УДК 517.956 + 517.984

Т. Ф. Шарапов

О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле

Рассмотрен эллиптический оператор в многомерной области с частой сменой краевых условий в случае, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному, получены оценки скорости сходимости. Построено полное асимптотическое разложение для резольвенты в случае, когда она действует на достаточно гладкие функции.

Ключевые слова: частая смена, усреднение, равномерная резольвентная сходимость, асимптотика.

1 Введение

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач в областях с частой сменой граничных условий исследовались достаточно широко (см., например, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]). Большинство работ посвящено случаю ограниченных областей с достаточно гладкой границей. Опишем постановку подобных краевых задач. На границе области выделялся набор подмножеств. На этих подмножествах задавалось граничное условие Дирихле, на оставшейся части границы – условие Неймана или третье краевое условие. Исследовалось поведение решений таких краевых задач, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Рассматривались также случаи, когда смена краевых условий задавалась лишь на фиксированной части границы, а на оставшееся части было задано одно из классических граничных условий. Основные результаты касались определения вида усредненных задач и доказательства теорем сходимости для решений. Усредненными задачами были краевые задачи для тех же самых уравнений в тех же самых областях, но с одним из классических граничных условий. Для эллиптических задач с разными типами чередования граничных условий были получены усредненные задачи и доказана сходимость. Сходимость решений была доказана в смысле слабой или сильной резольвентной сходимости.

Кроме определения вида усредненных задач для задач с частой сменой типа граничных условий, значим и актуален также вопрос об оценках скорости сходимости. Для периодической смены краевых условий оценки скорости сходимости для разности решений возмущенных и усредненных задач были выведены в [1], [2], [10], [11]. Схожие оценки для непериодического чередования были получены в [3], [4], [7], [8], [9].

Более сильный тип сходимости – равномерная резольвентная сходимость. Для эллиптических задач с быстро осциллирующими коэффициентами такой тип сходимости был доказан в разных операторных нормах, а также были получены многочисленные оценки скорости сходимости (см, например, [12], [13], [14], [15], а также дальнейшие работы авторов). В [16], [17], [18] такие результаты были получены для эллиптических операторов в бесконечной плоской полосе с периодической сменой граничных условий, а в [19] – с непериодической сменой граничных условий. При этом были рассмотрены все возможные усредненные операторы.

Имеется также много работ, в которых строились асимптотики решений задач с чередованием граничных условий (см., например, [7], [8], [9], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]). В работе [23] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в многомерном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями. На одной из гиперплоскостей было задано периодическое чередование граничных условий Дирихле и Неймана, решение задачи также искалось периодическим. Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение. В [20], [21], [22] были построены асимптотики для двумерных задач с периодическим чередованием граничного условия Дирихле и граничного условием Неймана. Аналогичные результаты были получены в работах [24], [25] для трехмерного цилиндра с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана на узких поперечных полосах, лежащих на боковой поверхности. Достаточно близки к задачам с частой сменой граничных условий задачи с большим количеством концентрированных масс. Усреднению такого рода задач посвящено достаточно много работ (см., например, [11], [26], [27]).

В настоящей работе рассматривается эллиптический оператор в произвольной многомерной области с частым чередованием краевого условия Дирихле и третьего краевого условия. Область может быть как ограниченной, так и неограниченной. Чередование граничных условий задается непериодическим. При этом оно вводится на всей границе или на какой-то ее фиксированной части. В последнем случае на оставшейся части границы ставится условие Дирихле. Мы рассматриваем случай, когда усредненный оператор содержит краевое условие Дирихле. Исследуется поведение резольвенты возмущенного оператора, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Первый основной результат – доказана доказана равномерная резольвентная сходимость возмущенного оператора к усредненному в смысле нормы оператора, действующего из L_2 в W_2^1, и получены оценки скорости сходимости. Второй основной результат – полное асимптотическое разложение для резольвенты в неограниченной области с дополнительным предположением, что чередование граничных условий имеет периодическую структуру и задано на гиперплоскости, а резольвента действует на достаточно гладкие функции.

2 Постановка задачи

Пусть $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2. Область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. Пусть τ – расстояние от точки до границы Ω, измеренное вдоль внутренней нормали. В случае неограниченной области Ω предположим, что существует $\tau_0 > 0$ такое, что переменная τ определена корректно, по крайней мере, при $0 < \tau \leqslant \tau_0$. В частности, это означает, что область $\{x : 0 < \tau < \tau_0\}$ расположена внутри Ω.

Предположим, что в окрестности каждой точки $P \in \partial\Omega$ можно ввести локальные координаты $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$. Здесь координаты вводятся так, что точка $s = 0$ соответствует точке P. Будем считать, что существует такое $R_0 > 0$, что якобианы перехода от переменных x к переменным (s, τ) и обратно ограничены равномерно для всех точек из $\{x : 0 < \tau \leqslant \tau_0/2,\ |s| \leqslant R_0\}$ некоторой константой, не зависящей от выбора точки P.

Через ε обозначим малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – некоторая ограниченная положительная функция. Всюду в работе считаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} = 0. \tag{2.1}$$

Границу области Ω разобьем на две непересекающиеся части: $\partial\Omega = \Upsilon \cup \Xi$. На Υ выберем набор ограниченных подмножеств $\gamma_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, \ldots, K(\varepsilon)$. В случае, если Υ ограничена, $K(\varepsilon)$ – это некоторая целочисленная функция, стремящаяся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$. В случае, если Υ не является ограниченным множеством, то полагаем $K(\varepsilon) = \infty$ для всех ε. Рассматривая $\gamma_\varepsilon^{(i)}$ как $(n-1)$-мерные области, границы этих областей будем предполагать состоящими из конечного числа непересекающихся замкнутых $(n-2)$-мерных поверхностей класса C^2. Положим $\gamma_\varepsilon := \bigcup\limits_{i=1}^{K(\varepsilon)} \gamma_\varepsilon^{(i)}$.

Обозначим через $B_r(M)$ шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке M и радиуса r. Будем предполагать, что существуют точки $M_\varepsilon^i \in \gamma_\varepsilon^{(i)}$ и положительные числа R_1 и R_2, не зависящие от ε такие, что выполняется:

$$C_1\varepsilon \leqslant \min_{i\neq j} |M_\varepsilon^i - M_\varepsilon^j| \leqslant C_2\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$B_{R_2\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right) \cap \Upsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^{(i)} \subseteq B_{R_1\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right), \qquad B_{R_1\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right) \cap B_{R_1\varepsilon\eta}(M_\varepsilon^j) = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{2.3}$$

где $i, j = 1, \ldots, K(\varepsilon)$, а C_1 и C_2 – положительные константы, не зависящие от ε, i и j.

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим заданные на Ω функции такие, что $A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_j \in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0 \in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$. Функции A_{ij} и A_0 предполагаются вещественными, A_j – комплекснозначными. Кроме того, функции A_{ij} удовлетворяют условию эллиптичности

$$A_{ij}(x) = A_{ji}(x), \qquad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) z_i \overline{z}_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2, \quad x \in \Omega, \quad z_i \in \mathbb{C}, \tag{2.4}$$

где c_0 – положительная константа, не зависящая от x и z_i. Через $a = a(x)$ обозначим вещественную функцию, заданную на Υ, и предположим, что $a \in L_\infty(\Upsilon)$.

Основным объектом изучения настоящей работы является оператор в $L_2(\Omega)$, определенный дифференциальным выражением

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A}_j + A_0, \tag{2.5}$$

с краевым условием Дирихле на γ_ε и третьим краевым условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu} + a\right) u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon := \Upsilon \backslash \overline{\gamma}_\varepsilon, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial\mu} := -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\nu_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{A}_j \nu_j,$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Строго определим $\mathcal{H}_\varepsilon$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v\right)_{L_2(\Omega)} \\ + \sum_{j=1}^{n} \left(u, A_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega)} + (au, v)_{L_2(\Upsilon)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$. Здесь $\mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$ – подпространство функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\gamma_\varepsilon \cup \Xi$. Через $\mathring{W}_2^i(\Omega, Q)$ обозначим пространство

Соболева, состоящее из функций из $W_2^i(\Omega)$ с нулевым следом на поверхности Q, лежащей в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Целью работы является изучение асимптотического поведения резольвенты оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Для формулировки первого основного результата введем усредненный оператор. А именно, определим $\mathcal{H}_0$ как оператор в $L_2(\Omega)$ с дифференциальным выражением

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A}_j + A_0, \tag{2.7}$$

и краевым условием Дирихле на $\partial\Omega$. Строго введем $\mathcal{H}_0$ как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий замкнутой симметричной полуторалинейной полуограниченной снизу форме

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_0(u,v) := \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\Omega)} \\ + \sum_{j=1}^{n} \left(u, A_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} + (A_0 u, v)_{L_2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.8}$$

в $L_2(\Omega)$ с областью определения $D(\mathfrak{h}_0) := \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$.

Через $\|\cdot\|_{X\to Y}$ обозначим норму оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Первым основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть K – компакт в комплексной плоскости, не пересекающийся со спектром оператора $\mathcal{H}_0$, $\lambda \in K$. Тогда для всех достаточно малых ε имеет место неравенство*

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon + \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 + \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\lambda, K) \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{2.9}$$

где константа C не зависит от ε и η, но зависит от λ и от выбора компакта K.

Во второй части работы строится полная асимптотика резольвенты возмущенного оператора, суженной на функции из $L_2(\Omega)$ с дополнительными условиями гладкости. Асимптотику резольвенты будем строить для неограниченной области Ω с дополнительным предположением, что при малых x_n она совпадает со слоем. А именно, будем считать, что существует $\tau_0 > 0$ так, что $\Omega \cap \{x : 0 < x_n < \tau_0\} = \{x : 0 < x_n < \tau_0\}$. Пусть $\Upsilon := \{x : x_n = 0\}$, γ – $(n-1)$-мерное множество, лежащее в $(n-1)$-мерном параллелепипеде $\{x \in \mathbb{R}^{n-1} : -\frac{a_i}{2} < x_i < \frac{a_i}{2},\ i = 1, \ldots, n-1,\ x_n = 0\}$, где a_i – положительные константы. Потребуем также, чтобы коэффициенты возмущенного оператора и функция $a(x)$ были бесконечно дифференцируемы при $0 \leqslant x_n \leqslant \tau_0$, а все эти производные и сами функции были равномерно ограничены при $0 \leqslant x_n \leqslant \tau_0$. Будем также считать, что на границе Υ функции $A_{ij}(x)$ равны нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Положим

$$\gamma_\varepsilon := \bigcup_k \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : (\varepsilon\eta)^{-1} \left(x - (\varepsilon a_1 k_1, ..., \varepsilon a_{n-1} k_{n-1}) \right) \in \gamma, \quad k \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}.$$

Пусть f – произвольная функция из $L_2(\Omega)$, бесконечно дифференцируемая в области $\{x : 0 \leqslant x_n \leqslant \tau_0\}$, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$.

Второй основной результат работы выглядит следующим образом.

Теорема 2.2. *Асимптотика функции u_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеет вид*

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + \chi(x_n)\, u_\varepsilon^{mid}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right), \tag{2.10}$$

где $\chi(x_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равна нулю при $x_n > \tau_0$ и единице при $x_n < \frac{\tau_0}{3}$, а функции u_ε^{ex} и u_ε^{mid} имеют асимптотики

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m(x,\eta), \tag{2.11}$$

$$u_\varepsilon^{mid}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right) = \mathrm{e}^{\left(\overline{A}_n(x',0) - a(x')\right)x_n} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \upsilon_m\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right). \tag{2.12}$$

Коэффициенты рядов (2.11) и (2.12) определяются леммами 6.2, 6.3. В частности, υ_1 имеет вид $\upsilon_1(\xi, x', \eta) = -\dfrac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', 0, \eta)\, X(\xi, \eta)$, где функция X определяется леммой 5.8, а функция u_0 задается формулой $u_0 = (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f$.

Обсудим кратко результаты работы. Сразу подчеркнем, что результат теоремы 2.1 верен для произвольной структуры чередования краевых условий и нет никаких существенных ограничений для частей выделенного подмножества границы с условием Дирихле. Число частей может быть конечно или бесконечно, и структура этого набора может быть достаточно произвольной. Более того, теорема 2.1 утверждает не только наличие равномерной резольвентной сходимости, но и дает оценку скорости сходимости, см. неравенство (2.9). Правая часть в этом неравенстве стремится к нулю в силу (2.1). Отметим также, что результат теоремы справедлив вне зависимости от того, ограничена область или нет.

Второй основной результат, теорема 2.2, дает полное асимптотическое разложение для резольвенты. Вместе с тем, для возможности построения такой асимптотики приходится требовать дополнительную гладкость у функции f в окрестности части границы со сменой краевых условий. И еще одно условие налагается на сами граничные условия – их смена теперь задается строго периодической на гиперплоскости. Коэффициенты рядов строятся достаточно явно в рекуррентном виде, см. построения раздела 5.

Из теоремы 2.2 следует неулучшаемость по порядку оценки в теореме 2.1. Действительно, пусть f – финитная бесконечно дифференцируемая функция. Тогда из (6.17), (6.7), леммы 7.2, асиптотики функции u_ε и теоремы 2.2 следует, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \sim \varepsilon^{1/2} \eta^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Это означает, что оценка (2.9) неулучшаема по порядку.

3 Резольвентная сходимость

В настоящем параграфе доказывается теорема 2.1. Обозначим через $\chi_1 = \chi_1(t)$ бесконечно дифференцируемую функцию, равную нулю при $t > 2$ и единице при $t < 1$. Положим

$$\chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \chi_1\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right), & 0 < \tau < \tau_0, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \{x : 0 < \tau < \tau_0\}. \end{cases}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ – произвольная функция, $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\varepsilon + \lambda)^{-1} f$, $u_0 := (\mathcal{H}_0 + \lambda)^{-1} f$, $\upsilon_\varepsilon := u_\varepsilon - (1 - \chi_\varepsilon) u_0$. Основная идея доказательства состоит в том, что вначале мы оцениваем норму функции v_ε, а потом норму разности функции $u_\varepsilon - u_0$. Функцию v_ε оценивать легче, чем разность $u_\varepsilon - u_0$, потому что функция $(1-\chi_\varepsilon)u_0$ удовлетворяет одновременно граничному условию Дирихле и третьему граничному условию на Υ.

В соответствии с определением, функции u_ε и u_0 удовлетворяют интегральным тождествам

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi)+\lambda(u_\varepsilon,\varphi)_{L_2(\Omega)}=(f,\varphi)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой} \quad \varphi\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma_\varepsilon\cup\Xi), \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{h}_0(u_0,\varphi)+\lambda(u_0,\varphi)_{L_2(\Omega)}=(f,\varphi)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой} \quad \varphi\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega). \tag{3.2}$$

Ясно, что $(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$, $(1-\chi_\varepsilon)u_0\in \mathring{W}_2^1(\Omega,\partial\Omega)$. В равенствах (3.1) и (3.2) положим $\varphi=v_\varepsilon$ и $\varphi=(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon$, тогда, соответственно, получим

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)+\lambda(u_\varepsilon,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}=(f,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{h}_0(u_0,(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon)+\lambda(u_0,(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}=(f,(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Используя (2.8), перепишем выражение $\mathfrak{h}_0(u_0,(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_0(u_0,(1-\chi_\varepsilon)v_\varepsilon)=&\sum_{i,j=1}^{n}\left((1-\chi_\varepsilon)A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j},\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j(1-\chi_\varepsilon)\frac{\partial u_0}{\partial x_j},v_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}\\
&+\sum_{j=1}^{n}\left((1-\chi_\varepsilon)u_0,A_j\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}+(A_0(1-\chi_\varepsilon)u_0,v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\\
\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j},v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}-\sum_{j=1}^{n}\left(u_0,A_jv_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}\\
=&\mathfrak{h}_\varepsilon((1-\chi_\varepsilon)u_0,v_\varepsilon)+\sum_{j=1}^{n}\left(A_ju_0,v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}-\sum_{j=1}^{n}\left(u_0,A_jv_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j},v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}u_0\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Взяв разность (3.3) и (3.4), выводим

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(v_\varepsilon,v_\varepsilon)-\lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}=g_\varepsilon(f,v_\varepsilon),$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
g_\varepsilon(f,v_\varepsilon):=&(f,\chi_\varepsilon v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_ju_0,v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}-\sum_{j=1}^{n}\left(u_0,A_jv_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j},v_\varepsilon\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}u_0\frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j},\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Дальнейшая идея доказательства теоремы 1.1 состоит в том, чтобы оценить правую часть (3.5) и получить оценку для v_ε. Для этого нам понадобятся вспомогательные утверждения. Всюду далее через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от f, u_0, u_ε, v_ε, ε, η и x. Согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верно

$$\|u_0\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Для любой функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$ верна оценка*

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C \left(\mathfrak{h}_\varepsilon(u,u) + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \right).$$

Доказательство. В силу (2.4), (2.6) и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \geqslant c_0 \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}, \\
&\left| \sum_{j=1}^{n} \left(A_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, u \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left(u, A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leqslant \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \\
&\left| (A_0 u, u)_{L_2(\Omega)} + (au, u)_{L_2(\partial\Omega)} \right| \leqslant \frac{c_0}{4} \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u,u) \geqslant \frac{c_0}{2} \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} - C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 \mathfrak{h}_\varepsilon(u,u) + C_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

откуда уже вытекает утверждение леммы. □

Лемма 3.2. *Область определения усредненного оператора $\mathcal{H}_0$ имеет вид $D(\mathcal{H}_0) = \mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$. Для любых функций $u \in D(\mathfrak{h}_0)$ верна оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C \left(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

Доказательство. Так как усредненный оператор $\mathcal{H}_0$ соответствует форме $\mathfrak{h}_0(u, v)$, область определения оператора $\mathcal{H}_0$ – это множество функций $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega)$ таких, что отыщется функция $\varphi \in L_2(\Omega)$, для которой выполнено

$$\mathfrak{h}_0(u, v) = (\varphi, v)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для любой функции} \quad v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \partial\Omega). \tag{3.7}$$

Действие оператора $\mathcal{H}_0$ на функцию u есть функция φ. Функция u является обобщенным решением краевой задачи, соответствующего интегральному тождеству (3.7), а потому в силу теорем о повышении гладкости [29, глава 4, §2], см. также [30, лемма 2.2], функция u является элементом $\mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ и верна требуемая оценка из утверждения леммы. □

В равенстве (3.1) положим $\varphi = u_\varepsilon$. Тогда получим

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \lambda(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Дополнительно будем считать, что λ имеет ненулевую мнимую часть. Тогда согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верна оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Из леммы 3.1 вытекает

$$C_1 \|u_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \mathfrak{h}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant C\|f\|^2_{L_2(\Omega)},$$

что приводит к неравенству

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

Лемма 3.3. *Для любой функции $v \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ выполняется оценка*

$$\|v\|_{L_2(\{x:\,0<\tau<2\varepsilon\})} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε, η и v.

Доказательство. Возьмем точки $M_\varepsilon^i \in \Xi$, $i = K(\varepsilon)+1, \ldots, N(\varepsilon)$, так, чтобы для них было выполнено условие (2.2). В случае $K(\varepsilon) = +\infty$ считаем, что $N(\varepsilon) = +\infty$. Введем множества $\gamma_\varepsilon^{(i)} = B_{R_1\varepsilon\eta}\left(M_\varepsilon^i\right) \cap \Xi$, для которых выполняется (2.3). В окрестности каждой точки M_ε^i на границе области Ω введем ортогональные координаты $s^i = (s_1^i, s_2^i, ..., s_{n-1}^i)$. Обозначим: $Q_\varepsilon^i := \{x : |s| < R_4\varepsilon,\ \tau = 0\}$, $R_4 > 0$, $\Pi_\varepsilon^i := \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon,\ s \in Q_\varepsilon^i\}$. В силу (2.2) и условия ограниченности якобианов можно выбрать $R_4 > 0$, что для достаточно малого положительного ε будет выполнено вложение $\bigcup\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} Q_\varepsilon^i \supset \partial\Omega$. С учетом этого вложения заключаем, что для достаточно малого положительного ε выполнено вложение

$$\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} \Pi_\varepsilon^i \supset \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}. \tag{3.10}$$

В силу (2.2) каждая точка из $\{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$ попадает в конечное число Π_ε^i, причем это число ограничено равномерно по ε.

Функция $v(x)$ в результате перехода к переменным $y = (s, \tau)$ перейдет в функцию $\widetilde{v}(y)$, заданную в областях Π_ε^i. Пусть $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1})$, $\xi = y\varepsilon^{-1}$, $\Sigma_\eta^i = \{\xi : 0 < \xi_n < 2,\ \xi' \in Q_\eta^i\}$, где Q_η^i – область, полученная сжатием области Q_ε^i в ε^{-1} раз. Обозначим $\widetilde{B}_\eta = \{\xi : |\xi'| < R_5\eta,\ \xi_n = 0\}$, $R_5 > 0$.

Аналогично [31] для $n \geqslant 3$ можно вычислить асимптотику первого собственного значения оператора Лапласа в Σ_η^i с краевым условием Дирихле на $\widetilde{B}_\eta$ и краевым условием Неймана на оставшейся части границы. Первый ненулевой член асимптотики есть величина порядка η^{n-2}. Отсюда на основе принципа минимакса для $\widetilde{v} \in \mathring{W}_2^1(\Sigma_\eta^i, \widetilde{B}_\varepsilon)$ выводится следующее неравенство:

$$\|\widetilde{v}\|^2_{L_2(\Sigma_\eta^i)} \leqslant \frac{C}{\eta^{n-2}}\|\nabla_\xi\widetilde{v}\|^2_{L_2(\Sigma_\eta^i)} = C\frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}}\|\nabla_y\widetilde{v}\|^2_{L_2(\Sigma_\eta^i)},$$

где константа C не зависит от $\widetilde{v}$, i, ε и η. Переходя обратно к переменным x, в силу ограниченности якобиана и гладкости границы $\partial\Omega$ получаем

$$\|v\|^2_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)} \leqslant C\frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}}\|\nabla_x v\|^2_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}.$$

Далее, суммируя по всем Π_ε^i, имеем

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\|v\|^2_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)} \leqslant C\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)}\frac{\varepsilon^2}{\eta^{n-2}}\|\nabla_x v\|^2_{L_2(\Pi_\varepsilon^i)}.$$

Так как каждая точка из $\{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$ попадает в конечное число Π_ε^i, то из последней оценки и вложения (3.10) вытекает утверждение леммы. $\square$

Обозначим $\Omega_\varepsilon = \{x : 0 < \tau < 2\varepsilon\}$.

Лемма 3.4. *Пусть $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$. Тогда выполнены оценки*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^3 \|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \qquad \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon \|u\|^2_{W_2^2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от u и ε.

Доказательство. Так как $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$, верно представление $u(x) = \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial \tau}(s,t)dt$, $0 < \tau < \tau_0$. Откуда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$|u(x)|^2 \leqslant C\tau \int\limits_0^\tau \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}(s,t)\right|^2 dt. \tag{3.11}$$

Пусть $\chi_0 = \chi_0(\tau)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $\tau > 3\tau_0/4$ и единице при $\tau < \tau_0/2$. Тогда для $\tau \in [0, \tau_0)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\chi_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)(s,t)dt, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}(x)\right|^2 \leqslant C \int\limits_0^{\tau_0} \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(s,t)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}(s,t)\right|^2\right) dt. \tag{3.12}$$

Интегрируя оценки (3.11) и (3.12) по области Ω_ε, приходим к утверждению леммы. □

Оценим первое слагаемое в правой части равенства (3.5). Так как $\upsilon_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$, то из леммы 3.2 и последней оценки следует, что

$$|(f, \chi_\varepsilon \upsilon_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}| \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Оценим второе слагаемое в правой части равенства (3.5). Так как $u_0 \in \mathring{W}_2^2(\Omega, \partial\Omega)$ и $\upsilon_\varepsilon \in \mathring{W}_2^1(\Omega, \gamma_\varepsilon \cup \Xi)$, то в силу лемм 3.2, 3.3, 3.4 и неравенства Коши-Буняковского, получаем:

$$\left|\sum_{j=1}^n \left(A_j u_0, \upsilon_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.14}$$

Аналогично выводим:

$$\left|\sum_{j=1}^n \left(u_0, A_j \upsilon_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{3.15}$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \upsilon_\varepsilon \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.16}$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij} u_0 \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial \upsilon_\varepsilon}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Учитывая полученные оценки и (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) выводим:

$$|g_\varepsilon(\upsilon_\varepsilon, f)| \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\upsilon_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

В силу лемм 3.3 и 3.4 теперь имеем

$$\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \qquad \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Используя леммы 3.2 и 3.4, аналогично (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) легко показать, что

$$\|\chi_\varepsilon u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Откуда и из полученных выше оценок для v_ε следует

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|u_\varepsilon - (1-\chi_\varepsilon)u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\chi_\varepsilon u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\eta^{\frac{n-2}{2}}}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Напомним, что выше при доказательстве использовался тот факт, что λ имел ненулевую мнимую часть. И для таких λ, согласно только что доказанному неравенству, резольвента возмущенного оператора сходится к резольвенте усредненного в операторной норме. Следовательно, верна сходимость спектра возмущенного оператора к спектру усредненного оператора. Поэтому, если $\lambda \in K$ и компакт K не пересекается со спектром усредненного оператора, то λ равномерно отделено от спектра возмущенного оператора для достаточно малых ε. Тогда согласно [28, глава 5, §5.3, неравенство (5.3)] верна оценка (3.8). В остальных оценках не использовалось, что мнимая часть λ не равна нулю, а потому все оценки остаются в силе. Теорема 2.1 полностью доказана.

4 Формальное построение асимптотик.

В этом разделе доказывается теорема 2.2. Доказательство состоит из двух основных частей. В первой проводится формальное построение асимптотики функции u_ε, во второй части эта асимптотика строго обосновывается, то есть, выводятся оценки остатков.

Всюду далее под $\mathcal{L}$ будем понимать дифференциальное выражение (2.5), а функцию u_ε будем рассматривать как решение краевой задачи

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_\varepsilon = f, \quad x\in\Omega, \tag{4.1}$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad x\in\gamma_\varepsilon\cup\Xi, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\mu}+a\right)u_\varepsilon = 0, \quad x\in\Gamma_\varepsilon. \tag{4.2}$$

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (4.1), (4.2) будем строить на основе метода пограничного слоя [32] и метода многих масштабов [33]. Базовой идеей данного построения является использование пограничного слоя в окрестности Υ с целью удовлетворения граничных условий (4.2).

Функцию u_ε будем искать в виде суммы внешнего разложения и пограничного слоя:

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + u_\varepsilon^{mid}\left(\frac{x}{\varepsilon}, x', \eta\right).$$

Внешнее разложение u_ε^{ex} и пограничный слой u_ε^{mid} строятся в виде:

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m u_m(x,\eta), \tag{4.3}$$

$$u_\varepsilon^{mid}(x,\eta)=\mathrm{e}^{\rho(x')x_n}\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m \upsilon_m\left(\xi,x',\eta\right), \tag{4.4}$$

где $\xi=(\xi',\xi_n)=(x'\varepsilon^{-1},x_n\varepsilon^{-1})$ – растянутые переменные, $\rho(x'):=\overline{A}_n(x',0)-a(x')$. Подставляя разложение (4.3) в (4.1), (4.2), собирая члены с одинаковыми степенями ε, получаем уравнения на коэффициенты внешнего разложения:

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_0=f,\quad x\in\Omega, \tag{4.5}$$

$$(\mathcal{L}-\lambda)\,u_m=0,\quad x\in\Omega,\quad m\geqslant 1, \tag{4.6}$$

а также граничные условия на u_m

$$u_m=0,\quad x\in\Xi,\quad m\geqslant 0. \tag{4.7}$$

Граничные условия на Υ для коэффициентов внешнего разложения будут определены позднее при построении пограничного слоя.

Разложим коэффициенты $A_{ij}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ в ряд Тейлора при $x_n\to 0$, а затем сделаем замену $x_n=\varepsilon\xi_n$:

$$A_{ij}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x_n^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0)=\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_{ij}}{\partial x_n^k}(x',0), \tag{4.8}$$

$$A_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x_n^k\frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x',0)=\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon\xi_n)^k\frac{\partial^k A_p}{\partial x_n^k}(x',0),\quad p\geqslant 0, \tag{4.9}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Сходимость рядов (4.8), (4.9) не предполагается, ряды понимаются как асимптотические.

Подставляя (4.8), (4.9) в (4.1) и собирая члены в образовавшихся равенствах с одинаковыми степенями ε, выпишем граничные условия для функций υ_m:

$$\upsilon_m=-u_m(x',\eta),\quad \xi\in\gamma_\eta,\qquad \frac{\partial\upsilon_m}{\partial\xi_n}=\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}(x',\eta),\quad \xi\in\Gamma_\eta, \tag{4.10}$$

$$\gamma_\eta:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\left\{x\in\mathbb{R}^{n-1}:\eta^{-1}\left(x-(\varepsilon a_1k_1,...,\varepsilon a_{n-1}k_{n-1})\right)\in\gamma\right\},\qquad \Gamma_\eta:=\mathbb{R}^{n-1}\backslash\overline{\gamma_\eta}.$$

Подставляем разложение (4.4) в уравнение (4.1) и в образовавшихся равенствах собираем члены с одинаковыми степенями ε. Получаем уравнения

$$\Delta_\xi\upsilon_m=F_m,\quad \xi_n>0, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}F_m:=\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg[&\left(2\xi_n^l A_{ij}^l\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}-\xi_n^{l-1}A_{i,j}^{l-1}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)\upsilon_{m-l}\\&+\xi_n^{l-1}\left(2A_{ij}^l\left(\xi_n\rho\frac{\partial}{\partial\xi_i}-\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial x_j}\right)+A_{i,j}^{1,l}\left(\rho-\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+A_j^{0,l}\right)\upsilon_{m-(l+1)}\\&+\left(\xi_n^l\left(A_{i,j}^{1,l-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}+A_{ij}^l\left(\rho^2-2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right)\right)-2\xi_n^{l-1}A_{ij}^l\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\right)\upsilon_{m-(l+2)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\xi_n^l A_{ij}^l \left(\rho \frac{\partial\rho}{\partial x_j} + \xi_n \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) \upsilon_{m-(l+3)} + \left(\xi_n^{l+2} A_{ij}^l \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right) \upsilon_{m-(l+4)} \\
&+ \left(2\rho \frac{\partial}{\partial\xi_n} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial x_j}\right) \upsilon_{m-1} + \left(\rho^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \xi_n \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j} - \lambda\right) \upsilon_{m-2} \\
&+ \xi_n \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j^2} + 2\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right) \upsilon_{m-3} + \left(\xi_n \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)^2 \upsilon_{m-4}\Bigg], \\
&\upsilon_{-1} := \upsilon_0 := 0,\ A_{ij}^{l+\epsilon} := \frac{\partial^{l+\epsilon} A_{ij}}{\partial x_n^l \partial x_i^\epsilon},\ \overline{A}_j^{l+\epsilon} := \frac{\partial^{l+\epsilon}\overline{A}_j}{\partial x_n^l \partial x_j^\epsilon},\ A_\varsigma^l := \frac{\partial^l A_\varsigma}{\partial x_n^l},\ A_j^{1,l} := A_j^l - \overline{A}_j^l, \\
&A_j^{0,l} := A_0^l - \overline{A}_j^{l+1},\ A_{i,j}^l := A_j^{1,l} - A_{ij}^{l+1},\ \epsilon = 0,1,\ \varsigma \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Производные коэффициентов операторов здесь берутся в точках $(x', 0)$.

Таким образом, для функций υ_m получены задачи (4.10), (4.11) с периодической структурой по переменным ξ'. Функции υ_m, согласно методу пограничного слоя, будем строить экспоненциально убывающими при $\xi_n \to +\infty$. Дополнительно будем искать их $\square$-периодическими по ξ', где $\square := \{\xi : -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2},\ \xi_n = 0\}$. Тогда исходная краевая задача сводится к задаче в $\Pi = \{\xi : -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2},\ \xi_n > 0\}$ с периодическими граничными условиями на боковых гранях Π. Задачи (4.10), (4.11) на коэффициенты пограничного слоя зависят от параметра η. В следующем параграфе будет исследована разрешимость задач (4.10), (4.11) и зависимость их решений от параметра η.

5 Исследование задач пограничного слоя.

5.1 Модельная задача.

Пусть F – функция из $L_2(\Pi)$, экспоненциально убывающая при $\xi_n \to +\infty$. Рассмотрим задачу

$$
\Delta_\xi \upsilon = F, \quad \xi \in \Pi, \qquad \upsilon = A, \quad \xi \in \gamma_\eta, \qquad \frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_n} = G, \quad \xi \in \Gamma_\eta, \tag{5.1}
$$

$$
\upsilon|_{\xi_i = -\frac{a_i}{2}} = \upsilon|_{\xi_i = \frac{a_i}{2}}, \qquad \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_i}\right|_{\xi_i = -\frac{a_i}{2}} = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi_i}\right|_{\xi_i = \frac{a_i}{2}}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5.2}
$$

где $A = A(\eta)$, $G = G(\eta)$ – некоторые заданные константы. Обозначим: $\Pi_R = \{\xi : -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2},\ \xi_n < R\}$, $R = \mathrm{const} > 0$. Здесь и всюду далее решения задач, рассматриваемых в Π и Π_R, будем искать удовлетворяющие периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и Π_R соответственно. Решение краевой задачи (5.1), (5.2) мы понимаем в обобщённом смысле. Решение есть функция из пространства $W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющая интегральному тождеству:

$$
-(\nabla_\xi \upsilon, \nabla_\xi \zeta)_{L_2(\Pi)} + (\zeta, B)_{L_2(\Gamma_\eta)} = (F, \zeta)_{L_2(\Pi)}
$$

для всех функций ζ, принадлежащих $C^\infty(\overline{\Pi}_a)$ для любого $a > 0$, равных нулю при $\xi_n > a$, обращающихся в нуль на γ_η и удовлетворяющихся периодическим граничным условиям на боковых гранях Π. Функция υ удовлетворяет периодическим граничным условиям на боковых гранях Π и граничному условию $\upsilon = A$ на γ_η.

Основная цель этого раздела — исследовать разрешимость модельной задачи (5.1) и выяснить зависимость решения задачи от параметра η. Затем полученные результаты будут применены к задачам (4.10), (4.11).

5.2 Сведение к операторному уравнению.

В этом разделе мы отказываемся от условия принадлежности решения задачи (5.1), (5.2) пространству $W_2^1(\Pi)$. Вместо этого мы предполагаем, что решение попадает в $W_2^1(\Pi_a)$ для всех $a>0$, удовлетворяет однородным краевым условиям $A=0,\ B=0$, функция F равна нулю при $\xi_n>R$ и при $\xi_n\to+\infty$ справедлива асимптотика

$$\upsilon(\xi,\eta)=K(\eta)+O\left(\mathrm{e}^{-\alpha\xi_n}\right),\quad \alpha>0. \tag{5.3}$$

Как и выше, решение этой краевой задачи понимаем в обобщённом смысле. В силу теорем о повышении гладкости решение бесконечно дифференцируемо при $\xi_n>R$, а потому все утверждения о поведении решения на бесконечности будем понимать в обычном смысле.

Для исследования разрешимости задачи (5.1), (5.2) воспользуемся методом, предложенным в [34], [35, глава 16, §4], см. также [36]. Пусть g – функция из $L_2(\Pi_R)$, продолжим ее нулем для $\xi_n>R$. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\xi V_1=g,\quad \xi\in\Pi,\qquad V_1=0,\quad \xi\in\square, \tag{5.4}$$

с периодическими условиями (5.2). Эта задача легко решается методом разделения переменных:

$$V_1(\xi)=-\sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}X_k(\xi_n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{a}\cdot\xi'}, \tag{5.5}$$

где

$$X_k(\xi_n)=\frac{1}{M_k}\int\limits_{\Pi_R}g(t)\left(\mathrm{e}^{-M_k(\xi_n+t_n)}-\mathrm{e}^{-M_k|\xi_n-t_n|}\right)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{k}{a}\cdot t'}dt,\ M_k:=\pi\left|\frac{k}{a}\right|,$$

$$X_0(\xi_n)=-\xi_n\int\limits_{\xi_n}^{+\infty}\int\limits_{\square}g(t)dt-\int\limits_{0}^{\xi_n}t_n\int\limits_{\square}g(t)dt,$$

$$\frac{k}{a}:=\left(\frac{k_1}{a_1},\frac{k_2}{a_2},...,\frac{k_{n-1}}{a_{n-1}}\right),\quad k=(k_1,k_2,...,k_{n-1}),\quad t=(t',t_n)=(t_1,t_2,...,t_n),$$

$\cdot$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Всюду далее через C будем обозначать несущественные константы, не зависящие от η, g, F и V_1. Аналогично [36, лемма 3.1] доказывается

Лемма 5.1. *Пусть $\widetilde{R}>0$. Ряд (5.5) сходится в норме $W_2^2(\Pi_{\widetilde{R}})$. Функция V_1 может быть представлена как $V_1=T_1g$, где $T_1:L_2(\Pi_R)\to W_2^2(\Pi_{\widetilde{R}})$ – ограниченный линейный оператор. Верна следующая оценка*

$$\|V_1\|_{W_2^2(\Pi_{\widetilde{R}})}\leqslant C(\widetilde{R},R)\|g\|_{L_2(\Pi_R)}. \tag{5.6}$$

Всюду ниже в обозначениях зависимость от R не подчеркивается. На следующем шаге мы рассматриваем еще одну краевую задачу:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi V_2=\Delta_\xi V_1,\qquad &\xi\in\Pi_R,\qquad V_2=V_1,\quad \xi_n=R,\\ V_2=0,\qquad &\xi\in\gamma_\eta,\qquad \frac{\partial V_2}{\partial\xi_n}=0,\quad \xi\in\Gamma_\eta,\end{aligned} \tag{5.7}$$

с периодическими условиями (5.2).

Так как $V_1\in W_2^2(\Pi_R)$, то $\Delta_\xi V_1\in L_2(\Pi_R)$. И так как задача содержит краевое условие Дирихле, то она имеет единственное решение $V_2\in W_2^1(\Pi_R)$. Используя теорему о гладкости решений эллиптических краевых задач [29, глава 4, §2, теорема 3], получаем $V_2 \in W_2^1(\Pi_R) \cap W_2^2(Q_s)$ для каждого фиксированного s, где $Q_s = \Pi_R \setminus \overline{\Pi}_s$. Следовательно, по правилу $V_2 = T_2(\eta)V_1$ мы можем определить линейный ограниченный оператор $T_2(\eta)$, действующий из $W_2^2(\Pi_R)$ в $W_2^1(\Pi_R)$ и из $W_2^2(\Pi_R)$ в $W_2^2(Q_s)$. Верны оценки

$$
\begin{aligned}
&\|V_2\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C(\eta)\|V_1\|_{W_2^2(\Pi_R)} \leqslant C(\eta)\|g\|_{L_2(\Pi_R)},\\
&\|V_2\|_{W_2^2(Q_s)} \leqslant C(\eta,s)\|V_1\|_{W_2^2(Q_s)} \leqslant C(\eta,s)\|g\|_{L_2(\Pi_R)}.
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Пусть $\chi_2(\xi_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $\xi_n > \frac{R}{2}$ и нулю при $\xi_n < \frac{R}{3}$. Будем строить функцию υ в виде:

$$
\upsilon(\xi,\eta) = (T_3(\eta)g)(\xi,\eta) := \chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1-\chi_2(\xi_n))V_2(\xi,\eta), \tag{5.9}
$$

где $T_3(\eta)$ – линейный ограниченный оператор $T_3(\eta)$, который отображает функцию $g \in L_2(\Pi_R)$ в функцию $\upsilon \in W_2^1(\Pi_a)$, определенную в (5.9), где V_1 и V_2 – решения (5.4), (5.2) и (5.7), (5.2) соответственно.

Согласно определению функций V_1 и V_2, функция υ удовлетворяет всем граничным условиям задачи (5.1), (5.2). Следовательно, осталось проверить только уравнение из задачи (5.1), (5.2). Подействуем оператором Лапласа на функцию υ:

$$
\Delta_\xi \upsilon = \Delta_\xi\left(\chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1-\chi_2(\xi_n))V_2(\xi,\eta)\right) = g + T_4(\eta)g,
$$

где обозначено: $T_4(\eta)g := (V_1 - V_2)\dfrac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\dfrac{d\chi_2}{d\xi_n}\dfrac{\partial\,(V_1-V_2)}{\partial\xi_n}$. Из последнего равенства получаем уравнение

$$
g + T_4(\eta)g = F. \tag{5.10}
$$

Аналогично [36, лемма 3.3] доказывается

Лемма 5.2. *Оператор $T_4(\eta)$ является линейным компактным оператором из $L_2(\Pi_R)$ в $L_2(\Pi_R)$.*

Лемма 5.3. *Уравнение (5.10) эквивалентно краевой задаче (5.1), (5.2). А именно, для каждого решения g уравнения (5.10) существует решение краевой задачи (5.1), (5.2), задаваемое формулой $\upsilon = T_3(\eta)g$. Для каждого решения υ краевой задачи (5.1), (5.2) существует единственное решение уравнения (5.10), связанное с υ равенством $\upsilon = T_3(\eta)g$.*

Доказательство. Пусть υ решение задачи (5.1), (5.2). Построим решение g уравнения (5.10) таким образом, что $\upsilon = T_3(\eta)g$. Через V мы обозначаем решение задачи

$$
\Delta_\xi V = 0, \quad \xi \in \Pi_R, \qquad V = 0, \quad \xi_n = R, \qquad V = \upsilon, \quad \xi \in \square, \tag{5.11}
$$

с периодическими условиями (5.2). Эта задача однозначно разрешима в $W_2^1(\Pi_R)$ [29, глава 4, §1, теорема 10]. Обозначим: $V_1(\xi,\eta) := \upsilon(\xi,\eta) - (1-\chi_2(\xi_n))V(\xi,\eta)$, $V_2(\xi,\eta) := \upsilon(\xi,\eta) + \chi_2(\xi_n)V(\xi,\eta)$, $g(\xi,\eta) := F(\xi,\eta) - \Delta_\xi\left(\chi_2(\xi_n)V(\xi,\eta)\right)$. Легко проверить, что функция $\upsilon = \chi_2 V_1 + (1-\chi_2)V_2$ удовлетворяет всем необходимым граничным условиям задачи (5.1) с однородными краевыми условиями, функцией F, равной нулю при $x_n > R$, периодическими условиями (5.2). В свою очередь, функция V_1 удовлетворяет задаче (5.4) с периодическими условиями (5.2), функция V_2 – задаче (5.7) с периодическими условиями (5.2). Также нетрудно убедиться, что $\Delta_\xi V_1 = \Delta_\xi V_2$ в Π_R. Для V_1 в Π_R выполнено уравнение

$$
\Delta_\xi V_1(\xi) = g(\xi,\eta) = \Delta_\xi\left(\upsilon(\xi,\eta) + \chi_2(\xi_n)V(\xi,\eta)\right) = F(\xi,\eta) + \Delta_\xi\left(\chi_2(\xi_n)V(\xi,\eta)\right).
$$

Проверим, что эта функция g является решением уравнения (5.10). Учитывая определения функций V, V_1, V_2 и краевые задачи для V_1, V_2, вычислим действие оператора $T_4(\eta)$ на g:

$$T_4(\eta)g := -V\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} - 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\frac{\partial V}{\partial \xi_n} - \chi_2\Delta_\xi V = -\Delta_\xi\left(\chi_2 V\right) = F - g.$$

Последнее соотношение показывает, что g является решением уравнения (5.10).

Докажем теперь, что каждой функции υ соответствует ровно одна функция g. Предположим, что существуют два решения g_1 и g_2 уравнения (5.10), соответствующие одной функции υ. Тогда функции $g := g_1 - g_2 \neq 0$ соответствует функция υ, равная нулю. Пусть V_1 и V_2 будут решениями задач (5.4) и (5.7), соответственно, и возьмем $V := V_2 - V_1$. Видно, что V является решением (5.11) с однородным граничным условием на $\square$. Такое решение единственно, $V = 0$. Таким образом, $V_1 = V_2 = \upsilon = 0$ в Π_R, и поэтому $g = \Delta_\xi V_1 = 0$ в Π_R, что является противоречием. $\square$

Так как оператор $T_4(\eta)$ компактен, то разрешимость уравнения (5.10) можно изучить на основе альтернатив Фредгольма. Это поможет решить нашу задачу: чтобы построить решение (5.1), (5.2), мы должны решить уравнение (5.10), затем процедурой, описанной выше, восстанавливаем решение υ краевой задачи (5.1), (5.2).

5.3 Исследование оператора $T_4(\eta)$.

В этом разделе нашей главной целью является исследование зависимости оператора $T_4(\eta)$ от параметра η. Рассматривается случай $\eta \to 0$. Будет доказано, что при $\eta \to 0$ оператор $T_4(\eta)$ сходится к некоторому предельному оператору.

Возьмем функцию g и по ней построим функцию V_1 – решение задачи (5.4), а затем по этому решению V_1 построим решение задачи:

$$\Delta_\xi V_2^0 = \Delta_\xi V_1, \quad \xi \in \Pi_R, \qquad V_2^0 = V_1, \quad \xi_n = R, \qquad \frac{\partial V_2^0}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square, \tag{5.12}$$

с периодическими условиями (5.2). С помощью этих функций аналогично (5.9) строится функция $\upsilon'(\xi,\eta) = \chi_2(\xi_n)V_1(\xi) + (1 - \chi_2(\xi_n))V_2^0(\xi,\eta)$ – решение задачи

$$\Delta_\xi \upsilon' = F, \quad \xi \in \Pi, \qquad \frac{\partial \upsilon'}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square, \tag{5.13}$$

с периодическими условиями (5.2). Решение этой задачи имеет при $\xi_n \to +\infty$ асимптотику (5.3). Такое поведение решения на бесконечности определяется из поведения на бесконечности функции V_1. Как и выше, решение этой краевой задачи понимаем в обобщённом смысле. Задача (5.13) разрешима лишь для функций F, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\Pi_R} F d\xi = 0$. Тем не менее, функции V_1 и V_2 можно определить, так как они не зависят от разрешимости этой задачи. Ясно, что решение (5.12), (5.2) определяется неоднозначно с точностью до константы.

Через $T_5 g$ обозначим оператор:

$$T_5 g := \left(V_1 - V_2^0\right)\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\frac{\partial\left(V_1 - V_2^0\right)}{\partial \xi_n}$$

По аналогии с леммой 5.3 можно показать, что операторное уравнение

$$g + T_5 g = F$$

эквивалентно задаче (5.13).

Главной целью этого раздела является оценка разности операторов $\|T_4(\eta)-T_5\|$, где $\|\cdot\|$ означает норму оператора в $L_2(\Pi_R)$, а сама разность имеет вид

$$T_4(\eta)g - T_5 g = V_3 \frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\frac{\partial V_3}{\partial \xi_n}, \tag{5.14}$$

где $V_3 := V_2^0 - V_2$. Аналогично (5.8) доказываются следующие оценки

$$\begin{aligned} &\|V_2^0\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\|V_1\|_{W_2^2(\Pi_R)} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Pi_R)},\\ &\|V_2^0\|_{W_2^2(Q_s)} \leqslant C(s)\|V_1\|_{W_2^2(Q_s)} \leqslant C(s)\|g\|_{L_2(\Pi_R)},\\ &\|(T_4(\eta)-T_5)g\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\|V_3\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Здесь и всюду далее до конца раздела через C будем обозначать несущественные константы, не зависящие от η и g. Функция V_3 является обобщенным решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\xi V_3 = 0, \quad \xi\in\Pi_R, \qquad & V_3 = 0, \quad \xi_n = R,\\ V_3 = \psi, \quad \xi\in\gamma_\eta, \qquad & \frac{\partial V_3}{\partial\xi_n} = 0, \quad \xi\in\Gamma_\eta \end{aligned} \tag{5.16}$$

с периодическими условиями (5.2), функцией $\psi = V_2^0$. Дальнейшая цель – оценить норму функции V_3.

Возьмем $r>0$ такое, что для достаточно малых η будет выполнено вложение $\gamma_\eta \subseteq S_{2r\eta} \subseteq \Pi_R$, где $S_{2r\eta} := \{\xi : |\xi| < 2r\eta,\ \xi_n > 0\}$. Обозначим:

$$\left\langle V_2^0 \right\rangle = \frac{1}{|S_{2r\eta}|}\int\limits_{S_{2r\eta}} V_2^0(\xi)d\xi.$$

Решение краевой задачи (5.16) представим в виде суммы $V_3 = V_4 + V_5$, где функция V_4 – решение той же задачи с $\psi = V_2^0(\xi) - \left\langle V_2^0\right\rangle$, а функция V_5 – вновь решение той же задачи с $\psi = \left\langle V_2^0\right\rangle$.

Оценим норму функции V_4. Для этого рассмотрим функцию $\Psi(\xi) := \chi_3\left(\frac{|\xi|}{r\eta}\right)\left(V_2^0(\xi) - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)$, где $\chi_3(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t<1$ и нулю при $t>2$. Ясно, что $\Psi = V_2^0(\xi) - \left\langle V_2^0\right\rangle$ на γ_η и

$$\|\nabla_\xi\Psi\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant \left\|\left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)\nabla_\xi\chi_3\right\|_{L_2(\Pi_R)} + \left\|\chi_3\nabla_\xi V_2^0\right\|_{L_2(\Pi_R)}, \quad \int\limits_{S_{2r\eta}} \left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)d\xi = 0.$$

Оценим норму функции $\left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)\nabla_\xi\chi_3$ в $L_2(\Pi_R)$:

$$\left\|\left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)\nabla_\xi\chi_3\right\|^2_{L_2(\Pi_R)} = \int\limits_{\Pi_R}\left|\left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)\nabla_\xi\chi_3\right|^2 d\xi \leqslant C\eta^{-2}\int\limits_{S_{2r\eta}}\left|V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right|^2 d\xi.$$

Теперь, растягивая область $S_{2r\eta}$ в η^{-1} раз, и применяя к функции $V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle$ в растянутых переменных неравенство Пуанкаре, с учетом [37, глава 3, §5, лемма 5.1] получаем

$$\left\|\left(V_2^0 - \left\langle V_2^0\right\rangle\right)\nabla_\xi\chi_3\right\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta\|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)}.$$

Аналогично находим:

$$\left\|\chi_3\nabla_\xi\left(V_2^0-\langle V_2^0\rangle\right)\right\|_{L_2(\Pi_R)}\leqslant C\eta\|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)},\qquad \left\|\chi_3\left(V_2^0-\langle V_2^0\rangle\right)\right\|_{L_2(\Pi_R)}\leqslant C\eta\|V_2^0\|_{W_2^2(\Pi_R)}.$$

Отсюда в силу [29, глава 4, §8] и неравенств (5.15) для функции V_2^0 выводим оценку нормы функции V_4:

$$\|V_4\|_{W_2^1(\Pi_R)}\leqslant C\|\Psi\|_{W_2^1(\Pi_R)}\leqslant C\eta\|g\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \tag{5.17}$$

Рассмотрим задачу для V_5. Решение этой задачи строим в виде

$$V_5=\langle V_2^0\rangle\,Y\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\chi_4\left(|\xi|\right)+V_6, \tag{5.18}$$

где $\chi_4(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t<\frac{b}{4}$ и нулю при $t>\frac{b}{3}$, $b:=\min a_i$, $i=1,\ldots,n-1$, функция $Y(\zeta)$ – решение задачи

$$\Delta_\zeta Y=0,\quad \zeta\in S^+,\qquad Y=1,\quad \zeta\in\Gamma_1,\qquad \frac{\partial Y}{\partial\zeta_n}=0,\quad \zeta\in\Gamma_2, \tag{5.19}$$

где $\zeta=\eta^{-1}\xi$, $S^+=\{\zeta:\zeta_n>0\}$,

$$\Gamma_1:=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^{n-1}}\left\{x\in\mathbb{R}^{n-1}:(x-(\varepsilon a_1k_1,...,\varepsilon a_{n-1}k_{n-1}))\in\gamma\right\},\quad \Gamma_2:=\{\zeta:\zeta_n=0\}\backslash\overline{\Gamma}_1.$$

Лемма 5.4. *Существует решение задачи (5.19), имеющее при $|\zeta|\to\infty$ асимптотику*

$$Y(\zeta)=C|\zeta|^{-n+2}+O\left(|\zeta|^{-n+1}\right). \tag{5.20}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи с помощью преобразования Кельвина: $y=(y',y_n+1)=\zeta|\zeta|^{-2}$, $\zeta=y|y|^{-2}$. Полупространство S^+ взаимно однозначно отобразится в некоторую ограниченную область $\widetilde{S}$. Функция $\widetilde{Y}(y)=\dfrac{Y(\zeta)}{|y|^{n-2}}$ является обобщенным решением задачи

$$\Delta_\zeta\widetilde{Y}=0,\quad y\in\widetilde{S},\qquad \widetilde{Y}=\frac{1}{|y|^2},\quad y\in\widetilde{\Gamma}_1,\qquad \frac{\partial\widetilde{Y}}{\partial y_n}=0,\quad y\in\widetilde{\Gamma}_2, \tag{5.21}$$

где $\widetilde{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\Gamma}_2$ – образы Γ_1 и Γ_2 соответственно. Нуль не попадает в $\widetilde{\Gamma}_1$, поэтому граничное условие не содержит особенностей на $\widetilde{\Gamma}_1$. Следовательно, задача (5.21) разрешима в $W_2^1(\widetilde{S})$. Тогда согласно [29, глава 4, §2.2, лемма 2] и [29, глава 3, §6.2, теорема 2] функция $\widetilde{Y}$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $(0,0,...,-1)$. Следовательно, в этой точке функция $\widetilde{Y}$ разлагается в асимптотический ряд Тейлора $\widetilde{Y}(y)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\dfrac{1}{\alpha!}\left(D^\alpha\widetilde{Y}\right)(0,0,...,-1)y^\alpha$. Переходя к исходной функции $Y(\zeta)$, получаем $Y(\zeta)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}\dfrac{1}{\alpha!}\left(D^\alpha\widetilde{Y}\right)(0,0,...,-1)\zeta^\alpha|\zeta|^{-2|\alpha|-n+2}$, откуда уже следует (5.20). □

Функция V_6 в (5.18) – обобщенное решение задачи

$$\Delta_\xi V_6=\widehat{F},\quad \xi\in\Pi_R,\qquad V_6=0,\quad \{\xi:\xi\in\Pi,\ \xi_n=R\}\cup\gamma_\eta,\qquad \frac{\partial V_6}{\partial\xi_n}=0,\quad \xi\in\Gamma_\eta, \tag{5.22}$$

с периодическими условиями (5.2) и верна оценка:

$$\|V_6\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\|\widehat{F}\|_{L_2(\Pi_R)}, \tag{5.23}$$

где обозначено:

$$\widehat{F} := \left\langle V_2^0 \right\rangle \Delta_\xi \left(Y\chi_4\right) = \left\langle V_2^0 \right\rangle \left(Y\Delta_\xi\chi_4 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial \xi_i}\frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i} \right).$$

Оценим норму функции $\widehat{F}$ в $L_2(\Pi_R)$. Функции $\nabla_\xi\chi_4$, $\Delta_\xi\chi_4$ гладкие и равны нулю в $\{\xi : \frac{b}{4} < |\xi| < \frac{b}{3}\}$. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и используя [37, глава 3, §5, неравенство (5.5)], имеем

$$\left|\left\langle V_2^0 \right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{|S_{2r\eta}|} \int\limits_{S_{2r\eta}} \left|V_2^0\right| d\xi \leqslant C\eta^{-\frac{n}{2}} \left\|V_2^0\right\|_{L_2(S_{2r\eta})} \leqslant C\eta^{-\frac{n}{2}+1} \left\|V_2^0\right\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \tag{5.24}$$

С учетом леммы 5.4 прямыми вычислениями проверяем, что

$$\|Y(\cdot\eta^{-1})\Delta_\xi\chi_4\|^2_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C \int\limits_{\frac{b}{4}<|\xi|<\frac{b}{3}} |Y(\xi\eta^{-1})|^2 d\xi \leqslant C\eta^{2(n-2)} \int\limits_{\frac{b}{4}<|\xi|<\frac{b}{3}} \frac{d\xi}{|\xi|^{2(n-2)}} \leqslant C\eta^{2(n-2)}. \tag{5.25}$$

Аналогично находим

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial \xi_i}\frac{\partial \chi_4}{\partial \xi_i}\right\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{n-2}. \tag{5.26}$$

Тогда учитывая (5.23), (5.24), (5.25) и последнее неравенство, получаем

$$\|V_6\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{\frac{n}{2}-1} \left\|V_2^0\right\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \tag{5.27}$$

С учетом (5.24) и леммы 5.4 прямыми вычислениями проверяем, что

$$\left\|\left\langle V_2^0 \right\rangle Y(\cdot\eta^{-1})\chi_4\right\|^2_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{-n+2} \left\|V_2^0\right\|^2_{W_2^1(\Pi_R)} \int\limits_{|\xi|<\frac{b}{3},\ \xi_n>0} \left|Y(\xi\eta^{-1})\right|^2 d\xi.$$

Переходя к переменным $\zeta = \xi\eta^{-1}$, получаем:

$$\int\limits_{|\xi|<\frac{b}{4},\ \xi_n>0} \left|Y(\xi\eta^{-1})\right|^2 d\xi \leqslant C\eta^n \left(1 + \int\limits_{1<|\zeta|<\frac{b}{4\eta},\ \zeta_n>0} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{2(n-2)}} \right) = \begin{cases} C\eta^2, & n=3, \\ C\eta^4(1+|\ln\eta|), & n=4, \\ C\eta^n, & n\geqslant 5. \end{cases}$$

Из последней оценки и (5.27) следует

$$\|V_5\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}} \left\|V_2^0\right\|_{W_2^1(\Pi_R)}. \tag{5.28}$$

Откуда, с учетом (5.17), неравенств (5.15) для функции V_2^0 и последней оценки имеем

$$\|V_3\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_2(\Pi_R)}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 5.5. *При $\eta \to 0$ справедлива оценка*

$$\|T_4(\eta) - T_5\|_{L_2(\Pi_R)\to L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{\frac{1}{2}}.$$

5.4 Обращение оператора $(I + T_4(\eta))$.

Обозначим через $T_6(\eta) := T_4(\eta) - T_5$. Рассмотрим операторное уравнение $L_2(\Pi_R)$

$$(I + T_5)g = F, \tag{5.29}$$

которое, согласно предыдущему разделу, эквивалентно задаче (5.13), (5.3), (5.2). В силу первой альтернативы Фредгольма, неоднородное уравнение (5.29) разрешимо только при F, ортогональных в $L_2(\Pi_R)$ каждому решению сопряженного однородного уравнения

$$(I + T_5^*)h_0 = 0. \tag{5.30}$$

Пусть $h_0(\xi) \equiv 1$, тогда для любой функции $g \in L_2(\Pi_R)$ имеем

$$((I + T_5)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = \int\limits_{\Pi_R} \Delta_\xi \left(\chi_2 V_1 + (1 - \chi_2)V_2^0\right) d\xi = -\int\limits_{\Box} \frac{\partial \upsilon'}{\partial \xi_n} d\xi' = 0.$$

Следовательно, h_0 – решение уравнения (5.30). Докажем, что других решений нет. Согласно третьей альтернативе Фредгольма, уравнения (5.29) и (5.30) имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений. Задача (5.13), (5.3) с периодическими условиями (5.2) и однородной правой частью имеет единственное решение – константу. Следовательно, при $F = 0$ существует единственное нетривиальное решение уравнения (5.29) и единственное нетривиальное решение уравнения (5.30) с однородной правой частью. Единственность здесь понимается с точностью до умножения на константу. Отсюда и из теоремы Банаха об обратном операторе следует существование ограниченного обратного оператора $(I + T_5)^{-1} : X_1 \to X_0$, где $X_0 = \{u \in L_2(\Pi_R) : (u, g_0)_{L_2(\Pi_R)} = 0\}$, $X_1 = \{u \in L_2(\Pi_R) : (u, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = 0\}$, а через g_0 обозначено решение операторного уравнения $(I + T_5)g_0 = 0$, соответствующее функции h_0 в смысле, аналогичном лемме 5.3

Решение операторного уравнения (5.29) представим в виде $g = \alpha(\eta)g_0 + g_1$, $\alpha(\eta)$ – некоторая константа, а $g_1 \in X_0$. Вычисляя скалярное произведение уравнения $(I + T_4(\eta))g = F$ и h_0 в $L_2(\Pi_R)$, с учетом равенства $T_4(\eta) = T_5 + T_6(\eta)$ получаем

$$\begin{gathered} ((I + T_5)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} + (T_6(\eta)g, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = (F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}, \\ \alpha(\eta)(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} + (T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = (F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}. \end{gathered}$$

Отсюда следует

$$\alpha(\eta) = \frac{(F, h_0)_{L_2(\Pi_R)} - (T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}. \tag{5.31}$$

Ниже в лемме 5.6 мы докажем, что

$$(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} = \eta^{n-2}(C + o(1)), \quad \eta \to 0, \quad C \neq 0, \tag{5.32}$$

потому и (5.31) имеет смысл. Подставляя (5.31) в уравнение (5.10), получаем

$$(I + T_5 + T_7(\eta))g_1 = \widetilde{F}, \tag{5.33}$$

$$T_7(\eta)g_1 := T_6(\eta)g_1 - \frac{(T_6(\eta)g_1, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}} T_6(\eta)g_0,$$

$$\widetilde{F} = F - \frac{(F, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}} T_6(\eta)g_0.$$

Легко показать, что $\widetilde{F} \in X_1$ и $T_7(\eta)$ отображает X_0 в X_1. Ниже в лемме 5.6 мы докажем, что

$$\frac{\|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)}}{\left|(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}\right|} \leqslant C. \tag{5.34}$$

Так как оператор $(I+T_5)^{-1} : X_1 \to X_0$ ограничен и существует, то для существования обратного оператора $(I+T_5+T_7(\eta))^{-1} : X_1 \to X_0$ необходимо доказать, что норма оператора $T_7(\eta)$ мала. Из неравенства

$$\|T_7(\eta)\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant \left\| T_6(\eta) - \frac{(T_6(\eta)\cdot, h_0)_{L_2(\Pi_R)}}{(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)}} T_6(\eta)g_0 \right\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\|T_6(\eta)\|_{L_2(\Pi_R)},$$

(5.34) и леммы 5.5 следует малость нормы оператора $T_7(\eta)$. Следовательно, оператор $(I + T_5 + T_7(\eta))^{-1}$ ограничен равномерно по η.

Лемма 5.6. *При $\eta \to 0$ справедливы равенство (5.32) и неравенство (5.34).*

Доказательство. Аналогично [31] и доказательству леммы 5.3 нетрудно проверить, что

$$g_0 = -\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2}\left(\frac{\xi_n}{R} - 1\right) - \frac{1}{R}\frac{d\chi_2}{d\xi_n}, \tag{5.35}$$

а действие оператора $T_6(\eta)$ на g_0 имеет вид:

$$T_6(\eta)g_0 = W\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\frac{\partial W}{\partial \xi_n}, \tag{5.36}$$

где функция W – решение краевой задачи (5.16), с $\psi = 1$. Для функции W аналогично [31] верно:

$$\|W - \eta^{n-2}w\|_{W_2^1(\Pi_R \setminus \Pi_{R/3})} = O\left(\eta^{n-1}\right). \tag{5.37}$$

Здесь функция w – решение задачи

$$\Delta_\xi w = 0, \quad \xi \in \Pi, \qquad w = 0, \quad \xi_n = R, \qquad \frac{\partial w}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \square \setminus \{0\},$$

с периодическими условиями (5.2), имеющая при $|\xi| \to 0$ асимптотику $w = |\xi|^{-n+2} + O\left(|\xi|^{-n+1}\right)$. Тогда с учетом этой особенности и равенства (5.37) несложно показать, что

$$\begin{aligned}(T_6(\eta)g_0, h_0)_{L_2(\Pi_R)} &= \int\limits_{\Pi_R} \left(W\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\frac{\partial W}{\partial \xi_n}\right) d\xi = \eta^{n-2}\int\limits_{\Pi_R} \Delta_\xi\left(w(\chi_2 - 1)\right) d\xi + O\left(\eta^{n-1}\right) \\ &= C\eta^{n-2} + O\left(\eta^{n-1}\right),\end{aligned}$$

где константа C не равна нулю. Равенство (5.32) доказано. В силу (5.37) имеем

$$\|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{n-2}. \tag{5.38}$$

Из последнего неравенства и (5.32) следует (5.34). Лемма доказана. $\square$

В силу ограниченности и существования оператора $(I+T_5+T_7(\eta))^{-1}$ и леммы 5.6 верно неравенство

$$\begin{aligned}\|g_1\|_{L_2(\Pi_R)} &= \|(I+T_5+T_7(\eta))^{-1}\widetilde{F}\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\|\widetilde{F}\|_{L_2(\Pi_R)} \\ &\leqslant C\left(\|F\|_{L_2(\Pi_R)} + \frac{|(F,h_0)_{L_2(\Pi_R)}|}{|(T_6(\eta)g_0,h_0)_{L_2(\Pi_R)}|}\|T_6(\eta)g_0\|_{L_2(\Pi_R)}\right) \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi_R)}.\end{aligned} \tag{5.39}$$

В силу (5.31), (5.35), (5.39), лемм 5.5 и 5.6 имеем

$$\alpha(\eta) = C_1\eta^{-n+2}\int\limits_{\Pi_R} F d\xi + O\left(\eta^{-n+1}\right), \quad \|g\|_{L_2(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{-n+2}\|F\|_{L_2(\Pi_R)}, \tag{5.40}$$

где $C_1 \neq 0$ – некоторая абсолютная константа.

Напомним, что решение υ в (5.9) строится с помощью функций V_1 и V_2 – решений задач (5.4), (5.2) и (5.7), (5.2), соответственно. Легко показать, что первое слагаемое в (5.5) стремится к постоянной при $\xi_n \to +\infty$. В силу финитности функции g эта постоянная определяется равенством:

$$K(\eta) = -\int\limits_0^R t_n \int\limits_{\square} g(t)dt. \tag{5.41}$$

С учетом (5.6), (5.8), (5.9), (5.40) и (5.41) получаем

$$K(\eta) = C\eta^{-n+2}\int\limits_{\Pi_R} F d\xi + O\left(\eta^{-n+1}\right), \quad C \neq 0. \tag{5.42}$$

Несложно убедиться, что $(\upsilon - K(\eta))$ – решение задачи (5.1), (5.2) с однородными граничными условиями на γ_η и Γ_η, асимптотикой (5.3) при $\xi_n \to +\infty$ и функцией F, равной нулю при $\xi_n > R$. Верна оценка:

$$\|\upsilon - K(\eta)\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\eta^{-(n-2)}\|F\|_{L_2(\Pi_R)}. \tag{5.43}$$

Основной результат настоящего раздела теперь удобно сформулировать в виде следующего утверждения.

Лемма 5.7. *Задача (5.1), (5.2) с однородными граничными условиями на γ_η и Γ_η, асимптотикой (5.3) при $\xi_n \to +\infty$ и функцией F, равной нулю при $\xi_n > R$, имеет единственное решение. Для решения выполнены оценка (5.43) и равенство (5.42).*

5.5 Исследование общей модельной задачи для пограничного слоя.

В этом разделе исследуется разрешимость и выясняется непрерывная зависимость от параметра η решения задачи (5.1), (5.2). Решение этой задачи будем строить в виде: $\upsilon = \widetilde{\upsilon} + (1-\chi_2)w + (A+B\xi_n)(1-\chi_2)$, где функция $\widetilde{\upsilon}$ – решение задачи (5.1), (5.2) с правой частью равной

$$F\chi_2 + w\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_n} + B\right)$$

и асимптотикой (5.3) при $\xi_n \to +\infty$. Функция $w \in W_2^1(\Pi)$ вводится как решение задачи

$$\Delta_\xi w = F, \quad \xi \in \Pi, \qquad w = 0, \quad \xi \in \square$$

с периодическими условиями (5.2). Задачу для w можно решить с помощью метода разделения переменных. С учетом леммы 5.1 для решения верна оценка

$$\|w\|_{W_2^2(\Pi)} \leqslant C\|F\|_{L_2(\Pi)}.$$

Разрешимости задачи для $\widetilde{\upsilon}$ были посвящены разделы 5.2-5.4. В силу леммы 5.7 справедлива оценка

$$\|\widetilde{\upsilon} - K(\eta)\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\left(\eta^{-(n-2)}\|F\|_{L_2(\Pi)} + |A| + |B|\right).$$

Далее будет выведено условие, при котором постоянная $K(\eta)$ равна нулю, тем самым получим требуемое экспоненциальное убывание при $\xi_n \to +\infty$.

Лемма 5.8. *Существует гармоническая в Π функция $X \in W_2^1(\Pi)$, удовлетворяющая граничным условиям $X = -C_0(\eta)$ на γ_η и $\dfrac{\partial X}{\partial \xi_n} = -1$ на Γ_η, периодическим условиям (5.2), экспоненциально убывающая $\xi_n \to +\infty$. Здесь $C_0(\eta)$ – некоторая константа, удовлетворяющая соотношению*

$$C_0(\eta) = C\eta^{-n+2} + O\left(\eta^{-n+3}\right), \quad C \neq 0. \tag{5.44}$$

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде $X = X_1 - C_0(\eta) - (1-\chi_2)\xi_n$, откуда получаем задачу

$$\Delta_\xi X_1 = -\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2}\xi_n - 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}, \quad \xi \in \Pi, \qquad X_1 = 0, \quad \xi \in \gamma_\eta, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial \xi_n} = 0, \quad \xi \in \Gamma_\eta$$

с периодическими условиями (5.2). В силу леммы 5.7 решение такой задачи существует и имеет при $\xi_n \to +\infty$ асимптотику $X_1 = C_0(\eta) + O\left(\mathrm{e}^{-\alpha\xi_n}\right)$, $\alpha > 0$. Тогда, в силу леммы 5.7 следует утверждение леммы для $C_0(\eta)$. □

Обозначим: $Z(\xi,\eta) = X(\xi,\eta) + \xi_n + C_0(\eta)$. Функция Z – гармоническая в Π, удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле на γ_η и Неймана на Γ_η и периодическим условиям (5.2).

Лемма 5.9. *Пусть F – функция из $L_2(\Pi)$, экспоненциально убывающая при $\xi_n \to +\infty$, υ – решение задачи (5.1), (5.2). Тогда эта задача имеет решение из $W_2^1(\Pi)$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$A = -C_0(\eta)G + \frac{1}{|\square|}\int\limits_\Pi ZF d\xi. \tag{5.45}$$

Доказательство. Решение задачи (5.1), (5.2) существует (лемма 5.7) и имеет при $\xi_n \to +\infty$ асимптотику (5.3). Покажем, что при выполнении равенства (5.45) постоянная K равна нулю, тем самым получаем экспоненциальное убывание при $\xi_n \to +\infty$.

Отобразим Π вниз относительно гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$. Продолжим затем функции $\upsilon - (1-\chi_2)\,G\xi_n$ и $F + G\left(\xi_n\dfrac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\dfrac{d\chi_2}{d\xi_n}\right)$ с Π на значения $\xi_n < 0$ четным образом. Функция $\upsilon - (1-\chi_2)\,G\xi_n$ будет решением задачи

$$\Delta_\xi\left(\upsilon - (1-\chi_2)G\xi_n\right) = F + G\left(\xi_n\frac{d^2\chi_2}{d\xi_n^2} + 2\frac{d\chi_2}{d\xi_n}\right), \quad \xi \in \square\times\mathbb{R}^1, \qquad \upsilon = A, \quad \xi \in \gamma_\eta,$$

с периодическими условиями (5.2). Отметим, что после указанного продолжения граничное условие Неймана в задаче исчезает. Функция υ в окрестности ребра l ведет себя как $O\left(r(\xi)^{\frac{1}{2}}\right)$, где l – граница γ_η, рассматриваемая как $(n-2)$-мерная поверхность, $r(\xi)$ – расстояние от точки ξ до границы γ_η. Явно асимптотика описана в работе [38, равенство (5)]. Продолжив функцию Z как выше, получаем, что она имеет такую же особенность в окрестности ребра l.

Интегрируя по частям правые части равенств

$$\int\limits_{\Pi} FZd\xi = \int\limits_{\Pi} Z\Delta_\xi \upsilon d\xi, \qquad 0 = \int\limits_{\Pi} \Delta_\xi Z d\xi, \qquad 0 = \int\limits_{\Pi_R} \xi_n \Delta_\xi Z d\xi,$$

учитывая особенность в окрестности ребра l и переходя в последнем к пределу при $R \to \infty$, получаем равенства

$$\int\limits_{\Pi} ZFd\xi = A\int\limits_{\gamma_\eta} \left(\frac{\partial X}{\partial \xi_n} + 1\right) d\xi' + G\int\limits_{\Gamma_\eta} (X - C_0(\eta))d\xi',$$

$$0 = -\int\limits_{\gamma_\eta} \frac{\partial X}{\partial \xi_n} d\xi' + |\square| - |\gamma_\eta|, \qquad 0 = -\int\limits_{\Gamma_\eta} Xd\xi' - C_0(\eta)|\gamma_\eta|,$$

из которых вытекает (5.45). $\square$

Лемма 5.10. *Пусть для F и υ решения задачи (5.1), (5.2) выполнена лемма 5.9. Тогда задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение. Для решения выполнена оценка*

$$\|\upsilon\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\left(\eta^{-(n-2)}\left(|B| + \|F\|_{L_2(\Pi)}\right) + \left|\int\limits_{\Pi} ZFd\xi\right|\right),$$

где константы B, C не зависят от υ, η и F.

6 Непрерывная зависимость от η и оценки функций υ_m, F_m и u_m.

В этом параграфе будет исследована зависимость функций υ_m, F_m и u_m от параметра η и получены оценки, характеризующих поведение этих функций при $\eta \to 0$. Сразу же отметим, что разрешимость задач (4.10), (4.11) следует из леммы 5.10. Всюду далее в этом разделе через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от η, F_m, u_m, υ_m и f.

Обозначим $\Omega_{\tau_0} := \{x : 0 < x_n < \tau_0\}$.

Лемма 6.1. *Пусть $f \in W_2^k(\Omega_{\tau_0}) \cap L_2(\Omega)$, $\varphi \in W_2^k(\Upsilon)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, функция u – решение задачи*

$$(\mathcal{L} - \lambda)\, u = f, \quad x \in \Omega, \qquad u = \varphi, \quad x \in \Upsilon, \qquad u = 0, \quad x \in \Xi.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $\delta > 0$ функция u принадлежит $u \in W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})$ и верна оценка

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta})} \leqslant C\left(\|f\|_{W_2^k(\Omega_{\tau_0})} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^k(\Upsilon)}\right),$$

где константа C не зависит от u, f и φ, но зависит от k и δ.

Доказательство проводится аналогично доказательству [39, лемма 2.1] с помощью разбиения единицы в области Ω_{τ_0} и теорем о повышении гладкости [29, глава 4, §2].

Рассмотрим задачи (4.10), (4.11). Так как $F_1 = 0$, то $\upsilon_1(\xi, x', \eta) = -\frac{\partial u_0}{\partial x_n}(x', 0, \eta) X(\xi, \eta)$. Последнее равенство в силу граничных условий (4.10) и условия разрешимости (5.44) влечет краевое условие для u_1:

$$u_1 = C_0(\eta)\frac{\partial u_0}{\partial x_n}, \quad x \in \Upsilon. \tag{6.1}$$

Применяя лемму 5.9 к задачам (4.10), (4.11), выпишем граничные условия для остальных функций u_m:

$$u_m = C_0(\eta)\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n} + \frac{1}{|\square|}\int\limits_{\Pi} Z F_m d\xi, \quad x \in \Upsilon. \tag{6.2}$$

Следовательно, соотношения (4.5), (4.6), (4.7), (6.1), (6.2) определяют задачи на u_m при $m \geqslant 0$. Далее мы доказываем разрешимость задач (4.5), (4.6), (4.7), (6.1), (6.2) для $m \geqslant 0$.

Лемма 6.2. *Задачи (4.10), (4.11), (4.5), (4.6), (6.1), (6.2) разрешимы, функции υ_m, u_m и F_m представимы в виде сумм*

$$\upsilon_m(\xi, x', \eta) = \sum_{q=1}^{M_m^1} \varphi_m^q(x')\upsilon_m^q(\xi, \eta), \qquad u_m(x, \eta) = \sum_{q=1}^{M_m^2} a_m^q(\eta) u_m^q(x),$$
$$F_m(\xi, x', \eta) = \sum_{q=1}^{M_m^3} \psi_m^q(x') F_m^q(\xi, \eta),$$

где M_m^j – некоторые числа, $a_m^q(\eta)$ – некоторые функции, φ_m^q, $\psi_m^q \in W_2^k(\Upsilon)$, $u_m^q \in W_2^k(\Omega_{\tau_0-\delta}) \cap W_2^1(\Omega)$, $\upsilon_m^q(\cdot, \eta) \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^1(\Pi) \cap W_2^k(\Pi \setminus \Pi_1)$, $F_m^q(\cdot, \eta) \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi) \cap W_2^k(\Pi \setminus \Pi_1)$ для всех $k \geqslant 0$ и всех $\delta > 0$.

Доказательство. Из граничного условия (6.2) для $m = 1$ следует, что $u_1(x, \eta) = C_0(\eta) u_1^1(x)$. Тогда отсюда и из определения функций υ_1 и F_1 следует утверждение леммы. Действуя оператором Лапласа на $\xi_n^p X$, $p \geqslant 1$, и учитывая, что $\xi_n^p X = 0$ при $\xi_n = 0$, индукцией по p можно показать, что

$$\xi_n^p X \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \quad \xi_n^{l+p+1}\nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{l+1}(\Pi),$$
$$\xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi), \; l, p \geqslant 0.$$

Тогда для F_2 утверждение леммы выполнено, откуда в силу задач для υ_2 и u_2 и леммы 5.7 следует утверждение леммы для υ_2. Откуда вытекает, что все интегралы в правой части (6.2) при $m = 2$ определены. Следовательно, в силу леммы 6.1 утверждение леммы для u_2 выполнено. Дальнейшее доказательство проводится по индукции. При этом можно показать, что

$$\xi_n^p \upsilon_m^q \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \quad \xi_n^{l+p+1}\nabla_\xi \frac{\partial^p \upsilon_m^q}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap W_2^{l+1}(\Pi),$$
$$\xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p \upsilon_m^q}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty(\{\xi : \xi_n > 0\}) \cap L_2(\Pi), \; l, p \geqslant 0.$$

Лемма доказана. □

Далее мы получаем оценки, характеризующие поведение функций u_m, υ_m и F_m при $\eta \to 0$. Всюду далее в этом разделе будем использовать обозначение $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$.

Лемма 6.3. *При $\eta \to 0$ имеют место равномерные по η и x' оценки*

$$\|u_m\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|u_m\|_{W_2^k\left(\Omega_{\tau_0-\delta}\right)} \leqslant C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $m \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ – любое число,

$$\|F_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)}, \quad \|\xi_n^p F_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)}, \quad \left\|\xi_n^{p+l+1}\frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)},$$

где $l, p \geqslant 0$, $m \geqslant 2$,

$$\|\upsilon_m\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \quad \|\xi_n^p \upsilon_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \quad \left\|\xi_n^{p+l}\nabla_\xi\frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)},$$

где $l, p \geqslant 0$, $m \geqslant 1$. Аналогичные оценки верны и для функций $\upsilon_m^q(\xi, \eta)$ и $F_m^q(\xi, \eta)$.

Доказательство. Аналогично [40, лемма 3.8] можно доказать

$$\|\nabla_\xi X\| = \sqrt{C_0(\eta)|\square|}, \qquad \|\xi_n^p \nabla_\xi X\| = \sqrt{p(2p-1)}\left\|\xi_n^{p-1}X\right\|, \quad p \geqslant 1. \tag{6.3}$$

Оценим норму функции X в $W_2^1(\Pi)$. Из последнего равенства для $p = 1$ и неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} \|X\|^2_{W_2^1(\Pi)} &= \|\xi_n \nabla_\xi X\|^2 + \|\nabla_\xi X\|^2 \leqslant \|\xi_n^2 \nabla_\xi X\|\|\nabla_\xi X\| + \|\nabla_\xi X\|^2 \\ &= \sqrt{6}\|\xi_n X\|\|\nabla_\xi X\| + \|\nabla_\xi X\|^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Действуя оператором Лапласа на $\xi_n X$, и учитывая, что $\xi_n X = 0$ при $\xi_n = 0$, в силу леммы 5.8 имеем $\|\xi_n X\| \leqslant C\|\nabla_\xi X\|$. Отсюда и из (5.44), (6.3), (6.4) и леммы 5.8 вытекает

$$\|X\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\|\nabla_\xi X\| = C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}} + O\left(\eta^{-\frac{(n-1)}{2}}\right), \quad C \neq 0. \tag{6.5}$$

Из (6.4) следует

$$\|X\|^2_{W_2^1(\Pi)} = \|\xi_n \nabla_\xi X\|^2 + \|\nabla_\xi X\|^2 \geqslant \|\nabla_\xi X\|^2 = C\eta^{-n+2} + O\left(\eta^{-n+1}\right), \quad C \neq 0. \tag{6.6}$$

Тогда в силу (5.45), леммы 5.10 и последнего неравенства выводим:

$$\|\upsilon_1\|_{W_2^1(\Pi_R)} = \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_n}X\right\|_{W_2^1(\Pi_R)} = C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}} + O\left(\eta^{-\frac{(n-1)}{2}}\right). \tag{6.7}$$

Так как $\Delta_\xi \upsilon_m = F_m$, $m \geqslant 2$, то, интегрируя по частям, получаем ($l + p \geqslant 1$):

$$\int\limits_\Pi \xi_n^{2(l+p)}\frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l}d\xi = -\left\|\xi_n^{l+p}\nabla_\xi\frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\right\|^2 + (l+p)(2(l+p)-1)\left\|\xi_n^{l+p-1}\frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\right\|^2,$$

откуда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} &\left\|\xi_n^{l+p}\nabla_\xi\frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\right\| \leqslant C\left(\left\|\xi_n^{l+p-1}\nabla_\xi\frac{\partial^{l-1} \upsilon_m}{\partial \xi_n^{l-1}}\right\| + \left\|\xi_n^{l+p+1}\frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l}\right\|\right), \ l \geqslant 1, \ p \geqslant 0, \\ &\|\xi_n^p \nabla_\xi \upsilon_m\| \leqslant C\left(\left\|\xi_n^{p-1}\upsilon_m\right\| + \left\|\xi_n^{p+1}F_m\right\|\right), \ l = 0, \ p \geqslant 1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Аналогично лемме 6.2 можно показать, что

$$\xi_n^p \upsilon_m \in C^\infty\left(\{\xi : \xi_n > 0\}\right) \cap W_2^{p+1}(\Pi), \quad \xi_n^{l+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p \upsilon_m}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty\left(\{\xi : \xi_n > 0\}\right) \cap W_2^{l+1}(\Pi),$$
$$\xi_n^p \nabla_\xi \frac{\partial^p \upsilon_m}{\partial \xi_n^p} \in C^\infty\left(\{\xi : \xi_n > 0\}\right) \cap L_2(\Pi),\ l, p \geqslant 0.$$

Следовательно, все интегралы в (6.8) определены.

Действуя оператором Лапласа на $\xi_n^p \upsilon_m$, $p \geqslant 1$, и учитывая, что $\xi_n^p \upsilon_m = 0$ при $\xi_n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\|\xi_n^p \upsilon_m\| \leqslant C\left(\|\xi_n^p F_m\| + \|\xi_n^{p-2}\upsilon_m\| + \|\xi_n^{p-1}\nabla_\xi \upsilon_m\|\right),\ p \geqslant 2, \\ &\|\xi_n \upsilon_m\| \leqslant C\left(\|\xi_n F_m\| + \|\nabla_\xi \upsilon_m\|\right). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Оценки (6.8), (6.9) аналогично можно получить и для функций $\upsilon_m^q(\xi, \eta)$. При этом в правых частях вместо F_m будут функции $F_m^q(\xi, \eta)$. В силу леммы 5.10 при $m = 2$ получаем

$$\begin{aligned} &\|\upsilon_2\|_{W_2^1(\Pi_R)} \leqslant C\left(\eta^{-(n-2)}\left(\|F_2\| + |B_2|\right) + \|ZF_2\|\right), \\ &\|ZF_2\| \leqslant C\left(\|X\|\|F_2\| + |C_0|\|F_2\| + \|\xi_n F_2\|\right). \end{aligned}$$

Оценим норму функции F_2. Так как коэффициенты возмущенного оператора, функция $a(x')$ и все их производные равномерно ограничены, то

$$\begin{aligned} \|F_2\| &= \left\|\sum_{i,j=1}^n \left(\xi_n \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_n}(x', 0)\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \left(D + A_{1,j}^1(x', 0)\right)\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\upsilon_1\right\| \\ &\leqslant C\sum_{i,j=1}^n \left(\left\|\xi_n \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right\| + \left\|\frac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_j}\right\|\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Умножим обе части равенства $\Delta_\xi\left(\xi_n \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_i}\right) = 2\dfrac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_i \partial \xi_n}$ на $\xi_n \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_i}$, проинтегрируем по частям по Π, и учитывая, что $\xi_n \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_i} = 0$ при $\xi_n = 0$, имеем

$$\left\|\nabla_\xi\left(\xi_n \frac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_i}\right)\right\|^2 = \left\|\frac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_i}\right\|^2.$$

Тогда в силу (6.8), (6.9) и (6.10) выводим

$$\begin{aligned} &\left\|\xi_n^p \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right\| \leqslant C\left\|\xi_n^{p-1}\nabla \upsilon_1\right\| \leqslant C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}}, \qquad \|F_2\| \leqslant C\left\|\nabla_\xi \upsilon_1\right\| \leqslant C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}}, \\ &\|\xi_n^p F_2\| \leqslant C\left\|\xi_n^p \nabla_\xi \upsilon_1\right\| \leqslant C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

В итоге получаем окончательную оценку функции υ_2:

$$\|\upsilon_2\|_{W_2^1(\Pi)} \leqslant C\eta^{-\frac{3}{2}(n-2)}. \tag{6.12}$$

В силу (6.11) при $m = 2$ и (6.8), (6.9) при $m = 3$, соответственно, имеем

$$\left\|\xi_n^{p+2}\nabla_\xi \frac{\partial \upsilon_1}{\partial \xi_n}\right\| \leqslant \left\|\xi_n^{p+1}\nabla_\xi \upsilon_1\right\| \leqslant C\eta^{-\frac{(n-2)}{2}}, \qquad \left\|\xi_n^{p+2}\nabla_\xi \frac{\partial \upsilon_2}{\partial \xi_n}\right\| \leqslant C\eta^{-\frac{3}{2}(n-2)}.$$

Индукцией по p теперь можно доказать, что

$$\left\|\xi_n^p \frac{\partial^2 \upsilon_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right\| \leqslant C\left\|\xi_n^{p-1} \nabla_\xi \upsilon_m\right\|, \qquad \|F_m\| \leqslant C\left\|\nabla_\xi \upsilon_{m-1}\right\|, \qquad \left\|\xi_n^p F_m\right\| \leqslant C\left\|\xi_n^p \nabla_\xi \upsilon_{m-1}\right\|. \tag{6.13}$$

При $m=3$ в силу (6.8), (6.9) и (6.13) верно $\|\xi_n^p F_3\| \leqslant C\eta^{-\frac{3}{2}(n-2)}$. Продолжая по индукции для $m \geqslant 4$

$$\left\|\xi_n^p \frac{\partial^2 \upsilon_m}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \qquad \|\xi_n^p F_m\| \leqslant C\left\|\xi_n^p \nabla_\xi \upsilon_{m-1}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)}. \tag{6.14}$$

Таким образом, с учетом (6.9), (6.14) и леммы 5.10 получаем оценки для $m \geqslant 3$:

$$\|\upsilon_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \qquad \|\xi_n^p \upsilon_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \qquad \|F_m\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)}. \tag{6.15}$$

Аналогично вычислениям, проделанным для функции F_2, имеем

$$\left\|\xi_n^{p+2} \frac{\partial F_m}{\partial \xi_n}\right\| \leqslant \left\|\xi_n^{p+3} \frac{\partial^3 \upsilon_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i \partial \xi_j}\right\| \leqslant \left\|\xi_n^{p+2} \frac{\partial^2 \upsilon_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i}\right\|.$$

Из (6.13) вытекает

$$\left\|\xi_n^{p+2} \frac{\partial^2 \upsilon_{m-1}}{\partial \xi_n \partial \xi_i}\right\| \leqslant \left\|\xi_n^{p+2} \nabla_\xi \frac{\partial \upsilon_{m-1}}{\partial \xi_n}\right\|.$$

Продолжая по индукции для $m \geqslant 4$ и $l \geqslant 2$, выводим

$$\left\|\xi_n^{p+l} \nabla_\xi \frac{\partial^l \upsilon_m}{\partial \xi_n^l}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}, \qquad \left\|\xi_n^{p+l+1} \frac{\partial^l F_m}{\partial \xi_n^l}\right\| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-2)}. \tag{6.16}$$

Оценки (6.15), (6.16) аналогично можно получить и для функций $\upsilon_m^q(\xi,\eta)$ и $F_m^q(\xi,\eta)$. В силу оценки (6.14), краевых задач (4.5), (4.6), (4.7), (6.2) получаем

$$|a_m^q(\eta)| \leqslant C\eta^{-\left(m-\frac{1}{2}\right)(n-2)}.$$

Оценим норму функций u_m. В силу уравнения (4.6) и (6.2) при $m=0$ определим граничное условие $u_0 = 0, \quad x \in \Upsilon$. Следовательно, верна оценка

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее, рассмотрим задачу (4.6), (6.2) в случае $m=1$. В силу (5.44), (6.2) и последнего неравенства получаем

$$\|u_1\|_{W_2^1(\Omega)} = \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_n} C_0(\eta)\right\|_{W_2^1(\Omega)} = C\eta^{-n+2} + O\left(\eta^{-n+1}\right). \tag{6.17}$$

Продолжая по индукции для $m \geqslant 2$, имеем

$$\|u_m\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\eta^{-m(n-2)}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

В силу леммы 6.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ выводятся оценки для функций u_m, $m \geqslant 0$ в пространстве $W_2^k\left(\Omega_{\tau_0-\delta}\right)$. Лемма доказана. $\square$

7 Обоснование асимптотики

В данном параграфе мы завершаем доказательство теоремы 2.2 и проводим обоснование асимптотики функции u_ε. Обозначим:

$$u_{\varepsilon,M}(x) = u^{ex}_{\varepsilon,M}(x,\eta) + \chi(x_n)\, u^{mid}_{\varepsilon,M}\left(\xi, x', \eta\right), \tag{7.1}$$

$$u^{ex}_{\varepsilon,M}(x,\eta) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^m u_m(x,\eta), \qquad u^{mid}_{\varepsilon,M}(\xi,x',\eta) = \mathrm{e}^{\rho(x')x_n} \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^m \upsilon_m(\xi,x',\eta),$$

где $M \geqslant 1$ – фиксированное натуральное число. Напомним, что функция $\chi(x_n)$ была введена в утверждении теоремы 2.2.

Лемма 7.1. *Функция $u_{\varepsilon,M}(x)$ является решением задачи*

$$(\mathcal{L} - \lambda)\, u_{\varepsilon,M} = f + f_{\varepsilon,M}, \quad x \in \Omega, \tag{7.2}$$

$$u_{\varepsilon,M} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \Xi, \qquad \frac{\partial u_{\varepsilon,M}}{\partial \mu} = \varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \tag{7.3}$$

и верны следующие оценки

$$\|f_{\varepsilon,M}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \frac{\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}}{\eta^{\left(M-\frac{1}{2}\right)(n-2)}}, \qquad \left\| \varepsilon^M \frac{\partial u_M}{\partial \mu} \right\|_{W_2^2(\Upsilon)} \leqslant C \frac{\varepsilon^M}{\eta^{M(n-2)}}.$$

Для доказательства леммы 7.1 нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 7.2. *Пусть δ – некоторое фиксированное число, υ – $\square$-периодическая функция из $W_2^1(\Pi)$, $u \in W_2^k\left(\Omega_{\tau_0 - \frac{\delta}{k+1}}\right)$ для некоторого $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Тогда верна оценка*

$$\left| \int\limits_{\Omega_{\tau_0-\delta}} u^2\left(x'\right) \upsilon^2\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\varepsilon}\right) dx \right| \leqslant C\varepsilon \|u\|^2_{W_2^k\left(\Omega_{\tau_0 - \frac{\delta}{k+1}}\right)} \|\upsilon\|^2_{L_2(\Pi)},$$

где константа C не зависит от u, υ и ε, но зависит от k.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ выберем разбиение единицы $1 = \sum\limits_p \chi_p^2(x')$, такое, что для каждой из функций χ_p выполнено неравенство $0 \leqslant \|\chi_p\|_{C^k(\operatorname{supp} \chi_p)} \leqslant C_k$, где константа C не зависит от p. Будем предполагать, что сдвигом носитель каждой из срезающих функций можно поместить в некоторую ограниченную область Q, не зависящую от p. Каждая точка x' пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ попадает в конечное число носителей, причем это число ограничено равномерно по x'.

Обозначим $u_p = \chi_p u$. Согласно стандартным теоремам вложения [29, глава 3, §8],

$$\sup_{\operatorname{supp} \chi_p \times [0, \tau_0 - \delta]} |u_p|^2 \leqslant C \|u_p\|^2_{W_2^k\left(\Omega_{\tau_0 - \frac{\delta}{k+1}}\right)}.$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{\Omega_{\tau_0-\delta}} u^2\left(x'\right) \upsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right| = \left| \int\limits_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \int\limits_{\operatorname{supp} \chi_p} \chi_p^2 u^2\left(x'\right) \upsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \right|$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \int\limits_{\operatorname{supp}\chi_p} \left| {u_p}^2\left(x'\right) \upsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx \leqslant C \int\limits_0^{\tau_0-\delta} \sum_p \max_{\operatorname{supp}\chi_p} |u_p|^2 \int\limits_{\operatorname{supp}\chi_p} \left|\upsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx$$
$$\leqslant C\|u\|^2_{W_2^k\left(\Omega_{\tau_0-\frac{\delta}{k+1}}\right)} \int\limits_0^{\tau_0-\delta} \left\|\upsilon\left(\cdot,\frac{x_n}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{L_2(Q)} dx_n.$$

Переходя к переменным ξ и учитывая, что множество Q содержит $O\left(\varepsilon^{-n+1}\right)$ ячеек периодичности, выводим требуемую оценку. Лемма доказана. □

Доказательство леммы 7.1. Выполнение граничных условий на γ_ε и Γ_ε следует из (4.10). Оценка для $\varepsilon^M\dfrac{\partial u_M}{\partial\mu}$ следует из леммы 6.3. Подставив (7.1) в уравнение (7.2), получаем

$$(\mathcal{L}-\lambda)\, u_{\varepsilon,M} = (\mathcal{L}-\lambda)\, u^{ex}_{\varepsilon,M} + (\mathcal{L}-\lambda)\left(\chi u^{mid}_{\varepsilon,M}\right) = f + f^{(1)}_{\varepsilon,M} + f^{(2)}_{\varepsilon,M} = f + f_{\varepsilon,M}, \quad x\in\Omega.$$

Функции $f^{(1)}_{\varepsilon,M}$ и $f^{(2)}_{\varepsilon,M}$ имеют вид:

$$f^{(1)}_{\varepsilon,M} := \sum_{i=1}^n \left(A_{i,n}\left(u^{mid}_{\varepsilon,M}\frac{d\chi}{dx_n} - u^{mid}_{\varepsilon,M}\frac{d^2\chi}{dx_n^2} - \frac{d\chi}{dx_n}\frac{\partial u^{mid}_{\varepsilon,M}}{\partial x_i}\right) - A_{n,i}\frac{d\chi}{dx_n}\frac{\partial u^{mid}_{\varepsilon,M}}{\partial x_i}\right), \quad x\in\Omega, \tag{7.4}$$
$$f^{(2)}_{\varepsilon,M} = \chi\,(\mathcal{L}-\lambda)\, u^{mid}_{\varepsilon,M}, \quad x\in\Omega, \tag{7.5}$$

где $A_{i,j} := A_j - \overline{A}_j - \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}$. В силу уравнений (4.5), (4.6) имеем

$$(\mathcal{L}-\lambda)\, u^{ex}_{\varepsilon,M} = f, \quad x\in\Omega. \tag{7.6}$$

Из задач (4.10), (4.11), лемм 7.1, 7.2 и равенств (7.4), (7.5) вытекает

$$\left\|f^{(1)}_{\varepsilon,M}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{M-\frac12}}{\eta^{\left(M-\frac12\right)(n-2)}}, \qquad \left\|f^{(2)}_{\varepsilon,M}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{M-\frac12}}{\eta^{\left(M-\frac12\right)(n-2)}}. \tag{7.7}$$

Из этих неравенств в силу (2.1) и (7.7) следует утверждение леммы для функций $f_{\varepsilon,M}$ и $u_{\varepsilon,M}$. □

Обозначим: $\widetilde{u}_{\varepsilon,M} = u_{\varepsilon,M} - \varepsilon^M\dfrac{\partial u_M}{\partial\mu}\chi x_n$, $\widehat{u}_{\varepsilon,M} = \widetilde{u}_{\varepsilon,M} - u_\varepsilon$. Подставляя $\widetilde{u}_{\varepsilon,M}$ в (7.2), взяв разность полученного уравнения и (4.1), получим уравнение $(\mathcal{H}_\varepsilon-\lambda)\,\widehat{u}_{\varepsilon,M} = \widehat{f}_{\varepsilon,M}$. В соответствии с определением, функция $\widehat{u}_{\varepsilon,M}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\widehat{u}_{\varepsilon,M},\widehat{u}_{\varepsilon,M}) - \lambda\|\widehat{u}_{\varepsilon,M}\|^2_{L_2(\Omega)} = (\widehat{f}_{\varepsilon,M},\widehat{u}_{\varepsilon,M})_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $\widehat{u}_{\varepsilon,M} \in \mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma_\varepsilon\cup\Xi)$, то аналогично неравенству (3.9) получаем

$$\|\widehat{u}_{\varepsilon,M}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|\widehat{f}_{\varepsilon,M}\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|u_{\varepsilon,M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon,M}\chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|\widehat{f}_{\varepsilon,M}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует

$$\|u_{\varepsilon,M} - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u_{\varepsilon,M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon,M}\chi x_n + B_{\varepsilon,M}\chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\leqslant \|u_{\varepsilon,M} - u_\varepsilon - B_{\varepsilon,M}\chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} + \|B_{\varepsilon,M}\chi x_n\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\frac{\varepsilon^{M-\frac{1}{2}}}{\eta^{\left(M-\frac{1}{2}\right)(n-2)}}.$$

Тогда в силу (2.1) получаем, что асимптотика функции u_ε есть ряд (2.10). Теорема 2.2 полностью доказана.

Автор благодарен Д.И. Борисову за постановку задачи и многочисленные полезные консультации. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ и гранта Президента РФ для молодых ученых-докторов наук (МД-183.2014.1).

Список литературы

[1] Г. А. Чечкин, "Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий", *Матем. сб.*, **184**:6 (1993), 99–150.

[2] Р. Р. Гадыльшин, Г. А. Чечкин, "Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области", *Сиб. матем. журн.*, **40**:2 (1999), 271–287.

[3] A. Friedman, Ch. Huang, J. Yong, *Effective permeability of the boundary of a domain*, Commun. Part. Diff. Equat., **20**:(1-2) (1995), 59-102.

[4] А. Ю. Беляев, Г. А. Чечкин, "Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой граничных условий", *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 496–510.

[5] A. Damlamian, Li Ta-Tsicn (Li Daqian), *Boundary homogenization for ellpitic problems*, J. Math. Pure et Appl., **66**:4, (1987), 351-361.

[6] M. Lobo, E. Perez, *Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions*, RAIRO Model. Math. Anal. Numer., **22**:4 (1988), 609-624.

[7] G. A. Chechkin, E. I. Doronina, *On the asymptotics of the spectrum of a boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions*, Funct. Differ. Equ., **8**:(1-2) (2001), 111-122.

[8] O. A. Oleinik, G. A.Chechkin, *Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity*, Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni. Scric IX, **7**:1 (1996), 5-15.

[9] Д. И. Борисов, "Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий", *Изв. РАН., Сер. матем.*, **67**:6 (2003), 23–70.

[10] Д.И. Борисов, "О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах", *Ж. вычис. мат. мат. физ.*, **46**:2 (2006), 284-294.

[11] Г. А. Чечкин, "Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "легких" концентрированных масс. Двумерный случай", *Изв. РАН.*, Сер. матем., **69**:4 (2005), 161–204.

[12] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора", *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005), 1-104.

[13] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(R^d)$”, *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1-130.

[14] В. В. Жиков, С.Е. Пастухова, С.В. Тихомирова, “Об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений”, *Докл. РАН.*, **410**:5 (2006), 587 - 591.

[15] В. В. Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, *Тр. МИАН*, **250** (2005), 95-104.

[16] D. Borisov, G. Cardone, *Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions*, J. Phys. A., **42**:36 (2009), id 365205 (21pp).

[17] D. Borisov, R. Bunoiu and G. Cardone, *On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition*, Ann. H. Poincaré, **11**:8 (2010), 1591-1627.

[18] D. Borisov, R. Bunoiu and G. Cardone, *Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows*, J. Math. Sc., **176**:6 (2011), 774-785.

[19] D. Borisov, R. Bunoiu and G. Cardone, *Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics*, Z. Angew. Math. Phys., **64**:3 (2013), 439-472.

[20] Р.Р. Гадыльшин, “Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны”, *Алгебра и анализ*, **10**:1 (1998), 3–19.

[21] Р. Р. Гадылышин, “Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями”, *Дифф. уравн.*, **35**:4 (1999), 540-551.

[22] Д. И. Борисов, “О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для лапласиана”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 520–534.

[23] Г. А. Чечкин, “Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий”, *Труды семинара им. И.Г.Петровского*, **19** (1996), 323-337.

[24] Д. И. Борисов, “О сингулярно возмущенной краевой задаче для Лапласиана в цилиндре”, *Дифф. уравн.*, **38**:8 (2002), 1071-1078.

[25] Д. И. Борисов, “О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий”, *Матем. сб.*, **193**:7 (2002), 37–68.

[26] Г. А. Чечкин, “Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области с большим количеством “легких” концентрированных масс, редко расположенных на границе. Двумерный случай”, *Труды Московского Математического Общества*, **70**, (2009).

[27] Е. И. Доронина, Г. А. Чечкин, “О собственных колебаниях тела с большим количеством концентрированных масс, расположенных непериодически вдоль границы”, *Тр. МИАН*, **236** (2002), 158–166.

[28] Т. Като, “Теория возмущений линейных операторов”, М.: Издательство Мир, 1972.

[29] В.П. Михайлов, “Дифференциальные уравнения в частных производных”, М.: Наука, 1976.

[30] Д. И. Борисов, “Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами”, *Алгебра и анализ*, **20**:2 (2008), 19–42.

[31] Р.Р. Гадыльшин, “Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях”, *Дифф. уравн.*, **22**:4 (1986), 640-652.

[32] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *Успехи мат. наук*, **12**:5 (1957), 3-122.

[33] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, “Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний”, М.: Наука, 1974.

[34] A. Majda, *Outgoing solutions for perturbation of* $-\Delta$ *with applications to spectral and scattering theory*, J. Diff. Equat., **16**:3 (1974), 515-547.

[35] Э. Санчес-Паленсия, “Неоднородные среды и теория колебаний”, М.: Мир, 1984.

[36] Д. И. Борисов, “Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 3–32.

[37] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, “Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред”, М.: Изд-во МГУ, 1990.

[38] В.А. Кондратьев, “Особенности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра”, *Дифф. уравн.*, **13**:11 (1977), 2026–2032.

[39] Golovina A.M. *On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space*, Russ. J. Math. Phys., **19**:2 (2012), 182-192.

[40] Д. И. Борисов, “Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий”, *Вестник молодых ученых*, Серия прикладная математика и механика, **1**, (2002), 36-52.