Касательные конусы к многообразиям Шуберта для классических групп

А.А. Шевченко

Самарский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

Содержание

Введение

Пусть G — редуктивная комплексная алгебраическая группа, B — её борелевская подгруппа. Тогда $\mathcal{F} = G/B$ — многообразие флагов, в котором есть важные подмногообразия, называемые многообразиями Шуберта X_w, нумеруемые элементами группы Вейля W, $p = eB$. Как известно, p принадлежит любому X_w. Далее, пусть T_pX_w — касательное пространство, а $TC_pX_w = C_w$ — касательный конус. Сложная проблема в изучении геометрии X_w — описание C_w [BL, Chapter 7]. Так как $TC_pX_w \subset T_p\mathcal{F}$, то можно поставить вопрос о их совпадении или несовпадении. Поставленный вопрос можно разделить на два: «легкий» (совпадение и несовпадение как подсхем) и «сложный» (совпадение и несовпадение как подмногообразий). В 2009 году в совместной работе Д.Ю. Елисеева и А.Н. Панова были вычислены касательные конусы для случая $G = SL_n(\mathbb{C}), n \leqslant 5$. Там же была выдвинута гипотеза, исследованию которой и посвящена дипломная работа.

Основная гипотеза. Пусть $w_1, w_2 \in W$ — две различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$

В 2013 году в совместной работе Д.Ю. Елисеева и М.В. Игнатьева данная гипотеза в случае подсхем была доказана для W типа A_n, F_4, G_2. Результатами дипломной работы являются следующие теоремы (определения смотрите в параграфе 1.1).

Теорема 1. Пусть W типа B_n или C_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подсхемы.

Теорема 2. Пусть W типа D_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные базисные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подсхемы.

Теорема 3. Пусть W типа D_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные базисные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подмногообразия.

Опишем кратко структуру работы. Первая глава носит вводный характер; в ней вводятся основные обозначения и определение касательного конуса (параграф 1.1), а также основное техническое средство, используемое в доказательстве теорем 1 и 2, — многочлены Костанта–Кумара и их свойства (параграф 1.2). Во второй главе определяются группы Вейля типа B_n и C_n (параграф 2.1) и доказывается теорема 1 (параграф 2.2). В третьей главе определяется группа Вейля типа D_n (параграф 3.1), доказывается теорема 2 (параграф 3.2) и доказывается теорема 3 (параграф 3.3). Работа основана на результатах статей [BIS] и [IS].

Автор благодарит своего научного руководителя А.Н. Панова за постановку задачи и внимание к работе. Также автор благодарит М.В. Игнатьева за ценные комментарии и поддержку и Д.Ю. Елисеева за предоставленное программное обеспечение. Работа была поддержана грантом РФФИ 14–01–31052–мол_а.

Глава 1. Основные определения

§1.1. Пояснение основных обозначений

В этом параграфе мы приводим основные определения и факты из теории алгебраических групп и алгебраической геометрии, которые нам потребуются в дальнейшем (см. [Hu1] и [Hu2] для основных фактов о алгебраических группах и системах корней).

Пусть G — комплексная редуктивная алгебраическая группа, T — максимальный тор в G, B — подгруппа Бореля в G содержащая T, и U — унипотентный радикал B. Пусть Φ — система корней G относительно T, Φ^+ — множество положительных корней относительно B, Δ — множество простых корней, и $W = N(T)/T$ — группа Вейля Φ.

Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов и через $X_w \subseteq \mathcal{F}$ подмногообразие Шуберта, соответствующее элементу w группы Вейля W. Обозначим через $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{p,X_w}$ локальное кольцо точки $p = eB \in X_w$. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $\mathcal{O}$. Последовательность вложенных идеалов

$$\mathcal{O} \supseteq \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \dots$$

определяет фильтрацию на $\mathcal{O}$. Определим R как градуированную алгебру

$$R = \operatorname{gr} \mathcal{O} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}.$$

По определению, *касательный конус* C_w к многообразию X_w в точке p — это спектр R: $C_w = \operatorname{Spec} R$. Очевидно, C_w — это подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subseteq T_p\mathcal{F}$.

Теперь пусть $\mathcal{A}$ — симметрическая алгебра векторного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, или, эквивалентно, алгебра регулярных функций на касательном пространства T_pX_w. Так как R порождена как $\mathbb{C}$-алгебра элементами $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, она является факторкольцо $R = \mathcal{A}/I$. По определению, *приведенный касательный конус* C_w^{red} к X_w в точке p — это множество общих нулей в T_pX_w многочленов $f \in I \subseteq \mathcal{A}$. Следовательно, если $C_{w_1}^{\mathrm{red}} \neq C_{w_2}^{\mathrm{red}}$, то $C_{w_1} \neq C_{w_2}$.

§1.2. Многочлен Костанта–Кумара

В этом пункте даётся строгое определение многочленов Костанта–Кумара, показывается, как их вычислять в комбинаторных терминах, и объясняется, почему они зависят только от касательного конуса C_w к X_w в точке p. Более подробно о многочленах Костанта–Кумара можно прочитать в [BL], [Ku].

Тор T действует на многообразии Шуберта сопряжениями (или левыми умножениями, в данном случае это одно и то же). Точка p инвариантна относительно этого действия, поэтому возникает действие T на локальном кольце $\mathcal{O}$. Это действие, очевидно, сохраняет фильтрацию степенями идеала $\mathfrak{m}$, поэтому определена структура T-модуля на алгебре $R = \operatorname{gr} \mathcal{O}$. Согласно [Ku, Theorem 2.2], R разлагается в прямую сумму конечномерных весовых подпространств:

$$R = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} R_\lambda,$$

где $\mathfrak{X}(T) \subset \mathfrak{h}^*$ — решётка характеров тора T и $R_\lambda = \{f \in R \mid t.f = \lambda(t)f\}$ — весовое подпространство веса λ. Значит, определён *формальный характер* R — элемент

$$\operatorname{ch} R = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} m_\lambda e^\lambda$$

$\mathbb{Z}$-модуля Λ, состоящего из всех (возможно, бесконечных) линейных комбинаций линейно независимых элементов e^λ, $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$, где $m_\lambda = \dim R_\lambda$.

Далее, если элемент $a = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} n_\lambda e^\lambda \in \Lambda$ содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, то для каждого $k \geqslant 0$ корректно определён многочлен

$$[a]_k = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} n_\lambda \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \in S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}].$$

Пусть $[a] = [a]_{k_0}$, где k_0 — наименьшее, для которого $[a]_{k_0} \neq 0$. К примеру, если $a = 1 - e^\lambda$ для какого-нибудь λ, то $[a]_0 = 0$ и $[a] = [a]_1 = -\lambda$ (здесь мы обозначаем $1 = e^0$). Обозначим через A подмодуль в Λ, состоящий из всех конечных линейных комбинаций; он является коммутативным кольцом относительно умножения $e^{\lambda} \cdot e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$ — это просто групповое кольцо группы $\mathfrak{X}(T)$. Обозначим также через $Q \subset \Lambda$ поле частных кольца A. Отметим, что для любого элемента поля Q вида $q = a/b$, a, $b \in A$, корректно определён элемент

$$[q] = \frac{[a]}{[b]} \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$$

поля рациональных функций на $\mathfrak{h}$.

На Q имеется отображение $q \mapsto q^*$, определённое правилом

$$e^{\lambda} \mapsto (e^{\lambda})^* = e^{-\lambda}.$$

Оказывается [Ku, Theorem 2.2], характер $\operatorname{ch} R$ на самом деле лежит в Q, поэтому там лежит и $(\operatorname{ch} R)^*$. Наконец, положим

$$c_w = [(\operatorname{ch} R)^*],\ d_w = (-1)^{l(w)} \cdot c_w \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Здесь $l(w)$ — длина элемента w в группе Вейля W относительно выбранной системы фундаментальных корней Δ. По определению, c_w и d_w лежат в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$; на самом деле, d_w является многочленом, то есть лежит в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (см. [KK2] и [BL, Theorem 7.2.6]).

Определение 1.1. Элемент $d_w \in S$ называется *многочленом Костанта–Кумара*, соответствующим элементу группы Вейля $w \in W$.

Из определения видно, что c_w и d_w зависят только от канонической структуры T-модуля на алгебре функций R на касательном конусе C_w, поэтому чтобы показать, что для каких-то двух элементов w, w' группы Вейля касательные конусы различны, как подсхемы, достаточно проверить, что $c_w \neq c_{w'}$, или, что равносильно, $d_w \neq d_{w'}$. С другой стороны, имеется чисто комбинаторное определение многочленов Костанта–Кумара; чтобы его дать, рассмотрим произвольные два элемента w, $v \in W$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь приведённое разложение элемента $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$ — фундаментальные корни, а s_i — простое отражение, соответствующее корню α_i. Положим

$$c_{w,v} = (-1)^{l(w)} \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}s_{i_2}^{\epsilon_2}\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_l}^{\epsilon_l}\alpha_{i_l}},$$

где суммирование ведётся по всем последовательностям $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l)$ из нулей и единиц таким, что $s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_l}^{\epsilon_l} = v$. Элемент $c_{w,v} \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ на самом деле зависит только от w и v, но не от выбора приведённого разложения [Ku, Section 3].

Пример 1.2. Пусть $\Phi = A_2$, соответственно, $W \cong S_3$. Пусть $w = s_1 s_2 s_1$. Вычислим $c_{w,\mathrm{id}}$, где id — нейтральный элемент группы Вейля. В сумме будет всего два слагаемых, соответствующих последовательностям $(0, 0, 0)$ и $(1, 0, 1)$. Значит,

$$c_{w,\mathrm{id}} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_1} + \frac{1}{-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1}\right) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Положим теперь

$$d_{w,v} = \sum r(j_1) \dots r(j_t) \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}], \tag{1}$$

где для любого k от 1 до l, по определению, $r(k) = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$, а суммирование ведётся по всем таким последовательностям $(j_1, \dots, j_t)$, $t = l(v)$, что $s_{i_{j_1}} \dots s_{i_{j_t}}$ — приведённое разложение для v (получающееся из фиксированного приведённого разложения $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ вычёркиванием каких-нибудь отражений). Пусть w_0 — самый длинный элемент в группе W. Замечательный факт состоит в том, что [KK2]

$$d_{vw_0,ww_0} = (-1)^{l(w)-l(v)} \cdot c_{w,v} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha. \tag{2}$$

В частности, $d_{w,v}$ тоже не зависит от выбора разложения для w. Кроме того, $c_w = c_{w,\mathrm{id}}$ (и, следовательно, $d_w = d_{w_0,ww_0}$), так что достаточное условие несовпадения касательных конусов может быть проверено чисто в комбинаторных терминах.

В заключение приведём оригинальное определение элементов $c_{w,v}$, использующее нильалгебры Гекке (см. [Ku] и [BL, Section 7.1]). Обозначим через Q_W векторное пространство над $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ с базисом $\{\delta_w,\ w \in W\}$. На Q_W есть структура кольца, определяемая правилом

$$f\delta_v \cdot g\delta_w = fv(g)\delta_{vw}.$$

Возникающая алгебра называется *нильалгеброй Гекке* (nil-Hecke ring). Для любого i от 1 до n положим

$$x_i = \alpha_i^{-1}(\delta_{s_i} - \delta_{\mathrm{id}}).$$

Если теперь $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ — приведённое разложение, то элемент

$$x_w = x_{i_1} \dots x_{i_l}$$

не зависит на самом деле от выбранного разложения [KK1, Proposition 2.1].

Более того, оказывается, что элементы $\{x_w,\ w \in W\}$ тоже образуют $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$-базис пространства Q_W [KK1, Proposition 2.2], причём

$$x_w = \sum\nolimits_{v \in W} c_{w,v}\delta_v,$$
$$\delta_w = \sum\nolimits_{v \in W} d_{w,v}x_v.$$

Для нас важную роль также будут играть следующие свойства: при всех $w, v \in W$

$$\begin{aligned} &\text{a) } x_v \cdot x_w = \begin{cases} x_{vw}, & \text{если } l(vw) = l(v) + l(w), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ &\text{b) } c_{w,v} = -v(\alpha_i)^{-1}(c_{ws_i,v} + c_{ws_i,vs_i}),\ \text{если } l(ws_i) = l(w) - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

(Группа W естественно действует на $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ автоморфизмами.) Первое свойство доказано в [KK1, Proposition 2.2], а второе сразу следует из первого и из определений (см. также доказательство [Ku, Corollary 3.2]).

Для нас порядок Брюа будет важен потому, что элемент $c_{w,v}$ отличен от нуля в том и только в том случае, когда $v \leqslant w$ [Ku, Corollary 3.2]. К примеру, элемент $c_w = c_{w,\mathrm{id}}$ *всегда* отличен от нуля, так как id — наименьший элемент в W в смысле порядка Брюа. Отметим также (см. [Dy] и [BL, Theorem 7.1.11]), что для любых элементов группы Вейля $v, w \in W$ существует такой многочлен $g_{w,v} \in S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, что

$$c_{w,v} = g_{w,v} \cdot \prod_{\alpha > 0,\ s_\alpha v \leqslant w} \alpha. \tag{4}$$

Глава 2. Основная гипотеза для типов B_n и C_n

§2.1. Основные факты о группе Вейля типов B_n и C_n

В данном параграфе определяется группа Вейля W типа B_n и C_n. Более подробно можно посмотреть в [Hu2] и [BB].

Везде в этом параграфе Φ обозначает неприводимую систему корней типа B_n или C_n. Пусть ϵ_1, …, ϵ_n — стандартный базис евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Как обычно, отождествим множество Φ^+ положительных корней с одним из следующих подмножеств $\mathbb{R}^n$:

$$B_n^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j,\ \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$C_n^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j,\ \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{2\epsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

так что W можно определить как подгруппу ортогональной группы $O(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $S_{\pm n}$ — симметрическая подгруппа на $2n$ буквах $1, \ldots, n, -n, \ldots, -1$. Группа Вейля W изоморфна *гипероктаэдральной группе* — это подгруппа $S_{\pm n}$ содержащая перестановки $w \in S_{\pm n}$ такие, что $w(-i) = -w(i)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Изоморфизм задается следующим образом

$$s_{\epsilon_i - \epsilon_j} \mapsto (i,j)(-i,-j),$$
$$s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \mapsto (i,-j)(-i,j),$$
$$s_{\epsilon_i} = s_{2\epsilon_i} \mapsto (i,-i).$$

Замечание 2.1. i) Заметим, что любой $w \in W$ полностью определяется значениями на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Элементы W можно изобразить следующим образом: если $w(i) = w_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда записывается $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{pmatrix}$. Например, если $\Phi = C_5$, тогда

$$s_{\epsilon_1+\epsilon_5} s_{2\epsilon_3} s_{\epsilon_2-\epsilon_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Заметим, что множество простых корней имеет следующий вид: $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, …, $\alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$, и

$$\alpha_n = \begin{cases} \epsilon_n, & \text{если } \Phi = B_n, \\ 2\epsilon_n, & \text{если } \Phi = C_n. \end{cases}$$

Обозначим соответствующие простые отражения через $s_1, \ldots, s_n$.

Говорят, что v меньше или равен w в смысле *порядка Брюа*, обозначается $v \leqslant w$, если некоторое приведенное разложение v — это подслово приведенного разложения w.

Существует красивое комбинаторное описание порядка Брюа в гипероктаэдральной группе. Возьмем $w \in W$, обозначим за X_w матрицу размера $2n \times 2n$ заполненную по следующему правилу

$$(X_w)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } w(j) = i, \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

Строки и столбцы матрицы занумеруем числами $1, \ldots, n, -n, \ldots, 1$. Такая 0–1 матрица, называется *расстановкой ладей* для w. Определим матрицу R_w запишем в её (i, j)-й элемент ранг нижней левой $(n - i + 1) \times j$ подматрицы X_w. Другими словами, $(R_w)_{i,j}$ — это число ладей расположенных нестрого к юго-западу от (i, j).

Пример 2.2. Пусть $n = 4$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Здесь показаны матрицы X_w и R_w (ладьи изображены символом $\otimes$):

$$X_w = \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline
1 & & & & & \otimes & & & \\ \hline
2 & & & & & & & \otimes & \\ \hline
3 & & & & & & & & \otimes \\ \hline
4 & & & \otimes & & & & & \\ \hline
-4 & & & & & & \otimes & & \\ \hline
-3 & \otimes & & & & & & & \\ \hline
-2 & & \otimes & & & & & & \\ \hline
-1 & & & & \otimes & & & & \\ \hline
\end{array}, \quad R_w = \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline
3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ \hline
4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ \hline
-4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline
-3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline
-2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}.$$

Пусть X и Y — матрицы с целыми значениями. Пишут, что $X \leqslant Y$, если $X_{i,j} \leqslant Y_{i,j}$ для любых i, j. Пусть v, $w \in W$, тогда верно следующее

$$v \leqslant w \text{ тогда и только тогда, когда } R_v \leqslant R_w \tag{5}$$

(см, например, [Pr] или [BB, Theorem 8.1.8]).

Определим отображения $\mathrm{row}\colon \Phi^+ \to \mathbb{Z}$ и $\mathrm{col}\colon \Phi^+ \to \mathbb{Z}$ правилом

$$\begin{gathered}
\mathrm{row}(\epsilon_i - \epsilon_j) = j,\ \mathrm{row}(\epsilon_i + \epsilon_j) = -j,\ \mathrm{row}(\epsilon_i) = 0,\ \mathrm{row}(2\epsilon_i) = -i, \\
\mathrm{col}(\epsilon_i - \epsilon_j) = \mathrm{col}(\epsilon_i + \epsilon_j) = \mathrm{col}(\epsilon_i) = \mathrm{col}(2\epsilon_i) = i.
\end{gathered}$$

Для любого k от $-n$ до n положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k &= \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{row}(\alpha) = k\}, \\
\mathcal{C}_k &= \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{col}(\alpha) = k\}.
\end{aligned}$$

Множество $\mathcal{R}_k$ (соответственно, $\mathcal{C}_k$) называется k-й *строкой* (соответственно, k-м *столбцом*) Φ^+.

Определение 2.3. Пусть $\sigma \in W$ — инволюция. Определим *носитель* $\mathrm{Supp}(\sigma)$ инволюции σ по следующему правилу:

$$\begin{gathered}
\text{если } 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = j, \text{ тогда } \epsilon_i - \epsilon_j \in \mathrm{Supp}(\sigma), \\
\text{если } 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = -j, \text{ тогда } \epsilon_i + \epsilon_j \in \mathrm{Supp}(\sigma), \\
\text{если } \Phi = B_n,\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = -i, \text{ тогда } \epsilon_i \in \mathrm{Supp}(\sigma), \\
\text{если } \Phi = C_n,\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = -i, \text{ тогда } 2\epsilon_i \in \mathrm{Supp}(\sigma).
\end{gathered}$$

По определению, $\mathrm{Supp}(\sigma)$ — ортогональное подмножество Φ^+. Заметим, что

$$\sigma = \prod_{\beta \in \mathrm{Supp}(\sigma)} s_\beta,$$

где произведение берется в любом фиксированном порядке. Заметим, что для любого k имеем

$$|\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_k| \leqslant 1.$$

Пример 2.4. Пусть $\Phi = C_6$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -6 & -2 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_1 + \epsilon_6, 2\epsilon_2, \epsilon_3 - \epsilon_5\}.$$

§2.2. Доказательство теоремы 1

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть W типа B_n или C_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подсхемы.

Доказательство Теоремы 1 ведется индукцией по n (база $n = 2$ очевидна). Обозначим для этого через $\widetilde{W}$ подгруппу в W, состоящую из подстановок, которые единицу переводят в единицу (ясно, что $\widetilde{W}$), а через $\widetilde{I}_{n-1} = I(\widetilde{W})$ — множество инволюций в ней. Для любого $w \in \widetilde{W}$ будем через $\widetilde{d}_w$ обозначать его многочлен Костанта–Кумара (при отождествлении $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ с $\mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ можно считать, что $\widetilde{d}_w$ лежит в $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ и просто не зависит от α_1). Аналогично возникает элемент $\widetilde{c}_w \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ и, шире, элементы $\widetilde{d}_{w,v}$ и $\widetilde{c}_{w,v}$ для любых $w, v \in W$. По индукции, $\widetilde{d}_w \neq \widetilde{d}_v$ и $\widetilde{c}_w \neq \widetilde{c}_w$ для любых двух разных инволюций $w, v \in \widetilde{I}_{n-1}$.

Лемма 2.6. Предположим, что $w \in I_n$ и $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Запишем элемент c_w в несократимом виде:

$$c_w = A/B,\ A, B \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}],\ (A, B) = 1.$$

Тогда B делится на β в кольце $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

Доказательство. Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим подстановку

$$u = s_{j-1} \ldots s_1 = (j, j-1) \ldots (2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ j & 1 & 2 & \ldots & j-2 & j-1 & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(j) = 1$, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$\begin{aligned}
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } j-1, \\
&u(\alpha_j) = u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \epsilon_{j-1} - \epsilon_{j+1} > 0, \\
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } j+1 \text{ до } n-1, \\
&u(\alpha_n) = u(2\epsilon_n) = 2\epsilon_n = \alpha_n > 0, j \neq n \\
&u(\alpha_n) = u(2\epsilon_n) = 2\epsilon_{n-1} > 0, j = n
\end{aligned}$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [Hu2], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду формулы (3),

$$x_w = \sum_{s\in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h\in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h =$$
$$= \sum_{g,h\in W} c_{u,g} g(c_{v,h})\delta_{gh} = \sum_{s\in W}\left(\sum_{g\in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s})\right)\delta_s.$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g\in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s})$$

для любого $s \in W$ в частности,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g\in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через $\mathcal{U}$ и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_{j-1}\dots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается всегда — иначе будет нарушаться второе условие. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g\in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся формулой (4). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}) = -g(\alpha_1)^{-1} c_{us_1,g},$$

так как $us_1 \not\geqslant gs_1$, а потому $c_{us_1,gs_1} = 0$. Значит, выражение для c_w переписывается в виде

$$c_w = -\sum_{g\in U} \frac{c_{us_1,g}\, g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Тривиально проверяется, что среди всех $g \in \mathcal{U}$ есть не больше одного элемента, для которого $g\alpha_1 = \beta$. А именно, единственный претендент на эту роль — это элемент $g_0 = us_1 = s_{j-1}\dots s_2$. Объясним это. Любой $g \in \mathcal{U}$ получается из u вычеркиванием. Всегда вычеркивается s_1. Если мы вычеркиваем какое-то еще отражение, то если номер первого вычеркнутого после s_1 справа налево отражения равен k, $g(\alpha_1) = \epsilon_1 - \epsilon_k, k < j$. Чтобы показать, что g_0 действительно лежит в $\mathcal{U}$, нужно проверить ещё, что $v \geqslant g_0^{-1}$, но предположим пока, что нам удалось это сделать.

В таком случае

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0}\, g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g}\, g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Обозначим через S' (соответственно, через Q') подалгебру в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (соответственно, подполе в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$), порождённую $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Тогда $c_{v,g_0^{-1}} \in Q'$, а поскольку $g(1) = 1$, то и

$g(c_{v,g_0^{-1}}) \in Q'$; в частности, числитель этого выражения в несократимой записи не делится на β. С другой стороны, легко видеть, что

$$c_{us_1,g_0} = c_{us_1,us_1} = \pm \frac{1}{s_{j-1}\alpha_{j-1}} \cdot \frac{1}{s_{j-1}s_{j-2}\alpha_{j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{j-1}\ldots s_2\alpha_2}$$

(это сразу следует из того, что $us_1 = s_{j-1}\ldots s_2$). Всё это означает, что несократимая запись первого слагаемого имеет вид $P/\beta Q$ для некоторых многочленов $P, Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, причём многочлен P не равен нулю.

Аналогично, для любого $g \in U$, не равного g_0, имеем $g(c_{v,g^{-1}}) \in Q'$, в то время как

$$c_{us_1,g} = \pm \frac{1}{s_{l_1}\alpha_{l_1}} \cdot \frac{1}{s_{l_1}s_{l_2}\alpha_{l_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{l_1}\ldots s_{l_k}\alpha_{l_k}},$$

где $g = s_{l_1}\ldots s_{l_k}$ для каких-то $j-1 \geqslant l_1 > l_2 > \ldots > l_k \geqslant 2$. Элемент $g(\alpha_1) = \epsilon_1 - \epsilon_k, k < j$ по рассуждениям выше. Отсюда видно, что несократимая запись всей остальной суммы имеет вид C/D для некоторых многочленов $C, D \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, оба из которых не делятся на β. Окончательно,

$$c_w = \frac{C}{D} + \frac{P}{\beta Q} = \frac{\beta CQ + PD}{\beta DQ}.$$

Многочлены P и D взаимно просты с β, поэтому числитель не делится на β, а значит, в несократимой записи c_w знаменатель будет делиться на β, что и требовалось доказать.

Итак, чтобы завершить доказательство, остаётся проверить, что $g_0 \in U$, то есть что $v \geqslant g_0^{-1}$, или, что то же самое, $v^{-1} \geqslant g_0$. Для этого заметим, что

$$(R_{g_0})_{\pm p,\pm q} = \begin{cases} p-q+1, & \text{если } p \leqslant q, -p \geqslant -q, \text{ кроме } -j \geqslant -p \geqslant -q \geqslant -3 \\ p-q+2, & \text{если } -j \geqslant -p+1 \geqslant -q \geqslant -3, \\ 1, & \text{если } 2 \leqslant q < p \leqslant j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В то же время,

$$v^{-1} = w^{-1}u = wu = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & j & \ldots \\ j & \ldots & 1 & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ j & 1 & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ 1 & j & \ldots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{v^{-1}})_{p,q} \geqslant 1$ при $2 \leqslant q < p \leqslant j$. Заметим, что на диагонали и выше матрица R_{g_0}, кроме одного сектора, совпадает с R_{id}, а id — наименьший элемент в W в смысле порядка Брюа, значит, осталось показать, что в секторе $-j \geqslant -p+1 \geqslant -q \geqslant -3$ элементы $(R_{g_0})_{p,q} \leqslant (R_{v^{-1}})_{p,q}$. В исследуемом секторе элементы матрицы на единицу больше, нежели чем в R_{id}.

Рассмотрим множество $X = \{2, 3, \ldots, j\}$, разобьём его в объединение следующих подмножеств.

$$A = \{k, l : k, l \in X, w(k) = l, w(l) = k\}$$
$$B = \{k, l : k, l \in X, w(k) = -l, w(l) = -k\}$$
$$C = \{k : k \in X, w(k) = k\}$$
$$D = \{k : k \in X, w(k) = -k\}$$
$$E = \{k : k \in X, w(k) = l, l \notin X\}$$
$$F = \{k : k \in X, w(k) = -l, l \notin X\}$$

Так как w — инволюция, то $X = A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$. Рассмотрим прообраз множества X под действием u

$$u^{-1}(X) = \{3, 4, \dots, j\} = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup E' \cup F'.$$

Для каждого множества покажем, что для ладьи, находящейся в позиции $(-(k-1), -k)$, найдется ладья нестрого ниже или левее.

Пусть $k \in C'$. Тогда $v^{-1} = wu(k) = w(k-1) = k-1,\ v^{-1}(-k) = -(k-1)$. Рассмотрим фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1}

	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$			
$-k$			
$-(k-1)$		$\otimes$	

	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$			
$-k$			
$-(k-1)$		$\otimes$	

Пусть $k \in D'$. Тогда $v^{-1} = wu(k) = w(k-1) = -(k-1),\ v^{-1}(-k) = (k-1)$. Рассмотрим фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1} соответственно.

	$k-1$	k	$k+1$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$							
$-k$							
$-(k-1)$						$\otimes$	

	$k-1$	k	k+1	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$							
$-k$							
$-(k-1)$		$\otimes$					

Пусть $k \in E'$. Тогда $v^{-1} = wu(k) = w(k-1) = l,\ v^{-1}(-k) = -l, l > j$. Так как w — инволюция и $w(k-1) = l$, то $w(l) = k-1$ и $v^{-1}(-(l+1)) = -(k-1)$ Рассмотрим фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1} соответственно.

	$-(l+1)$	$-l$	$-(l-1)$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$			$\dots$			$\otimes$	

	$-(l+1)$	$-l$	$-(l-1)$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$	$\otimes$			$\dots$			

Пусть $k \in F'$. Тогда $v^{-1} = wu(k) = w(k-1) = -l,\ v^{-1}(-k) = l, l > j$. Так как w — инволюция и $w(k-1) = -l$, то $w(l) = -(k-1)$ и $v^{-1}(l+1) = -(k-1)$. Рассмотрим фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1} соответственно.

	$l-1$	l	$l+1$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$				$\dots$		$\otimes$	

	$l-1$	l	$l+1$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$			$\otimes$	$\dots$			

Пусть $k \in B'$. Тогда $v^{-1} = wu(k) = w(k-1) = -(l-1), k < l$. Случай $k > l$ рассматривается аналогично. Так как w — инволюция и $w(k-1) = -(l-1)$, то $w(l-1) = -(k-1)$ и $v^{-1}(l) = -(k-1)$. Рассмотрев фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1} соответственно можно найти ладьи нестрого ниже и левее.

Пусть $k \in A'$. Тогда $v^{-1}(k) = wu(k) = w(k-1) = (l-1), v^{-1}(-k) = -(l-1), k < l$. Случай $k > l$ рассматривается аналогично. Так как w — инволюция и $w(k-1) = l-1$, то $w(l-1) = k-1$ и $v^{-1}(-l) = -(k-1)$. Рассмотрим фрагменты матриц расстановок ладей для g_0 и v^{-1} соответственно.

	$-(l+1)$	$-l$	$-(l-1)$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(l+1)$				$\dots$			
$-l$				$\dots$			
$-(l-1)$		$\otimes$		$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$				$\dots$		$\otimes$	

	$-(l+1)$	$-l$	$-(l-1)$	$\dots$	$-(k+1)$	$-k$	$-(k-1)$
$-(l+1)$				$\dots$			
$-l$				$\dots$			
$-(l-1)$				$\dots$		$\otimes$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-(k+1)$				$\dots$			
$-k$				$\dots$			
$-(k-1)$		$\otimes$		$\dots$			

Итак, для каждой ладьи из X_{g_0} на месте $(-(k-1), -k)$ была найдена ладья из $X_{v^{-1}}$ нестрого ниже. Отсюда получаем, что $g_0 \leqslant v^{-1}$.

Пусть $\beta = \epsilon_1 + \epsilon_j$. Положим теперь

$$u = s_j s_{j+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_1 =$$
$$= (j, j+1)(j+1, j+2) \dots (n-1, n)(n, -n)(n-1, n) \dots (3,2)(2,1) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ -j & 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(-j) =$

1, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$\begin{aligned}
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } j-1,\\
&u(\alpha_j) = u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \epsilon_{j-1} - \epsilon_{j+1} > 0,\\
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } j+1 \text{ до } n-1,\\
&u(\alpha_n) = u(2\epsilon_n) = 2\epsilon_n = \alpha_n > 0, j \neq n,\\
&u(\alpha_n) = u(2\epsilon_n) = 2\epsilon_{n-1} > 0, j = n.
\end{aligned}$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [Hu2], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду формулы (3),

$$\begin{aligned}
x_w = \sum_{s \in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h \in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h\\
= \sum_{g,h \in W} c_{u,g} g(c_{v,h})\delta_{gh} = \sum_{s \in W} \left(\sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}) \right) \delta_s.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}),$$

для любого $s \in W$, в частности,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через $\mathcal{U}$ и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается всегда — иначе будет нарушаться второе условие для множества $\mathcal{U}$. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся формулой (4). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}) = -g(\alpha_1)^{-1} c_{us_1,g},$$

так как $us_1 \ngeqslant gs_1$, а потому $c_{us_1,gs_1} = 0$. Значит, выражение для c_w переписывается в виде

$$c_w = -\sum_{g \in U} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Тривиально проверяется, что среди всех $g \in U$ есть не больше одного элемента, для которого $g\alpha_1 = \beta$. А именно, единственный претендент на эту роль — это элемент $g_0 = us_1 = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_2$. Объясним это. Любой $g \in \mathcal{U}$ получается из u вычеркиванием.

Всегда вычеркивается s_1. Справа от s_n вычеркивать нельзя иначе двойка не перейдет в отрицательное число. Если мы вычеркиваем в u слева от s_n какое-то простое отражение, то, если номер первого вычеркнутого слева s_n справа налево равен k, $g(\alpha_1) = \epsilon_1 + \epsilon_k, k < j$. Чтобы показать, что g_0 действительно лежит в $\mathcal{U}$, нужно проверить ещё, что $v \geqslant g_0^{-1}$, доказательство этого такое же, как в случае $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$.

Значит,

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Как раньше, обозначим через S' (соответственно, через Q') подалгебру в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (соответственно, подполе в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$), порождённую $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Тогда $c_{v,g_0^{-1}} \in Q'$, а поскольку $g(1) = 1$, то и $g(c_{v,g_0^{-1}}) \in Q'$; в частности, числитель этого выражения в несократимой записи не делится на β. С другой стороны, легко видеть, что

$$c_{us_1,g_0} = c_{us_1,us_1} = \pm \frac{1}{s_2\alpha_2} \cdot \ldots \frac{1}{s_n \ldots s_2\alpha_n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_j \ldots s_n \ldots s_2\alpha_j}$$

(это сразу следует из того, что $us_1 = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_2$). Всё это означает, что несократимая запись первого слагаемого имеет вид $P/\beta Q$ для некоторых многочленов $P, Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, причём многочлен P не равен нулю.

Аналогично, для любого $g \in U$, не равного g_0, имеем $g(c_{v,g^{-1}}) \in Q'$, в то время как $c_{us_1,g} \in Q'$. Элемент $g(\alpha_1) = \epsilon_1 + \epsilon_k, k < j$ по рассуждениям выше. Отсюда видно, что несократимая запись всей остальной суммы имеет вид C/D для некоторых многочленов $C, D \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, оба из которых не делятся на β. Окончательно,

$$c_w = \frac{C}{D} + \frac{P}{\beta Q} = \frac{\beta CQ + PD}{\beta DQ}.$$

Многочлены P и D взаимно просты с β, поэтому числитель не делится на β, а значит, в несократимой записи c_w знаменатель будет делиться на β, что и требовалось доказать.

Пусть, наконец, $\beta = 2\epsilon_1$. Рассмотрим подстановку

$$u = s_1 \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_1 = (1,2)(2,3)\ldots(n-1,n)(n,-n)(n-1,n)\ldots(2,3)(1,2) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ -1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(j) = 1$, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } n-1,$$
$$u(\alpha_n) = u(2\epsilon_n) = 2\epsilon_n = \alpha_n > 0.$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [Hu2], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду формулы (3),

$$x_w = \sum_{s \in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h \in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h$$
$$= \sum_{g,h \in W} c_{u,g} g(c_{v,h})\delta_{gh} = \sum_{s \in W} \left(\sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}) \right) \delta_s.$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}),$$

для любого $s \in W$, в частности,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через $\mathcal{U}$ и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_1 \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается всегда — иначе будет нарушаться второе условие. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся формулой (4). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}),$$

$$c_{w,u} = \text{многочлен} \prod_{\alpha > 0, s_\alpha u \leqslant w} \alpha^{-1}$$

$$c_{us_1,g} = \text{многочлен} \prod_{\alpha > 0, s_\alpha g \leqslant us_1} \alpha^{-1}.$$

Здесь $g(\alpha_1)$ не равно β не при каком g, так как g ортогональное преобразование и сохраняет длины, а длины α_1 и β различны. Далее,

$$us_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & -1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

а так как $g(1) = 1$, то

$$s_\beta g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ -1 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Значит, $s_\beta g \nleq us_1$. Теперь

$$c_{us_1,gs_1} = \text{многочлен} \prod_{\alpha > 0, s_\alpha g s_1 \leqslant us_1} \alpha$$

Легко видеть, что для $r > 0$ или $r < 0$ и $r \neq -1$,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & r & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$s_\alpha g s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ r & -1 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Существует единственное $g \in \mathcal{U}$ такое, что $s_\beta g s_1 \leqslant us_1$: это $g = \mathrm{id}$. Таким образом

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}) = c_{u,\mathrm{id}} c_{v,\mathrm{id}} + \frac{C}{D}.$$

Во втором слагаемом и в $c_{v,\mathrm{id}}$ нет β в знаменателе. То есть β может быть только в $c_{u,\mathrm{id}}$. Покажем по индукции, что у $c_{u,\mathrm{id}}$ в несократимой записи знаменатель делится на $2\epsilon_1$. Для C_2 и $u = s_1 s_2 s_1$ имеем

$$c_{u,\mathrm{id}} = \frac{-2}{\alpha_1 \alpha_2 (2\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Пусть теперь $u = s_1 \dots s_n \dots s_1$. Шаг индукции. Пусть у $c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}$ в несократимой записи знаменатель делится на $2\epsilon_2$. Из равенства $l(us_1) = l(u) - 1$ получаем

$$c_{u,\mathrm{id}} = -\frac{c_{us_1,\mathrm{id}} + c_{us_1,s_1}}{\alpha_1}$$

Из равенства $l(s_1 u s_1) = l(us_1) - 1$ получаем

$$c_{us_1,g} = \frac{s_1(c_{s_1 u s_1, s_1 g}) - c_{s_1 u s_1, g}}{\alpha_1}$$

Подставим вместо g s_1 теперь получим.

$$c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}} = \frac{s_1(c_{s_1 u s_1, s_1}) - c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}}{\alpha_1},$$

$$c_{s_1 u s_1, s_1} = \frac{s_1(c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}) - c_{s_1 u s_1, s_1}}{\alpha_1}.$$

Так как $c_{s_1 u s_1, s_1} = 0$, полученные равенства перепишутся в виде:

$$c_{us_1,\mathrm{id}} = -\frac{c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}}{\alpha_1},$$

$$c_{us_1,s_1} = \frac{s_1(c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}})}{\alpha_1}.$$

В $c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}$ нет β. Но по шагу индукции у $c_{s_1 u s_1,\mathrm{id}}$ в несократимой записи знаменатель делится на $2\epsilon_2$. Следовательно, у $c_{u,\mathrm{id}}$ в несократимой записи знаменатель делится на $2\epsilon_1$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 2.7. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ — произвольные инволюции, причём $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 \neq \varnothing$, а $\mathrm{Supp}(\tau) \cap \mathcal{C}_1 = \varnothing$. Тогда $d_\sigma \neq d_\tau$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$. По (4), d_τ делится на линейную форму β (в кольце многочленов $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$). С другой стороны, ввиду Леммы 2.6, для некоторых взаимно простых многочленов $A, B \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, где B делится на β, а A — нет,

$$d_\sigma = \pm c_\sigma \cdot \prod_{\alpha > 0} \alpha = \pm \prod_{\alpha > 0} \alpha \cdot A/B,$$

то есть d_σ не делится на β (эта линейная форма сократится). Тем самым, $d_\tau \neq d_\sigma$, что и требовалось доказать. Обратим внимание, что в этом доказательстве мы никак не использовали индукцию. $\square$

Предложение 2.8. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ — произвольные инволюции, причём* $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$, $\mathrm{Supp}(\tau) \cap \mathcal{C}_1 = \{\gamma\}$ *и* $\beta \neq \gamma$. *Тогда* $d_\sigma \neq d_\tau$.

Доказательство. Без ограничения общности, $\beta > \gamma$, то есть если $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_i$, $\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_s$, то $i > s$, следовательно, $s_\beta \nleqslant \tau$. Значит, ввиду (4), для некоторого многочлена $g = g_{\tau,\mathrm{id}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$

$$d_\tau = \pm c_\tau \cdot \prod_{\alpha>0} \alpha = \pm g \cdot \prod_{\alpha>0,\ s_\alpha \nleqslant \tau} \alpha,$$

то есть d_τ делится на β (эта линейная форма встречается в последнем произведении). Но, используя Лемму 2.6, как в предыдущем Предложении, мы видим, что d_σ не делится на β, поэтому $d_\tau \neq d_\sigma$. Здесь мы тоже не использовали индукцию. $\square$

Предложение 2.9. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ — разные инволюции, причём* $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap C_1 = \{\beta\} = \mathrm{Supp}(\tau) \cap C_1$. *Тогда* $d_\sigma \neq d_\tau$.

Доказательство. Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим сначала произвольную инволюцию $w \in I_n$, у которой $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Как в доказательстве Леммы, запишем её в виде $w = uv$, где $u = s_{j-1} \dots s_1$, а $v = u^{-1}w \in \widetilde{W}$. Напомним, что

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

где $U = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v\}$, а $g_0 = us_1 \in U$.

Положим теперь $w' = s_{j-1} w s_{j-1} \in I_n$. Предположим пока, что $j > 2$. Тогда $\mathrm{Supp}(w') \cap C_1 = \beta' = \epsilon_1 - \epsilon_{j-1}$. Как выше, запишем $w' = u'v'$, где $u' = s_{j-2} \dots s_1$, а $v' \in \widetilde{W}$, тогда

$$c_{w'} = -\frac{c_{u's_1,h_0} h_0(c_{v',h_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{h \in U',\ h \neq h_0} \frac{c_{u's_1,h} h(c_{v,h^{-1}})}{h\alpha_1},$$

где $U' = \{h \in W \mid h \leqslant u',\ h^{-1} \leqslant v'\}$, а $h_0 = u's_1 \in U$.

Наша цель сейчас — сравнить $c_{v,g_0^{-1}}$ с $c_{v',h_0^{-1}}$. Заметим, что $u' = s_{j-1}u$, $v' = vs_{j-1}$ и $h_0 = s_{j-1}g_0$. При этом, напомним,

$$u = s_{j-1} \dots s_1 = (j, j-1) \dots (2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ j & 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

откуда

$$v\alpha_{j-1} = u^{-1}w(\epsilon_{j-1} - \epsilon_j) = u^{-1}(\epsilon_x - \epsilon_1) = \epsilon_y - \epsilon_2,$$

где $x = w(j-1)$, $y = u^{-1}(x) = v(j-1)$. Если $y = 1$, то $u^{-1}(x) = 1$, то есть $x = j$, но $w(j-1) \neq j$, значит, $y > 2$, поэтому $v\alpha_{j-1} < 0$. Это означает, что $l(vs_{j-1}) = l(v) - 1$, а потому, ввиду формулы (4), $c_{v,g_0^{-1}} = \dfrac{c_{vs_{j-1},g_0^{-1}} + c_{vs_{j-1},g_0^{-1}s_{j-1}}}{-g_0^{-1}\alpha_{j-1}}$.

Мы замечаем, что

$$g_0 = s_{j-1} \dots s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & j & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{g_0})_{j,2} = 1$, в то время как

$$(vs_{j-1})^{-1} = s_{j-1}wu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 1 & j-1 & \dots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{(vs_{j-1})^{-1}})_{j,2} = 0$. Теперь (5) показывает, что $(vs_{j-1})^{-1} \not\geqslant g_0$, или, что равносильно, $vs_{j-1} \not\geqslant g_0^{-1}$. Получаем, что $c_{vs_{j-1},g_0^{-1}} = 0$, откуда

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_{j-1},g_0^{-1}s_{j-1}}}{-g_0^{-1}\alpha_{j-1}} = \frac{c_{v',h_0^{-1}}}{\epsilon_2 - \epsilon_j}.$$

Если $j-1 > 2$, то проделаем то же самое с w', и так далее. Продолжая этот процесс, в конце концов получим, что $w = aw_1a^{-1}$, где $a = s_2s_3\dots s_{j-1}$. При этом $w_1 \in I_n$ и $Supp(w_1) \cap C_1 = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}$. Мы можем теперь записать $w_1 = u_1v_1$, где $u_1 = s_1$, а $v_1 \in \widetilde{W}$ — тоже *инволюция*, то есть $v_1 \in \widetilde{I}_{n-1}$. Рассуждения выше показывают, что $c_{v,g_0^{-1}} = fc_{v_1,\mathrm{id}}$, где

$$f = \frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_j)\cdot(\epsilon_2 - \epsilon_{j-1})\cdot\ldots\cdot(\epsilon_2 - \epsilon_3)}$$

не зависит от самой инволюции w.

Рассмотрим теперь инволюции σ и τ. Запишем их в виде $\sigma = uv_\sigma$ и $\tau = uv_\tau$, как выше. Раз $\sigma \neq \tau$, то и $\sigma_1 \neq \tau_1$, где $\sigma_1 = a\sigma a^{-1}$, $\tau_1 = a\tau a^{-1}$. Следовательно, и $v_\sigma^1 = s_1\sigma_1 \neq v_\tau^1 = s_1\tau_1$. По преположению индукции по n, для инволюций v_σ^1 и v_τ^1 в $\widetilde{W}$ выполняется $\widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$. Лемма показывает, что $c_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} = \widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$, а тогда и

$$c_{v_\sigma,g_0^{-1}} = fc_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq fc_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau,g_0^{-1}},$$

а значит, и $g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) \neq g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})$.

Если обозначить теперь

$$U_\sigma = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\sigma^{-1}\}$$

и, аналогично,

$$U_\tau = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\tau^{-1}\},$$

то, как и выше,

$$c_\sigma = -\frac{c_{us_1,g_0}g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U_\sigma,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g}g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

$$c_\tau = -\frac{c_{us_1,g_0}g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U_\tau,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g}g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1}.$$

Запишем всё в несократимой записи: пусть

$$-c_{us_1,g_0} = A/B,\ g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) = P_\sigma/Q_\sigma,\ g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}}) = P_\tau/Q_\tau,$$

$$-\sum_{g\in U_\sigma,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g}g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\sigma}{D_\sigma},$$

$$-\sum_{g\in U_\tau,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g}g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$

Тогда если $d_\sigma = d_\tau$, то и $c_\sigma = c_\tau$, то есть

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{P_\sigma}{\beta Q_\sigma} + \frac{C_\sigma}{D_\sigma} = \frac{A}{B}\cdot\frac{P_\tau}{\beta Q_\tau} + \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$

Это равносильно тому, что

$$\frac{AD_\sigma P_\sigma + \beta BC_\sigma Q_\sigma}{\beta BD_\sigma Q_\sigma} = \frac{AD_\tau P_\tau + \beta BC_\tau Q_\tau}{\beta BD_\tau Q_\tau}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем, что

$$\beta BQ_\sigma Q_\tau(C_\sigma D_\tau - C_\tau D_\sigma) = AD_\sigma D_\tau(P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau).$$

Ни один из многочленов A, D_σ, D_τ не делится на β: все они лежат в подалгебре S', порождённой $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, и отличны от нуля. В силу факториальности кольца многочленов,

$$P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau$$

обязан делиться на β. Но он тоже лежит в подалгебре S', поэтому равен нулю. Это означает, что

$$g_0(c_{v_\sigma, g_0^{-1}}) = g_0(c_{v_\tau, g_0^{-1}})$$

— противоречие.

Пусть теперь $\beta = \epsilon_1 + \epsilon_j$. Рассмотрим сначала произвольную инволюцию $w \in I_n$, у которой $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Как в доказательстве Леммы, запишем её в виде $w = uv$, где $u = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_1$, а $v = u^{-1}w \in \widetilde{W}$. Напомним, что

$$c_w = -\frac{c_{us_1, g_0} g_0(c_{v, g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1, g} g(c_{v, g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

где $U = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v\}$, а $g_0 = us_1 \in U$.

Положим теперь $w' = s_j w s_j \in I_n$. Предположим пока, что $j > 2$. Тогда $\mathrm{Supp}(w') \cap C_1 = \beta' = \epsilon_1 + \epsilon_{j+1}$. Как выше, запишем $w' = u'v'$, где $u' = s_{j+1} s_{j+2} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_1$, а $v' \in \widetilde{W}$, тогда

$$c_{w'} = -\frac{c_{u's_1, h_0} h_0(c_{v', h_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{h \in U',\ h \neq h_0} \frac{c_{u's_1, h} h(c_{v, h^{-1}})}{h\alpha_1},$$

где $U' = \{h \in W \mid h \leqslant u',\ h^{-1} \leqslant v'\}$, а $h_0 = u's_1 \in U$.

Наша цель сейчас — сравнить $c_{v, g_0^{-1}}$ с $c_{v', h_0^{-1}}$. Заметим, что $u' = s_j u$, $v' = v s_j$ и $h_0 = s_j g_0$. При этом, напомним,

$$\begin{gathered} u = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-1} s_n s_{n-1} \ldots s_1 = \\ = (j, j+1)(j+1, j+2) \ldots (n-1, n)(n, -n)(n-1, n) \ldots (3, 2)(2, 1) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ -j & 1 & 2 & \ldots & j-2 & j-1 & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}, \end{gathered}$$

откуда

$$v\alpha_j = u^{-1}w(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = u^{-1}(-\epsilon_1 - \epsilon_x) = -\epsilon_2 - \epsilon_y,$$

где $x = w(j+1)$, $y = u^{-1}(x) = v(j+1)$. Если $y = -1$, то $u^{-1}(x) = -1$, то есть $x = j$, но $w(j-1) \neq j$, значит, $y \neq -2$ и $y \neq -1$, поэтому $v\alpha_j < 0$. Это означает, что $l(vs_j) = l(v) - 1$, а потому, ввиду формулы (4),

$$c_{v, g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_j, g_0^{-1}} + c_{vs_j, g_0^{-1}s_j}}{-g_0^{-1}\alpha_j}.$$

Мы замечаем, что

$$g_0 = s_j s_{j+1} \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & -j & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{g_0})_{-j,2} = 1$, в то время как

$$(vs_j)^{-1} = s_j w u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 1 & -j-1 & \dots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{(vs_j)^{-1}})_{-j,2} = 0$. Теперь (5) показывает, что $(vs_j)^{-1} \ngeqslant g_0$, или, что равносильно, $vs_j \ngeqslant g_0^{-1}$. Получаем, что $c_{vs_j, g_0^{-1}} = 0$, откуда

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_j, g_0^{-1}s_j}}{-g_0^{-1}\alpha_j} = \frac{c_{v',h_0^{-1}}}{\epsilon_2 + \epsilon_{j+1}}.$$

Если $1 < j+1 < n$, то проделаем то же самое с w', и так далее. Продолжая этот процесс, в конце концов получим, что $w = a w_1 a^{-1}$, где $a = s_{n-1} s_{n-2} \dots s_j$. При этом $w_1 \in I_n$. Мы можем теперь записать $w_1 = u_1 v_1$, где $u_1 = s_n \dots s_1$, а $v_1 \in \widetilde{W}$ — тоже *инволюция*, то есть $v_1 \in \widetilde{I}_{n-1}$. Рассуждения выше показывают, что $c_{v,g_0^{-1}} = f c_{v_1, s_1 \dots s_n}$, где

$$f = \frac{1}{(\epsilon_2 + \epsilon_{j+1}) \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_{j+2}) \cdot \ldots \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_n)}$$

не зависит от самой инволюции w.

Пусть $\beta = \epsilon_1 + \epsilon_n$. Рассмотрим сначала произвольную инволюцию $w \in I_n$, у которой $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Как в доказательстве Леммы, запишем её в виде $w = uv$, где $u = s_n s_{n-1} \dots s_1$, а $v = u^{-1} w \in \widetilde{W}$. Напомним, что

$$c_w = -\frac{c_{us_1, g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

где $U = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v\}$, а $g_0 = us_1 \in U$.

Положим теперь $w' = s_n w s_n \in I_n$. Тогда $\mathrm{Supp}(w') \cap C_1 = \beta' = \epsilon_1 - \epsilon_n$. Как выше, запишем $w' = u'v'$, где $u' = s_{n-1} \dots s_1$, а $v' \in \widetilde{W}$, тогда

$$c_{w'} = -\frac{c_{u's_1, h_0} h_0(c_{v',h_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{h \in U',\ h \neq h_0} \frac{c_{u's_1,h} h(c_{v,h^{-1}})}{h\alpha_1},$$

где $U' = \{h \in W \mid h \leqslant u',\ h^{-1} \leqslant v'\}$, а $h_0 = u's_1 \in U$.

Наша цель сейчас — сравнить $c_{v,g_0^{-1}}$ с $c_{v',h_0^{-1}}$. Заметим, что $u' = s_n u$, $v' = vs_n$ и $h_0 = s_n g_0$. При этом, напомним,

$$u = s_n s_{n-1} \dots s_1 = (n, -n)(n-1, n) \dots (3,2)(2,1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ -n & 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$v\alpha_n = u^{-1} w(2\epsilon_n) = u^{-1}(-2\epsilon_1) = -2\epsilon_2 < 0,$$

$v\alpha_j < 0$. Это означает, что $l(vs_j) = l(v) - 1$, а потому, ввиду формулы (4),

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_n,g_0^{-1}} + c_{vs_n,g_0^{-1}s_n}}{-g_0^{-1}\alpha_n}.$$

Мы замечаем, что

$$g_0 = s_n s_{n-1} \dots s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & -n & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{g_0})_{-n,2} = 1$, в то время как

$$(vs_n)^{-1} = s_n w u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 1 & n & \dots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{(vs_j)^{-1}})_{-n,2} = 0$. Теперь (5) показывает, что $(vs_j)^{-1} \not\geqslant g_0$, или, что равносильно, $vs_n \not\geqslant g_0^{-1}$. Получаем, что $c_{vs_n,g_0^{-1}} = 0$, откуда

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_n,g_0^{-1}s_n}}{-g_0^{-1}\alpha_n} = \frac{c_{v',h_0^{-1}}}{2\epsilon_2}.$$

Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим сначала произвольную инволюцию $w \in I_n$, у которой $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Как в доказательстве Леммы, запишем её в виде $w = uv$, где $u = s_{j-1} \dots s_1$, а $v = u^{-1}w \in \widetilde{W}$. Напомним, что

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

где $U = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v\}$, а $g_0 = us_1 \in U$.

В конце получим, что $w = aw_1a^{-1}$, где $a = s_2 \dots s_{n-1}s_n s_{n-1} \dots s_j$. При этом $w_1 \in I_n$ и $\mathrm{Supp}(w_1) \cap C_1 = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}$. Мы можем теперь записать $w_1 = u_1 v_1$, где $u_1 = s_1$, а $v_1 \in \widetilde{W}$ — тоже *инволюция*, то есть $v_1 \in \widetilde{I}_{n-1}$. Рассуждения выше показывают, что $c_{v,g_0^{-1}} = f c_{v_1,\mathrm{id}}$, где

$$f = \frac{1}{2\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_{j+1}) \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_{j+2}) \cdot \ldots \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_n)(\epsilon_2 - \epsilon_j) \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_{j-1}) \cdot \ldots \cdot (\epsilon_2 - \epsilon_3)}$$

не зависит от самой инволюции w.

Рассмотрим теперь инволюции σ и τ. Запишем их в виде $\sigma = uv_\sigma$ и $\tau = uv_\tau$, как выше. Раз $\sigma \neq \tau$, то и $\sigma_1 \neq \tau_1$, где $\sigma_1 = a\sigma a^{-1}$, $\tau_1 = a\tau a^{-1}$. Следовательно, и $v_\sigma^1 = s_1\sigma_1 \neq v_\tau^1 = s_1\tau_1$. По преположению индукции по n, для инволюций v_σ^1 и v_τ^1 в $\widetilde{W}$ выполняется $\widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$. Лемма показывает, что $c_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} = \widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$, а тогда и

$$c_{v_\sigma,g_0^{-1}} = f c_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq f c_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau,g_0^{-1}},$$

а значит, и $g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) \neq g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})$.

Если обозначить теперь

$$U_\sigma = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\sigma^{-1}\}$$

и, аналогично,
$$U_\tau = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\tau^{-1}\},$$
то, как и выше,
$$c_\sigma = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U_\sigma,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$
$$c_\tau = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U_\tau,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1}.$$
Запишем всё в несократимой записи: пусть
$$-c_{us_1,g_0} = A/B,\ g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) = P_\sigma/Q_\sigma,\ g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}}) = P_\tau/Q_\tau,$$
$$-\sum_{g \in U_\sigma,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\sigma}{D_\sigma},$$
$$-\sum_{g \in U_\tau,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$
Тогда если $d_\sigma = d_\tau$, то и $c_\sigma = c_\tau$, то есть
$$\frac{A}{B} \cdot \frac{P_\sigma}{\beta Q_\sigma} + \frac{C_\sigma}{D_\sigma} = \frac{A}{B} \cdot \frac{P_\tau}{\beta Q_\tau} + \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$
Это равносильно тому, что
$$\frac{AD_\sigma P_\sigma + \beta BC_\sigma Q_\sigma}{\beta BD_\sigma Q_\sigma} = \frac{AD_\tau P_\tau + \beta BC_\tau Q_\tau}{\beta BD_\tau Q_\tau}.$$
Приводя к общему знаменателю, получаем, что
$$\beta BQ_\sigma Q_\tau (C_\sigma D_\tau - C_\tau D_\sigma) = AD_\sigma D_\tau (P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau).$$
Ни один из многочленов A, D_σ, D_τ не делится на β: все они лежат в подалгебре S', порождённой $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, и отличны от нуля. В силу факториальности кольца многочленов,
$$P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau$$
обязан делиться на β. Но он тоже лежит в подалгебре S', поэтому равен нулю. Это означает, что
$$g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) = g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})$$
— противоречие.

Пусть $\beta = 2\epsilon_1$ Рассмотрим теперь инволюции σ и τ. Запишем их в виде $\sigma = uv_\sigma$ и $\tau = uv_\tau$. По преположению индукции по n, для инволюций v_σ и v_τ в $\widetilde{W}$ выполняется $\widetilde{c}_{v_\sigma,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau,\mathrm{id}}$. Лемма показывает, что $c_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} = \widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau,\mathrm{id}} = c_{v_\tau,\mathrm{id}}$.

Если обозначить теперь
$$c_\sigma = c_{u,\mathrm{id}} c_{v_\sigma,\mathrm{id}} + \frac{C_\sigma}{D_\sigma}$$
$$c_\tau = c_{u,\mathrm{id}} c_{v_\tau,\mathrm{id}} + \frac{C_\tau}{D_\tau}$$

Запишем всё в несократимой записи: пусть

$$c_{v_\tau,\mathrm{id}} = P_\sigma/Q_\sigma, c_{u,\mathrm{id}} = A/(\beta B), c_{v_\tau,\mathrm{id}} = P_\tau/Q_\tau,$$

Тогда если $d_\sigma = d_\tau$, то и $c_\sigma = c_\tau$, то есть

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{P_\sigma}{\beta Q_\sigma} + \frac{C_\sigma}{D_\sigma} = \frac{A}{B}\cdot\frac{P_\tau}{\beta Q_\tau} + \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$

Это равносильно тому, что

$$\frac{AD_\sigma P_\sigma + \beta BC_\sigma Q_\sigma}{\beta BD_\sigma Q_\sigma} = \frac{AD_\tau P_\tau + \beta BC_\tau Q_\tau}{\beta BD_\tau Q_\tau}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем, что

$$\beta BQ_\sigma Q_\tau(C_\sigma D_\tau - C_\tau D_\sigma) = AD_\sigma D_\tau(P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau).$$

Ни один из многочленов A, D_σ, D_τ не делится на β: все они лежат в подалгебре S', порождённой $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, и отличны от нуля. В силу факториальности кольца многочленов,

$$P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau$$

обязан делиться на β. Но он тоже лежит в подалгебре S', поэтому равен нулю. Это означает, что

$$c_{v_\sigma,\mathrm{id}} = c_{v_\tau,\mathrm{id}}$$

— противоречие.

Предложение доказано. □

Глава 3. Частный случай основной гипотезы для типа D_n

§3.1. Основные факты о группе Вейля типа D_n

В данном параграфе определяется группа Вейля W типа D_n. Более подробно можно посмотреть в [Hu2] и [BB]

Пусть ϵ_1, …, ϵ_n — стандартный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Как обычно, отождествим множество Φ^+ положительных корней со следующим подмножеством $\mathbb{R}^n$:

$$D_n^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j,\ \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

так что W можно определить, как подгруппу ортогональной группы $O(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $S_{\pm n}$ — симметрическая подгруппа на $2n$ буквах $1, \ldots, n, -n, \ldots, -1$. Группа Вейля W изоморфна подгруппе $S_{\pm n}$ содержащей перестановки $w \in S_{\pm n}$ такие что $w(-i) = -w(i)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ и число $\#\{i, 1 \leqslant i \leqslant n : w(i) = -j, j \in \mathbb{N}\}$ — четно. Изоморфизм задается следующим образом:

$$s_{\epsilon_i - \epsilon_j} \mapsto (i,j)(-i,-j),$$
$$s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \mapsto (i,-j)(-i,j),$$

Замечание 3.1. i) Любой $w \in W$ полностью определяется значениями на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Элемент обычно изображается следующим образом: если $w(i) = w_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, тогда записывается

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{pmatrix},$$

причем число минусов в нижней строке четно. Например, если $\Phi = D_5$, тогда

$$s_{\epsilon_1+\epsilon_5} s_{\epsilon_2-\epsilon_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) Заметим, что множество простых корней имеет следующий вид: $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\ldots$, $\alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$ Обозначим соответствующие простые отражения $s_1, \ldots, s_n$.

Говорят, что v меньше или равен w в смысле *порядка Брюа*, обозначается $v \leqslant w$, если некоторое приведенное разложение v — это подслово приведенного разложения w.

Существует красивое комбинаторное описание порядка Брюа в группе Вейля W типа D_n. Возьмем $w \in W$, обозначим за X_w матрицу размера $2n \times 2n$ заполненную по следующему правилу:

$$(X_w)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } w(j) = i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Строки и столбцы матрицы занумеруем числами $1, \ldots, n, -n, \ldots, 1$. Такая 0–1 матрица, называется *расстановкой ладей* для w. Определим матрицу R_w запишем в (i,j)-й элемент ранг нижней левой $(n-i+1) \times j$ подматрицы X_w. Другими словами, $(R_w)_{i,j}$ — это число ладей расположенных нестрого к юго-западу от (i,j).

Пример 3.2. Пусть $n = 4$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Здесь показаны матрицы X_w и R_w (ладьи изображены символом $\otimes$):

$$X_w = \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline 1 & & & & & \otimes & & & \\ \hline 2 & & \otimes & & & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & \otimes \\ \hline 4 & & & \otimes & & & & & \\ \hline -4 & & & & & & \otimes & & \\ \hline -3 & \otimes & & & & & & & \\ \hline -2 & & & & & & & \otimes & \\ \hline -1 & & & & \otimes & & & & \\ \hline \end{array}, \quad R_w = \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ \hline -4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline -3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Пустым прямоугольником $2i$ на $2j$ в X_w называется подмножество вида

$$R = \{(k,l) : -(n-i) < k < (n-i), -(n-j) < l < (n-j)\},$$

если для любого $(k,l) \in R$ выполняется $(X_w)_{i,j} = 0$.

Пусть X и Y — матрицы с целыми значениями. Пишут, что $X \leqslant Y$, если $X_{i,j} \leqslant Y_{i,j}$ для любых i, j. Пусть v, $w \in W$, тогда верно следующее:

$v \leqslant w$ тогда и только тогда, когда

i) $R_v \leqslant R_w$

ii) для любого пустого прямоугольника R размера $2i$ на $2j$ выполняется, следующее условие если $\displaystyle\sum_{k,l}(X_v)_{k,l} = \sum_{k,l}(X_w)_{k,l}, k = \overline{1, n-i}, l = \overline{-(n-j), -1}$, то

$$\sum_{k,l}(X_v)_{k,l} = \sum_{k,l}(X_w)_{k,l} \pmod 2, k = \overline{1, n-i}, l = \overline{-n, -1}.$$

(см. к примеру [Pr] или [BB, Theorem 8.2.8]).

Поясним второй пункт критерия. Сумма набора элементов матрицы X_w, определенная выше, — это количество ладей выше и правее заданной клетки.

Определим отображения row: $\Phi^+ \to \mathbb{Z}$ и col: $\Phi^+ \to \mathbb{Z}$ правилом

$$\begin{aligned}\operatorname{row}(\epsilon_i - \epsilon_j) = j,\ \operatorname{row}(\epsilon_i + \epsilon_j) = -j,\\ \operatorname{col}(\epsilon_i - \epsilon_j) = \operatorname{col}(\epsilon_i + \epsilon_j) = i.\end{aligned}$$

Для любого k от $-n$ до n, положим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k &= \{\alpha \in \Phi^+ \mid \operatorname{row}(\alpha) = k\},\\ \mathcal{C}_k &= \{\alpha \in \Phi^+ \mid \operatorname{col}(\alpha) = k\}.\end{aligned}$$

Множество $\mathcal{R}_k$ (соответственно, $\mathcal{C}_k$) называется *k строкой* (соответственно, *k столбцом*) Φ^+.

Определение 3.3. Пусть $w \in W$ — инволюция.. Тогда w называется *базисной инволюцией*,если $\#\{i : w(i) = -i, 1 \leqslant i \leqslant n\} = 0$

.

Определение 3.4. Пусть $\sigma \in W$ — базисная инволюция. Определим *носитель* $\operatorname{Supp}(\sigma)$ инволюции σ по следующему правилу:

$$\begin{aligned}&\text{если } 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = j, \text{ тогда } \epsilon_i - \epsilon_j \in \operatorname{Supp}(\sigma),\\ &\text{если } 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ и } \sigma(i) = -j, \text{ тогда } \epsilon_i + \epsilon_j \in \operatorname{Supp}(\sigma).\end{aligned}$$

По определению, $\operatorname{Supp}(\sigma)$ — ортогональное подмножество Φ^+. Заметим, что

$$\sigma = \prod_{\beta \in \operatorname{Supp}(\sigma)} s_\beta,$$

где произведение берется в любом фиксированном порядке. Заметим, что для любого k имеем

$$|\operatorname{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_k| \leqslant 1.$$

Пример 3.5. Пусть $\Phi = D_6$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -6 & 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\operatorname{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_1 + \epsilon_6, \epsilon_3 - \epsilon_5\}.$$

§3.2. Доказательство теоремы 2

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть W типа D_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные базисные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подсхемы.

Мы будем вести доказательство Теоремы 2 индукцией по n (база $n = 2$ очевидна). Обозначим для этого через $\widetilde{W} =$ подгруппу в W, состоящую из подстановок, которые единицу переводят в единицу (ясно, что $\widetilde{W}$), а через $\widetilde{I}_{n-1} = I(\widetilde{W})$ — множество инволюций в ней. Для любого $w \in \widetilde{W}$ будем через $\widetilde{d}_w$ обозначать его многочлен Костанта–Кумара (при отождествлении $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ с $\mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ можно считать, что $\widetilde{d}_w$ лежит в $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ и просто не зависит от α_1). Аналогично возникает элемент $\widetilde{c}_w \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ и, шире, элементы $\widetilde{d}_{w,v}$ и $\widetilde{c}_{w,v}$ для любых $w, v \in W$. По индукции, $\widetilde{d}_w \neq \widetilde{d}_v$ и $\widetilde{c}_w \neq \widetilde{c}_w$ для любых двух разных инволюций $w, v \in \widetilde{I}_{n-1}$.

Лемма 3.7. Предположим, что $w \in I_n$ и $\mathrm{Supp}(w) \cap C_1 = \{\beta\}$. Запишем элемент c_w в несократимом виде:

$$c_w = A/B,\ A, B \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}],\ (A, B) = 1.$$

Тогда B делится на β в кольце $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

Доказательство. Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим подстановку

$$u = s_{j-1} \ldots s_1 = (j, j-1) \ldots (2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ j & 1 & 2 & \ldots & j-2 & j-1 & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(j) = 1$, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$\begin{aligned}
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } j-1,\\
&u(\alpha_j) = u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \epsilon_{j-1} - \epsilon_{j+1} > 0,\\
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } j+1 \text{ до } n-1,\\
&u(\alpha_n) = u(\epsilon_{n-1} + \epsilon_n) = u(\epsilon_{n-1} + \epsilon_n) = \alpha_n > 0.
\end{aligned}$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [Hu2], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду формулы (3),

$$\begin{aligned}
x_w = \sum_{s \in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h \in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h = \\
= \sum_{g,h \in W} c_{u,g} g(c_{v,h}) \delta_{gh} = \sum_{s \in W} \left(\sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}) \right) \delta_s.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s})$$

для любого $s \in W$, в частности

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через $\mathcal{U}$ и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_{j-1} \dots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается всегда — иначе будет нарушаться второе условие. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся формулой (4). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}) = -g(\alpha_1)^{-1} c_{us_1,g},$$

так как $us_1 \not\geqslant gs_1$, а потому $c_{us_1,gs_1} = 0$. Значит, выражение для c_w переписывается в виде

$$c_w = -\sum_{g \in U} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Тривиально проверяется, что среди всех $g \in U$ есть не больше одного элемента, для которого $g\alpha_1 = \beta$. А именно, единственный претендент на эту роль — это элемент $g_0 = us_1 = s_{j-1} \dots s_2$. Объясним это. Любой $g \in \mathcal{U}$ получается из u вычеркиванием. Всегда вычеркивается s_1. Если мы вычеркиваем какое-то еще отражение, то если номер первого вычеркнутого после s_1 справа налево отражения равен k, $g(\alpha_1) = \epsilon_1 - \epsilon_k, k < j$. Чтобы показать, что g_0 действительно лежит в $\mathcal{U}$, нужно проверить ещё, что $v \geqslant g_0^{-1}$, но предположим пока, что нам удалось это сделать.

В таком случае

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Обозначим через S' (соответственно, через Q') подалгебру в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (соответственно, подполе в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$), порождённую $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогда $c_{v,g_0^{-1}} \in Q'$, а поскольку $g(1) = 1$, то и $g(c_{v,g_0^{-1}}) \in Q'$; в частности, числитель этого выражения в несократимой записи не делится на β. С другой стороны, легко видеть, что

$$c_{us_1,g_0} = c_{us_1,us_1} = \pm \frac{1}{s_{j-1}\alpha_{j-1}} \cdot \frac{1}{s_{j-1}s_{j-2}\alpha_{j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{j-1} \dots s_2 \alpha_2}$$

(это сразу следует из того, что $us_1 = s_{j-1} \dots s_2$). Всё это означает, что несократимая запись первого слагаемого имеет вид $P/\beta Q$ для некоторых многочленов $P, Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, причём многочлен P не равен нулю.

Аналогично, для любого $g \in U$, не равного g_0, имеем $g(c_{v,g^{-1}}) \in Q'$, в то время как

$$c_{us_1,g} = \pm \frac{1}{s_{l_1}\alpha_{l_1}} \cdot \frac{1}{s_{l_1}s_{l_2}\alpha_{l_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{l_1} \dots s_{l_k} \alpha_{l_k}},$$

где $g = s_{l_1} \dots s_{l_k}$ для каких-то $j - 1 \geqslant l_1 > l_2 > \ldots > l_k \geqslant 2$.Элемент $g(\alpha_1) = \epsilon_1 - \epsilon_k, k < j$ по рассуждениям выше. Отсюда видно, что несократимая запись всей остальной суммы имеет вид C/D для некоторых многочленов $C, D \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, оба из которых не делятся на β. Окончательно,

$$c_w = \frac{C}{D} + \frac{P}{\beta Q} = \frac{\beta CQ + PD}{\beta DQ}.$$

Многочлены P и D взаимно просты с β, поэтому числитель не делится на β, а значит, в несократимой записи c_w знаменатель будет делиться на β, что и требовалось доказать.

Итак, чтобы завершить доказательство, остаётся проверить, что $g_0 \in U$, то есть что $v \geqslant g_0^{-1}$, или, что то же самое, $v^{-1} \geqslant g_0$. Для того, чтобы это показать, необходимо проверить два условия, первое условие проверяется дословно так же, как и в случае C_n. Проверим второе условие. Его необходимо проверять только в случае $j = n$, иначе в X_w нет пустых прямоугольников. Пусть R— пустой прямоугольник размера $2i$ на $2j$, легко видеть, что $i = 1$. Предположим, что

$$\sum_{k,l} (X_v)_{k,l} = \sum_{k,l} (X_w)_{k,l} = 0,$$

для $k = \overline{1, n-1}, l = \overline{-(n-j), -1}$. Рассмотрим три подматрицы в $X_{v^{-1}}$ и X_{g_0}, A_1 — построена на строках $1, 2, \ldots, n-1$ и столбцах $-n, \ldots, -(n-j-1)$, A_2 — построена на строках $1, 2, \ldots, n-1$ и столбцах $-(n-j), -(n-j-1), \ldots, -1$, A_3 — построена на строке n и столбцах $-n, -(n-1), \ldots, -1$. Количество единиц в A_1, A_2 совпадает с числами

$$\sum_{k,l} (X_{v^{-1}})_{k,l} \text{ и } \sum_{k,l} (X_{g_0})_{k,l} \pmod 2, k = \overline{1, n-i}, l = \overline{-n, -1},$$

соответственно. Заметим, что

$$\sum_{k,l} (X_{g_0})_{k,l} \pmod 2 \equiv 0,\ k = \overline{1, n-i},\ l = \overline{-n, -1}.$$

В A_2 и A_3 нет единиц, так как $v^{-1}(2) = n$ и $g_0(2) = n$. Осталось показать, что в A_1 у $X_{v^{-1}}$ четное число единиц. В этом случае, в A_1 расположены ладьи соответствующие смене знака плюса на минус, а их в D_n четное число.

Пусть $\beta = \epsilon_1 + \epsilon_j$.

$$u = s_j s_{j+1} \ldots s_{n-2} s_n s_{n-1} \ldots s_1 =$$
$$= (j, j+1)(j+1, j+2) \ldots (n-1, -n)(n-1, n) \ldots (3, 2)(2, 1)$$
$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ -j & 1 & 2 & \ldots & j-2 & j-1 & j+1 & \ldots & -n \end{pmatrix}.$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(-j) = 1$, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$\begin{aligned}
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } j-1,\\
&u(\alpha_j) = u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \epsilon_{j-1} - \epsilon_{j+1} > 0,\\
&u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } j+1 \text{ до } n-1,\\
&u(\alpha_n) = u(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n = \alpha_n > 0.\\
&u(\alpha_n) = u(\epsilon_{n-1} + \epsilon_n) = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n = \alpha_{n-1} > 0.
\end{aligned}$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [Hu2], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду формулы (3),

$$x_w = \sum_{s\in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h\in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h =$$

$$= \sum_{g,h\in W} c_{u,g}g(c_{v,h})\delta_{gh} = \sum_{s\in W}\left(\sum_{g\in W} c_{u,g}g(c_{v,g^{-1}s})\right)\delta_s.$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g\in W} c_{u,g}g(c_{v,g^{-1}s}),$$

для любого $s \in W$, в частности,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g\in W} c_{u,g}g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через $\mathcal{U}$ и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_j s_{j+1}\dots s_{n-2}s_n s_{n-1}\dots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается всегда — иначе будет нарушаться второе условие для множества $\mathcal{U}$. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g\in U} c_{u,g}g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся формулой (4). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}) = -g(\alpha_1)^{-1}c_{us_1,g},$$

так как $us_1 \not\geqslant gs_1$, а потому $c_{us_1,gs_1} = 0$. Значит, выражение для c_w переписывается в виде

$$c_w = -\sum_{g\in U}\frac{c_{us_1,g}g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Тривиально проверяется, что среди всех $g \in U$ есть не больше одного элемента, для которого $g\alpha_1 = \beta$. А именно, единственный претендент на эту роль — это элемент $g_0 = us_1 = s_j s_{j+1}\dots s_{n-2}s_n s_{n-1}\dots s_2$. Объясним это. Любой $g \in \mathcal{U}$ получается из u вычеркиванием отражений. Всегда вычеркивается s_1. Справа от s_n вычеркивать нечего иначе двойка не перейдет в отрицательное число. Если мы вычеркиваем в u слева от s_n какое-то простое отражение, то, если номер первого вычеркнутого слева s_n справа налево k, $g(\alpha_1) = \epsilon_1 + \epsilon_k, k < j$. Чтобы показать, что g_0 действительно лежит в $\mathcal{U}$, нужно проверить ещё, что $v \geqslant g_0^{-1}$, доказательство этого такое же, как в случае $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$.

Значит

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0}g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U,\ g\neq g_0}\frac{c_{us_1,g}g(c_{v,g^{-1}})}{g(\alpha_1)}.$$

Обозначим через S' (соответственно, через Q') подалгебру в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (соответственно, подполе в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$), порождённую $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Тогда $c_{v,g_0^{-1}} \in Q'$, а поскольку $g(1) = 1$, то и $g(c_{v,g_0^{-1}}) \in Q'$; в частности, числитель этого выражения в несократимой записи не делится на β. С другой стороны, легко видеть, что

$$c_{us_1,g_0} = c_{us_1,us_1} = \pm\frac{1}{s_2\alpha_2} \cdot \ldots \frac{1}{s_n \ldots s_2\alpha_n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_j \ldots s_{n-2}s_n \ldots s_2\alpha_j}$$

(это сразу следует из того, что $us_1 = s_js_{j+1} \ldots s_{n-1}s_ns_{n-1} \ldots s_2$). Всё это означает, что несократимая запись первого слагаемого имеет вид $P/\beta Q$ для некоторых многочленов $P, Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, причём многочлен P не равен нулю.

Аналогично, для любого $g \in U$, не равного g_0, имеем $g(c_{v,g^{-1}}) \in Q'$, в то время как $c_{us_1,g} \in Q'$. Элемент $g(\alpha_1) = \epsilon_1 + \epsilon_k, k < j$ по рассуждениям выше. Отсюда видно, что несократимая запись всей остальной суммы имеет вид C/D для некоторых многочленов $C, D \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, оба из которых не делятся на β. Окончательно,

$$c_w = \frac{C}{D} + \frac{P}{\beta Q} = \frac{\beta CQ + PD}{\beta DQ}.$$

Многочлены P и D взаимно просты с β, поэтому числитель не делится на β, а значит, в несократимой записи c_w знаменатель будет делиться на β, что и требовалось доказать. □

Используя Лемму 3.6, мы теперь доказываем основной результат для D_n абсолютно так же, как для C_n.

§3.3. Доказательство теоремы 3

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть W типа D_n и $w_1, w_2 \in W$ — две различные базисные инволюции, тогда $C_{w_1} \neq C_{w_2}$ как подмногообразия.

Доказательство основано на идее М.А. Бочкарёва, предложенной им в [BIS] для случаев A_n и C_n и, фактически, отличается от этих случаев лишь спецификой системы D_n. Идея заключается в том, что для базисных инволюций в D_n (и для всех инволюций в A_n и C_n), согласно результатам М.В. Игнатьева [Ig4], [Ig3], одна из неприводимых компонент касательного конуса совпадает с замыканием некоторой коприсоединённой орбиты борелевской группы, подробности см. ниже.

Обозначим за $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ алгебры Ли G, B, U соответственно, тогда $T_p\mathcal{F}$ изоморфно $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. Используя форму Киллинга на $\mathfrak{g}$, можно отождествить векторное пространство с дуальным $\mathfrak{n}^*$. Группа B действует на $\mathcal{F}$ сопряжениями. Так как p является B-инвариантной, то B действует на касательном пространстве $T_p\mathcal{F} \cong \mathfrak{n}^*$. Это действие называют *коприсоединенным*. Обозначим результат коприсоединенного действия за $b.\lambda$, $b \in B$, $\lambda \in \mathfrak{n}^*$.

Зафиксируем базис $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+\}$ в $\mathfrak{n}$, содержащий корневые векторы. Пусть $\{e_\alpha^*,\ \alpha \in \Phi^+\}$ — дуальный базис $\mathfrak{n}^*$. Пусть $w \in W$ — базисная инволюция. Для $\Phi = D_n$ носитель базисной инволюции определен в параграфе 3.2 (см определение 3.4). Возьмем

$$f_w = \sum_{\beta \in \mathrm{Supp}(w)} e_\beta^* \in \mathfrak{n}^*.$$

Определение 3.9. Будем говорить, что B-орбита Ω_w элемента f_w *ассоциирована* с инволюцией w.

Легко проверить, что $\Omega_w \subseteq C_w^{\mathrm{red}}$. Более того, C_w^{red} является B-инвариантным (в действительности, касательный конус для любого многообразия Шуберта является B-инвариантным). В частности, если дословно переписать [Ig4, Предложение 4.1] и [Ig1, Теорема 3.1], можно получить, что для базисной инволюции в D_n выполняется следующее:

$$\dim \Omega_w = l(w). \tag{6}$$

Так как $\dim C_w^{\mathrm{red}} = \dim X_w = l(w)$, утверждается, что $\overline{\Omega}_w$, замыкание Ω_w, является неприводимой компонентой C_w^{red} максимальной размерности (в действительности, C_w^{red} — равноразмерно).

Предположим, что G' — редуктивная подгруппа G'', T' (соответственно, T'') — максимальный тор в G' (соответственно, в G''), $T' = T'' \cap G'$, B' (соответственно, B'') — подгруппа Бореля G' (соответственно, G'') содержащая T' (соответственно, T''), $B' = B'' \cap G'$, и Φ' (Φ'') — система корней G' (соответственно, G'') относительно T (соответственно, T''). Обозначим за W' (W'') группу Вейля Φ' (соответственно, Φ''). Обозначим за $\mathcal{F}' = G'/B'$, $\mathcal{F}'' = G''/B''$ многообразия флагов. Возьмем $p' = eB' \in \mathcal{F}'$, $p'' = eB'' \in \mathcal{F}''$. Пусть U' (соответственно, U'') — унипотентный радикал B' (соответственно, B''), $U' = U'' \cap B'$. Обозначим так же за $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{n}'$ алгебры Ли G', B', U' соответственно. Определим $\mathfrak{g}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{n}''$ таким же образом. Можно вложить дуальное пространство $\mathfrak{n}'^* \cong \mathfrak{g}'/\mathfrak{b}'$, как подпространство $\mathfrak{n}''^* \cong \mathfrak{g}''/\mathfrak{b}''$. Итак, отождествим $T_{p'}\mathcal{F}'$ с подпространством в $T_{p''}\mathcal{F}''$.

Возьмем инволюции $w_1, w_2 \in W'$. Пусть C_i' приведенный касательный конус в точке p' к многообразию Шуберта X'_{w_i} многообразия флагов $\mathcal{F}'$, $i = 1, 2$. Также, пусть C_i'' приведенный касательный конус в p'' к многообразию Шуберта X''_{w_i} $\mathcal{F}''$, $i = 1, 2$. Обозначим за l' (соответственно, l'') функцию длины на группе Вейля W' (соответственно, W''). Предположим, что $C_1' = C_2'$. Это значит, что

$$l'(w_1) = l'(w_2).$$

Заметим, что $C_i' \subseteq C_i''$, $B''.C_i' \subseteq C_i''$, $i = 1, 2$. Обозначим за $\Omega'_{w_i} \subseteq \mathfrak{n}'^*$ коприсоединенную B'-орбиту, ассоциированную с инволюцией w_i, $i = 1, 2$; определим Ω''_{w_i} таким же образом. Из формулы (6) следует, что

$$\begin{aligned} l''(w_i) = \dim C_i'' &\geqslant \dim B''.C_i' \geqslant \dim B''.\Omega'_{w_i} \\ &= \dim \Omega''_{w_i} = l''(w_i), \end{aligned}$$

потому что $\Omega''_{w_i} = B''.\Omega'_{w_i}$. Отсюда следует, чьл $l''(w_i) = \dim C_i'' = \dim B''.C_i'$. Но $C_1' = C_2'$, поэтому $\dim C_1'' = \dim C_2''$. Получаем следующий результат:

$$\text{если } C_1' = C_2', \text{ то } l''(w_1) = l''(w_2). \tag{7}$$

Отождествим D_n^+ с

$$\{\epsilon_i - \epsilon_j,\ \epsilon_i + \epsilon_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \subset \mathbb{R}^n$$

и группу Вейля W типа D_n с подгруппой $S_{\pm n}$ содержащей w, такие что $w(-i) = -w(i)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть W'' типа D_{n+2}. Отождествим D_{n+2}^+ с

$$\{\eta_i - \eta_j,\ \eta_i + \eta_j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n+2\}.$$

Возьмем числа k_1, k_2 такие, что $1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n+2$. Положим, далее, $P = \{k_1, k_2\}$, $Q = \{1, \ldots, n+2\} \setminus P$, и

$$\widetilde{W} = \{w \in W'' \mid w(i) = i \text{ для любых } i \in P\},$$
$$\widetilde{W}_2 = \{w \in W'' \mid w(i) = i \text{ для любых } i \in Q\},$$
$$W' = \{w \in W'' \mid w(P) = P,\ w(Q) = Q\}.$$

Пусть Φ' (соответственно, $\widetilde{\Phi}$) система корней W' (соответственно, $\widetilde{W}$). Очевидно, Φ' (соответственно, $\widetilde{\Phi}$) типа $D_n \times A_1 \times A_1$ (соответственно, D_n). Возьмем $G'' = SO_{2n+4}(\mathbb{C})$ и обозначим за G' (соответственно, $\widetilde{G}$) подгруппу G соответствующую Φ' (соответственно, $\widetilde{\Phi}$), тогда $G' \cong SO_{2n}(\mathbb{C}) \times SO_4(\mathbb{C})$. Обозначим так же

$$A = \{1, \ldots, k_1 - 1\},\ B = \{k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1\},\ C = \{k_2 + 1, \ldots, n+2\}.$$

Пусть $\Phi = D_n$. Без ограничения общности можно предположить, что $G = SO_{2n}(\mathbb{C})$. Отождествим Φ с подмножеством в $\widetilde{\Phi}$ с помощью отображения $\epsilon_k \mapsto \eta_{k'}$, где

$$k' = \begin{cases} k, & \text{если } k \leqslant k_1 - 1, \\ k+1, & \text{если } k_1 \leqslant k \leqslant k_2 - 2, \\ k+2, & \text{если } k_2 - 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Отождествим G (соответственно, W) с подгруппой $\widetilde{G}$ (соответственно, с $\widetilde{W}$). Обозначим образ в $\widetilde{W}$ элемента $w \in W$ относительно этого действия снова как w. Для любого $X \subseteq \{1, \ldots, n+2\}$, положим $X^- = -X$ и $X^\pm = X \cup X^-$. Пусть $w \in W$ — базисная инволюция.

Лемма 3.10. i) Если $w' = ws_{\eta_{k_1} - \eta_{k_2}}$, тогда

$$l''(w') = 2(k_2 - k_1 - 1) + 4|w(A) \cap C^\pm| + 4|w(A) \cap B^-| + 4|w(A) \cap A^-| + l(w) + 1.$$

ii) Если $w' = ws_{\eta_{k_1} + \eta_{k_2}}$, тогда

$$l''(w') = 2(k_2 - k_1 - 1) + 4|C| + 4|w(A) \cap B^-| + 4|w(A) \cap A^-| + l(w) + 1.$$

Доказательство. i) Очевидно,

$$l''(w') = l'(w') + \#\{\alpha \in \Phi''^+ \setminus \Phi'^+ \mid w'(\alpha) < 0\}.$$

$$\Phi''^+ \setminus \Phi'^+ = \widetilde{A} \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C}, \text{ где}$$
$$\widetilde{A} = \{\eta_a - \eta_{k_1},\ \eta_a - \eta_{k_2}, \eta_a + \eta_{k_1},\ \eta_a + \eta_{k_2},\ a \in A\},$$
$$\widetilde{B} = \{\eta_{k_1} - \eta_b,\ \eta_b - \eta_{k_2}, \eta_{k_1} + \eta_b,\ \eta_b + \eta_{k_2},\ b \in B\},$$
$$\widetilde{C} = \{\eta_{k_1} - \eta_c,\ \eta_{k_2} - \eta_c, \eta_{k_1} + \eta_c,\ \eta_{k_2} + \eta_c\ c \in C\},$$

Рассмотрим множество $\widetilde{A}$, $w'(\eta_a - \eta_{k_1}) = \eta_{w(a)} - \eta_{k_2} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(a) > k_2$, то есть, $w(a) \in C$, либо $w(a) < 0$. С другой стороны, $w'(\eta_a - \eta_{k_2}) = \eta_{w(a)} - \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(a) > k_1$, то есть, $w(a) \in B$ или $w(a) \in C$, либо $w(a) < 0$. Далее, $w'(\eta_a + \eta_{k_1}) = \eta_{w(a)} + \eta_{k_2} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(a) < 0$ и $|w(a)| < k_2$, то есть, $w(a) \in A^- \cup B^-$. И, $w'(\eta_a + \eta_{k_2}) = \eta_{w(a)} + \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(a) < 0$ и $|w(a)| < k_1$, то есть, $w(a) \in A^-$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \widetilde{A} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(A) \cap C| + |w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-| + |w(A) \cap C^-|)+\\
&(|w(A) \cap B| + |w(A) \cap C| + |w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-| + |w(A) \cap C^-|)+\\
&+ (|w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-|) + (|w(A) \cap A^-|) =\\
&= |w(A) \cap B| + 2|w(A) \cap C| + 4|w(A) \cap A^-| + 3|w(A) \cap B^-| + 2|w(A) \cap C^-|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{B}$, $w'(\eta_{k_1} - \eta_b) = \eta_{k_2} - \eta_{w(b)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(b) < k_2$, то есть, $w(b) \in A \cup B$. С другой стороны, $w'(\eta_b - \eta_{k_2}) = \eta_{w(b)} - \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(b) > k_1$, то есть, $w(b) \in B$ или $w(b) \in C$, либо $w(b) < 0$. Далее, $w'(\eta_{k_1} + \eta_b) = \eta_{k_2} + \eta_{w(b)} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(a) < 0$ и $|w(b)| < k_2$, то есть, $w(b) \in A^- \cup B^-$. И, $w'(\eta_b + \eta_{k_2}) = \eta_{w(b)} + \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(b) < 0$ и $|w(b)| < k_1$, то есть, $w(b) \in A^-$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \widetilde{B} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(B) \cap A| + |w(B) \cap B|)+\\
&+ (|w(B) \cap B| + |w(B) \cap C| + |w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-| + |w(B) \cap C^-|)+\\
&+ (|w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-|) + (|w(B) \cap A^-|) =\\
&= |w(B) \cap A| + 2|w(B) \cap B| + |w(B) \cap C| + 3|w(B) \cap A^-| + 2|w(B) \cap B^-| + |w(B) \cap C^-| =\\
&= |B| + |w(B) \cap B| + 2|w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{C}$, $w'(\eta_{k_1} - \eta_c) = \eta_{k_2} - \eta_{w(c)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(c) < k_2$, то есть, $w(c) \in A \cup B$. С другой стороны, $w'(\eta_{k_2} - \eta_c) = \eta_{k_1} - \eta_{w(c)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(c) < k_1$, то есть, $w(c) \in A$. Далее, $w'(\eta_{k_1} + \eta_c) = \eta_{k_2} + \eta_{w()} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(c) < 0$ и $|w(c)| < k_2$, то есть, $w(c) \in A^- \cup B^-$. И, $w'(\eta_{k_2} + \eta_c) = \eta_{k_1} + \eta_{w(c)} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(c) < 0$ и $|w(c)| < k_1$, то есть, $w(c) \in A^-$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$, и, в тоже время, с элементом S_{n+2}. Тогда

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \widetilde{A} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(C) \cap A| + |w(C) \cap B|)+\\
&(|w(C) \cap A|)+\\
&(|w(C) \cap A^-| + |w(C) \cap B^-|) + (|w(C) \cap A^-|)\\
&= 2|w(C) \cap A| + |w(C) \cap B| + 2|w(C) \cap A^-| + |w(C) \cap B^-|.
\end{aligned}$$

Так как w — инволюция, $|w(X) \cap Y| = |X \cap w(Y)|$ и $|w(X) \cap Y^-| = |X^- \cap w(Y)|$ для любых подмножеств X, Y. Значит,

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \Phi''^+ \setminus \Phi'^+ \mid w'(\alpha) < 0\} = |w(A) \cap B| + 2|w(A) \cap C| + 4|w(A) \cap A^-|+\\
&+ 3|w(A) \cap B^-| + 2|w(A) \cap C^-| + |B| + |w(B) \cap B| + 2|w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-|+\\
&+ 2|w(C) \cap A| + |w(C) \cap B| + 2|w(C) \cap A^-| + |w(C) \cap B^-| + 1 =\\
&= |w(B) \cap A| + 2|w(A) \cap C| + 4|w(A) \cap A^-| + 3|w(A) \cap B^-| + 2|w(A) \cap C^-|+\\
&+ |B| + |w(B) \cap B| + 2|w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-|+\\
&+ 2|w(C) \cap A| + |w(B) \cap C| + 2|w(C) \cap A^-| + |C^- \cap w(B)| + 1 =\\
&= 2|w(A) \cap C| + 4|w(A) \cap A^-| + 3|w(A) \cap B^-| + 2|w(A) \cap C^-|+\\
&+ 2|B| + |w(B) \cap A^-| + 2|w(C) \cap A| + 2|w(C) \cap A^-| + 1 =\\
&= 4|w(A) \cap C^{\pm}| + 4|w(A) \cap A^-| + 4|w(A) \cap B^-| + 2|B| + 1 =\\
&= 2(k_2 - k_1 - 1) + 4|w(A) \cap C^{\pm}| + 4|w(A) \cap B^-| + 4|w(A) \cap A^-| + 1
\end{aligned}$$

ii) Очевидно,

$$l''(w') = l'(w') + \#\{\alpha \in \Phi''^+ \setminus \Phi'^+ \mid w'(\alpha) < 0\}.$$

$$\Phi''^+ \setminus \Phi'^+ = \widetilde{A} \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C}, \text{ где}$$

$$\widetilde{A} = \{\eta_a - \eta_{k_1},\ \eta_a - \eta_{k_2}, \eta_a + \eta_{k_1},\ \eta_a + \eta_{k_2},\ a \in A\},$$

$$\widetilde{B} = \{\eta_{k_1} - \eta_b,\ \eta_b - \eta_{k_2}, \eta_{k_1} + \eta_b,\ \eta_b + \eta_{k_2},\ b \in B\},$$

$$\widetilde{C} = \{\eta_{k_1} - \eta_c,\ \eta_{k_2} - \eta_c, \eta_{k_1} + \eta_c,\ \eta_{k_2} + \eta_c\ c \in C\},$$

Рассмотрим множество $\widetilde{A}$, $w'(\eta_a - \eta_{k_1}) = \eta_{w(a)} + \eta_{k_2} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(a) < 0$ и $|w(a)| < k_2$, то есть, $w(a) \in A^- \cup B^-$. С другой стороны, $w'(\eta_a - \eta_{k_2}) = \eta_{w(a)} + \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда $w(a) < 0$ и $|w(a)| < k_1$, то есть, $w(a) \in A^-$. Далее, $w'(\eta_a + \eta_{k_1}) = \eta_{w(a)} - \eta_{k_2} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(a) > k_2$, то есть, $w(a) \in$, либо $w(a) < 0$. И, $w'(\eta_a + \eta_{k_2}) = \eta_{w(a)} - \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(a) > k_1$,, то есть, $w(a) \in B \cup C$, либо $w(a) < 0$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \widetilde{A} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-|) + (|w(A) \cap A^-|) \\
&(|w(A) \cap B| + |w(A) \cap C| + |w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-| + |w(A) \cap C^-|) + \\
&(|w(A) \cap C| + |w(A) \cap A^-| + |w(A) \cap B^-| + |w(A) \cap C^-|) + \\
&= |w(A) \cap B| + 2|w(A) \cap C| + 4|w(A) \cap A^-| + 3|w(A) \cap B^-| + 2|w(A) \cap C^-|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{B}$, $w'(\eta_{k_1} - \eta_b) = -\eta_{k_2} - \eta_{w(b)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(b) > 0$, то есть, $w(b) \in A \cup B \cup C$, либо $w(b) < 0$ и $|w(b)| > k_2$, то есть, $w(b) \in C^-$. С другой стороны,

$$w'(\eta_b - \eta_{k_2}) = \eta_{w(b)} + \eta_{k_1} < 0$$

тогда и только тогда, когда $w(b) < 0$ и $|w(b)| < k_1$, то есть, $w(b) \in A^-$. Далее, $w'(\eta_{k_1} + \eta_b) = -\eta_{k_2} + \eta_{w(b)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(b) < 0$ либо $w(b) > 0$ и $w(b) > k_2$, то есть, $w(b) \in C$. И, $w'(\eta_b + \eta_{k_2}) = \eta_{w(b)} - \eta_{k_1} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(b) < 0$, либо $w(b) > k_1$, то есть, $w(b) \in B \cup C$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \widetilde{B} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(B) \cap A| + |w(B) \cap B| + |w(B) \cap C| + |w(B) \cap C^-|) + \\
&(|w(B) \cap A^-|) + (|w(B) \cap C| + |w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-| + |w(B) \cap C^-|) + \\
&(|w(B) \cap B| + |w(B) \cap C| + |w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-| + |w(B) \cap C^-|) \\
&= |w(B) \cap A| + 2|w(B) \cap B| + 3|w(B) \cap C| + 3|w(B) \cap A^-| + 2|w(B) \cap B^-| + \\
&+ 3|w(B) \cap C^-| = |B| + |w(B) \cap B| + 2|w(B) \cap C| + 2|w(B) \cap A^-| + |w(B) \cap B^-| + \\
&+ 2|w(B) \cap C^-|.
\end{aligned}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{C}$, $w'(\eta_{k_1} - \eta_c) = -\eta_{k_2} - \eta_{w(c)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(c) < 0$ и $|w(c)| > k_2$, то есть, $w(c) \in C^-$, либо $w(c) > 0$. С другой стороны,

$$w'(\eta_{k_2} - \eta_c) = -\eta_{k_1} - \eta_{w(c)} < 0$$

тогда и только тогда, когда либо $w(c) < 0$ и $|w(c)| > k_1$, то есть, $w(c) \in B^- \cup C^-$, либо $w(c) > 0$. Далее, $w'(\eta_{k_1} + \eta_c) = -\eta_{k_2} + \eta_{w()} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(c) > k_2$, то есть, $w(c) \in C$, либо $w(c) < 0$. И, $w'(\eta_{k_2} + \eta_c) = -\eta_{k_1} + \eta_{w(c)} < 0$ тогда и только тогда, когда либо $w(c) > k_1$, то есть, $w(c) \in C \cup B$, либо $w(c) < 0$. Теперь отождествим w с элементом $\widetilde{W} \subset W''$. Тогда

$$\#\{\alpha \in \widetilde{A} \mid w'(\alpha) < 0\} = (|w(C)\cap A| + |w(C)\cap B| + |w(C)\cap C| + |w(C)\cap C^-|)+$$
$$(|w(C)\cap A| + |w(C)\cap B| + |w(C)\cap C| + |w(C)\cap B^-| + |w(C)\cap C^-|)+$$
$$(|w(C)\cap C| + |w(C)\cap A^-| + |w(C)\cap B^-| + |w(C)\cap C^-|)+$$
$$(|w(C)\cap B| + |w(C)\cap C| + |w(C)\cap A^-| + |w(C)\cap B^-| + |w(C)\cap C^-|)$$
$$= 2|w(C)\cap A| + 3|w(C)\cap B| + 4|w(C)\cap C| + 2|w(C)\cap A^-| + 3|w(C)\cap B^-| + 4|w(C)\cap C^-|.$$

Так как w — инволюция, $|w(X)\cap Y| = |X\cap w(Y)|$ и $|w(X)\cap Y^-| = |X^-\cap w(Y)|$ для любых подмножеств X, Y. Значит,

$$\begin{aligned}
&\#\{\alpha \in \Phi''^+ \setminus \Phi'^+ \mid w'(\alpha) < 0\} = |w(A)\cap B| + 2|w(A)\cap C| + 4|w(A)\cap A^-| + 3|w(A)\cap B^-|+\\
&+ 2|w(A)\cap C^- + |B| + |w(B)\cap B| + 2|w(B)\cap C| + 2|w(B)\cap A^-| + |w(B)\cap B^-|+\\
&+ 2|w(B)\cap C^-| + 2|w(C)\cap A| + 3|w(C)\cap B| + 4|w(C)\cap C| + 2|w(C)\cap A^-|+\\
&+ 3|w(C)\cap B^-| + 4|w(C)\cap C^-| + 1 = 4|w(A)\cap A^-| + 3|w(A)\cap B^-|\\
&+ |B| + |w(B)\cap A| + |w(B)\cap B| + |w(B)\cap C| + 2|w(B)\cap A^-| + |w(B)\cap B^-|+\\
&+ |w(B)\cap C^-| + 4|w(C)\cap A| + 4|w(C)\cap B| + 4|w(C)\cap C| + 4|w(C)\cap A^-|+\\
&+ 4|w(C)\cap B^-| + 4|w(C)\cap C^-| + 1 = 4|w(A)\cap A^-| + 3|w(A)\cap B^-|+\\
&+ 2|B| + |w(B)\cap A^-| + 4|C| = 2|B| + 4|C| + 4|w(A)\cap A^-| + 4|w(A)\cap B^-| + 1 =\\
&= 2(k_2 - k_1 - 1) + 4|C| + 4|w(A)\cap B^-| + 4|w(A)\cap A^-| + 1.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Предложение 3.11. *Пусть w_1, w_2 — базисные инволюции в группе Вейля W типа D_n. Если $w_1 \neq w_2$, то $C^{\mathrm{red}}_{w_1} \neq C^{\mathrm{red}}_{w_2}$ как подмногообразия в $T_p\mathcal{F}$.*

Доказательство. Предположим, что $C^{\mathrm{red}}_{w_1} = C^{\mathrm{red}}_{w_2}$. В частности,

$$l(w_1) = \dim C^{\mathrm{red}}_{w_1} = \dim C^{\mathrm{red}}_{w_2} = l(w_2).$$

Так как $w_1 \neq w_2$, то существует $1 \leqslant k \leqslant n$, такое что $w_1(\epsilon_i) = w_2(\epsilon_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$, и $w_1(\epsilon_k) \neq w_2(\epsilon_k)$.

Можно предположить без ограничения общности, что $w_1(\epsilon_k) < w_2(\epsilon_k)$, то есть, $w_2(\epsilon_k) - w_1(\epsilon_k)$ — сумма положительных корней. Заметим, что $w_1(\epsilon_k) \neq \pm\epsilon_k$. Возьмем $k_1 = k+1$ и рассмотрим три различных случая.

i) Предположим, что $w_1(\epsilon_k) < 0$, $w_2(\epsilon_k) > 0$. Возьмем $k_2 = n+2$, тогда $C = \varnothing$ и

$$(w_i(A)\cap B^-) \cup (w_i(A)\cap A^-) = w_i(A) \cap \{-1,\ldots,-n\},\ i = 1,2.$$

Отсюда, по Лемме 3.10 (i), $l''(w_1') \neq l''(w_2')$, где $w_i' = w_i s_{\eta_{k_1}-\eta_{k_2}}$, $i = 1,2$. С другой стороны, $C_1' = C_2'$. Это противоречит (7).

ii) Теперь, предположим, что $w_1(\epsilon_k) = \epsilon_{m_1}$, $w_2(\epsilon_k) = \epsilon_{m_2}$, $m_1 > m_2$. Возьмем $k_2 = m_1+1$, тогда $w_1(k) \in C$ и $w_2(k) \in B$ (здесь w_1 и w_2 элементы $\widetilde{W} \subseteq W''$, или, эквивалентно, элементы $S_{\pm n}$). Лемма 3.10 (i) показывает, что $l''(w_1') \neq l''(w_2')$, где $w_i' = w_i s_{\eta_{k_1}-\eta_{k_2}}$, $i = 1,2$, но $C_1' = C_2'$, противоречие.

iii) Наконец, предположим, что $w_1(\epsilon_k) \neq -\epsilon_k$, $w_1(\epsilon_k) = -\epsilon_{m_1}$, $w_2(\epsilon_k) = -\epsilon_{m_2}$, $m_1 > m_2$. Как раньше, возьмем $k_2 = m_1+1$, тогда $w_1(k) \in C^-$ и $w_2(k) \in B^-$. По лемме 3.10 (ii) $l''(w_1') \neq l''(w_2')$, где $w_i' = w_i s_{\eta_{k_1}+\eta_{k_2}}$, $i = 1,2$, но $C_1' = C_2'$, противоречие. Это завершает доказательство. □

Список литературы

[Bo] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. Мир, 1978.

[EP] Д.Ю. Елисеев, А.Н. Панов. Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга. Записки научного семинара ПОМИ **394** (2011), 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.

[EI] Д. Ю. Елисеев, М. В. Игнатьев. Многочлены Костанта–Кумара и касательные конусы к многообразиям Шуберта для инволюций в A_n, F_4 и G_2. Записки научного семинара ПОМИ **414** (2013), 82—105, см. также arXiv: `math.RT/1210.5740`.

[Ig1] М. В. Игнатьев. Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит . Записки научного семинара ПОМИ **400** (2012), 166–188, см. также arXiv: `math.RT/1112.2624`.

[Ig2] М. В. Игнатьев. Ортогональные подмножества классических систем корней и коприсоединенные орбиты унипотентной группы . Математические заметки **86** (2009), № 1, 65–80, см. также arXiv: `math.RT/0904.2841`.

[Ig3] М. В. Игнатьев. Ортогональные подмножества систем корней и метод орбит. Алгебра и анализ **22** (2010), № 5, 104–130, см. также arXiv: `math.RT/1007.5220`.

[Pa] А. Н. Панов. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединенные орбиты. Записки научного семинара ПОМИ **349** (2007), 150–173, см. также arXiv: `math.RT/0801.3022`.

[Hu1] Дж. Хамфрис. Линейные алгебраические группы. Наука, 1980.

[Bi] S. Billey. Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B. Duke Math. J. **96** (1999), 205–224.

[BL] S. Billey, V. Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progr. in Math. **182**, Birkhäuser, 2000.

[BB] A. Bjorner, F. Brenti. Combinatorics of Coxeter groups. Graduate Texts in Mathematics **231**, Springer, 2005.

[BIS] M.A. Bochkarev, M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. Tangent cones to Schubert varieties in types A_n, B_n and C_n. J. Algebra, submitted, see also arXiv: `math.AG/1310.3166`.

[Dy] M. Dyer. The nil-Hecke ring and Deodhar's conjecture on Bruhat intervals. Invent. Math. **111** (1993), 571–574.

[Hu2] J. Humphreys. Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Ig4] M.V. Ignatyev. Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions. Transformation Groups **17** (2012), no. 3, 747–780, см. также arXiv: `math.RT/1101.2189`.

[IS] M.V. Ignatyev, A.A. Shevchenko. On tangent cones to Schubert varieties in type D_n, preprint.

[KK1] B. Kostant, S. Kumar. The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac–Moody group G. Adv. Math. **62** (1986), 187–237.

[KK2] B. Kostant, S. Kumar. T-equivariant K-theory of generalized flag varieties. J. Diff. Geom. **32** (1990), 549–603.

[Ku] S. Kumar. The nil-Hecke ring and singularities of Schubert varieties. Invent. Math. **123** (1996), 471–506.

[Pr] R.A. Proctor. Classical Bruhat orders and lexicographical shellability. J. Algebra **77** (1982), no. 1, 104–126.