{p}} + \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{0,m}\subset Q^n}} t^p_{0,m}\|(\varphi_i-\varphi_j)|L_r(Q^n_{0,m})\|^p<\varepsilon. \tag{2.26}$$

Пользуясь (2.23) и (2.25) сначала перейдем в (2.26) к пределу при $i\to\infty$ (при фиксированных N, Q^n), затем возьмем верхнюю грань по всем кубам Q^n, а затем перейдем к пределу при $N\to\infty$. В итоге получим для $\varepsilon\in(0,1)$

$$\|(\varphi-\varphi_j)|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\|\le\varepsilon. \tag{2.27}$$

Теорема доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $p,q\in(0,\infty]$, $r\in(0,p]$, $l\in\mathbb{N}$, $\{t_{k,m}\}\in X^{\alpha_3}_{\widetilde{\alpha},\sigma}$, *последовательность* $\{t_k\}\in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ *определяется формулой* (2.21). *Тогда* $\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\subset\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$.

Доказательство. Доказательство проведем лишь для случая $p,q\in(0,\infty)$, поскольку рассуждения в случае $p=\infty$ или $q=\infty$ аналогичны. Сравним первые слагаемые в нормах (2.15) и (2.16) соответственно. Применяя неравенство Гельдера к интегралу по y, и, учитывая (2.21), получим для $k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left[\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi\right]^p \le \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{npk}{r}+nk} \int\limits_{Q_{k,m}^n} \left[\int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} |\Delta^l(h)\varphi(y)|^r\,dh\right]^{\frac{p}{r}} dy = \tag{2.28}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(y)[\overline{\Delta}_r^l(2^{-k})\varphi(y)]^p\,dy.$$

Возводя обе части (2.28) в степень $\frac{q}{p}$, и, суммируя по всем k, завершаем доказательство вложения.

Для дальнейшего нам понадобится специальный оператор усреднения [35].

Пусть $\theta \in C_0^\infty(\frac{1}{2(1+l)^2}I^n)$, $\int \theta(x)\,dx = 1$, положим при $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Theta(x) = \kappa \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^{l-i}}{(1+i)^{n+1}} C_l^i \theta\left(\frac{x}{1+i}\right),$$

где

$$\frac{1}{\kappa} = (-1)^l \int\limits_0^1 (1-u)^l\,du = \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^{l-i}}{1+i} C_l^i \ne 0.$$

Отметим, что $\Theta \in C_0^\infty(\frac{1}{2(1+l)}I^n)$.

Пусть $\mu_j := (-1)^{l-j}C_l^j j^{l-1}$. Для $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ положим

$$E_\varepsilon[\varphi](x) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \sum_{j=1}^{l} \mu_j \int \Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) \int \Theta\left(\frac{z-y}{j\varepsilon}\right) \varphi(z)\,dzdy, \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.29}$$

При $k \in \mathbb{N}_0$ положим $E_k[g] := E_{2^{-k}}[g]$.

Лемма 2.4. *Пусть функция g непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$, тогда для $j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t^n}\Theta\left(\frac{y}{jt}\right)\right] g(y)\,dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{\kappa}{t^n} \int \theta\left(\frac{y}{jt}\right) \frac{y_k}{t} \Delta^l(y) g_k'(y)\,dy.$$

Доказательство почти дословно повторяет соответствующие рассуждения из [4].

Лемма 2.5. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ и мультииндекса $\alpha, |\alpha| = l$ при $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка*

$$|D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x)| \le \frac{1}{\varepsilon^l}\delta^l(x+\varepsilon I^n)\varphi, \tag{2.30}$$

а для любых чисел $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и мультииндекса β при $x \in \mathbb{R}^n$ – оценка

$$\left|D^\beta E_{\varepsilon_1}[\varphi](x) - D^\beta E_{\varepsilon_2}[\varphi](x)\right| \le C \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{t^{1+|\beta|}} \delta^l(x+tI^n)\varphi\,dt. \tag{2.31}$$

Доказательство в случае $\beta = 0$ имеется в [35], общий случай доказывается аналогично. Мы приведем для полноты картины подробный вывод.

При доказательстве этой леммы мы в значительной мере будем пользоваться рассуждениями, использованными О.В. Бесовым в работе [4] при выводе интегрального представления функции через разности. Оценим $|D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x)|$. Положив $\eta(y) := \frac{1}{\varepsilon^n}\int\sum\limits_{j=1}^{l}\mu_j\Theta\left(\frac{z-y}{j\varepsilon}\right)\varphi(z)\,dz$, и, пользуясь тем, что $\int D_y^\alpha\Theta(y)\,dy = 0$, получим

$$D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x) = D_x^\alpha\left\{\frac{1}{\varepsilon^n}\int\Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\eta(y)\,dy\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int\Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)D_y^\alpha\eta(y)\,dy.$$

Далее имеем

$$D_y^\alpha\eta(y) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^l\mu_j}{(j\varepsilon)^l}D^\alpha\Theta\left(\frac{z-y}{j\varepsilon}\right)\varphi(z)\,dz =$$

$$= \frac{(-1)^l}{\varepsilon^{l+n}}\sum_{j=1}^{l}C_l^j(-1)^{l-j}\int D^\alpha\Theta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\varphi(y+jz)\,dz = \frac{(-1)^l}{\varepsilon^{l+n}}\int D^\alpha\Theta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\Delta^l(z)\varphi(y)\,dz.$$

В итоге при $x\in\mathbb{R}^n$ получим

$$D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x) = \frac{(-1)^l}{\varepsilon^{l+2n}}\int\Theta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\int D^\alpha\Theta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\Delta^l(z)\varphi(y)\,dzdy.$$

Отсюда при $x\in\mathbb{R}^n$

$$|D_x^\alpha E_\varepsilon[\varphi](x)| \le \frac{1}{\varepsilon^l}\delta^l(x+\varepsilon I^n)\varphi.$$

Этим (2.30) доказано.

Для доказательства (2.31) зафиксируем числа $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и оценим $|D^\beta E_{\varepsilon_1}[\varphi] - D^\beta E_{\varepsilon_2}[\varphi](x)| = |D^\beta(E_{\varepsilon_1}[\varphi] - E_{\varepsilon_2}[\varphi])(x)|$.

По формуле Ньютона-Лейбница

$$E_{\varepsilon_2}[\varphi](x) - E_{\varepsilon_1}[\varphi](x) = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{\partial}{\partial t}E_t[\varphi](x)\,dt. \tag{2.32}$$

Оценим

$$\frac{\partial}{\partial t}E_t[\varphi](x) = \sum_{j=1}^{l}\mu_j\iint\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{t^n}\Theta(\frac{z}{t})\right)\left(\frac{1}{t^n}\Theta(\frac{y}{jt})\right)\right]\varphi(x+y+z)\,dzdy =$$

$$= \sum_{j=1}^{l}\mu_j(I_j^{(1)}(x,t) + I_j^{(2)}(x,t)),$$

где в силу формулы Лейбница дифференцирования произведения

$$I_j^{(1)}(x,t) = \iint\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t^n}\Theta\left(\frac{z}{t}\right)\right]\frac{1}{t^n}\Theta\left(\frac{y}{jt}\right)\varphi(x+y+z)\,dzdy+$$

$$I_j^{(2)}(x,t)=\iint \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t^n}\Theta\left(\frac{y}{jt}\right)\right]\frac{1}{t^n}\Theta\left(\frac{z}{t}\right)\varphi(x+y+z)\,dzdy.$$

Для оценки $I_j^{(1)}(x,t)$ зафиксируем $t=t_0$ и положим $g(z)=\frac{1}{t_0^n}\int\Theta\left(\frac{y}{jt_0}\right)\varphi(x+y+z)\,dy$. Воспользовавшись леммой 2.4, получим

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}(x,t_0)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\kappa}{t_0^n}\int\theta\left(\frac{y}{t_0}\right)\frac{y_k}{t_0}\Delta^l(y)g_k'(y)\,dy=\\&=-\frac{\kappa}{jt_0^{2n+1}}\sum_{k=1}^{n}\int\theta\left(\frac{y}{t_0}\right)\frac{y_k}{t_0}\int\Theta_k'\left(\frac{z}{jt_0}\right)\Delta^l(y)\varphi(x+y+z)\,dzdy=\\&=-\frac{\kappa}{jt_0^{2n+1}}\sum_{k=1}^{n}\int\theta\left(\frac{y}{t_0}\right)\frac{y_k}{t_0}\int\Theta_k'\left(\frac{z'-x}{jt_0}\right)\Delta^l(y)\varphi(y+z')\,dz'dy\end{aligned}\tag{2.33}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}I_j^{(2)}(x,t_0)&=-\frac{\kappa}{t_0^{2n+1}}\sum_{k=1}^{n}\int\theta\left(\frac{z}{jt_0}\right)\frac{z_k}{t_0}\int\Theta_k'\left(\frac{y}{t_0}\right)\Delta^l(y)\varphi(x+y+z)\,dydz=\\&=-\frac{\kappa}{t_0^{2n+1}}\sum_{k=1}^{n}\int\Theta_k'\left(\frac{y}{t_0}\right)\int\theta\left(\frac{z-x}{jt_0}\right)\frac{z_k-x_k}{t_0}\Delta^l(y)\varphi(y+z)\,dzdy.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Из (2.33), (2.34) учитывая свойства функций θ и Θ, получим

$$|D_x^\beta I_j^{(1)}(x,t)|+|D_x^\beta I_j^{(2)}(x,t)|\le\frac{C_2}{t^{1+|\beta|}}\delta^l(x+tI^n)\varphi.\tag{2.35}$$

Из (2.32) и (2.35) легко следует оценка

$$\left|D^\beta E_{\varepsilon_1}[\varphi](x)-D^\beta E_{\varepsilon_2}[\varphi](x)\right|\le C_1\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{1}{t^{1+|\beta|}}\delta^l(x+tI^n)\varphi\,dt \text{ при } x\in\mathbb{R}^n.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.6. *Пусть* $p,q\in[1,\infty]$, $p\neq\infty$, $1\le r_1\le r_2\le p$, $l\in\mathbb{N}$, $\gamma^p\in A^{loc}_{\frac{p}{r_2}}(\mathbb{R}^n)$, *кратная последовательность* $\widehat{\gamma}_{k,m}$ *порождена весом* γ. *Пусть* $\alpha_3\ge0$, $\alpha_1>0$ *и кратная последовательность* $\{s_{k,m}\}$ *является* p *- ассоциированной с весовой последовательностью* $\{s_k\}\in^{loc}Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$. *Положим* $t_{k,m}=s_{k,m}\widehat{\gamma}_{k,m}$ *при* $k\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{Z}^n$. *Пусть весовая последовательность* $\{t_k\}$ *определяется формулой* (2.21). *Тогда* $\overline{B}^l_{p,q,r_1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})=\widetilde{B}^l_{p,q,r_2}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ *и соответствующие нормы эквивалентны.*

Доказательство проведем в случае $q\in[1,\infty)$, поскольку случай $q=\infty$ рассматривается аналогично.

Заметим, что из условия $\gamma^p\in A^{loc}_{\frac{p}{r_2}}(\mathbb{R}^n)$ с помощью неравенства Гельдера будем иметь $\gamma^p\in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$ при $r\in[1,r_2]$. Из леммы 2.3 получим вложение

$$\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})\subset\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}) \text{ при } r\in[1,r_2].\tag{2.36}$$

Покажем, что $\widetilde{B}^l_{p,q,1}(\mathbb{R}^n,\{t_k\}) \subset \overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ при $r \in [1,r_2]$. Тогда отсюда и из (2.36) будет вытекать утверждение теоремы.

При $h \in 2^{-k}I^n$,$k,i \in \mathbb{N}_0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ в силу леммы 2.5 будем иметь

$$\begin{aligned} &|\Delta^l(h)g(x)| \leq |\Delta^l(h)E_k[g](x)| + \sum_{i=k}^{\infty}\left|\Delta^l(h)\left(E_i[g]-E_{i+1}[g]\right)(x)\right|, \\ &|\Delta^l(h)E_k[g](x)| \leq C\delta^l_1(x+2^{-k+1}I^n)g, \end{aligned} \tag{2.37}$$

Отсюда при $\tau \in (2^{-k-1},2^{-k})$, $k \in \mathbb{N}_0$, с помощью неравенства Минковского, получим

$$\begin{aligned} \|\overline{\Delta}^l_r(t)g|L_p(\mathbb{R}^n,t_k)\| \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p_k(x)\left[\frac{1}{\tau^n}\int\limits_{\tau I^n}|\Delta^l(h)E_k[g](x)|^r\,dh\right]^{\frac{p}{r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} + \\ + \sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=0}^{l}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p_k(x)\frac{1}{\tau^{n\frac{p}{r}}}\left[\int\limits_{\tau I^n}|(E_i[g]-E_{i+1}[g])(x+jh)|^r\,dh\right]^{\frac{p}{r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} = J_1+J_2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Для оценки J_1 воспользуемся вторым неравенством из (2.37). Имеем

$$J_1 \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p_k(x)\left[\delta^l_1(x+2^{-k+1}I^n)g\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.39}$$

Заметим, что для любой функции $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n,\gamma)$ в силу определения весовой последовательности $\{t_k\}$ и (1.1) имеем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p_k(x)|f(x)|^p\,dx \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\gamma^p(x)\frac{s^p_k(x)}{2^{kn}}|f(x)|^p\,dx. \tag{2.40}$$

Пусть $\frac{p}{r} > 1$. Для оценки J_2 воспользуемся (2.40), (1.1), теоремой 2.1 (так как $\gamma^p \in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$) и оценкой (2.31). Положив $g_i := |E_i[g]-E_{i+1}[g]|$, получим

$$\begin{aligned} J_2 \leq C\sum_{i=k}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p_k(x)\left[\frac{1}{(l\tau)^n}\int\limits_{x+l\tau I^n}(g_i)^r(y)\,dy\right]^{\frac{p}{r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\sum_{i=k}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\gamma^p(x)\frac{1}{2^{kn}}M[(s_kg_i)^r]^{\frac{p}{r}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq C\sum_{i=k}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\gamma^p(x)\frac{s^p_k(x)}{2^{kn}}[\delta^l_1(x+2^{-k}I^n)g]^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}[\delta^l_1(Q^n_{k,m})g]^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq C\sum_{i=k}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^p(x)[\delta^l_1(x+2^{-k}I^n)g]^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Если $\frac{p}{r} = 1$, то, пользуясь определением 2.2 и (2.40), получим

$$J_2 \le C \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma^p(x) \frac{1}{(l\tau)^n} \left(\int\limits_{x+l\tau I^n} \frac{s_k^p(y)}{2^{kn}} (g_i)^p(y)\, dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (g_i)^p(y) \frac{1}{(l\tau)^n} \frac{s_k^p(y)}{2^{kn}} \left(\int\limits_{y+l\tau I^n} \gamma^p(x)\, dx \right) dy \right)^{\frac{1}{p}} \le C \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{s_k^p(y)}{2^{kn}} \gamma^p(y) [\delta_1^l(x + 2^{-k} I^n) g]^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(x) [\delta_1^l(x + 2^{-k} I^n) g]^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.42}$$

Из (2.38)-(2.42) получим

$$\begin{gathered} \|g|\overline{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^q \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|\overline{\Delta}^l(2^{-k}) g | L_p(\mathbb{R}^n, t_k)\|^q \le \\ \le C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(x) \left[\delta_1^l(x + 2^{-k} I^n) g \right]^p \right)^{\frac{q}{p}} + \\ + C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(x) \left[\delta_1^l(x + 2^{-k} I^n) g \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q = S_1 + S_2. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Очевидно, что

$$S_1 \le \|g|\widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^q. \tag{2.44}$$

Для оценки S_2 воспользуемся неравенством Харди для сумм (теорема 2.2). Имеем

$$S_2 \le C S_1 \le \|g|\widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})\|^q. \tag{2.45}$$

Из (2.43)-(2.45) следует, что

$$\widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \overline{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}). \tag{2.46}$$

С другой стороны, с помощью неравенства Гельдера легко получаем, что

$$\widetilde{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}). \tag{2.47}$$

Из (2.36), (2.46), (2.47) получаем, что справедлива цепочка вложений

$$\widetilde{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \overline{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}) \subset \widetilde{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\}), \tag{2.48}$$

из которой, очевидно, следует утверждение теоремы.

Замечание 2.9. Если $\gamma \equiv 1$, то утверждение теоремы 2.6 можно распространить и на случай $p = \infty$.

Комбинируя теоремы 2.3, 2.6 и замечание 2.9 получим следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Пусть* $p, q \in [1, \infty]$, $r_1, r_2 \in [1, p]$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$, $l > \alpha_2$, $\{s_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$. *Тогда* $B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \overline{B}^l_{p,q,r_1}(\mathbb{R}^n, \{s_k\}) = \widetilde{B}^l_{p,q,r_2}(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$ *и соответствующие нормы эквивалентны.*

Замечание 2.10. Вопрос о совпадении (или несовпадении) пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$, $\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{s_k\})$ и $B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ при более слабых (чем в теоремах 2.3, 2.6 или 2.7) ограничениях на переменную гладкость $\{s_k\}$ остается открытым.

Замечание 2.11. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $s > 0$, $l > s$, $p \neq \infty$, $r \in (0, p]$, $\gamma^p \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, не составляет труда определить весовые пространства Бесова $\widetilde{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \gamma)$, $\overline{B}^s_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \gamma)$ и $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \gamma)$. Для этого нужно формально положить $s_k = t_k = 2^{ks}\gamma$ при $k \in \mathbb{N}_0$ в определениях пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, $\overline{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и $B^{\{s_k\}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Немного модифицируя доказательство теоремы 2.6 можно показать, что при $p, q \in [1, \infty]$, $p \neq \infty$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq p$, $\gamma^p \in A_{\frac{p}{r_2}}(\mathbb{R}^n)$ справедливо $\overline{B}^s_{p,q,r_1}(\mathbb{R}^n, \gamma) = \widetilde{B}^s_{p,q,r_2}(\mathbb{R}^n, \gamma)$ и соответствующие нормы эквивалентны. Комбинируя этот факт с теоремой 3.14 работы [23] при $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, $s > 0$, $l > s$, $\gamma^p \in A_p(\mathbb{R}^n)$ получим $\overline{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \gamma) = \widetilde{B}^s_{p,q,1}(\mathbb{R}^n, \gamma) = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \gamma)$ с эквивалентностью норм.

3 Следы весовых пространств Соболева

Как отмечалось во введении, основной мотивацией для изучения пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ является их применение в задаче о следах весовых пространств Соболева.

Задача о следах для весовых пространств Соболева имеет большую историю. Первые работы в этом направлении относятся к началу 60-х годов 20 века. Точное описание следов функций представляет большой интерес благодаря своим приложениям в теории эллиптических уравнений с вырождающимися коэффицентами (см. например [10] и имеющиеся там ссылки).

Существует большое количество работ как российских так и зарубежных математиков, в которых получены необходимые и достаточные условия на следы функций на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ из весовых пространств Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma)$ (при $p \in (1, \infty)$) при тех или иных ограничениях на вес γ. Однако, почти во всех имеющихся работах вес априори предполагался зависящим лишь от части переменных (в большинстве случаев от координаты x_n). Не имея возможности перечислить всех математиков, внесших вклад в развитие этой тематики, укажем лишь работы Успенского С.В. [12], Г.А. Калябина [8], [9] (смотри также ссылки, имеющихся у вышеперечисленных авторов). Отметим еще работу I.Piotrowska [31], где рассмотрены следы весовых пространств на фракталах.

В случае зависимости только от координаты x_n вес существенно связан с гладкостью граничной функции. Так, например, в простейшем случае степенного веса $\gamma(x_1, ..., x_n) = |x_n|^r, -1 < r < p - 1$ имеем $\mathrm{Tr} W^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma) = B_p^{l - \frac{1+r}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Если вес зависит только от координат $x_1, .., x_{n-1}$, то гладкость граничной функции остается той же, что и в безвесовом случае. При этом в качестве пространства следов естественным образом возникает весовой аналог пространства Бесова. Так, например, в случае $\gamma \in A_p(\mathbb{R}^{n-1})$ в работах [13] доказано, что $\mathrm{Tr} W^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma) = \overline{B}_p^{l - \frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1}, \gamma)$ (аналогичный результат установлен в [14] другими методами при $l = 1$). Интересно отметить, что случай веса, зависящего только от координат $x_1, .., x_{n-1}$, стал изучаться сравнительно недавно.

Естественным обобщением упомянутых выше результатов было бы изучение следов функций из весовых пространств Соболева с весами, зависящими от всех переменных. Этой цели и посвящен настоящий параграф.

Отметим, что подобные вопросы изучались ранее в работах [14], [22] только для очень специальных весов, а именно $\gamma(x) = |x|^r, r \in \mathbb{R}$. Общий случай до сих пор оставался не исследованным.

Мы рассматриваем произвольные веса (зависящие от всех пространственных координат), принадлежащие классу $A_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Возможность решения задачи в столь общей постановке основана на использовании техники локальных максимальных функций типа Харди-Литтлвуда [32], а также интегральных представлений функций через разности, построенных в [4]. По смыслу наши рассуждения близки идее атомарного разложения, использованной в [22]. Однако предлагаемый метод оказывается более удобным при рассмотрении общих весов. Техника, использованная в работе [22] требует проверки равенства нулю моментов высокого порядка у следов атомов из представления данной функции, что является препятствием для характеризации следа в случае общего веса.

Перейдем к более конкретным формулировкам. Пусть $p \in [1,\infty]$, $l \in \mathbb{N}$, γ – вес. Зафиксируем $n, d \in \mathbb{N}$. Точку $n+d$ - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+d} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ будем записывать как пару (x,y). Плоскость, задаваемую в $\mathbb{R}^{n+d}$ уравнением $y = 0$ отождествим с пространством $\mathbb{R}^n$. При $a > 0$ положим ${}^nR_a^d := \mathbb{R}^{n+d} \setminus (\mathbb{R}^n \times aB^d)$. Положим $\Xi_{k,m}^{d,n} := Q_{k,m}^n \times (\frac{B^d}{2^k} \setminus \frac{B^d}{2^{k+1}})$ при $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$.

Символом $W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)$ обозначим линейное пространство классов эквивалентных функций, имеющих на $\mathbb{R}^n$ обобщенные по Соболеву производные до порядка l включительно, с нормой

$$\|f|W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\| = \sum_{|\alpha|\le l} \|D^\alpha f|L_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\|.$$

Определение 3.1.

Пусть $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Функция $\varphi' \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^{n'})$ называется следом функции φ на $\mathbb{R}^{n'}$ (и обозначается $\varphi' = \operatorname{tr}|_{x''=0}\varphi$), если функцию φ можно изменить на множестве $n-$ мерной меры нуль так, что для любого куба $Q^{n'}$ конечной $n'-$ мерной меры

$$\lim_{x''\to 0} \int\limits_{Q^{n'}} |\varphi(x',x'') - \varphi'(x')|\, dx' = 0.$$

Пусть кратная последовательность $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом $\gamma \in A_\infty^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$. Положим $\gamma_k^l(x) := \gamma_k(x) := 2^{k(l+\frac{n}{p})} \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}_{k,m}^n}(x)\widehat{\gamma}_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_{k,m} := 2^{kl}\widehat{\gamma}_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$.

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $p \in (1,\infty)$, $r \in [1,p)$, $\gamma^p \in A_{\frac{p}{r}}^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$, $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)$, $l > \frac{d}{r}$. *Тогда существует след* $\varphi \in \widetilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})$ *функции* f *и справедливо неравенство*

$$\left\|\varphi|\widetilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})\right\| \le M_1\|f|W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\|. \tag{3.1}$$

Константа M_1 *в* (3.1) *не зависит от функции* f.

Обратно, если функция $\varphi \in \widetilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})$, *то существует функция* $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)$ *такая, что* φ – *след* f *на* $\mathbb{R}^n$ *и справедливо неравенство*

$$\|f|W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\| \le M_2 \left\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,p,r}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})\right\|. \tag{3.2}$$

Константа M_2 в (3.2) не зависит от функции φ.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $r \in [1,p]$, $\gamma^p \in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^{n+d})$, $f \in W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)$, $l > \frac{d}{r}$. Тогда существует след φ функции f на $\mathbb{R}^n$. Более того, для произвольного куба $Q^n_{k,m}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\delta^l_r(Q^n_{k,m})\varphi \le \frac{C_1}{2^{k(l-\frac{n+d}{r})}}\left\{\left\|D^\alpha_x f|L_r\left(C_2 Q^n_{k,m}\times\frac{C_3}{2^k}B^d\right)\right\| + \right.\\ \left. + \left\|D^\beta_y f|L_r\left(C_2 Q^n_{k,m}\times\frac{C_3}{2^k}B^d\right)\right\|\right\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Константы C_1, C_2, C_3 в (3.3) не зависят ни от функции f ни от куба $Q^n_{k,m}$.

Доказательство. Мы приведем лишь краткую схему доказательства, поскольку все шаги достаточно стандартны. Существование следа доказывается применением стандартной процедуры, изложенной, например, в пункте 5.2 [17].

Установим оценку (3.3). Пользуясь неравенством Гельдера с показателями $\tau = \frac{p}{r}$ и τ' (тогда $r\tau' = p\frac{\tau'}{\tau}$) нетрудно установить, что $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma) \subset W^l_r(Q^{n+d})$ для любого куба Q^{n+d}. Хорошо известно, что множество $C^\infty(\overline{Q}^{n+d})\bigcap W^l_r(Q^{n+d})$ плотно в $W^l_r(Q^{n+d})$ (доказательство следует из существования непрерывного операторы продолжения для пространств Соболева с липшицевых областей на все пространство и плотности гладких функций в пространстве Соболева см.,например, гл.2, гл.6 монографии [17]. Поэтому оценку (3.3) достаточно установить для функций $f \in C^\infty(\overline{Q^{n+d}})\bigcap W^l_r(Q^{n+d})$, где куб $Q^{n+d} \supset 6l\sqrt{n}Q^n_{k,m}\times 2^{-k}l\sqrt{n}B^d$.

Воспроизведем теперь с необходимыми нам изменениями рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3 из пункта 5.4 монографии [17].

Пусть $\eta \in S^{d-1}, h \in \mathbb{R}^n$. Положим $\Delta^l_y(\eta|h|)f(x+jh,0) := \sum\limits_{i=0}^{l}(-1)^{l+i}C^i_l f(x+jh, i\eta|h|), \Delta^l_x(h)f(x,j|h|\eta) := \sum\limits_{i=0}^{l}(-1)^{l+i}C^i_l f(x+ih,j|h|\eta)(x)$, $\varphi(x) := f(x,0)$. Тогда [17] (стр.217) при $x \in Q^n_{k,m}$ получим

$$\Delta^l(h)\varphi(x) = \sum_{j=0}^{l}(-1)^j C^j_l \Delta^l_y(|h|\eta)f(x+jh,0) - \sum_{j=1}^{l}(-1)^j C^j_l \Delta^l_x(h)f(x,j|h|\eta). \tag{3.4}$$

Пусть $\xi := \frac{h}{|h|}$, пользуясь следствием 6 из гл.5 [17], имеем

$$\begin{aligned}|\Delta^l_y(\eta|h|)f(x+jh,0)| \le C\sum_{|\beta|=l}\int\limits_0^{l|h|}\tau^{l-1}\left|D^\beta_y f(x+jh,\eta\tau)\right|d\tau\\ |\Delta^l_x(h)f(x,j|h|\eta)| \le C\sum_{|\alpha|=l}\int\limits_0^{l|h|}\tau^{l-1}\left|D^\alpha_x f(x+\xi\tau,j|h|\eta)\right|d\tau.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно, интегрируя (3.4) по сфере S^{d-1}, и, используя оценки (3.5), получим

$$\int\limits_{Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} |\Delta^l(h)\varphi(x)|^r \, dhdx \le C \left(\sum_{j=0}^{l} R^1_j + \sum_{j=1}^{l} R^2_j \right), \text{где}$$

$$R^1_j := \sum_{|\beta|=l} \int\limits_{Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} \left(\int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_0^{l|h|} \tau^{l-1} \left| D^\beta_y f(x+jh, \eta\tau) \right| d\tau d\eta \right)^r dhdx, \tag{3.6}$$

$$R^2_j := \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} \left(\int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_0^{l|h|} \tau^{l-1} \left| D^\alpha_x f(x+\xi\tau, j|h|\eta) \right| d\tau d\eta \right)^r dhdx.$$

Проведем сначала оценки для $R^1_j, j = 0,..,l$. Делая замену переменной $x' = x + jh$, переходя от сферических координат к декартовым (по переменным y), и, учитывая, что $l > \frac{d}{r}$, с помощью неравенства Гельдера (с показателями r, r') будем иметь

$$R^1_j \le \frac{C}{2^{kn}} \sum_{|\beta|=l} \int\limits_{3(l+1)Q^n_{k,m}} \left(\int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_0^{\frac{l\sqrt{n}}{2^k}} \tau^{l-1} \left| D^\beta_y f(x', \eta\tau) \right| d\tau d\eta \right)^r dx' =$$

$$= \frac{C}{2^{kn}} \sum_{|\beta|=l} \int\limits_{3(l+1)Q^n_{k,m}} \left(\int\limits_{S^{d-1}} \int\limits_0^{\frac{l\sqrt{n}}{2^k}} \tau^{l-\frac{d}{r}-\frac{1}{r'}} \left| D^\beta_y f(x', \eta\tau) \right| \tau^{\frac{d-1}{r}} d\tau d\eta \right)^r dx' \le \tag{3.7}$$

$$\le \frac{C}{2^{k(n+rl-d)}} \sum_{|\beta|=l} \int\limits_{3(l+1)Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{l\sqrt{n}}{2^k}B^d} \left| D^\beta_y f(x,y) \right|^r dydx.$$

Для оценки R^2_j при $j = 1,..,l$ воспользуемся неравенством Гельдера (как в оценке (3.7)), поменяем порядок интегрирования и в интегрировании по h перейдем от декартовых координат к сферическим. Получим следующую цепочку неравенств

$$R^2_j \le C \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} |h|^{rl-d} \int\limits_0^{l|h|} \tau^{d-1} \int\limits_{S^{d-1}} |D^\alpha_x f(x+\xi\tau, j|h|\eta)|^r \, d\eta d\tau d|h| dx =$$

$$= C \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n} |h|^{rl-d} \int\limits_0^{l|h|} \tau^{d-1} \int\limits_{S^{d-1}} |D^\alpha_x f(x+\xi\tau, j|h|\eta)|^r \, d\eta d\tau d|h| dx \le$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{(3l\sqrt{n})Q^n_{k,m}} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{n}}{2^k}} |h|^{rl+n-1} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{S^{d-1}} |D^\alpha_x f(x, j|h|\eta)|^r \, d\eta d\xi d|h| dx \le \tag{3.8}$$

$$\le \frac{C}{2^{k(n+rl-d)}} \sum_{|\alpha|=l} \int\limits_{(3l\sqrt{n})Q^n_{k,m}} \int\limits_{\frac{l\sqrt{n}}{2^k}B^d} |D^\alpha_x f(x,y)|^r \, dydx.$$

Из оценок (3.6), (3.7), (3.8) и определения двукратно усредненной разности вытекает оценка (3.3).

Доказательство теоремы 3.1.

Шаг 1. Пусть $f \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$. Тогда в силу леммы 3.1 существует след φ функции f на плоскости $\mathbb{R}^n$, поэтому нам достаточно установить оценку (3.1). Учитывая (3.3), и, пользуясь теоремой 2.1 (поскольку $\frac{p}{r} > 1$) при $a = \max\{C_2, C_3\}$, получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \gamma_{k,m}^p \left[\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi\right]^p \le \\
&\le C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \gamma_{k,m}^p 2^{(\frac{n+d}{r}-l)pk} \left[\int\limits_{aQ_{m,k}^n} \int\limits_{\frac{a}{2^k}B^d} \left\{\sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha f(x,y)|^r + \left|D_y^\beta f(x,y)\right|^r\right\} dxdy\right]^{\frac{p}{r}} \le \\
&\le C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \iint\limits_{\Xi_{k,m}^{d,n}} \left\{M_{\le a}\left[\sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha f|^r + \sum_{|\beta|=l} |D_y^\beta f|^r\right](x,y)\right\}^{\frac{p}{r}} \gamma^p(x,y)\,dxdy = \\
&= C \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+d}} \left\{M_{\le a}\left[\sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha f|^r + \sum_{|\beta|=l} |D_y^\beta f|^r\right](x,y)\right\}^{\frac{p}{r}} \gamma^p(x,y)\,dxdy \le \\
&\le C \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+d}} \gamma^p(x,y) \left(\sum_{|\alpha|=l} |D_x^\alpha f(x,y)|^p + \sum_{|\beta|=l} |D_y^\beta f(x,y)|^p\right) dxdy \le \\
&\le C\|f|W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\|^p.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Для окончания доказательства теоремы остается оценить второе слагаемое в норме функции φ. Поскольку $l > \frac{d}{r}$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем (для доказательства нужно использовать рассуждения из доказательства теоремы 2 в гл.5 [17] и интегральное представление 3.51 из гл.3 [17])

$$
|\varphi(x)|^r = |f(x,0)|^r \le \left(\int\limits_{2B^d\setminus B^d} |f(x,y)|^r\,dy + \sum_{|\beta|=l} \int\limits_{2B^d} |D_y^\beta f(x,y)|^r\,dy\right). \tag{3.10}
$$

Нетрудно видеть, что $\gamma(Q_{0,m}^n \times 2B^d) \le C\gamma(Q_{0,m}^n \times B^d)$, с константой C, не зависящей от m. Пользуясь этим фактом, неравенством Гельдера с показателями $\tau = \frac{p}{r}$, τ' (нужно учесть что $r\tau' = p\frac{\tau'}{\tau}$) и определением класса $A_{\frac{p}{r}}^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$, из (3.10) получим

$$
\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma_{0,m}^p\left(\int\limits_{Q_{0,m}^n}|\varphi(x)|^r\,dx\right)^{\frac{p}{r}}\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{|\beta|=l}\int\limits_{Q_{0,m}^n}\int\limits_{2B^d}\frac{\gamma^r(x,y)}{\gamma^r(x,y)}|D_y^\beta f(x,y)|^r\,dxdy\right)^{\frac{p}{r}}+
$$

$$
+C\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(\int\limits_{Q_{0,m}^d}\int\limits_{2B^{n-d}\setminus B^{n-d}}\frac{\gamma^r(x,y)}{\gamma^r(x,y)}|f(x,y)|^r\,dxdy\right)^{\frac{p}{r}}\le \tag{3.11}
$$

$$
\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma^p(2P_{0,m}^n)\left(\gamma^{-p\frac{\tau'}{\tau}}(2P_{0,m}^n)\right)^{\frac{\tau}{\tau'}}\left[\|D_y^\beta f|L_p(2P_{0,m}^n,\gamma)\|^p+\|f|L_p(2P_{0,m}^n,\gamma)\|^p\right]\le
$$

$$
\le C\|f|W_p^l(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\|.
$$

Из оценок (3.9), (3.11), очевидно, следует оценка (3.1).

Шаг 2. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – разбиение единицы, построенное для шара B^d. При этом $\psi_0\in C^\infty(B^d\setminus\frac{1}{2}B^d)$, $\psi_k\in C_0^\infty(\frac{1}{2^{k-1}}B^d\setminus\frac{1}{2^{k+1}}B^d)$ при $k\in\mathbb{N}$, $D^\beta\psi_k(y)=-D^\beta\psi_{k+1}(y)$ и $|D^\beta\psi_k(y)|\le\frac{C_1}{\delta_k^l}$ для $y\in B^{n-d}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $|\beta|=l$. Пусть также для любого $k\in\mathbb{N}_0$ только две функции ψ_k и ψ_{k+1} отличны от нуля на множестве $2^{-k}B^d\setminus 2^{-k-1}B^d$. Существование последовательности $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ с указанными выше свойствами может быть доказано аналогично тому, как это сделано, например, в параграфе 4, гл.5, [17] при доказательстве теоремы о следах для невесовых пространств Соболева.

Положим

$$
f(x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(y)E_{2^{-k}}[\varphi](x)\text{ при }(x,y)\in\mathbb{R}^n\times B^d,
$$

где оператор E_ε (при $\varepsilon>0$) определен формулой (2.29). Доопределим функцию f нулем на множестве ${}^n\mathbb{R}_1^d$

Мультииндекс α будем записывать в виде $(\alpha^1,\alpha^2)=(\alpha_1^1,..,\alpha_n^1,\alpha_1^2,..,\alpha_d^2)$.

Очевидно,

$$
\iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\frac{1}{2}B^d}\gamma^p(x,y)\{\sum_{|\alpha|=l,\alpha^2=0}|D^\alpha f(x,y)|^p+\sum_{|\alpha|=l,|\alpha^2|>0}|D^\alpha f(x,y)|^p\}\,dxdy=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\iint\limits_{\Xi_{k,m}^{d,n}}\gamma^p(x,y)\{\sum_{|\alpha|=l,\alpha^2=0}|D^\alpha f(x,y)|^p+\sum_{|\alpha|=l,|\alpha^2|>0}|D^\alpha f(x,y)|^p\}\,dxdy.
$$

Учитывая свойства функций ψ_k и оценку (2.30), получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=l,\alpha^2>0}\iint\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}} \gamma^p(x,y)|D^\alpha f(x,y)|^p\,dxdy = \\
&= \sum_{|\alpha|=l,\alpha^2>0}\iint\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}} \gamma^p(x,y)|D^{\alpha^2}_y\psi_k(y)D^{\alpha^1}_x E_{2^{-k}}\varphi(x)+D^{\alpha^2}_y\psi_{k+1}(y)D^{\alpha^1}_x E_{2^{-(k+1)}}\varphi(x)|^p\,dxdy \le \\
&\le \sum_{|\alpha^1|=l-|\alpha^2|} 2^{k|\alpha^2|p}\iint\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}} \gamma^p(x,y)|D^{\alpha^1}_x E_{2^{-k}}\varphi(x)-D^{\alpha^1}_x E_{2^{-(k+1)}}\varphi(x)|^p\,dxdy \le \\
&\le C2^{2nkp}\gamma^p_{k,m}\left[\int\limits_{3Q^n_{k,m}}\int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n}|\Delta^l(h)\varphi(z)|\,dhdz\right]^p dxdy \text{ при } k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}^n.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Аналогично из (2.31) имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha^1|=l}\iint\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}} \gamma^p(x,y)|D^{\alpha^1}_x f(x,y)|^p\,dxdy \le \\
&\le C\sum_{|\alpha^1|=l}\iint\limits_{\Xi^{d,n}_{k,m}} \gamma^p(x,y)\max\{|D^{\alpha^1}_x E_{2^{-k}}\varphi(x)|^p, |D^{\alpha^1}_x E_{2^{-k-1}}\varphi(x)|^p\}\,dxdy \le \\
&\le C2^{2npk}\gamma^p_{k,m}\left[\int\limits_{2Q^n_{k,m}}\int\limits_{\frac{1}{2^k}I^n}|\Delta^l(h)\varphi(z)|\,dhdz\right]^p \text{ при } k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z}^n.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Пользуясь определением функции f, получаем при $|\alpha|=l$ оценку

$$
\sum_{|\alpha|=l}\iint\limits_{{}^n\mathbb{R}^d_{\frac{1}{2}}} \gamma^p(x,y)|D^\alpha f(x,y)|^p\,dxdy \le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma^p_{0,m}\|\varphi|L_1(Q^n_{0,m})\|^p \le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p.
\tag{3.14}
$$

Отсюда, суммируя оценки (3.12), (3.13) по k и m, учитывая конечную кратность перекрытия кубов $nQ^n_{k,m}$ (при $n\in\mathbb{N}$), и ,учитывая оценку (3.14), получаем

$$
\sum_{|\alpha|=l}\|D^\alpha f|L_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)\| \le C\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,p,r}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_{k,m}\})\|.
\tag{3.15}
$$

Для оценки обобщенных производных $D^\alpha f$ при $|\alpha|<l$ запишем при каждом $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times B^d$ интегральное представлением функции $D^\alpha f$ по конусу (см. параграф 4, гл.3, [17]) $V(x,y)=\{(x,y)(1-t)+t(x',y')|t\in[0,1],(x',y')\in\frac{1}{2}B^{n+d}(x,y+3)\}$ ($\frac{1}{2}B^{n+d}(x,y+3)$ – шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(x,y+3)$) и воспользуемся замечанием 16 из параграфа 5, гл.3, [17].

Пусть $|\alpha|<l$. Учитывая, что $f(x,y)=0$ при $|y|>1$, будем иметь

$$|D^\alpha f(x,y)| \le C \sum_{|\beta|=l} \iint\limits_{(x,0)+(I^n\times B^d)} |D^\beta f(\widetilde{x},\widetilde{y})|\, d\widetilde{x}d\widetilde{y} \text{ при } (x,y)\in\mathbb{R}^n\times B^d.$$

Отсюда и из очевидного включения $A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^{n+d}) \subset A^{loc}_p(\mathbb{R}^{n+d})$, пользуясь неравенством Гельдера, получим при $m\in\mathbb{Z}^n$, $|\alpha|<l$ оценку

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q^n_{0,m}\times B^d} \gamma^p(x,y)|D^\alpha f(x,y)|^p\,dxdy \le \\
&\le C\sum_{|\beta|=l}\left[\gamma^p(Q^n_{0,m}\times B^d)\right]\left[\gamma^{-p'}(Q^n_{0,m}\times B^d)\right]^{\frac{p}{p'}} \iint\limits_{Q^n_{0,m}\times B^d}\gamma^p(x,y)|D^\beta f(x,y)|^p\,dxdy \qquad (3.16)\\
&\le C\sum_{|\beta|=l}\iint\limits_{Q^n_{0,m}\times B^d}\gamma^p(x,y)|D^\beta f(x,y)|^p\,dxdy.
\end{aligned}$$

Суммируя оценки (3.15), (3.16) по $m\in\mathbb{Z}^n$, и, учитывая, что $f(x,y)=0$ при $|y|>1$, получим оценку (3.2).

Остается показать, что $\varphi = \operatorname{tr}|_{y=0} f$. Зафиксируем произвольный куб Q^n. Почти каждая точка $x\in\mathbb{R}^n$ является точкой Лебега функции φ, поскольку $\varphi\in L^{loc}_1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ имеем $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{x+\delta I^n}|\varphi(x')-\varphi(x)|\,dx'=0$. Отсюда, пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, имеем

$$\int\limits_{Q^n}|\varphi(x)-E_\delta[\varphi](x)|\,dx \le \frac{C}{\delta^n}\int\limits_{Q^n}\int\limits_{x+\delta I^n}|\varphi(x)-\varphi(x')|\,dx'dx\to 0, \text{при}\delta\to 0. \qquad (3.17)$$

Из (3.17) и определения функции f легко следует, что $\varphi=\operatorname{tr}|_{y=0} f$.

Теорема доказана.

Замечание 3.1. В менее общей форме теорема 3.1 доказана автором в работе [35].

4 Атомарное разложение функций из пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$

В этом разделе мы докажем теорему об атомарном разложении функций φ из пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$. Эта теорема является одним из основных инструментов для доказательства различных теорем вложения и теорем о следах (см. далее разделы 4,5).

В этом пункте также мы установим условия на кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$, которые являются достаточными для того, чтобы при различных $l\in\mathbb{N}$ пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ совпадали с эквивалентностью соответствующих норм.

Наши рассуждения будут во многом использовать методы работы [20].

Зафиксируем в этом пункте числа $n,d\in\mathbb{N}$, положим $\Xi^{d,n}_{k,m} := Q^n_{k,m}\times(\frac{B^d}{2^k}\setminus\frac{B^d}{2^{k+1}})$ при $k\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^n$. Точку $n+d$ - мерного евклидова пространства будем записывать в виде пары $(x,y) := (x_1,..,x_n,y_1,..,y_d)$.

Пусть $N^{l-1}-B$ - сплайн степени $l-1$ с узлами в точках $t_i=i$, $i\in\{0,1,..,l\}$. Точнее

$$N^{l-1}(t) := [0,1,..,l](t-\cdot)^{l-1}_+.$$

Мы использовали стандартное обозначение разделенной разности (см. [7, гл.1]).

Для $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$N_{k,m}^{l-1}(x) := \prod_{i=1}^{n} N^{l-1}(2^k(x_i - \frac{m_i}{2^k})), \text{ при } x \in \mathbb{R}^n.$$

Функции $N_{k,m}^{l-1}$ впервые были введены Карри и Шенбергом в работе [19].

Отметим некоторые свойства B - сплайнов $N_{k,m}^{l-1}$, которые будут нам необходимы для дальнейшего изложения. Доказательство этих свойств имеются, например, в [18].

1) B - сплайны $N_{k,m}^{l-1}$ образуют разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}_0$. То есть

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} N_{k,m}^{l-1}(x) = 1, \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

При этом кратность пересечения носителей сплайнов $N_{k,m}^{l-1}$ конечна и не зависит ни от k ни от m. Отметим также, что $\operatorname{supp} N_{k,m}^{l-1} \subset \frac{m}{2^k} + [0, \frac{l}{2^k}]^n$ и $N_{k,m}^{l-1}(x) > 0$ при $x \in \frac{m}{2^k} + (0, \frac{l}{2^k})^n$.

2) На каждом кубе $Q_{k,m}^n$ функция $N_{k,m}^{l-1}$ является полиномом степени не выше $l-1$ по каждой переменой.

3)Сплайны N^{l-1} имеет непрерывную производную порядка $l-2$. В узлах $t_i = i$, $i \in \{0, 1, .., l\}$ сплайн N^{l-1} имеет конечные односторонние производные порядка $l-1$, поэтому

$$\Delta^l(N_{k,m}^{l-1}, h)(x) \le C(2^k|h|)^{l-1}, \text{ при } x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

4) Любой сплайн $S = \sum\limits_{m \in Z^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^{l-1}$ может быть разложен в ряд по сплайнам $N_{j,m}^{l-1}$ при $j \ge k$, то есть $S = \sum\limits_{m \in Z^n} \widehat{\beta}_{k,m}(S) N_{j,m}^{l-1}$.

Символом Σ_k^{l-1} обозначим множество всех сплайнов S вида

$$S(x) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^{l-1}(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n.$$

Нам понадобится для дальнейшего понятие квазиинтерполянта, которое впервые было введено в работе [18]. Квазиинтерполянты использовались также в работах [20], [7] для построения эквивалентных нормировок в безвесовых диадических пространствах типа пространств Бесова и в классических пространствах Бесова соответственно.

Определение 4.1. ([18]) При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ через $\xi_{k,m} = (\xi_{k,m_1}, ..., \xi_{k,m_n})$ обозначим центр куба $Q_{k,m}^n$. Пусть все частные производные $D^\nu f$, $\nu_j \le l-1$, $j \in \{1, .., n\}$ функции f непрерывны в каждой точке $\xi_{k,m}$. Положим при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$

$$Q_k^{l-1}(f) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(f) N_{k,m}^{l-1}, \text{ где}$$

$$\alpha_{k,m}(f) := \sum_{\substack{0 \le \nu_j \le l-1 \\ j \in \{1,..,n\}}} a_{k,\nu,m} D^\nu f(\xi_{k,m}),$$

$$a_{k,m,\nu} := \prod_{i=1}^{n} a_{k,m_i,\nu_i}, a_{k,m_i,\nu_i} := \frac{(-1)^{l-1-\nu_i}}{(l-1)!} D^{l-1-\nu_i} \psi_{m_i}(\xi_{k,m_i}),$$

$$\psi_{m_i}(t) := \prod_{j=1}^{l-1}(\frac{m_i+j}{2^k} - t) \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

Оператор Q_k^{l-1} называется квазиинтерполянтом.

Зафиксируем до конца пункта константу $A \geq 1$.

Пусть $P_{Q^n_{k,m}}$ – многочлен почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ (при $r \in (0,\infty]$) полиномами *координатной степени* ниже l на кубе $Q^n_{k,m}$ с константой A.

Положим $g_k(x) := \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} P_{Q^n_{k,m}}(x)\chi_{Q^n_{k,m}}(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Наконец, следуя работе [20], положим при $r \in (0,\infty]$

$$\begin{aligned} &T_k^{l-1}(\varphi,r)(x) := Q_k^{l-1}(g_k)(x), \text{ при } x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0, \\ &T_{-1}^{l-1}(\varphi,r)(x) := \varphi(x), \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Отметим, что в [20] оператор T_k^{l-1} действовал на функции φ, определенные на единичном кубе.

Замечание 4.1. Оператор Q_k^{l-1} является проектором из пространства кусочно-полиномиальных функций на пространство Σ_k^{l-1} (доказательство см. в [18]), поэтому

$$T_k^{l-1}(\varphi,r)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(T_k^{l-1}(\varphi,r))N_{k,m}^{l-1}(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 4.1. *Пусть $r \in (0,\infty]$. Для любой функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка*

$$\|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi,r)|L_r(Q^n_{k,m})\| \leq C\widehat{E}_l(\varphi,(1+l)Q^n_{k,m})_r \leq CE_l(\varphi,(1+l)Q^n_{k,m})_r. \tag{4.4}$$

Константа C в (4.4) *зависит только от l,n,r,A.*

Доказательство. Первое неравенство в (4.4) следует из оценки (4.25) работы [20].

Пусть $p \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i \in (0,\infty]$ (i=1,2). Для кратной допустимой последовательности $\{t_{k,m}\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ положим

$$\begin{aligned} &s_k^l := s_k^l(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p} := \inf_{S \in \Sigma_k^{l-1}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|\varphi - S|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, \\ &s_{-1}^l := s_{-1}^l(\varphi,\{t_{0,m}\})_{r,p} = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Отметим, что $s_k^l(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p} < \infty$, если $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$. Действительно, в силу (4.4) и теоремы 2.4, при $k \in \mathbb{N}_0$ имеем оценку

$$\begin{aligned} &\inf_{S \in \Sigma_k^{l-1}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|\varphi - S|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi)|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq C\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| < \infty. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Определение 4.2. Пусть $p \in (0,+\infty]$, $r \in (0,p]$, $s^l_k(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p} < \infty$. Будем говорить, что $U^{l-1}_k := U^{l-1}_k(\varphi,\{t_{k,m}\},p) \in \Sigma^{l-1}_k$ – сплайн почти наилучшего приближения с константой A для функции $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$, если

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|\varphi - U^{l-1}_k|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le A s^l_k(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p}. \tag{4.7}$$

Лемма 4.2. *([20]) Пусть сплайн $S \in \Sigma^{l-1}_k$, тогда для любого $r \in (0,+\infty]$ и любого куба $Q^n_{k,m}$ справедливы неравенства*

$$c_1\|S|L_r(Q^n_{k,m})\| \le \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{k,m}\bigcap suppN^{l-1}_{k,\widetilde{m}}\neq\emptyset}} |\alpha_{k,\widetilde{m}}(S)|^r 2^{-kn}\right)^{\frac{1}{r}} \le c_2\|S|L_r(Q^n_{k,m})\|, \tag{4.8}$$

в которых константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят ни от куба $Q^n_{k,m}$, ни от сплайна S.

Следующая теорема является обобщением на случай пространств Бесова переменной гладкости теоремы 4.8 работы [20] (где рассматривались классические пространства Бесова).

Теорема 4.1. *Пусть $p \in (0,\infty)$, $r \in (0,p]$, $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$, $\alpha_3 \ge 0$, $0 < \alpha_1 \le \alpha_2$, весовая последовательность $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$. Пусть вес $\gamma^p \in A^{loc}_\infty(\mathbb{R}^{n+d})$ и кратная последовательность $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ. Положим $t_{k,m} := s_{k,m}\widehat{\gamma}_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$.*

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, при $\widetilde{\lambda} := \min\{l, l-1+\frac{\delta_2(\gamma,n,d)-\varepsilon}{p}\}$, $\mu \le \min\{1,r\}$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}[\delta^l_r(Q^n_{k,m})\varphi]^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \\ \le C2^{-k(\widetilde{\lambda}+\frac{d(\delta_1(\gamma,n,d)-\varepsilon)}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))}\left(\sum_{j=-1}^{k} 2^{j\mu(\widetilde{\lambda}+\frac{d(\delta_1(\gamma,n,d)-\varepsilon)}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))}\left(s^l_j(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p}\right)^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}},\end{gathered} \tag{4.9}$$

в котором константа $C > 0$ не зависит от функции φ.

Доказательство. Основная идея доказательства данной теоремы повторяет идею доказательства теоремы 4.8 в [20]. Однако, нам необходимы модификации приведенного в [20] доказательства, учитывающие свойства кратной последовательности $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$, отмеченные в лемме 2.2.

Фиксируем $\varepsilon \in (0,\min\{\delta_1,\delta_2\})$. Положим $\widetilde{\delta_1} := \delta_1 - \varepsilon$, $\widetilde{\delta_2} := \delta_2 - \varepsilon$.

Пусть $U^{l-1}_j := U^{l-1}_j(\varphi,\{t_{k,m}\},p)$ – сплайн почти наилучшего приближения с константой $A \ge 1$ для функции $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$. При $j \in \mathbb{N}_0$ положим $u^{l-1}_j := U^{l-1}_j - U^{l-1}_{j-1}$ ($U^{l-1}_{-1} \equiv 0$). Тогда очевидно

$$\Delta^l(h)\varphi(x) = \Delta^l(h)[\varphi - U^{l-1}_k](x) + \sum_{j=0}^{k}\Delta^l(h)u^{l-1}_j(x), \text{ при } x,h \in \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

Из (2.4) легко следует неравенство

$$\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi \le \left([\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^\mu + \sum_{j=0}^{k} [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{p}{\mu} \ge 1$, получим с помощью неравенства Минковского

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi]^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \\
&\le C \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \left([\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^\mu + \sum_{j=0}^{k} [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^\mu \right)^{\frac{p}{\mu}} \right)^{\frac{\mu}{p}\frac{1}{\mu}} \\
&\le C \left(\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)(\varphi - U_k^{l-1})]^p \right)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)u_j^{l-1}]^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&= \left((R^1)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^{k} (R_j^2)^{\frac{\mu}{p}} \right)^{\frac{1}{\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Нетрудно видеть, что в силу конечной (не зависящей от k и m) кратности перекрытия кубов $(1+l)Q_{k,m}^n$ и замечания 2.3

$$(R^1)^{\frac{\mu}{p}} \le C \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|\varphi - U_k^{l-1}|L_r((1+l)Q_{k,m}^n)\|^p \right)^{\frac{\mu}{p}} \le C \left(s_k^l(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p} \right)^\mu. \tag{4.12}$$

Далее, при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ функция u_j^{l-1} может быть разложена по B - сплайнам $N_{j,m}^{l-1}$(в силу свойства 4) см. выше), то есть

$$u_j^{l-1}(x) = \sum_{m \in Z^n} \alpha_{j,m}(u_j^{l-1}) N_{j,m}^{l-1}(x), \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.13}$$

Поскольку для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ лишь конечное (не зависящее от j и m) число сплайнов $N_{j,m}^{l-1}$ отлично от нуля, получим

$$|\Delta^l(h)u_j^{l-1}(x)|^r \le C \sum_{x \in \text{ supp } N_{j,m}^{l-1}} |\alpha_{j,m}|^r |\Delta^l(h) N_{j,m}^{l-1}(x)|^r. \tag{4.14}$$

Для $k \ge j \in \mathbb{N}_0$, $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ пусть $\Gamma_{j,\widetilde{m}}$ – множество всех кубов $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\widetilde{m}}^n$. Символом $\Gamma_{j,\widetilde{m}}^1$ обозначим множество тех кубов $Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\widetilde{m}}^n$, для которых $(1+l)Q_{k,m}^n \subset Q_{j,\widetilde{m}}^n$. Пусть $\Gamma_{j,\widetilde{m}}^2 := \Gamma_{j,\widetilde{m}} \setminus \Gamma_{j,\widetilde{m}}^1$.

Отметим важную для дальнейшего оценку меры множества $F_{j,\widetilde{m}} := \bigcup\limits_{Q_{k,m}^n \in \Gamma_{j,\widetilde{m}}^2} Q_{k,m}^n$ (доказательство аналогично доказательству соответствующей оценки в [20]). Для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от j и $\widetilde{m}$ справедливо неравенство

$$\frac{|F_{j,\widetilde{m}}|}{|Q^n_{j,\widetilde{m}}|} \le C2^{j-k}. \tag{4.15}$$

Из (4.15) и (2.12) следует, что

$$\sum_{Q^n_{k,m}\in\Gamma^2_{j,\widetilde{m}}} \widehat{\gamma}^p_{k,m} \le C2^{(j-k)\widetilde{\delta}_2(\gamma)} \sum_{Q^n_{k,m}\in\Gamma_{j,\widetilde{m}}} \widehat{\gamma}^p_{k,m}. \tag{4.16}$$

Для кубов $Q^n_{k,m}\in\Gamma^1_{j,\widetilde{m}}$ имеем

$$\delta^l_r(Q^n_{k,m})N^{l-1}_{j,\widetilde{m}} \le C2^{(j-k)l}, \tag{4.17}$$

поскольку $N^{l-1}_{j,\widetilde{m}}$ – полином на кубе $Q^n_{j,\widetilde{m}}$.
Для кубов $Q^n_{k,m}\in\Gamma^2_{j,\widetilde{m}}$ в силу (4.2) имеем

$$\delta^l_r(Q^n_{k,m})N^{l-1}_{j,\widetilde{m}} \le C2^{(j-k)(l-1)}. \tag{4.18}$$

Из того, что $\{s_k\}\in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ очевидно следует неравенство

$$s_{k,m} \le C2^{(\alpha_2-\frac{n}{p})(k-j)} s_{j,\widetilde{m}}, \tag{4.19}$$

при условии $Q^n_{k,m}\subset Q^n_{j,\widetilde{m}}$, $k\ge j\in\mathbb{N}_0$, $m,\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n$ (константа $C>0$ зависит лишь от весовой последовательности $\{s_k\}$).

Комбинируя оценки (4.8),(4.14),(4.17), (4.18), пользуясь свойствами (2.11) ,(4.16) и (4.19) кратных последовательностей $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ и $\{s_{k,m}\}$, будем иметь

$$R^2_j \le C\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{Q^n_{k,m}\in\Gamma^1_{j,\widetilde{m}}} 2^{p(k-j)(\alpha_2-\frac{n}{p})} s^p_{j,\widetilde{m}}\widehat{\gamma}^p_{k,m}2^{(j-k)lp}\left[\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\bigcap \operatorname{supp} N^{l-1}_{j,m}\ne\emptyset}}[\alpha_{j,m}]^r\right]^{\frac{p}{r}} +$$

$$+C\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{Q^n_{k,m}\in\Gamma^2_{j,\widetilde{m}}} 2^{p(k-j)(\alpha_2-\frac{n}{p})} s^p_{j,\widetilde{m}}\widehat{\gamma}^p_{k,m}2^{(j-k)(l-1)p}\left[\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\bigcap \operatorname{supp} N^{l-1}_{j,m}\ne\emptyset}}[\alpha_{j,m}]^r\right]^{\frac{p}{r}} \le$$

$$\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{p(k-j)(\alpha_2-\frac{n}{p})} s^p_{j,m}\widehat{\gamma}^p_{j,m}2^{(j-k)d\widetilde{\delta}_1}2^{(j-k)pl}2^{\frac{jnp}{r}}\|u^{l-1}_j|L_r(Q^n_{j,m})\|^p+$$

$$+C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{p(k-j)(\alpha_2-\frac{n}{p})} s^p_{j,m}\widehat{\gamma}^p_{j,m}2^{(j-k)(\widetilde{\delta}_2+d\widetilde{\delta}_1)}2^{(j-k)p(l-1)}2^{\frac{jnp}{r}}\|u^{l-1}_j|L_r(Q^n_{j,m})\|^p \le$$

$$\begin{aligned} &\le C2^{(\widetilde{\lambda}+\frac{d\widetilde{\delta}_1}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))p(j-k)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}2^{\frac{jnp}{r}}\|u^{l-1}_j|L_r(Q^n_{j,m})\|^p \le \\ &\le C2^{(\widetilde{\lambda}+\frac{d\widetilde{\delta}_1}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))p(j-k)}(s^l_j(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p})^p + (s^l_{j-1}(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p})^p. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Подставляя оценки (4.12) и (4.20) в (4.11) завершаем доказательство теоремы.

Установим теорему, аналогичную теореме 4.1 при более слабых ограничениях на кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$. При этом порядок сплайнов, приближающих нашу функцию нам придется увеличить.

Теорема 4.2. *Пусть $p \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, $\sigma_1 \in [1,\infty]$, $\sigma_2 = p$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$. Тогда при $\mu \leq \min\{1,r\}$ справедливо неравенство (с очевидными модификациями в случае $p=\infty$ или $\mu=\infty$)*

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}[\delta^l_r(Q^n_{k,m})\varphi]^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C2^{-k(l-\alpha_2)}\left(\sum_{j=-1}^{k} 2^{j\mu(l-\alpha_2)}\left(s^{l+1}_j(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p}\right)^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{4.21}$$

в котором константа $C>0$ не зависит от функции φ.

Доказательство данной теоремы во многом повторяет доказательство теоремы 4.1. Поэтому мы укажем лишь отличающие этот случай детали.

Очевидно, что для всех индексов $j \in \mathbb{N}_0$, $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ и для всех кубов $Q^n_{k,m} \subset Q^n_{j,\widetilde{m}}$ справедлива оценка

$$\delta^l_r(Q^n_{k,m})N^l_{j,\widetilde{m}} \leq C2^{(j-k)l} \tag{4.22}$$

с константой $C>0$, не зависящей от индексов $k,j,m,\widetilde{m}$.

Пользуясь этим фактом, а также (2.8) вместо (2.11), (4.16), (4.19) будем шаг за шагом повторять рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 4.1, заменяя все сплайны U^{l-1}_k в доказательстве теоремы 4.1 на сплайны U^l_k. При этом в силу (4.22), очевидно отпадает необходимость в рассматрении множеств $\Gamma^1_{j,\widetilde{m}}$ и $\Gamma^2_{j,\widetilde{m}}$ и оценка (4.20) существенно упрощается. В итоге получим утверждение теоремы 4.1.

Из теоремы 4.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть $p,q \in (0,\infty]$, $p \neq \infty$, $r \in (0,p]$, $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$, весовая последовательность $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, кратная последовательность $\{s_{k,m}\}$ является p - ассоциированной с весовой последовательностью $\{s_k\}$. Пусть $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A^{loc}_\infty(\mathbb{R}^{n+d})$ и кратная последовательность $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ. Пусть $\alpha_2 - \frac{n}{p} < \lambda + \frac{d\delta_1(\gamma)}{p}$ при $\lambda := \min\{l, l-1+\frac{\delta_2(\gamma)}{p}\}$. Положим $t_{k,m} := s_{k,m}\widehat{\gamma}_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$.*

Тогда функция $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ в том и только том случае, если

$$N_1(\varphi,l) := \left(\sum_{j=-1}^{\infty}(s^l_k(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p})^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{4.23}$$

Кроме того

$$\begin{aligned} &N_1(\varphi,l) \sim N_2(\varphi,l) \sim \|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\|, \text{ где} \\ &N_2(\varphi,l) := \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|\varphi - T^{l-1}_k(\varphi,r)|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Доказательство проведем в случае $q < \infty$, поскольку случай $q = \infty$ рассматривается аналогично. Пусть $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$. Оценка $N_1(\varphi, l) \le N_2(\varphi, l) \le C\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|$ следует из (4.6).

Пусть теперь $N_1(\varphi, l) < \infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\alpha_2 - n < \widetilde{\lambda} + \frac{d\widetilde{\delta}_1}{p}$. Применим теорему 4.1 при $\mu \le \min\{1, q, r\}$, затем воспользуемся теоремой 2.2, получим

$$\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|^q \le$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kq(\widetilde{\lambda}+\frac{d\widetilde{\delta}_1}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))} \left(\sum_{j=-1}^{k} 2^{j\mu(\widetilde{\lambda}+\frac{d\widetilde{\delta}_1}{p}-(\alpha_2-\frac{n}{p}))} \left(s^l_j(\varphi, \{t_{k,m}\})_{r,p} \right)^{\mu} \right)^{\frac{q}{\mu}} \le C[N_1(\varphi, l)]^q. \tag{4.25}$$

Следствие доказано.

Аналогично, с помощью теоремы 4.2 получим следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \ge 0$, $\sigma_1 \in [1, \infty]$,$\sigma_2 = p$, $\{t_{k,m}\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$. Если $l > \alpha_2$, то функция $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ в том и только том случае, если*

$$N_1(\varphi, l + 1) < \infty. \tag{4.26}$$

Кроме того

$$N_1(\varphi, l + 1) \sim N_2(\varphi, l + 1) \sim \|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|. \tag{4.27}$$

Теорема 4.2 позволяет получить результат об эквивалентных нормах в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ при различных (достаточно больших) l.

Следствие 4.3. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \ge 0$, $\sigma_1 \in [1, \infty]$, $\sigma_2 = p$, $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ и $l > \alpha_2$. Тогда при $l' > l$*

$$\|\varphi|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\| \sim \|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|.$$

Доказательство. Для доказательства оценки

$$\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\| \le CN_2(\varphi, l') \le C\|\varphi|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|$$

достаточно воспользоваться следствием 4.2 и леммой 4.1. Противоположная оценка очевидна.

Замечание 4.2. Как уже отмечалось выше, методы работ [1] ([24]) позволяют доказать утверждение, аналогичное следствию 4.3 при условии $\{t_k\} \in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ ($\{t_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$) и $l > \alpha_2$.

Покажем, что условие $l > \alpha_2$, о котором говорилось во введении и замечании 2.6, является грубым для пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, в случае переменной гладкости $t_k \ne C_k$ (C_k – положительные константы).

1) Пусть $p \in (1, \infty)$. Покажем, что существует весовая последовательность $\{t^1_k\}$ такая, что $\{t^1_k\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, $\alpha_2 < l$, $\sigma_2 = p$ и $\{t^1_k\} \in^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha'_1,\alpha'_2}$ при $l < \alpha'_2$, однако $\{t^1_k\} \notin^{loc} Y^{\alpha_3}_{\alpha''_1,\alpha''_2}$ ни при каком $\alpha''_2 > l$. Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, n)$ – достаточно малое число, которое будет выбрано позже. Положим $(\gamma^1)^p(x, x_{n+1}) := \frac{1}{|(x,x_{n+1})|^{n+1-\varepsilon}}$ при $(x, x_{1,n}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Заметим, что $(\gamma^1)^p \in$

$A_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Рассмотрим кратную последовательность $(t^1_{k,m})^p := 2^{klp} \iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k,m}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1})\, dx dx_{n+1}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Положим $(t^1)^p(x) := \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}^n_{k,m}}(x) 2^{kn} (t^1_{k,m})^p$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Очевидно, что неравенство

$$\frac{(t^1_{k+1})^p(0)}{(t^1_k)^p(0)} = 2^{pl+n} \frac{\iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k+1,0}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1})\, dx dx_{n+1}}{\iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k,0}} (\gamma^1)^p(x, x_{n+1})\, dx dx_{n+1}} \geq 2^{pl+\frac{n}{2}}$$

справедливо при достаточно малом $\varepsilon \in (0, n)$. Отсюда получим, что $\{t^1_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ только если $\alpha_2 \geq l + \frac{n}{2p} > l$. Отметим, что в силу замечания 2.6 пространство $\widetilde{B}^l_{p,p,r}(\mathbb{R}^n, \{t^1_k\})$ нетривиально при любых $p \in (1, \infty)$, $r \in [1, p]$.

Однако,

$$2^{-klp} \|\gamma | L_p(\Xi^{1,n}_{k,m})\|^{-p} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{k,m}}} 2^{jlp} \|\gamma | L_p(\Xi^{1,n}_{j,\widetilde{m}})\|^p \right) \leq C 2^{p(l-\delta_1(\gamma))(j-k)}.$$

Поэтому $\{t_{k,m}\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ при $\sigma_2 = p$, $\alpha_2 = l - \delta_1(\gamma) < l$, а значит выполнены все условия следствия 4.3.

Следующая теорема является важным шагом для доказательства теоремы об атомарном разбиении. Отметим, что оценка, устанавливаемая в ней может иметь и самостоятельный интерес.

При $p \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$ положим $\tau := \tau(p, r) := \frac{p}{r}$ если p и r одновременно не обращаются в бесконечность. Если $r = p = \infty$ положим $\tau(p, r) := 1$.

Теорема 4.3. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, кратная последовательность $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ при $\sigma_1 = r\tau'$, $\alpha_2 \geq \alpha_1 > -\frac{n}{r}$, $\sigma_2 \in (0, \infty]$, $\alpha_3 \geq 0$. Пусть функции $V_k \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$ (при $k \in \mathbb{N}_0$) и*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} 2^{\frac{knp}{r}} \|v_k | L_r(Q^n_{k,m})\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $v_k := V_k - V_{k-1}$ ($V_{-1} \equiv 0$) при $k \in \mathbb{N}_0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in L^{loc}_r(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} 2^{\frac{knp}{r}} \|\varphi - V_k | L_r(Q^n_{k,m})\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{0,m} \|\varphi | L_r(Q^n_{0,m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} 2^{\frac{knp}{r}} \|v_k | L_r(Q^n_{k,m})\|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

в котором константа $C > 0$ не зависит от функциональной последовательности $\{V_k\}$.

Доказательство. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r(Q^n_{0,m})$ для любого куба $Q^n_{0,m}$.

Для любых $j_1 \le j_2 \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \le \min\{1, r\}$ из (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \|V_{j_1} - V_{j_2}|L_r(Q^n_{0,m})\| \le \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \|v_j|L_r(Q^n_{0,m})\|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \\ = \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^r\right)^{\frac{\mu}{r}}\right)^{\frac{1}{\mu}} = K_{j_1,m}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Применим неравенство Гельдера к внутренней сумме (по $\widetilde{m}$) с показателями τ и τ' и воспользуемся (2.7). Получим для любого $\mu \le \min\{1, r\}$

$$\begin{aligned} (K_{j_1,m})^{\mu} = \sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} \frac{t^r_{j,\widetilde{m}}}{t^r_{j,\widetilde{m}}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^r\right)^{\frac{\mu}{r}} \le \\ \le C \sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{jn\mu}{r}}} \frac{t^{\mu}_{0,m}}{t^{\mu}_{0,m}} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} \left[\frac{1}{t_{j,\widetilde{m}}}\right]^{r\tau'}\right)^{\frac{\mu}{r\tau'}} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^p\right)^{\frac{\mu}{p}} \le \\ \le C \sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\mu(\frac{n}{r}+\alpha_1)}} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^p\right)^{\frac{\mu}{p}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Выберем $\mu \le \min\{1, q, r\}$ и положим $q_\mu := \frac{q}{\mu} \ge 1$. Применив к правой части (4.30) неравенство Гельдера с показателями q_μ и q'_μ, будем иметь

$$K_{j_1,m} \le C \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\mu q'_\mu(\frac{n}{r}+\alpha_1)}}\right)^{\frac{1}{\mu q'_\mu}} \left(\sum_{j=j_1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}} \subset Q^n_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.31}$$

Отметим, что при фиксированном j_1 правая часть неравенств (4.31) стремится к бесконечности, когда α_1 стремиться к $-\frac{n}{r}$.

Из (4.29), (4.31) и полноты пространства $L_r(Q^n_{0,m})$ вытекает нужная нам сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ в $L_r(Q^n_{0,m})$ к некоторой функции $\varphi_m \in L_r(Q^n_{0,m})$. Положим $\varphi(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{Q^n_{0,m}}(x)\varphi_m(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Установим оценку (4.28). Применяя лемму 2.1 с $f_j = 0$ при $j < k$ и $f_j := v_j \chi_{Q^n_{k,m}}$ при $j \ge k$, затем неравенство Минковского (так как $\frac{p}{\mu} \ge 1$), получим

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{\frac{nkp}{r}} t^p_{k,m} \|\varphi - V_k|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{nk}{r}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\left[\sum_{j=k}^{\infty} \|v_j|L_r(Q^n_{k,m})\|^{\mu}\right]^{\frac{p}{\mu}}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2^{\frac{nk}{r}}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\|v_j|L_r(Q^n_{k,m})\|^p\right)^{\frac{\mu}{p}}\right)^{\frac{1}{\mu}} \le \tag{4.32}$$

$$\le 2^{\frac{nk}{r}}\left(\sum_{j=k}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\left[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^r\right]^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{\mu}{p}}\right)^{\frac{1}{\mu}} =: R_k.$$

Рассуждая как при выводе оценки (4.30), получим при $j \ge k+1$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\left[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} \|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^r\right]^{\frac{p}{r}} \le$$

$$\le \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\left(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{0,m}}}\left[\frac{1}{t_{j,\widetilde{m}}}\right]^{r\tau'}\right)^{\frac{p}{r\tau'}}\left[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q^n_{k,m}}} t^p_{j,\widetilde{m}}\|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^p\right] \le \tag{4.33}$$

$$\le C2^{(k-j)p\alpha_1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}\|v_j|L_r(Q^n_{j,\widetilde{m}})\|^p$$

Выберем $\mu \le \min\{1, r, q\}$. Поскольку $\alpha_1 > -\frac{n}{r}$ по условию леммы, пользуясь при неравенством Харди, из (4.32), (4.33) будем иметь

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} R^q_k\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kq(\alpha_1+\frac{n}{r})}\left(\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-jp\alpha_1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}\|v_j|L_r(Q^n_{j,m})\|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}2^{\frac{jnp}{r}}\|v_j|L_r(Q^n_{j,m})\|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.34}$$

Из (4.30) и (4.34) получаем требуемую оценку для первого слагаемого в левой части (4.27).

Оценим второе слагаемое в левой части (4.28). Аналогично (4.29), получим $\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\| \le CK_{1,m}$. Отсюда и из (4.31) легко вытекает оценка

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|\varphi|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}2^{\frac{jnp}{r}}\|v_j|L_r(Q^n_{0,m})\|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.35}$$

Теорема доказана.

Пусть для $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^l \text{ в } L_r^{loc}(\mathbb{R}^n), \text{ где } v_k^l(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^l(x), \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Положим при $p, q \in (0, \infty]$ (с очевидными модификациями в случае $p = \infty$ или $q = \infty$)

$$N_3(\varphi, l+1) := \inf \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.36}$$

где нижняя грань в (4.36) взята по всем сходящимся в $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ к функции φ рядам $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k^l$.

Для $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ положим также

$$N_4(\varphi, l+1) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\alpha_{k,m}(T_k^l(\varphi, r))|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Следующее утверждение обобщает теорему 5.1 работы [20] на случай пространств Бесова переменной гладкости.

Следствие 4.4. ***(атомарное разложение)*** *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$. Пусть кратная последовательность $t_{k,m} \in \widetilde{X}_{\alpha,\sigma}^{\alpha_3}$ при $\alpha_1 > \frac{-n}{r}$, $l > \alpha_2$, $\sigma_1 = r\tau'$, $\sigma_2 = p$. Тогда*

1) каждая функция $\varphi \in \widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ может быть разложена в сходящийся в $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ряд из сплайнов $N_{k,m}^l$, то есть

$$\begin{aligned} &\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^l(\varphi) \text{ в смысле } L_r^{loc}(R^n), \text{ где} \\ &v_k^l(\varphi)(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}(\varphi) N_{k,m}^l(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.37}$$

и справедливо неравенство

$$N_3(\varphi, l+1) \le N_4(\varphi, l+1) \le C\|\varphi|\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|;$$

2) если для некоторой кратной последовательности $\{\beta_{k,m}\}$ имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p |\beta_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^l$ сходится в $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi \in \widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ и справедливы неравенства

$$\|\varphi|\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\| \le CN_3(\varphi, l+1) \le CN_4(\varphi, l+1).$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.3 и следствия 4.2.

Замечание 4.3. Пусть $p \in (1,\infty)$. Покажем, что можно выбрать параметры $r \in (1,p)$, α_3 , α, σ и весовую последовательность $\{t^2_k\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ так, что выполнены все условия следствия 4.4. При этом $\{t^2_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha'_1,\alpha'_2}$ при некотором $\alpha'_1 < 0$, но $\{t^2_k\} \notin Y^{\alpha_3}_{\alpha''_1,\alpha'_2}$ ни при каком $\alpha''_1 \geq 0$.

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0,p-1)$ – достаточно малое число, которое будет выбрано позже. Положим $(\gamma^2)^p(x_1,..,x_{n+1}) := \prod\limits_{i=1}^{n+1} |x_i|^{p-1-\varepsilon}$. Заметим, что $(\gamma^2)^p \in A_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^{n+1})$ при некотором $r \in (1,p)$. Рассмотрим кратную допустимую последовательность $(t^2_{k,m})^p := 2^{klp} \iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k,m}} (\gamma^2)^p(x,x_{n+1})\,dxdx_{n+1}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. Пусть $(t^2_k)^p(x) = 2^{nk} \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}^n_{k,m}}(x)(t^2_{k,m})^p$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, справедливо неравенство

$$\frac{(t^2_{k+1})^p(0)}{(t^2_k)^p(0)} = 2^{pl+n} \frac{\iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k+1,0}} (\gamma^2)^p(x,x_{n+1})\,dxdx_{n+1}dx_{n+1}}{\iint\limits_{\Xi^{1,n}_{k,0}} (\gamma^2)^p(x,x_{n+1})\,dxdx_{n+1}} = C(p)2^{pl+n-(p-\varepsilon)(n+1)}.$$

Если $p > n$, $l \leq n$, то как нетрудно видеть, $\sup\{\alpha_1 | \{t^2_k\} \in Y^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}\} < 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из примера 2.1 легко следует, что весовая последовательность $\{t^2_k\} \in X^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ при $\tau = p$, $\sigma_1 = p\frac{p'_0}{p_0}$ $(p_0 = \frac{p}{r})$, $\sigma_2 = p$, $\alpha_1 = l + \frac{n}{p} - \frac{n}{p} - \frac{(n+d)p_0}{p} = l - \frac{n+1}{r} > \frac{-n}{r}$ (поскольку в нашем случае $d = 1$, $p_0 = \frac{p}{r}$) $\alpha_2 = l - \frac{d\delta_1(\gamma^1,n,1)}{p} < l$. Следовательно выполнены все условия следствия 4.4.

Замечание 4.4. Пусть $p,q \in (0,\infty]$, $p \neq \infty$, $r \in (0,p]$, $\gamma^p \in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$. Положим $t_{k,m} = 2^{ks} \int\limits_{Q^n_{k,m}} \gamma^p(x)\,dx$ при $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$. Рассуждая как в примере 2.1, заключаем, что последовательность $\{t_{k,m}\}$ удовлетворяет условиям следствия 4.4. Следовательно, в силу замечания 2.11 мы получаем теорему об атомарном разложении весового пространства Бесова $\widetilde{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\gamma)$ как частный случай следствия 4.4. Задачи об атомарном разложении пространств $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\gamma)$ (и их обобщений) изучались в работах [23], [30] другими методами (см. также имеющиеся в этих работах ссылки).

5 Теоремы вложения для пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$

Пусть $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел, $w = \{w_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}^n}$ – кратная последовательность неотрицательных чисел.

Положим при $0 < p,q \leq \infty$

$$\begin{gathered} l_q(\beta l_p(w)) := \{a = a_{j,m} : a_{j,m} \in \mathbb{R}^n, \|a|l_q(\beta l_p(w))\|\infty\}, \text{ где} \\ \|a|l_q(\beta l_p(w))\| = \left(\beta^q_j \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} w^p_{j,m}|a_{j,m}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *([27]) Пусть $0 < p_i, q_i \leq \infty$ при $i = 1,2$.*

1) Пространство $l_q(\beta^1 l_p(w^1))$ непрерывно вкладывается в $l_q(\beta^2 l_p(w^2))$ в том и только *том случае, если*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_j^2}{\beta_j^1}\right)^{q^*}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{w_{j,m}^2}{w_{j,m}^1}\right)^{p^*}\right)^{\frac{q^*}{p^*}}<\infty,\ \textit{где}$$
$$\frac{1}{p^*}:=\max\{0,\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\},\ \frac{1}{q^*}:=\max\{0,\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\} \tag{5.2}$$

2) Пространство $l_q(\beta^1 l_p(w^1))$ компактно вкладывается в $l_q(\beta^2 l_p(w^2))$ в том и только том случае, если выполнено условие (5.2) *и, кроме того,*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\beta_j^2}{\beta_j^1}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{w_{j,m}^2}{w_{j,m}^1}\right)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}=0,\ \textit{если}\ q^*=\infty \tag{5.3}$$

и

$$\lim_{|m|\to\infty}\frac{w_{j,m}^1}{w_{j,m}^2}=\infty\ \textit{для всех}\ j\in\mathbb{N},\ \textit{если}\ p^*=\infty. \tag{5.4}$$

Непосредственно из теоремы 5.1 и следствия 4.4 вытекает

Следствие 5.1. *Для $i=1,2$ пусть $0<p^i,q^i\le\infty$, $r^i\in(0,p^i]$, $\tau^i=\frac{p^i}{r^i}$. Пусть при $i=1,2$ кратные последовательности $\{t_{k,m}^i\}\in\widetilde{X}_{\alpha^i,\sigma^i}^{\alpha_3^i}$ при $\alpha_1^i>\frac{-n}{r^i}$, $\sigma_1^i=r^i\tau'^i$, $\sigma_2^i=p^i$, $l>\alpha_2^i$. Тогда*

1) пространство $\widetilde{B}_{p_1,q_1,r_1}^l(\mathbb{R}^n,t_{k,m}^1)$ непрерывно вкладывается в $\widetilde{B}_{p_2,q_2,r_2}^l(\mathbb{R}^n,t_{k,m}^2)$ в том и только том случае, если

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{t_{j,m}^2}{t_{j,m}^1}\right)^{p^*}\right)^{\frac{q^*}{p^*}}<\infty,\ \textit{где}$$
$$\frac{1}{p^*}:=\max\{0,\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\},\ \frac{1}{q^*}:=\max\{0,\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\}; \tag{5.5}$$

2) пространство $\widetilde{B}_{p_1,q_1,r_1}^l(\mathbb{R}^n,t_{k,m}^1)$ компактно вкладывается в $\widetilde{B}_{p_2,q_2,r_2}^l(\mathbb{R}^n,t_{k,m}^2)$ в том и только том случае, если выполнено условие (5.5) *и, кроме того,*

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{t_{j,m}^2}{t_{j,m}^1}\right)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}=0,\ \textit{если}\ q^*=\infty \tag{5.6}$$

и

$$\lim_{|m|\to\infty}\frac{t_{j,m}^1}{t_{j,m}^2}=\infty\ \textit{для всех}\ j\in\mathbb{N}_0,\ \textit{если}\ p^*=\infty. \tag{5.7}$$

6 Следы пространств $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ на плоскостях

В этом пункте мы предполагаем, что $n \geq 2$. Зафиксируем натуральное число $n' < n$ и положим $n'' := n - n'$. Точку $x = (x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $(x', x'') = (x'_1,..,x'_{n'}, x''_{n'+1},..,x''_n)$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^{n'}$ с плоскостью, заданной в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнением $x'' = 0$.

Для $p \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$ положим (как и в пункте 3) $\tau = \tau(p,r) := \frac{p}{r}$. В этом пункте нам будет удобно использовать обозначение $\overline{\tau}$ для сопряженного к τ показателя. То есть $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\overline{\tau}} = 1$.

При определении следа пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ мы будем следовать идее, использованной в [29].

При $l \in \mathbb{N}$ положим $\Sigma^l := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Sigma^l_k$ (определение Σ^l_k см. в пункте 3). Очевидно, $\Sigma^l \subset C(\mathbb{R}^n)$ при $l \geq 2$, поэтому для функции $f \in \Sigma^l \bigcap \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ при $l \geq 2$ имеет смысл понятие поточечного следа. То есть функция $\operatorname{tr}|_{x''=0} f := f(x',0)$ корректно определена.

Для того, чтобы определить след произвольной функции $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ нам понадобится простое утверждение.

Лемма 6.1. *Пусть $p,q \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 > \frac{-n}{r}$, $l > \alpha_2$, $\sigma_1 = r\overline{\tau}$, $\sigma_2 = p$. Пусть при некоторых $l' \geq l$, $r' \in (0,p]$, $\alpha'_3 \geq 0$, $\alpha'_i \in \mathbb{R}$, $\sigma'_i \in (0,\infty]$ $(i = 1,2)$ и $\{t'_{k,m}\} \in X^{\alpha'_3}_{\alpha',\sigma'}$ для любой функции $f \in \Sigma^{l'} \bigcap \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ справедлива оценка*

$$\|f(\cdot,0)|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})\| \leq M\|f|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\|$$

с константой $M > 0$, не зависящей от функции f. Тогда для любой функции $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ существует единственная с точностью до множества n' - мерной лебеговой меры нуль функция $\varphi' \in \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})$ такая, что если $\|\varphi - \varphi_j|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| \to 0$ при $j \to \infty$, то $\|\varphi' - \varphi'_j|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})\| \to 0$ при $j \to \infty$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi'|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})\| \leq M\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\|.$$

Доказательство этой леммы повторяет соответствующие рассуждения из [29], если воспользоваться полнотой пространства $\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})$, плотностью множества $\Sigma^l \bigcap \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ в пространстве $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ (этот факт очевидно вытекает из следствия 4.4) и следствием 4.3.

Определение 6.1. Пусть выполнены все условия леммы 6.1 и $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$. Функцию φ', построенную в лемме 5.1 будем называть следом функции φ и обозначать $\operatorname{tr}|_{x''=0}\varphi$. Под следом пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ на плоскости, заданной в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнением $x'' = 0$,будем понимать множество классов эквивалентных функций $\varphi' \in \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\})$, каждая из которых является следом некоторой функции $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$. При этом мы будем писать $\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m}\}) = \operatorname{Tr}\Big|_{x''=0}\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$.

Для $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ положим $t'_{k,m'} = t_{k,(m',0)}$.

Напомним, что в пункте 3 для $k \in \mathbb{N}_0$, $m = (m', m'') \in \mathbb{Z}^n$ мы положили

$$N^l_{k,m}(x) := \prod_{i=1}^{n} N^l(2^k(x_i - \frac{m_i}{2^k})) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n,$$

поэтому

$$N^l_{k,m}(x) := N^l_{k,m'}(x')N^l_{k,m''}(x'') \text{ при } x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим, что для любых индексов $k \in \mathbb{N}_0$, $m' \in \mathbb{Z}^{n'}$ имеем

$$N^l_{k,m'}(x') = \sum_{m'' \in Z^{n''}} N^l_{k,(m',m'')}(x', 0) \text{ при } x' \in \mathbb{R}^{n'}. \tag{6.1}$$

Число слагаемых в правой части (6.1) в действительности конечно и ограничено некоторым числом, не зависящим от m' и x'. Это следует из того, что сплайны $N^l_{k,m}$ образуют разбиение единицы и кратность пересечения носителей сплайнов $N^l_{k,m}$ конечна(и не зависит от m).

Следствие 4.4 позволяет получить необходимые и достаточные условия на след пространства $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$.

Теорема 6.1. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$. Пусть кратная последовательность $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma}$ при $\alpha_1 > -\frac{n}{r}$, $\alpha_2 < l$, $\sigma_1 = r\overline{\tau}$, $\sigma_2 = p$ такова, что кратная последовательность $t'_{k,m'} \in \widetilde{X}^{\alpha_3}_{\alpha',\sigma'}$ при $\alpha'_1 > -\frac{n'}{r'}$, $\alpha'_2 < l'$ $(l' \geq l)$, $\sigma'_1 = r'\overline{\tau'}$ $(\tau' = \frac{p}{r'})$, $\sigma'_2 = \sigma_2$. Тогда*

$$Tr \Big|_{x''=0} \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\}) = \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_{k,m'}\}). \tag{6.2}$$

Доказательство. Заметим, что выполнение условий теоремы 6.1 гарантирует возможность применения следствий 4.3 и 4.4 к пространствам $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$ и $\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'}, \{t'_{k,m'}\})$. Благодаря следствию 4.3 можно изначально считать, что $l \geq 2$ (следовательно $\Sigma^l \subset C(\mathbb{R}^n)$).

Далее доказательство естественным образом распадается на две части.

1. Пусть $\varphi \in \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})$. Имеем

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v^{l'}_k(\varphi) \text{ в смысле } L^{loc}_r(\mathbb{R}^n), \text{ где } v^{l'}_k(\varphi)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(\varphi) N^{l'}_{k,m}(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.3}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} |\alpha_{k,m}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \|\varphi | \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\| \leq C \|\varphi | \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_{k,m}\})\|. \tag{6.4}$$

Положим

$$\alpha'_{k,m'} := \sum_{m'' \in \mathbb{Z}^{n''}} \alpha_{k,(m',m'')} N^l_{k,m''}(0) \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, m' \in \mathbb{Z}^{n'}.$$

Тогда

$$v'^{l'}_k(x') := \operatorname{tr} \Big|_{x''=0} v^{l'}_k(x) = \sum_{m \in Z^n} \alpha_{k,m} N^{l'}_{k,m}(x', 0) = \sum_{m' \in Z^{n'}} \alpha'_{k,m'} N^{l'}_{k,m'}(x') \text{ при } x' \in \mathbb{R}^{n'}. \tag{6.5}$$

Заметим, что в силу (2.9) и (6.1) будем иметь

$$|\alpha'_{k,m'}|t'_{k,m'} \leq C \sum_{\substack{m''\in\mathbb{Z}^{n''} \\ \mathrm{supp} N^l_{k,m}\bigcap \mathbb{R}^{n'}\neq\emptyset}} |\alpha_{k,(m',m'')}|t_{k,(m',m'')}, \text{ при } k\in\mathbb{N}_0, m'\in\mathbb{Z}^{n'}. \tag{6.6}$$

Отсюда для любого $N\in\mathbb{N}$ будем иметь оценку

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n'}} t'^p_{k,m'}|\alpha'_{k,m'}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^{n}} t^p_{k,m}|\alpha_{k,m}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.7}$$

с константой $C>0$ не зависящей ни от числа N ни от функции φ.

По условию $\varphi\in\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ поэтому из (6.4), (6.7), в силу следствия 4.4, получим

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{k=0}^{N} v_k^{l'}(\cdot,0)|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\})\| \leq C\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n'}} t'^p_{k,m'}|\alpha'_{k,m'}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\leq C\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^{n}} t^p_{k,m}|\alpha_{k,m}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|\sum_{k=0}^{N} v_k^{l'}|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| \leq C\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\|.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Из (6.8) и леммы 6.1 вытекает существование следа φ' функции φ на плоскости $x''=0$ и оценка

$$\|\varphi'|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\})\| \leq C\|\varphi|\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| \tag{6.9}$$

с константой $C>0$, не зависящей от функции φ. Тем самым вложение $\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\}) \subset \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\})$ установлено.

2. Пусть $\varphi'\in\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\})$. В силу условий теоремы и следствия 4.4 имеем

$$\varphi' = \sum_{k=0}^{\infty} v_k'^{l'}(\varphi') \text{ в смысле } L_r^{loc}(\mathbb{R}^{n'}), \text{ где } v_k'^{l'}(\varphi)(x') = \sum_{m'\in\mathbb{Z}^{n'}} \alpha'_{k,m'}(\varphi)N^{l'}_{k,m'}(x') \text{ при } x'\in\mathbb{R}^{n'}. \tag{6.10}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k,m} = \alpha'_{k,m'} \text{ при } m'\in\mathbb{Z}^{n'}, m''\in\mathbb{Z}^{n''} \text{и} N^{l'}_{k,m''}(0)\neq 0 \\
&\alpha_{k,(m',m'')} = 0 \text{ при } m'\in\mathbb{Z}^{n'}, m''\neq 0, \\
&v_k^{l'}(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^{n'}} \alpha_{k,m}(\varphi)N^{l'}_{k,m}(x) \text{ при } x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Отсюда, пользуясь следствиями 4.3, 4.4, нетрудно показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k^{l'}$ сходится в $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $\varphi\in\widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi|\widetilde{B}^{l}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| \le C\|\varphi|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})\| \le C\|\varphi'|\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\})\| \qquad (6.12)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от функции φ'. Тем самым вложение $\widetilde{B}^{l'}_{p,q,r'}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\}) \subset \widetilde{B}^{l}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\})$ установлено.

Непосредственно из построения функции φ следует, что $\varphi' = \mathrm{tr}\,|_{x''=0}\varphi$.

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай теоремы 6.1.

Следствие 6.1. *Пусть $p,q \in (0,\infty)$, $r \in (0,p]$, $d \in \mathbb{N}_0$, вес $\gamma^p \in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^{n+d})$. Пусть кратная последовательность $\{\widehat{\gamma}_{k,m}\}$ порождена весом γ, кратная последовательность $\{s_{k,m}\}$ p - ассоциирована с весовой последовательностью $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\beta_3}_{\beta_1,\beta_2}$ при $\beta_3 \ge 0$, $\beta_1 > \frac{n}{p} + \frac{n''+d}{r}$, $l > \beta_2 - \frac{n}{p} - \frac{d\delta_1(\gamma,n,d)}{p}$, $l' > \alpha_2 - \frac{n'}{p} - \frac{(n''+d)\delta_1(\gamma,n',d+n'')}{p}$. Положим $t_{k,m} = \widehat{\gamma}_{k,m}s_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$. Тогда*

$$Tr\ \Big|_{x''=0}\widetilde{B}^{l}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n,\{t_{k,m}\}) = \widetilde{B}^{l'}_{p,q,r}(\mathbb{R}^{n'},\{t'_{k,m'}\}). \qquad (6.13)$$

Доказательство. Заметим, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей лишь от n'', d, γ, справедливо неравенство

$$\frac{1}{C}\iint\limits_{Q^{n'}_{k,m'}\times\frac{B^{n''+d}}{2^k}\setminus\frac{B^{n''+d}}{2^{k+1}}} \gamma^p(x,y)\,dxdy \le (\widehat{\gamma}_{k,(m',0)})^p \le C \iint\limits_{Q^{n'}_{k,m'}\times\frac{B^{n''+d}}{2^k}\setminus\frac{B^{n''+d}}{2^{k+1}}} \gamma^p(x,y)\,dxdy$$

при $k \in \mathbb{N}_0$, $m' \in \mathbb{Z}^{n'}$. Это следует из того, что вес γ^p локально удовлетворяет условию удвоения.

Отсюда, рассуждая как в примере 2.1, получим что $\{t_{k,m}\} \in \widetilde{X}^{\beta_3}_{\alpha,\sigma}$, $\{t'_{k,m'}\} \in \widetilde{X}^{\beta_3}_{\alpha',\sigma}$ при $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_1 = \beta_1 - \frac{n}{p} - \frac{n+d}{r}$, $\alpha_2 = \beta_2 - \frac{n}{p} - \frac{d\delta_1(\gamma,n,d)}{p}$, $\alpha' = (\alpha'_1,\alpha'_2)$, $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \beta_2 - \frac{n'}{p} - \frac{d\delta_1(\gamma,n',n''+d)}{p}$, $\sigma' = \sigma = (r\overline{\tau}, p)$. Таким образом при выполнении условий следствия 6.1 выполнены все условия теоремы 6.1. Следствие доказано.

С учетом замечания 2.9 получим из следствия 6.1 следующее утверждение.

Следствие 6.2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, $r \in [1,p)$, $s > \frac{n''}{r}$, $l > s$, $\gamma^p \in A_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$Tr\ |_{x''=0}\ B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\gamma) = \widetilde{B}^{l}_{p,q,r}(\mathbb{R}^{n'},\{\gamma_k\}),$$

где $\gamma^p_k := 2^{k(sp+n')}\sum\limits_{m'\in\mathbb{Z}^{n'}}\int\limits_{\Xi^{n'',n'}_{k,m'}}\gamma^p(x)\,dx$ *при* $k \in \mathbb{N}_0$.

Интересно отметить, что утверждение следствия 6.2 является новым и не могло быть получено известными ранее методами атомарного разложения. Причина заключается в том, что мы не проверяем тонких условий равенства нулю моментов высокого порядка у атомов из разложения следа (по-видимому в общем случае это невозможно). В существенно менее общей форме аналог утверждения следствия 6.2 получен в [22]. В указанной работе рассмотрена модельная ситуация веса, зависящего лишь от расстояния до начала координат. Выбор модельного веса позволил авторам избежать проверки равенства нулю моментов у соответствующих атомов.

Замечание 6.1. Пусть $\gamma \equiv 1$, $\{s_k\} \in^{loc} Y^{\beta_3}_{\beta_1,\beta_2}$. Полагая $d = 0$, $p = r$ и $t_{k,m} = s_{k,m} = s_{k,m} 2^{\frac{kn}{p}} \widehat{\gamma}_{k,m}$ в следствии 6.1 мы получаем, что условия $\beta_1 > \frac{n''}{p}$, $l > \beta_2$ являются достаточными для того, чтобы

$$\mathrm{Tr}\ \Big|_{x''=0} \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{s_{k,m}\}) = \widetilde{B}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^{n'}, \{s'_{k,m'}\}).$$

Следовательно, учитывая теоремы 2.3, 2.6 в случае $p, q \in [1, \infty)$ мы получаем результат работы [29] как частный случай следствия 6.1.

При $p, q \in [1, \infty]$, $r = p$, $s_k = 2^{ks}$, $\alpha > \frac{n''}{p}$, $l > s$, учитывая теорему 2.7, мы получаем классический результат О.В. Бесова (характеризация следа классического пространства Бесова на плоскости) как частный случай следствия 6.1 (см. [1] теоремы 1.1, 2.1, 2.2).

Ссылки

[1] О. В. Бесов, Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Тр. МИАН СССР, 60, Изд-во АН СССР, М., 1961, 42-81.

[2] О. В. Бесов, Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости, Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 17, Сборник статей, Тр. МИАН, 214, Наука, М., 1997, 25-58.

[3] О. В. Бесов, Эквивалентные нормировки пространств функций переменной гладкости, Тр. МИАН, 243, Наука, М., 2003, 87-95.

[4] О.В. Бесов, Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости. Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, 248, Наука, М., 2005, 52-63.

[5] де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. Радио и связь, М., 1985.

[6] Ю. А. Брудный, "Пространства, определяемые с помощью локальных приближений", Тр. ММО, 24, Издательство Московского университета, М., 1971, 69-132

[7] И. П. Иродова, Диадические пространства Бесова, Алгебра и анализ, 12:2 (2000), 40-80.

[8] Г. А. Калябин, "Задача о следах для весовых анизотропных пространств лиувиллевского типа", Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:5 (1977), 1138-1160.

[9] Калябин Г.А., Письменная С.И. Описание следов функций, производные которых ограничены с некоторыми весами, Математические заметки, 35, №3, (1984), 357-368.

[10] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, "Весовые функциональные пространства и их приложения: к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений", Изв. вузов. Матем., 1988, № 8, 4-30.

[11] И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, 1973 г..

[12] С. В. Успенский, "О теоремах вложения для весовых классов", Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 60, Изд-во АН СССР, М., 1961, 282-303.

[13] А.И. Тюленев Задача о следах для пространств Соболева с весами типа Макенхаупта, Математические Заметки, 84, № 5, стр. 720-732.

[14] H.Abels, M. Krbec and K. Schumacher On the trace space of a Sobolev space with a radial weight , J. Funct. Spaces Appl. 6, No. 3, 259-276 ,2008.

[15] O. V. Besov, On spaces of functions of smoothness zero, Sb. Math., 203:8(2012), 1077-1090.

[16] O. V. Besov, To the Sobolev embedding theorem for the limiting exponent, 284(2014), 81-96.

[17] V. I. Burenkov. "Sobolev Spaces on Domains" // Teubner-Texte zur Mathematik Band 137.

[18] C. de Boor and G. F. Fix, Spline approximation by quasi-interpolants, J. Approx. Theory 8 (1973), 19-45.

[19] H. B. Curry and I. J. Schoenberg, On Polya frequency functions. J. Analyse Math. 17 (1966), 71-107.

[20] R.A. DeVore, V.A. Popov, Interpolation of Besov spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1) (1988) 397-414.

[21] E. Gagliardo "Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili" // rend. sem. mat. univ. Padova 27(1957), 284-305.

[22] D. Haroskee, H.-J. Schmeisser On trace spaces of function spaces with a radial weight:atomic approach. Complex Var. Elliptic Equ. 55 (2010), no. 8-10, 875-896.

[23] L.I. Hedberg and Y. Netrusov, An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation, Mem. Amer. Math. Soc. 188(882) (2007), 97 pp.

[24] Kempka, H., Vybiral, J.: Spaces of variable smoothness and integrability: characterizations by local means and ball means of differences. J. Fourier Anal. Appl. 18 (2012), no. 4, 852-891.

[25] H. Kempka, Generalized 2-microlocal Besov spaces, dissertation, Jena, 2008.

[26] H. Kempka, Atomic, molecular and wavelet decomposition of generalized 2-microlocal Besov spaces, J. Funct. Spaces Appl., 8 (2010), no. 2, 129-165.

[27] T. Kuhn, H.-G. Leopold, W. Sickel and L. Skrzypczak, Entropy numbers of embeddings of weighted Besov spaces, 2, Proc. Edinb. Math. Soc. 49 (2006), 331-359.

[28] Y. Liang, D. Yang, W. Yuan, Y. Sawano, and T. Ullrich, A new framework for generalized Besov-type and Triebel-Lizorkin-type spaces, Diss. Math. (Rozprawy Mat.) 489, 114(2013).

[29] Moura S.D., Neves J.S., Schneider C. On trace spaces of 2-microlocal Besov spaces with variable integrability. Math. Nachr. 286 (2013), № 11-12, 1240-1254.

[30] I. Mitsuo, Y. Sawano, Atomic decomposition for weighted Besov and Triebel-Lizorkin spaces. Math. Nachr. 285 (2012), no. 1, 103-126.

[31] I. Piotrowska, Weighted function spaces and traces on fractals, PhD thesis, Friedrich-Schiller-Universitдt Jena, Germany, 2006.

[32] V.S. Rychkov, Littlewood-Paley theory and function spaces with A_p^{loc} - weights, Math. Nachr., 224(2001),145-180.

[33] E.M. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals,Princeton Univ. Press, Princeton,NJ,1993.

[34] E. A. Storozhenko and P. Oswald, Jackson's theorem in the spaces $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$, Siberian Math. J. 19 (1978), 630-639.

[35] A.I. Tyulenev Description of traces of functions in the Sobolev space with a Muckenhoupt weight. Proc. Stekl. 284(2014). 280-295.

[36] Ullrich, T., Rauhut, H.: Generalized coorbit space theory and inhomogeneous function spaces of Besov-Lizorkin-Triebel type. J. Funct. Anal. 260(11), 3299-3362 (2011).