Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами

Ю. М. Мешкова

juliavmeshke@yandex.ru

Аннотация

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается класс матричных дифференциальных операторов $\mathcal{B}_\varepsilon$ второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами (зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$). При фиксированном $s>0$ и малом $\varepsilon>0$ мы находим аппроксимацию оператора $\exp(-\mathcal{B}_\varepsilon s)$ по $(L_2\to L_2)$- и $(L_2\to H^1)$-норме с погрешностью порядка ε. Результаты применяются к гомогенизации решений параболической задачи Коши.

Введение

0.1.

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения посвящена обширная литература (см., например, [ZhKO, BaPa, BeLP, OISh]). Мы опираемся на теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам гомогенизации, развитый в работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1–4].

0.2.

Изучается усреднение в пределе малого периода $\varepsilon\to 0$ следующей задачи Коши:

$$\rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\partial_s\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)=-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)+\mathbf{F}(\mathbf{x},s);\quad \rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором p. Решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)$ — функция от $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$ и $s\geqslant 0$ со значениями в $\mathbb{C}^n$; $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — матричный эллиптический ДО второго порядка, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Измеримая $(n\times n)$-матрица-функция $\rho(\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, равномерно положительно определенной и периодической относительно некоторой решетки $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$. Пусть Ω — ячейка решетки Γ. Будем использовать обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x})=\varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ для всякой измеримой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$.

Старшая часть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ оператора $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ задается в факторизованной форме

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка и $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определенная матрица-функция в $\mathbb{R}^d$. (Точные условия на $b(\mathbf{D})$ и $g(\mathbf{x})$ приведены ниже, см. §4.) Задачи усреднения для оператора (0.2) были подробно изучены в [BSu1–4]. Сейчас рассматриваются более общие операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$, включающие члены первого и нулевого порядков:

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u} = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u} + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j \mathbf{u} + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{u} \right) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}. \tag{0.3}$$

Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции, причем $a_j \in L_\varrho(\Omega)$, $\varrho = 2$ при $d = 1$, $\varrho > d$ при $d \geqslant 2$. Потенциал $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})$ — вообще говоря, обобщенная функция (со значениями в классе эрмитовых матриц), порожденная некоторой быстро осциллирующей мерой. Постоянная λ выбирается так, чтобы оператор $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ был положительно определен. Коэффициенты оператора (0.3) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$. Эллиптическая задача усреднения для оператора (0.3) изучалась в [Su3, Su6].

Цель работы — получить аппроксимацию при $\varepsilon \to 0$ решений задачи (0.1). Аппроксимация в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ строится в терминах решения „усредненной“ задачи. Аппроксимация в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ требует учета корректора.

Усредненная задача имеет вид

$$\overline{\rho} \partial_s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = -\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad \overline{\rho} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{0.4}$$

Здесь $\overline{\rho}$ — среднее значение матрицы ρ по ячейке Ω: $\overline{\rho} = \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$; $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами (см. (9.4)).

0.3. Основные результаты

Ограничимся во введении обсуждением случая $\rho = \mathbf{1}_n$. Тогда решение задачи (0.1) дается формулой $\mathbf{u}_\varepsilon = \exp(-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon s)\boldsymbol{\phi} + \int_0^s \exp(-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon (s - \widetilde{s}))\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{s})\, d\widetilde{s}$. Таким образом, задача сводится к изучению операторной экспоненты $\exp(-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon s)$ при малом $\varepsilon > 0$. (В общем случае приходится изучать „окаймленную“ экспоненту $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$ оператора $\mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon$, где $\rho^{-1} = f f^*$.)

Следующие оценки представляют собой *основные результаты работы*:

$$\|e^{-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon s} - e^{-\widehat{\mathcal{B}}^0 s}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1\varepsilon(\varepsilon^2+s)^{-1/2}e^{-C_2 s}, \quad s \geqslant 0; \tag{0.5}$$

$$\|e^{-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon s} - e^{-\widehat{\mathcal{B}}^0 s} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3\varepsilon s^{-1}e^{-C_2 s}, \quad \varepsilon \leqslant s^{1/2}. \tag{0.6}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon,s)$ — так называемый *корректор*. Корректор представляет собой оператор нулевого по ε порядка, но содержит быстро осциллирующие множители. Оценки (0.5), (0.6) точны по порядку при малом ε и фиксированном $s>0$. Оценочные постоянные контролируются явно через данные задачи. Оценка (0.5) позволяет доказать сходимость в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (0.1) к решению усредненной задачи (0.4). Оценка (0.6) позволяет получить аппроксимацию решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ по норме $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Нас интересует поведение решений $\mathbf{u}_\varepsilon$ при фиксированном s, и мы не стремимся к точности оценок при $s\to\infty$. Поэтому для наших целей достаточно оценок (0.5), (0.6) с какой-нибудь положительной постоянной C_2 в показателе экспоненты.

0.4.

Задачи гомогенизации для параболических уравнений изучались традиционными методами (см. [ZhKO, BeLP, BaPa]). Мы используем спектральный подход, развитый применительно к эллиптическим задачам в [BSu1–4] и [Su3, Su6]. Параболические задачи изучались данным методом в статьях [Su1, Su2, Su4, Su5, V, VSu1, VSu2]. С помощью этого подхода для оператора (0.2) были получены оценка вида (0.5) в [Su2] и аналог оценки (0.6) в [Su5]. Другим методом подобные оценки были установлены в [ZhPas] для оператора акустики $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$. В настоящей работе результаты [Su2, Su5] переносятся на случай операторного семейства (0.3).

0.5. Метод исследования

Обсудим способ доказательства в случае $\rho = \mathbf{1}_n$. Легко понять, что оценка (0.6) сводится к неравенству

$$\|\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon s} - e^{-\widehat{\mathcal{B}}^0 s} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,s)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon s^{-1}e^{-C_2 s} \tag{0.7}$$

при $s>0$, $0<\varepsilon\leqslant s^{1/2}$. Используя масштабное преобразование, мы сводим доказательство оценок (0.5), (0.7) к изучению экспоненты $\exp(-\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)\varepsilon^{-2}s)$

от оператора

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)=b(\mathbf{D})^*gb(\mathbf{D})+\varepsilon\sum_{j=1}^{d}(a_jD_j+D_ja_j^*)+\varepsilon^2\mathcal{Q}+\varepsilon^2\lambda I,$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и зависящего от параметра ε. Поэтому необходимо изучать поведение $\exp(-\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)\widetilde{s})$ при больших значениях $\widetilde{s}=\varepsilon^{-2}s$.

Применяя теорию Флоке–Блоха, разложим оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ в прямой интеграл операторов $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и зависящих от параметра $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ (квазиимпульса). Оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задается выражением

$$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})+\varepsilon\sum_{j=1}^{d}\big(a_j(D_j+k_j)+(D_j+k_j)a_j^*\big)+\varepsilon^2\mathcal{Q}+\varepsilon^2\lambda I,$$

где $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*gb(\mathbf{D}+\mathbf{k})$, с периодическими граничными условиями. Спектр операторов $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ дискретен. Следуя [Su3, Su6], мы выделяем одномерный параметр $\tau=(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}$ и изучаем семейство $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ методами аналитической теории возмущений по параметру τ.

0.6. Структура работы

Работа состоит из трех глав. В гл. 1 (§1–3) излагается абстрактная теоретико-операторная схема. В гл. 2 (§4–8) изучаются периодические ДО, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Получена аппроксимация „окаймленной“ операторной экспоненты (в §8). Гл. 3 (§9–10) посвящена гомогенизации параболической задачи Коши. В §9 из результатов §8 масштабным преобразованием получаются *основные результаты работы*. В §10 результаты §9 применяются к усреднению параболических систем.

0.7. Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Через $I=I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom}A$ и $\operatorname{Ker}A$ обозначаются область определения и ядро A соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp:=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$.

Если P — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^\perp$. Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно стандартные скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$, a^* — эрмитово сопряженную матрицу.

Далее, $\mathbf{x} = (x^1,\cdots,x^d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial/\partial x^j$, $j=1,\dots,d$, $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial_1,\dots,\partial_d)$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$.

Классы L_p функций со значениями в $\mathbb{C}^n$, заданных в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$, обозначаются через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Через $L_p((0,T);\mathfrak{H})$ обозначается L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций (в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$) порядка s обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но (если это не ведет к смешениям) мы иногда применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

Через C, c, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

0.8

Результаты работы опубликованы в [M]. Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Т. А. Суслину за постановку задачи и чуткое руководство.

Глава 1
Абстрактная теоретико-операторная схема

1 Квадратичные двупараметрические операторные пучки

Мы изучаем семейство операторов $B(t,\varepsilon)$, зависящих от двух вещественных параметров $t\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$. Семейство $B(t,\varepsilon)$ изучалось в [Su6, Su7].

1.1 Операторы $X(t)$ и $A(t)$

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что линейный оператор $X_0 : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ плотно определен и замкнут, оператор $X_1 : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ ограничен. Тогда оператор

$$X(t) := X_0 + tX_1 : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_* \tag{1.1}$$

замкнут на области определения $\mathrm{Dom}\, X(t) = \mathrm{Dom}\, X_0$. Рассмотрим самосопряженный в $\mathfrak{H}$ оператор $A(t) = X(t)^* X(t)$, порожденный замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \mathrm{Dom}\, X_0$. Положим $A_0 := A(0) = X_0^* X_0$ и $\mathfrak{N} := \mathrm{Ker}\, A_0 = \mathrm{Ker}\, X_0$. Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1.1. *Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированной точкой спектра оператора A_0, причем $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$.*

Пусть d^0 — *расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0.* Положим $\mathfrak{N}_* = \mathrm{Ker}\, X_0^*$, $n_* := \dim \mathfrak{N}_*$. *Предположим, что* $n \leqslant n_* \leqslant \infty$. Пусть P и P_* — ортогональные проекторы пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$ и пространства $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$ соответственно.

1.2 Операторы $Y(t)$ и Y_2

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\mathrm{Dom}\, X_0 \subset \mathrm{Dom}\, Y_0$; $Y_1 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный оператор. Положим $Y(t) = Y_0 + tY_1$, $\mathrm{Dom}\, Y(t) = \mathrm{Dom}\, Y_0$. Наложим следующее условие.

Условие 1.2. *При некотором $c_1 > 0$ имеем*

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \mathrm{Dom}\ X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Из оценки (1.2) при $t = 0$ вытекает, что $\mathrm{Ker}\, X_0 \subset \mathrm{Ker}\, Y_0$, т.е. $Y_0 P = 0$.

Пусть $Y_2 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\mathrm{Dom}\, X_0 \subset \mathrm{Dom}\, Y_2$. Наложим следующее условие.

Условие 1.3. *Для любого $\nu > 0$ существует $C(\nu) > 0$ такое, что*

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathrm{Dom}\, X_0, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Оператор Q_0, форма $\mathfrak{q}$

Пусть Q_0 — ограниченный положительно определенный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть $\mathfrak{q}[u, v]$ — плотно определенная эрмитова полуторалинейная форма в $\mathfrak{H}$ такая, что $\mathrm{Dom}\, X_0 \subset \mathrm{Dom}\, \mathfrak{q}$. На форму $\mathfrak{q}$ накладывается следующее условие.

Условие 1.4. *Существуют такие постоянные $0 < \kappa \leqslant 1$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$, что при $u \in \mathrm{Dom}\ X_0$, $t \in \mathbb{R}$, выполнена оценка*

$$-(1-\kappa)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|u\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \mathfrak{q}[u, u] \leqslant c_2\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|u\|^2_{\mathfrak{H}}. \tag{1.3}$$

1.4 Оператор $B(t,\varepsilon)$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + 2\varepsilon \mathrm{Re}\,(Y(t)u, Y_2 u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u,u] + \lambda\varepsilon^2 (Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathrm{Dom}\, X_0,\end{aligned} \tag{1.4}$$

действующую в $\mathfrak{H}$. На параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ накладывается ограничение

$$\begin{aligned}&\lambda > \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \text{ если } \lambda \geqslant 0,\\ &\lambda > \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \text{ если } \lambda < 0 \text{ (и } c_0 + c_4 < 0),\end{aligned} \tag{1.5}$$

где c_0 — постоянная из (1.3), а постоянная c_4 определяется равенством

$$c_4 := 4\kappa^{-1} c_1^2 C(\nu) \text{ при } \nu = \kappa^2 (16 c_1^2)^{-1}. \tag{1.6}$$

Как отмечено в [Su7, п. 1.4], из условия (1.5) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2} \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \beta\varepsilon^2 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathrm{Dom}\, X_0, \tag{1.7}$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\beta = \lambda \|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda \geqslant 0,\\ &\beta = \lambda \|Q_0\| - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda < 0 \text{ (и } c_0 + c_4 < 0).\end{aligned} \tag{1.8}$$

В [Su6, (1.15)] установлено, что при $u \in \mathrm{Dom}\, X_0$ выполнено

$$\mathfrak{b}(t,\varepsilon)[u,u] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|)\varepsilon^2 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}. \tag{1.9}$$

Из оценок (1.7) и (1.9) следует, что форма (1.4) замкнута и положительно определена. Отвечающий ей самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ обозначим через $B(t,\varepsilon)$. Формально можно записать

$$B(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon (Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda \varepsilon^2 Q_0. \tag{1.10}$$

(Здесь Q — формальный объект, сопоставляемый в этой записи форме $\mathfrak{q}$.)

1.5 Переход к параметру τ

Семейство $B(t,\varepsilon)$ представляет собой аналитическое операторное семейство относительно параметров t и ε. При $t = \varepsilon = 0$ оператор (1.10) совпадает с A_0 и имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n.

Чтобы применить методы аналитической теории возмущений, *введем одномерный параметр* $\tau = (t^2+\varepsilon^2)^{1/2}$, а также дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Тогда оператор (1.10) может быть записан как $B(\tau;\vartheta)$. Формально

$$\begin{aligned} B(\tau;\vartheta) = (X_0^* + \tau\vartheta_1 X_1^*)(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1) + \tau\vartheta_2(Y_2^* Y_0 + Y_0^* Y_2) \\ + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Соответствующую ему форму будем обозначать через $\mathfrak{b}(\tau;\vartheta)$. Оператор $B(\tau;\vartheta)$ изучается как квадратичный операторный пучок по параметру τ с помощью аналитической теории возмущений. При этом необходимо следить за равномерностью построений и оценок по параметру ϑ, учитывая, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$. В (1.11) можно считать, что $\tau \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $F(\tau;\vartheta;s)$ спектральный проектор оператора (1.11) для замкнутого промежутка $[0,s]$. Фиксируем число $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$ и положим

$$\tau_0 = \delta^{1/2}\left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)^{-1/2}. \tag{1.12}$$

В [Su6, п. 1.5] доказано, что при $|\tau| \leqslant \tau_0$ выполнены соотношения

$$F(\tau;\vartheta;\delta) = F(\tau;\vartheta;3\delta), \quad \operatorname{rank} F(\tau;\vartheta;\delta) = n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.13}$$

Вместо $F(\tau;\vartheta;\delta)$ будем для краткости писать $F(\tau;\vartheta)$.

1.6 Операторы Z и $\widetilde{Z}$

В этом и следующем пунктах вводятся операторы, необходимые при построении теории возмущений. Обозначим $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Поскольку точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0, форма $(X_0\phi, X_0\zeta)$, $\phi, \zeta \in \mathcal{D}$, задает скалярное произведение в $\mathcal{D}$, превращая $\mathcal{D}$ в гильбертово пространство.

При данном $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\varphi + X_1\omega) = 0$ на $\varphi \in \mathcal{D}$, которое понимается в слабом смысле. Иными словами, ищется элемент $\varphi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий тождеству

$$(X_0\varphi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{1.14}$$

Так как правая часть (1.14) есть антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, то в силу теоремы Рисса решение существует и единственно;

обозначим его $\varphi(\omega)$. *Определим ограниченный оператор* $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *следующим образом*: $Z\omega = \varphi(\omega)$, $\omega \in \mathfrak{N}$; $Zx = 0$, $x \in \mathfrak{N}^\perp$. Очевидно, $PZ = 0$. Заметим, что $\varphi(\omega)$ удовлетворяет оценке $\|X_0\varphi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}$, поэтому

$$\|X_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}. \tag{1.15}$$

Аналогично для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим решение $\psi \in \mathcal{D}$ уравнения

$$X_0^* X_0 \psi + Y_0^* Y_2 \omega = 0, \tag{1.16}$$

понимаемого в слабом смысле. А именно, $\psi \in \mathcal{D}$ удовлетворяет тождеству

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{1.17}$$

В силу условия 1.2 правая часть (1.17) — антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$. Поэтому из теоремы Рисса следует, что решение $\psi(\omega)$ существует и единственно. *Введем* $\widetilde{Z}$ *— ограниченный оператор в* $\mathfrak{H}$*, определенный соотношениями* $\widetilde{Z}\omega = \psi(\omega)$, $\omega \in \mathfrak{N}$; $\widetilde{Z}x = 0$, $x \in \mathfrak{N}^\perp$. Очевидно, $P\widetilde{Z} = 0$. Оценим норму оператора $X_0\widetilde{Z}$. Решение $\psi(\omega)$ удовлетворяет оценке $\|X_0\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1\|Y_2\omega\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}}$, поэтому

$$\|X_0\widetilde{Z}u\|_{\mathfrak{H}_*} = \|X_0\widetilde{Z}Pu\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1\|Y_2Pu\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \quad \forall u \in \mathfrak{H}. \tag{1.18}$$

Заметим, что из условия 1.3 при $t = 0$ вытекает оценка

$$\|Y_2Pu\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant (C(\nu))^{1/2}\|u\|_{\mathfrak{H}} \quad \forall u \in \mathfrak{H}, \quad \forall \nu > 0. \tag{1.19}$$

Комбинируя (1.18) и (1.19), находим

$$\|X_0\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1(C(\nu))^{1/2} \quad \forall \nu > 0. \tag{1.20}$$

1.7 Операторы R и S

Определим оператор $R := X_0 Z|_{\mathfrak{N}} + X_1|_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$. Как показано в [BSu1, (1.1.11)], $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. В [BSu1, п. 1.1.3] был определен оператор $S = R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, называемый *спектральным ростком* операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$. Росток S можно записать в виде $S = PX_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$, поэтому $\|S\| \leqslant \|X_1\|^2$.

1.8 Спектральный росток оператора $B(\tau;\vartheta)$

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [K]), при $|\tau| \leqslant \tau_0$ существуют вещественно-аналитические (по параметру τ) функции $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$B(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta) = \lambda_l(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.21}$$

Элементы $\varphi_l(\tau;\vartheta)$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(\tau;\vartheta)\mathfrak{H}$. Соотношения (1.21) понимаются в слабом смысле: $\mathfrak{b}(\tau;\vartheta)[\varphi_l(\tau;\vartheta),\zeta] = \lambda_l(\tau;\vartheta)(\varphi_l(\tau;\vartheta),\zeta)_{\mathfrak{H}}$, $\zeta \in \operatorname{Dom} X_0$. При этом для достаточно малого τ_* ($\tau_* \leqslant \tau_0$) при $|\tau| \leqslant \tau_*$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\begin{aligned} &\lambda_l(\tau;\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) \geqslant 0, \quad l = 1,\dots,n, \\ &\varphi_l(\tau;\vartheta) = \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \tau^2\varphi_l^{(2)}(\vartheta) + \dots, \quad l = 1,\dots,n. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Определение 1.5 [Su6]. Оператор $S(\vartheta) : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, заданный равенством

$$\begin{aligned} S(\vartheta) = \vartheta_1^2 S &- \vartheta_1\vartheta_2(X_0 Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} - \vartheta_1\vartheta_2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} \\ &- \vartheta_2^2(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + \vartheta_1\vartheta_2 P(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \vartheta_2^2(Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}), \end{aligned} \tag{1.23}$$

называется *спектральным ростком операторного пучка* (1.11) *при* $\tau = 0$.

Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{N}$, порожденный формой $\mathfrak{q}[u,u]$, $u \in \mathfrak{N}$, и $Q_{0\mathfrak{N}} = PQ_0|_{\mathfrak{N}}$. Заметим, что из условия 1.4 при $t = 0$ вытекает оценка $\|Q_{\mathfrak{N}}\| \leqslant \max\{|c_0|; c_3\}$. Отсюда с учетом (1.15), (1.19), (1.20) при $\nu = 1$ и оценки $\|S\| \leqslant \|X_1\|^2$ получаем

$$\|S(\vartheta)P\| \leqslant c_5, \tag{1.24}$$

$$c_5 := (\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2})^2 + 2C(1)^{1/2}\|Y_1\| + \max\{|c_0|; c_3\} + |\lambda|\|Q_0\|. \tag{1.25}$$

Согласно [Su6, предложение 1.6], числа $\gamma_l(\vartheta)$ и элементы $\omega_l(\vartheta)$ являются собственными для самосопряженного оператора $S(\vartheta)$:

$$S(\vartheta)\omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta), \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.26}$$

1.9 Пороговые аппроксимации

В [Su6, теорема 2.2] получен следующий результат.

Теорема 1.6. *При* $|\tau| \leqslant \tau_0$ *справедливы оценки*

$$F(\tau;\vartheta) - P = \Phi(\tau;\vartheta), \quad \|\Phi(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|\tau|, \tag{1.27}$$

$$B(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) - \tau^2 S(\vartheta)P = \Psi(\tau;\vartheta), \quad \|\Psi(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2|\tau|^3. \tag{1.28}$$

Постоянные C_1 *и* C_2 *зависят от* $\delta, c_1, c_2, c_3, C(1), \kappa, |\lambda|, \|X_1\|, \|Y_1\|, \|Q_0\|$.

Постоянные C_1 и C_2 можно выписать явно (см. [Su6, §2]). Положим

$$C_T^{(1)} = \max\{2 + c_1^2, (\|X_1\|^2 + C(1))\delta^{-1}\}, \tag{1.29}$$

$$C_T^{(2)} = \max\{c_2 + 1, (\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|)\delta^{-1}\}, \tag{1.30}$$

$$C_T = C_T^{(1)} + \tau_0 C_T^{(2)}, \tag{1.31}$$

$$C_T^0 = 32 \cdot 13^2 \kappa^{-1/2}(C_T^{(1)})^2 C_T + 32 \cdot 13\kappa^{-1/2} C_T^{(1)} C_T^{(2)} + 416\kappa^{-1/2} C_T^{(2)} C_T. \tag{1.32}$$

Тогда

$$C_1 = 32(1 + \pi^{-1})\kappa^{-1/2} C_T, \quad C_2 = 2\delta(1 + \pi^{-1}) C_T^0. \tag{1.33}$$

Помимо оценки (1.27) нам понадобится более точная аппроксимация, полученная в [Su6, п. 2.5]:

$$F(\tau;\vartheta) - P = \tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau;\vartheta), \tag{1.34}$$

где оператор $F_2(\tau;\vartheta)$ имеет порядок $O(\tau^2)$. Согласно [Su6, (1.48)] оператор $F_1(\vartheta)$ допускает представление $F_1(\vartheta) = \vartheta_1(Z + Z^*) + \vartheta_2(\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^*)$. Отсюда и из тождеств $PZ = 0$, $P\widetilde{Z} = 0$ вытекает, что

$$F_1(\vartheta)P = \vartheta_1 Z + \vartheta_2 \widetilde{Z}. \tag{1.35}$$

Комбинируя (1.24) и (1.28), находим

$$\|B(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_3\tau^2, \quad |\tau| \leqslant \tau_0; \quad C_3 := c_5 + C_2\tau_0. \tag{1.36}$$

Отсюда вытекает, что при $|\tau| \leqslant \tau_0$ собственные значения оператора $B(\tau;\vartheta)$ допускают оценку $\lambda_l(\tau;\vartheta) \leqslant C_3\tau^2$, $l = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\|B(\tau;\vartheta)^{1/2} F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_3^{1/2}|\tau|, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.37}$$

Нам также потребуется оценка, полученная в [Su6, предложение 2.7]:

$$\begin{aligned} &\|B(\tau;\vartheta)^{1/2} F_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_4\delta^{1/2}(1 + \pi^{-1})\tau^2, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \\ &C_4 := \sqrt{2}(2 + c_1^2 + c_2)^{1/2}(12\kappa^{-1} + 2)^{1/2}(49 C_T^{(1)} C_T + 7 C_T^{(2)}). \end{aligned} \tag{1.38}$$

1.10 Операторное семейство $A(t) = M^* \widehat{A}(t) M$

Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}$ — еще одно гильбертово пространство, и пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство вида (1.1), удовлетворяющее предположениям п. 1.1. Подчеркнем, что при этом $\mathfrak{H}_*$ не изменилось. *Все объекты, связанные с $\widehat{X}(t)$, будем помечать значком „$\widehat{\ }$“.* Пусть $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм и

$$M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \tag{1.39}$$

$X(t) = \widehat{X}(t) M : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$; $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. Тогда $A(t) = M^* \widehat{A}(t) M$, где $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^* \widehat{X}(t)$. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$. Положим

$$G = (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{1.40}$$

Пусть $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора G в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$:

$$G_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P} G|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{1.41}$$

Очевидно, $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$. Оказывается (см. [Su2, предложение 1.2]), ортогональные проекторы P и $\widehat{P}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1} (G_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} (M^*)^{-1}. \tag{1.42}$$

Пусть $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток операторного семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$. В соответствии с [BSu1, п. 1.1.5] имеем

$$S = P M^* \widehat{S} M|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.43}$$

1.11 Операторное семейство $B(t, \varepsilon) = M^* \widehat{B}(t, \varepsilon) M$

Предположим, что оператор $\widehat{Y}_0 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ удовлетворяет условиям п. 1.2. Подчеркнем, что при этом $\widetilde{\mathfrak{H}}$ не изменилось. Положим $Y_0 = \widehat{Y}_0 M$, $M \operatorname{Dom} Y_0 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$. В силу (1.39) и условия $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$ справедливо включение $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. Пусть $\widehat{Y}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный оператор, пусть $Y_1 = \widehat{Y}_1 M : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$. Положим $\widehat{Y}(t) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $\operatorname{Dom} \widehat{Y}(t) = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$, пусть $Y(t) = \widehat{Y}(t) M = Y_0 + tY_1 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. Пусть операторы $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ удовлетворяют условию 1.2 с некоторой постоянной $\widehat{c}_1$. Тогда автоматически выполнено $\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}$, где $c_1 = \widehat{c}_1$.

Пусть оператор $\widehat{Y}_2 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ удовлетворяет условиям п. 1.2. Положим $Y_2 = \widehat{Y}_2 M : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, $M \operatorname{Dom} Y_2 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_2$. Так как M изоморфизм, а оператор $\widehat{Y}_2$ плотно определен, оператор Y_2 также плотно определен. В силу

(1.39) справедливо включение $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предположим, что операторы $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}_2$ удовлетворяют условию 1.3 с некоторыми постоянными $\widehat{C}(\nu) > 0$. Тогда автоматически для любого $\nu > 0$ найдется постоянная $C(\nu) = \widehat{C}(\nu)\|M\|^2 > 0$ такая, что при $u \in \operatorname{Dom} X_0$, $t \in \mathbb{R}$ выполнена оценка $\|Y_2 u\|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}$.

Положим $Q_0 := M^*M$. Тогда Q_0 — непрерывный положительно определенный оператор в $\mathfrak{H}$. (Роль $\widehat{Q}_0$ играет тождественный оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$.)

Пусть в пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ задана форма $\widehat{\mathfrak{q}}$, удовлетворяющая условиям п. 1.3. Определим форму $\mathfrak{q}$, действующую по правилу $\mathfrak{q}[u,v] = \widehat{\mathfrak{q}}[Mu, Mv]$, $u, v \in \operatorname{Dom}\mathfrak{q}$, $M\operatorname{Dom}\mathfrak{q} = \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{q}}$. Формально, $Q = M^*\widehat{Q}M$. Пусть оператор $\widehat{X}(t)$ и форма $\widehat{\mathfrak{q}}$ удовлетворяют условию 1.4 с некоторыми постоянными κ, $\widehat{c}_0$, $\widehat{c}_2$ и $\widehat{c}_3$. Учитывая (1.39), легко видеть, что тогда оператор $X(t) = \widehat{X}(t)M$ и форма $\mathfrak{q}$ также удовлетворяют условию 1.4 с постоянными

$$c_0 = \|M\|^2 \widehat{c}_0, \text{ если } \widehat{c}_0 \geqslant 0, \quad c_0 = \|M^{-1}\|^{-2}\widehat{c}_0, \text{ если } \widehat{c}_0 < 0, \tag{1.44}$$

$c_2 = \widehat{c}_2$, $c_3 = \|M\|^2\widehat{c}_3$ и той же константой κ. Из (1.6) видно, что постоянные c_4 и $\widehat{c}_4 = 4\kappa^{-1}\widehat{c}_1^2\widehat{C}(\nu)$ при $\nu = \kappa^2(16\widehat{c}_1^2)^{-1}$ связаны равенством

$$c_4 = \|M\|^2\widehat{c}_4. \tag{1.45}$$

При сделанных предположениях операторный пучок

$$\widehat{B}(t,\varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^*\widehat{Y}_2) + \varepsilon^2\widehat{Q} + \lambda\varepsilon^2 I \tag{1.46}$$

связан с пучком (1.10) соотношением $B(t,\varepsilon) = M^*\widehat{B}(t,\varepsilon)M$. Постоянная λ выбирается из условия (1.5) для оператора (1.10). Используя соотношения (1.44), (1.45) и равенство $Q_0 = M^*M$, находим, что при таком выборе λ условие (1.5) для оператора (1.46) также выполнено.

Отметим, что для оператора (1.46) соотношения (1.8) принимают вид $\widehat{\beta} = \lambda - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4$. Отсюда и из (1.8), (1.44), (1.45) вытекает оценка

$$\beta \leqslant \|M^{-1}\|^{-2}\widehat{\beta}. \tag{1.47}$$

1.12 Связь спектральных ростков $S(\vartheta)$ и $\widehat{S}(\vartheta)$

В этом пункте мы обобщим равенство (1.43) на случай спектральных ростков операторных семейств (1.46) и (1.10) таких, что $B(t,\varepsilon) = M^*\widehat{B}(t,\varepsilon)M$. Для семейства $\widehat{B}(t,\varepsilon)$ введем операторы $\widehat{Z}$ и $\widehat{\widehat{Z}}$ по аналогии с п. 1.6. Установим следующий результат.

Лемма 1.7. *При сделанных предположениях имеем*

$$\widehat{X}_0\widehat{Z}M|_{\mathfrak{N}} = X_0Z|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}M|_{\mathfrak{N}} = X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.48}$$

Доказательство. Оператор R определен равенством $R := (X_0Z + X_1)|_{\mathfrak{N}}$. С другой стороны, $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Следовательно, $X_0Z|_{\mathfrak{N}} = (P_* - I)X_1|_{\mathfrak{N}}$. Аналогично $\widehat{X}_0\widehat{Z}|_{\widehat{\mathfrak{N}}} = (P_* - I)\widehat{X}_1|_{\widehat{\mathfrak{N}}}$, так как $\widehat{P}_* = P_*$. Сопоставляя эти соотношения и учитывая, что $X_1 = \widehat{X}_1M$ и $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, получаем первое из равенств (1.48).

Второе соотношение в (1.48) равносильно тождеству

$$((X_0\widetilde{Z} - \widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}M)\omega,\ \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \quad \omega \in \mathfrak{N}, \quad \zeta \in \mathfrak{H}_*. \tag{1.49}$$

Поскольку $\mathfrak{N}_* = \widehat{\mathfrak{N}}_*$, при $\zeta \in \mathfrak{N}_*$ равенство (1.49) очевидно. С учетом разложения $\mathfrak{H}_* = \operatorname{Ran} X_0 \oplus \mathfrak{N}_*$ остается рассмотреть $\zeta \in \operatorname{Ran} X_0$. Тогда $\zeta = X_0\xi$ при некотором $\xi \in \mathcal{D}$. Поскольку $\zeta = \widehat{X}_0M\xi = \widehat{X}_0\widehat{P}^{\perp}M\xi$, требуемое равенство перепишется в виде

$$(X_0\widetilde{Z}\omega, X_0\xi)_{\mathfrak{H}_*} = (\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}M\omega, \widehat{X}_0\widehat{P}^{\perp}M\xi)_{\mathfrak{H}_*}. \tag{1.50}$$

В силу определения оператора $\widetilde{Z}$ (см. (1.17))

$$(X_0\widetilde{Z}\omega,\ X_0\xi)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega,\ Y_0\xi)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}. \tag{1.51}$$

Аналогично согласно определению оператора $\widehat{\widetilde{Z}}$

$$(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}}M\omega, \widehat{X}_0\widehat{P}^{\perp}M\xi)_{\mathfrak{H}_*} = -(\widehat{Y}_2M\omega, \widehat{Y}_0\widehat{P}^{\perp}M\xi)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} = -(Y_2\omega, Y_0\xi)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}. \tag{1.52}$$

В последнем переходе мы учли, что $\widehat{Y}_0\widehat{P} = 0$, $Y_0 = \widehat{Y}_0M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2M$. Из (1.51) и (1.52) следует тождество (1.50). $\square$

Вернемся к операторным пучкам $B(t,\varepsilon)$ и $\widehat{B}(t,\varepsilon)$ и перейдем к параметрам τ, ϑ. Рассмотрим спектральный росток (1.23) и аналогичный росток для семейства (1.46):

$$\begin{aligned}\widehat{S}(\vartheta) = \vartheta_1^2\widehat{S} - \vartheta_1\vartheta_2(\widehat{X}_0\widehat{Z})^*(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} - \vartheta_1\vartheta_2(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})^*(\widehat{X}_0\widehat{Z})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} \\ - \vartheta_2^2(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})^*(\widehat{X}_0\widehat{\widetilde{Z}})|_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \vartheta_1\vartheta_2\widehat{P}(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^*\widehat{Y}_2)|_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \vartheta_2^2(\widehat{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} + \lambda I_{\widehat{\mathfrak{N}}}).\end{aligned}$$

Заметим, что из равенства $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$ следует, что $PM^* = PM^*\widehat{P}$. Используя эти соотношения, а также (1.43), (1.48) и тождества $Y_1 = \widehat{Y}_1M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2M$, $Q = M^*\widehat{Q}M$, обобщим равенство (1.43).

Предложение 1.8. *Спектральные ростки $S(\vartheta)$ и $\widehat{S}(\vartheta)$ операторных семейств* (1.46) *и* (1.10) *связаны соотношением*

$$S(\vartheta) = PM^*\widehat{S}(\vartheta)M|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.53}$$

1.13 Операторы $\widehat{Z}_G$ и $\widehat{\widehat{Z}}_G$

Введем $\widehat{Z}_G$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, переводящий элемент $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ в (единственное) решение $\widehat{\phi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_G + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad G\widehat{\phi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}}, \tag{1.54}$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение (1.54) понимается в слабом смысле (ср. (1.14)). Тогда, как показано в [BSu2, лемма 6.1],

$$\widehat{Z}_G = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{1.55}$$

Аналогично введем $\widehat{\widehat{Z}}_G$ — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ (единственное) решение $\widehat{\psi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*\widehat{X}_0\widehat{\psi}_G + \widehat{Y}_0^*\widehat{Y}_2\widehat{\omega} = 0, \quad G\widehat{\psi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}}, \tag{1.56}$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение (1.56) понимается в слабом смысле. Производя пересчет в уравнении (1.16), с учетом $M\mathfrak{N} = \widehat{\mathfrak{N}}$, (1.39) и (1.40) находим

$$\widehat{\widehat{Z}}_G = M\widetilde{Z}M^{-1}\widehat{P}. \tag{1.57}$$

2 Аппроксимация операторной экспоненты

2.1

Старший член аппроксимации оператора $\exp(-A(t)s)$ при больших значениях параметра $s \geqslant 0$ был получен в работе [Su2, §2.1]. Аппроксимация по „энергетической“ норме оператора $\exp(-A(t)s)$ с учетом корректора построена в [Su5, §3.2]. Наша цель в этом параграфе — аппроксимировать оператор $\exp(-B(\tau;\vartheta)s)$ при больших значениях $s \geqslant 0$.

В дополнение к предположениям п. 1.1–1.4 наложим условие

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \quad c_* > 0, \quad |t| \leqslant \tau_0. \tag{2.1}$$

Отсюда и из (1.7) вытекает, что

$$B(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2 I, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \quad \check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*, 2\beta\}. \tag{2.2}$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ оператора $B(\tau;\vartheta)$ удовлетворяют оценкам

$$\lambda_l(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2, \quad l = 1, \dots, n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.3}$$

Сопоставляя это с (1.22), находим, что $\gamma_l(\vartheta) \geqslant \check{c}_*$, $l = 1, \dots, n$. Поэтому в силу (1.26) имеем $S(\vartheta) \geqslant \check{c}_* I_{\mathfrak{N}}$. Отсюда и из (2.2) вытекает, что

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-\check{c}_*\tau^2 s}, \quad \|e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-\check{c}_*\tau^2 s}. \tag{2.4}$$

2.2 Старший член аппроксимации

Пусть $|\tau| \leqslant \tau_0$. Очевидно,

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s} = e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) + e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)^\perp, \tag{2.5}$$

где $F(\tau;\vartheta)^\perp$ — спектральный проектор оператора $B(\tau;\vartheta)$ для интервала $(\delta;\infty)$. Поэтому, используя неравенство $\exp(-\delta s/2) \leqslant (\delta s)^{-1/2}$, получим

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-\delta s} \leqslant (\delta s)^{-1/2}\, e^{-\delta s/2}, \quad s \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Далее,

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) = Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) + P^\perp e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta). \tag{2.7}$$

С учетом (1.27) $P^\perp F(\tau;\vartheta) = (F(\tau;\vartheta) - P)F(\tau;\vartheta) = \Phi(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$. В силу (1.27) и (2.2) отсюда следует, что

$$\|P^\perp e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|\Phi(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|\tau|e^{-\check{c}_*\tau^2 s}. \tag{2.8}$$

Положим

$$\Sigma(s) := Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{E}(s) := e^{\tau^2 S(\vartheta)Ps}\Sigma(s) = e^{\tau^2 S(\vartheta)Ps}Pe^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - P. \tag{2.10}$$

Дифференцируя (2.10) по s и используя (1.28), находим

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(s) &= e^{\tau^2 S(\vartheta)Ps}P\left(\tau^2 S(\vartheta)P - B(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\right)e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta)\\ &= -e^{\tau^2 S(\vartheta)Ps}P\Psi(\tau;\vartheta)e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{E}(s) = \mathcal{E}(0) + \int_0^s \mathcal{E}'(\tilde{s})\, d\tilde{s}$, то

$$\mathcal{E}(s) = PF(\tau;\vartheta) - P - \int_0^s e^{\tau^2 S(\vartheta) P \tilde{s}} P\Psi(\tau;\vartheta) e^{-B(\tau;\vartheta)\tilde{s}} F(\tau;\vartheta)\, d\tilde{s}.$$

Отсюда и из (1.27) для оператора $\Sigma(s) = e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s}\mathcal{E}(s)$ имеем

$$\Sigma(s) = e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s} P\Phi(\tau;\vartheta) - \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta) P (s-\tilde{s})} P\Psi(\tau;\vartheta) e^{-B(\tau;\vartheta)\tilde{s}} F(\tau;\vartheta)\, d\tilde{s}.$$

Объединяя это с (2.4) и (1.27), (1.28), получим оценку

$$\|\Sigma(s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|\tau| e^{-\check{c}_*\tau^2 s} + C_2|\tau|^3 s e^{-\check{c}_*\tau^2 s}. \qquad (2.11)$$

Из соотношений (2.7), (2.8), (2.9) и (2.11) видно, что

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) - P e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (2C_1|\tau| + C_2|\tau|^3 s) e^{-\check{c}_*\tau^2 s}. \qquad (2.12)$$

Положим $|\tau|\sqrt{s} =: \alpha$ и запишем $(2C_1|\tau| + C_2|\tau|^3 s)e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2} = s^{-1/2}\varphi(\alpha)$, где $\varphi(\alpha) := (2C_1\alpha + C_2\alpha^3)e^{-\check{c}_*\alpha^2/2}$. Определим

$$C_5 := \max_{\alpha\geqslant 0} \varphi(\alpha) = \max_{\alpha\geqslant 0} (2C_1\alpha + C_2\alpha^3)e^{-\check{c}_*\alpha^2/2}. \qquad (2.13)$$

Тогда

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau;\vartheta) - P e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5 s^{-1/2} e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2}, \quad s > 0. \qquad (2.14)$$

Используя (2.5), (2.6), (2.14), находим

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} - P e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5 s^{-1/2} e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2} + \delta^{-1/2} s^{-1/2} e^{-\delta s/2}. \qquad (2.15)$$

Заметим, что при $|\tau| \leqslant \tau_0$ выполнены оценки

$$e^{-\delta s/2} \leqslant e^{-\tau^2 C_* s}, \quad e^{-\check{c}_*\tau^2 s/2} \leqslant e^{-\tau^2 C_* s}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \qquad (2.16)$$

с постоянной

$$C_* := \frac{1}{2}\min\{\check{c}_*; \delta\tau_0^{-2}\}. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.15) следует

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} - P e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (C_5 + \delta^{-1/2}) s^{-1/2} e^{-\tau^2 C_* s}. \qquad (2.18)$$

Кроме того, в силу (2.4) и (2.17) при всех $s \geqslant 0$ левая часть (2.18) допускает оценку $\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} - Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2e^{-C_*\tau^2 s}$. При $s > 0$ имеем $\min\{2; (C_5 + \delta^{-1/2})s^{-1/2}\} \leqslant C_6(1+s)^{-1/2}$, где

$$C_6 := \sqrt{2}\max\{2; C_5 + \delta^{-1/2}\}. \tag{2.19}$$

Таким образом, доказано, что

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} - Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_6(1+s)^{-1/2}e^{-\tau^2 C_* s},\ s \geqslant 0,\ |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.20}$$

В соответствии с [Su6, (3.26)] определим оператор $L(t,\varepsilon) := \tau^2 S(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} L(t,\varepsilon) = t^2 S + t\varepsilon \Big(-(X_0 Z)^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} - (X_0\widetilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} \Big) \\ + t\varepsilon P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \varepsilon^2 \Big(-(X_0\widetilde{Z})^*(X_0\widetilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \Big). \end{aligned} \tag{2.21}$$

См. (1.23). Заметим, что из оценки $S(\vartheta) \geqslant \check{c}_* I_{\mathfrak{N}}$ следует, что

$$L(t,\varepsilon) \geqslant \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2) I_{\mathfrak{N}}. \tag{2.22}$$

Сформулируем результат (2.20) в терминах оператора $L(t,\varepsilon)$.

Теорема 2.1. *Пусть $B(t,\varepsilon)$ — оператор, определенный в п.* 1.4. *Пусть условие* (2.1) *выполнено. Пусть $L(t,\varepsilon)$ — оператор* (2.21)*. Тогда*

$$\|e^{-B(t,\varepsilon)s} - e^{-L(t,\varepsilon)s}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_6(1+s)^{-1/2}e^{-\tau^2 C_* s}, \quad s \geqslant 0, \quad |\tau| \leqslant \tau_0.$$

Постоянная C_6 зависит только от δ, κ, c_*, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, $C(1)$, λ, $\|X_1\|$, $\|Y_1\|$, $\|Q_0\|, \|Q_0^{-1}\|$. Постоянная C_* определена в (2.17).

2.3 Аппроксимация с учетом корректора

Следующая теорема дает аппроксимацию оператора $\exp(-B(\tau;\vartheta)s)$ с учетом корректора.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть Z и $\widetilde{Z}$ — операторы, определенные в п.* 1.6. *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|B(t,\varepsilon)^{1/2} \Big(e^{-B(t,\varepsilon)s} - \Big(I + tZ + \varepsilon\widetilde{Z}\Big) e^{-L(t,\varepsilon)s}P \Big) \|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ \leqslant C_8 s^{-1} e^{-\tau^2 C_* s}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \quad s > 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Постоянная C_8 определена ниже в (2.32).

Доказательство. Положим $\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s) := B(\tau;\vartheta)^{1/2}e^{-B(\tau;\vartheta)s}$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s) = \mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)F(\tau;\vartheta)^{\perp} + \mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)F(\tau;\vartheta)(F(\tau;\vartheta) - P)\\ + F(\tau;\vartheta)\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)P.\end{aligned} \tag{2.24}$$

С помощью (1.13), (2.16) и неравенства $e^{-\alpha} \leqslant \alpha^{-1}$, $\alpha > 0$, получим

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)F(\tau;\vartheta)^{\perp}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{\mu\geqslant 3\delta} \mu^{1/2}e^{-\mu s} \leqslant 2(3\delta)^{-1/2}s^{-1}e^{-3\delta s/2}\\ \leqslant 2(3\delta)^{-1/2}s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Далее, используя (2.3) и (2.17), находим, что при $s > 0$ и $|\tau| \leqslant \tau_0$ выполнено

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)F(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{1\leqslant l\leqslant n} (\lambda_l(\tau;\vartheta))^{1/2}e^{-\lambda_l(\tau;\vartheta)s}\\ \leqslant 2s^{-1}\sup_{1\leqslant l\leqslant n} (\lambda_l(\tau;\vartheta))^{-1/2}e^{-\lambda_l(\tau;\vartheta)s/2} \leqslant 2\check{c}_*^{-1/2}|\tau|^{-1}s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s}.\end{aligned}$$

Комбинируя это с (1.27), при $s > 0$ и $|\tau| \leqslant \tau_0$ имеем

$$\|\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)F(\tau;\vartheta)(F(\tau;\vartheta) - P)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2C_1\check{c}_*^{-1/2}s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s}. \tag{2.26}$$

Последний член в правой части (2.24) представляется как

$$\begin{aligned}F(\tau;\vartheta)\mathfrak{U}(\tau;\vartheta;s)P = B(\tau;\vartheta)^{1/2}F(\tau;\vartheta)e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\\ + B(\tau;\vartheta)^{1/2}F(\tau;\vartheta)\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)P.\end{aligned} \tag{2.27}$$

В силу (1.37), (2.12) и (2.17) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|B(\tau;\vartheta)^{1/2}F(\tau;\vartheta)\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s}F(\tau;\vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ \leqslant C_3^{1/2}|\tau|(2C_1|\tau| + C_2|\tau|^3 s)e^{-\check{c}_*\tau^2 s} \leqslant C_7 s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s},\end{aligned} \tag{2.28}$$

где

$$C_7 := C_3^{1/2}\sup_{\alpha>0}(2C_1\alpha + C_2\alpha^2)e^{-\check{c}_*\alpha/2}. \tag{2.29}$$

Объединяя (2.24)–(2.28), находим

$$\begin{aligned}\|B(\tau;\vartheta)^{1/2}\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s} - \left(I + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z})\right)e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ \leqslant (2(3\delta)^{-1/2} + 2C_1\check{c}_*^{-1/2} + C_7)s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s}\\ + \|B(\tau;\vartheta)^{1/2}\left(F(\tau;\vartheta)P - P - \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z})\right)e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Из (1.34) и (1.35) следует, что $F(\tau;\vartheta)P - P - \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \widetilde{Z}) = F_2(\tau;\vartheta)P$. Используя (1.38), (2.4) и (2.17), оценим последнее слагаемое в (2.30):

$$\begin{aligned} &\|B(\tau;\vartheta)^{1/2} F_2(\tau;\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_4 \delta^{1/2}(1+\pi^{-1})\tau^2 e^{-\tau^2 \check{c}_* s} \\ &\quad \leqslant C_4\delta^{1/2}(1+\pi^{-1}) 2\check{c}_*^{-1} s^{-1} e^{-\tau^2 C_* s}, \quad s>0, \quad |\tau|\leqslant \tau_0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Объединяя оценки (2.30) и (2.31), получим (2.23) с постоянной

$$C_8 := 2(3\delta)^{-1/2} + 2C_1 \check{c}_*^{-1/2} + C_7 + 2C_4\delta^{1/2}(1+\pi^{-1})\check{c}_*^{-1}. \tag{2.32}$$

$\square$

3 Аппроксимация „окаймленной“ операторной экспоненты

3.1 Старший член аппроксимации

Пусть выполнены предположения п. 1.10 и 1.11, т.е. $B(\tau;\vartheta) = M^*\widehat{B}(\tau;\vartheta)M$. Наша цель в этом параграфе — найти аппроксимацию оператора $Me^{-B(\tau;\vartheta)s}M^*$, действующего в $\widehat{\mathfrak{H}}$. Старший член аппроксимации $Me^{-A(t)s}M^*$ был получен в [Su2, п. 2.2], аппроксимация при учете корректора построена в [Su5, теорема 4.1]. Мы перенесем эти построения на случай семейства $B(\tau;\vartheta)$.

Используем обозначения (1.40), (1.41) и положим

$$M_0 := (G_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{3.1}$$

Из соотношения (2.20) следует, что при $s \geqslant 0$ и $|\tau|\leqslant\tau_0$ выполнено

$$\|Me^{-B(\tau,\vartheta)s}M^* - Me^{-\tau^2 S(\vartheta)s}PM^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_6\|M\|^2(1+s)^{-1/2}e^{-\tau^2 C_* s}. \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Оператор $\Lambda(\tau;\vartheta;s) := Me^{-\tau^2 S(\vartheta)s}PM^*$, действующий в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$, допускает представление*

$$\Lambda(\tau;\vartheta;s) = M_0 e^{-\tau^2 M_0 \widehat{S}(\vartheta) M_0 s} M_0 \widehat{P}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и пусть $\widehat{\xi}(s) = \Lambda(\tau;\vartheta;s)\widehat{\eta}$. Тогда $M^{-1}\widehat{\xi}(s) \in \mathfrak{N}$, $\widehat{\xi}(s)\in\widehat{\mathfrak{N}}$, и $M^{-1}\widehat{\xi}(s)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{ds}M^{-1}\widehat{\xi}(s) = -\tau^2 S(\vartheta)M^{-1}\widehat{\xi}(s), \quad M^{-1}\widehat{\xi}(0) = PM^*\widehat{\eta}. \tag{3.4}$$

В силу (1.53) $S(\vartheta)M^{-1}\widehat{\xi}(s) = PM^*\widehat{S}(\vartheta)\widehat{\xi}(s)$. Далее, используя (1.42), получим, что $PM^* = M^{-1}(G_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}$. Тогда из (3.4) и (3.1) следует, что

$$\frac{d}{ds}\widehat{\xi}(s) = -\tau^2 M_0^2\widehat{S}(\vartheta)\widehat{\xi}(s), \quad \widehat{\xi}(0) = M_0^2\widehat{P}\widehat{\eta},$$

или, эквивалентно, $\frac{d}{ds}M_0^{-1}\widehat{\xi}(s) = -\tau^2 M_0\widehat{S}(\vartheta)\widehat{\xi}(s)$, $M_0^{-1}\widehat{\xi}(0) = M_0\widehat{P}\widehat{\eta}$. Следовательно, $M_0^{-1}\widehat{\xi}(s) = e^{-\tau^2 M_0\widehat{S}(\vartheta)M_0 s}M_0\widehat{P}\widehat{\eta}$, что влечет (3.3). $\square$

Введем оператор $\widehat{L}(t,\varepsilon) := \tau^2\widehat{S}(\vartheta)$. Из (3.2) и (3.3) вытекает следующий результат.

Теорема 3.2. *При сделанных предположениях справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|Me^{-B(t,\varepsilon)s}M^* - M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad\leqslant C_6\|M\|^2(1+s)^{-1/2}e^{-\tau^2 C_* s}, \quad s\geqslant 0, \quad |\tau|\leqslant\tau_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2 Аппроксимация при учете корректора

Теорема 3.3. *Пусть выполнены предположения п.* 1.10 *и* 1.11. *Пусть* $\widehat{Z}_G$ *и* $\widehat{\widetilde{Z}}_G$ *— операторы* (1.55) *и* (1.57) *соответственно. Тогда*

$$\begin{aligned} &\|\widehat{B}(t,\varepsilon)^{1/2}\left(Me^{-B(t,\varepsilon)s}M^* - (I + t\widehat{Z}_G + \varepsilon\widehat{\widetilde{Z}}_G)M_0 e^{-M_0\widehat{L}(t,\varepsilon)M_0 s}M_0\widehat{P}\right)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad\leqslant C_8\|M\|s^{-1}e^{-\tau^2 C_* s}, \quad s>0, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad |\tau|\leqslant\tau_0. \end{aligned}$$

Доказательство. Искомая оценка получается из (2.23) пересчетом. Комбинируя (1.55), (1.57) и предложение 3.1, находим

$$\begin{aligned} &\|\widehat{B}(\tau;\vartheta)^{1/2}\left(Me^{-B(\tau;\vartheta)s}M^* - (I + \tau(\vartheta_1\widehat{Z}_G + \vartheta_2\widehat{\widetilde{Z}}_G))\Lambda(\tau;\vartheta;s)\right)\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad= \|\widehat{B}(\tau;\vartheta)^{1/2}M\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s} - (I + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z}))e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)M^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad= \|B(\tau;\vartheta)^{1/2}\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s} - (I + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z}))e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)M^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad\leqslant \|M\|\|B(\tau;\vartheta)^{1/2}\left(e^{-B(\tau;\vartheta)s} - (I + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z}))e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.23) вытекает утверждение теоремы. $\square$

Глава 2
Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

4 Основные определения

4.1 Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$: $\Gamma=\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{a}=\sum_{j=1}^d n^j\mathbf{a}_j,\ n^j\in\mathbb{Z}\}$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ: $\Omega=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{x}=\sum_{j=1}^d \xi^j\mathbf{a}_j,\ 0<\xi^j<1\}$. Базис $\mathbf{b}^1,\dots,\mathbf{b}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle\mathbf{b}^l,\mathbf{a}_j\rangle=2\pi\delta_j^l$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ. За $\widetilde{\Omega}$ обозначим *зону Бриллюэна* решетки $\widetilde{\Gamma}$: $\widetilde{\Omega}=\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d:\ |\mathbf{k}|<|\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\}$. Область $\widetilde{\Omega}$ является фундаментальной для $\widetilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega|=\operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}|=\operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, и пусть $2r_1=\operatorname{diam}\widetilde{\Omega}$.

4.2 Факторизованные операторы второго порядка

(См. [BSu1].) Пусть $b(\mathbf{D})=\sum_{l=1}^d b_lD_l : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ — ДО первого порядка. Здесь b_l — постоянные $(m\times n)$-матрицы. *Считаем, что* $m\geqslant n$. Относительно символа $b(\boldsymbol{\xi})=\sum_{l=1}^d b_l\xi_l$ *предположим, что* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi})=n$, $0\neq\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Тогда при некоторых α_0, $\alpha_1>0$ имеем

$$\alpha_0\mathbf{1}_n\leqslant b(\boldsymbol{\theta})^*b(\boldsymbol{\theta})\leqslant\alpha_1\mathbf{1}_n,\quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},\quad 0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty. \tag{4.1}$$

Пусть $(n\times n)$-матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m\times m)$-матрица-функция $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, — ограничены и ограниченно обратимы:

$$f,\ f^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d);\quad h,\ h^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.2}$$

Функции f и h предполагаются Γ-периодическими. Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X}:=hb(\mathbf{D})f\ :\ L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{4.3}$$

$$\operatorname{Dom}\mathcal{X}:=\{\mathbf{u}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\ :\ f\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}. \tag{4.4}$$

Оператор (4.3) замкнут на области определения (4.4). Рассмотрим самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A}:=\mathcal{X}^*\mathcal{X}$, отвечающий квадратичной форме $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2}^2$, $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально можно записать

$\mathcal{A} = f^* b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D}) f$, где $g = h^* h$. Используя преобразование Фурье и (4.1), (4.2), легко проверить, что при $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$ справедливы оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \qquad (4.5)$$

4.3 Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$

Перейдем к описанию младших членов. Введем оператор $\mathcal{Y} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$, действующий по правилу

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \operatorname{col}\{D_1(f\mathbf{u}),\dots,D_d(f\mathbf{u})\}, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{Y} = \operatorname{Dom}\mathcal{X}.$$

Нижняя оценка (4.5) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}, \qquad (4.6)$$

$$c_1 = \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \qquad (4.7)$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, такие, что

$$a_j \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1,\dots,d. \qquad (4.8)$$

Пусть оператор $\mathcal{Y}_2 : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$ действует на области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}_2 = \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ по правилу $\mathcal{Y}_2\mathbf{u} = \operatorname{col}\{a_1^* f\mathbf{u},\dots,a_d^* f\mathbf{u}\}$. Формально, $(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2)\mathbf{u} = \sum_{j=1}^d \Big(f^* a_j D_j(f\mathbf{u}) + f^* D_j(a_j^* f\mathbf{u})\Big)$.

Используя неравенство Гёльдера, условия (4.2), (4.8) и компактность вложения $H^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ при $p = 2\varrho(\varrho-2)^{-1}$, можно показать (ср. [Su6, п. 5.2]), что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \qquad (4.9)$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит от норм $\|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $j = 1,\dots,d$, от $\|f\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, d, ϱ и от параметров решетки Γ.

Используя (4.6), (4.9), несложно доказать неравенство

$$2\varepsilon |\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2}| \leqslant \frac{\kappa}{2}\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2} + c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}, \qquad (4.10)$$

$$c_4 := 4\kappa^{-1} c_1^2 C(\nu) \text{ при } \nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}. \qquad (4.11)$$

4.4 Оператор $\mathcal{Q}_0$, форма $q[\mathbf{u},\mathbf{u}]$

Пусть $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на Г-периодическую положительно определенную ограниченную матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x})$.

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Г-периодическая борелевская σ-конечная мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, $j,l = 1,\dots,n$, со значениями в классе эрмитовых $(n\times n)$-матриц. Иначе говоря, $d\mu_{jl}(\mathbf{x})$ — комплексная Г-периодическая мера в $\mathbb{R}^d$ и $d\mu_{jl} = d\mu_{lj}^*$. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|v(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму $q[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Наложим на меру $d\mu$ следующее ограничение.

Условие 4.1. *Для любой функции $\mathbf{v} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ справедливы оценки*

$$-\widetilde{c}\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} - \widehat{c}_0\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \leqslant \widetilde{c}_2\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + \widehat{c}_3\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $\widehat{c}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{c}_2 \geqslant 0$, $\widehat{c}_3 \geqslant 0$ и выполнено ограничение $0 \leqslant \widetilde{c} < \alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Заметим, что из условия 4.1 вытекает оценка

$$\begin{aligned} &-\widetilde{c}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle \leqslant \widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

с постоянными

$$c_0 = \widehat{c}_0\|f\|^2_{L_\infty}, \text{ если } \widehat{c}_0 \geqslant 0, \quad c_0 = \widehat{c}_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}, \text{ если } \widehat{c}_0 < 0; \tag{4.13}$$

$$c_3 = \|f\|^2_{L_\infty}\widehat{c}_3. \tag{4.14}$$

При $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ запишем неравенство (4.12) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. Получим

$$-\widetilde{c}\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \widetilde{c}_2\|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

С учетом (4.5) отсюда следует

$$\begin{aligned} &-(1-\kappa)\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_2\|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где

$$c_2 = \widetilde{c}_2\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \kappa = 1 - \widetilde{c}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \kappa \leqslant 1. \tag{4.16}$$

4.5 Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{gathered}\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\varepsilon \mathrm{Re}\,(\mathcal{Y}\mathbf{u},\mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[\mathbf{u},\mathbf{u}] \\ + \lambda\varepsilon^2(\mathcal{Q}_0\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in \mathrm{Dom}\,\mathcal{X},\end{gathered} \tag{4.17}$$

где $0<\varepsilon\leqslant 1$, и *параметр* $\lambda\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет следующему условию*:

$$\begin{aligned}&\lambda > \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}(c_0+c_4), \text{ если } \lambda\geqslant 0,\\ &\lambda > \|\mathcal{Q}_0\|^{-1}_{L_\infty}(c_0+c_4), \text{ если } \lambda<0 \text{ (и } c_0+c_4<0).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Оценим форму (4.17) снизу. Пусть $\beta>0$ определено равенством

$$\begin{aligned}&\beta = \lambda\|\mathcal{Q}_0^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda\geqslant 0,\\ &\beta = \lambda\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda<0 \text{ (и } c_0+c_4<0).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Комбинируя (4.10), нижнюю оценку (4.15), (4.18) и (4.19), имеем

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u}\in\mathrm{Dom}\,\mathcal{X}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.20}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}(\varepsilon)$ положительно определена. Объединяя (4.6), (4.9) при $\nu=1$ и верхнюю оценку (4.15), получим оценку сверху

$$\begin{gathered}\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2+c_1^2+c_2)\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + (C(1)+c_3+|\lambda|\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \\ \mathbf{u}\in\mathrm{Dom}\,\mathcal{X}.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Из оценок (4.20), (4.21) следует, что форма $\mathfrak{b}(\varepsilon)$ замкнута. *Отвечающий ей положительно определенный оператор в пространстве* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *обозначим через* $\mathcal{B}(\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\varepsilon) &= \mathcal{A} + \varepsilon(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2) + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0\\ &= f^*b(\mathbf{D})^*gb(\mathbf{D})f + \varepsilon\sum_{j=1}^d f^*\left(a_jD_j + D_ja_j^*\right)f + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \varepsilon^2\lambda\mathcal{Q}_0,\end{aligned} \tag{4.22}$$

где $\mathcal{Q}$ следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu$.

Для дальнейших ссылок назовем „исходными данными“ величины

$$
\begin{aligned}
&d,\ m,\ n,\ \varrho;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|f\|_{L_\infty},\ \|f^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)},\\
&j=1,\dots,d;\ \widetilde{c},\ \widehat{c}_0,\ \widetilde{c}_2,\ \widehat{c}_3\ \text{ из условия 4.1};\ \lambda.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Мы будем следить за зависимостью постоянных в оценках от этих исходных данных и от параметров решетки. Постоянные c_1, $C(1)$, κ, c_2, c_3, c_4, c_0, β полностью определяются исходными данными и решеткой.

5 Разложение оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл

5.1 Преобразование Гельфанда

Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ первоначально задается на функциях класса Шварца $\mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ формулой

$$
\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})=(\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x})=|\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\exp(-i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle)\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}),\quad \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.
$$

При этом $\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega|\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k}=\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}$, и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$
\mathcal{U}\ :\ L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k}=:\mathcal{H}. \tag{5.1}
$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ *обозначим подпространство тех функций из* $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-*периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит классу* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Включение $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п.в. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$
\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega\left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2+|\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k}<\infty.
$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую матрицу-функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{H}$. Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

5.2 Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

(См. [BSu1, п. 2.2.1].) Положим

$$
\mathfrak{H}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^n),\quad \mathfrak{H}_*=L_2(\Omega;\mathbb{C}^m),\quad \widetilde{\mathfrak{H}}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^{dn}) \tag{5.2}
$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, задаваемый соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.3}$$

$$\mathfrak{d} := \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} \ : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\}. \tag{5.4}$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) := \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Из (4.1) и (4.2) вытекают оценки

$$\begin{gathered}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ \mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n).\end{gathered} \tag{5.5}$$

Из (5.5) и компактности вложения $\widetilde{H}^1(\Omega;\,\mathbb{C}^n)$ в $\mathfrak{H}$ следует, что спектр $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker}\mathcal{X}(0)$. Из неравенства (5.5) при $\mathbf{k} = 0$ вытекает, что

$$\mathfrak{N} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) \ : \ f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \tag{5.6}$$

Как показано в [BSu1, (2.2.11), (2.2.12)], справедлива оценка

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \quad c_* = \alpha_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{5.7}$$

В соответствии с [BSu1, (2.2.14)] расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ допускает оценку

$$d^0 \geqslant 4c_* r_0^2. \tag{5.8}$$

5.3 Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, действующий на области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \mathfrak{d}$ по правилу

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u} = \operatorname{col}\{(D_1+k_1)f\mathbf{u},\dots,(D_d+k_d)f\mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{5.9}$$

Из нижней оценки (5.5) вытекает, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant c_1\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \tag{5.10}$$

где постоянная c_1 определена в (4.7).

Рассмотрим оператор $Y_2 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$, заданный соотношением

$$Y_2 \mathbf{u} = \operatorname{col}\{a_1^* f\mathbf{u}, \dots, a_d^* f\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom} Y_2 = \mathfrak{d}. \tag{5.11}$$

Как показано в [Su6, п. 5.7], для любого $\nu > 0$ найдутся постоянные $C_j(\nu) > 0$, $j = 1, \dots, d$, такие, что при $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\|a_j^* \mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \nu \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + C_j(\nu)\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \ \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \ j = 1, \dots, d.$$

Пусть $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Тогда, суммируя указанные неравенства по j и учитывая (4.2), (5.5), получаем, что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ (та же, что и в (4.9)) такая, что

$$\|Y_2 \mathbf{u}\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.12}$$

5.4 Оператор $\mathcal{Q}_0$, форма $q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

Пусть $\mathcal{Q}_0$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, действующий как умножение на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x})$.

В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму $q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u}\rangle$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Заменяя в (4.12) $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle)$ (эти функции принадлежат $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ одновременно) и используя (5.5), получаем, что

$$\begin{aligned} -(1-\kappa)\|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_2 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \\ \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Здесь постоянные κ, c_0, c_2, c_3 те же, что и в (4.15).

5.5 Операторный пучок $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}, Y_2\mathbf{u})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ + \varepsilon^2 q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \lambda\varepsilon^2 (\mathcal{Q}_0\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \end{aligned}$$

Из (4.18), (4.19), (5.10), (5.12) и (5.13) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \beta\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{5.14}$$

Далее, из (5.10), (5.12) при $\nu = 1$ и верхней оценки (5.13) получаем

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty})\varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{5.15}$$

Неравенства (5.14), (5.15) показывают, что форма $\mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)$ замкнута на области определения (5.4) и положительно определена. Порожденный этой формой самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) &= \mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon(Y_2^*\mathcal{Y}(\mathbf{k}) + \mathcal{Y}(\mathbf{k})^*Y_2) + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \lambda\varepsilon^2\mathcal{Q}_0 \\ &= f^*b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*gb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f \\ &+ \varepsilon\sum_{j=1}^{d} f^*\left(a_j(D_j+k_j) + (D_j+k_j)a_j^*\right)f + \varepsilon^2 f^*\mathcal{Q}f + \lambda\varepsilon^2 f^*f. \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.6 Разложение в прямой интеграл для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$

Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор (4.22), действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, раскладывается в прямой интеграл операторов
(5.16), действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}(\varepsilon)\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)\,d\mathbf{k}.$$

Сказанное означает следующее. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathfrak{b}(\varepsilon)$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot)\in\mathfrak{d} \text{ при п.в. } \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \tag{5.17}$$

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{b}(\mathbf{k},\varepsilon)[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot),\,\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\cdot)]\,d\mathbf{k}. \tag{5.18}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{u}}\in\mathcal{H}$ выполнено (5.17) и интеграл в (5.18) конечен, то $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathfrak{b}(\varepsilon)$ и выполнено (5.18).

6 Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ в абстрактную схему

6.1

При $d>1$ операторы $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu1, гл. 2], выделим одномерный параметр t, полагая $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}$, $t=|\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Будем применять схему гл. 1. При этом возникающие объекты будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}$, и необходимо следить за равномерностью построений и оценок по параметру $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$

и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ определены в (5.2). Положим $X(t) = X(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.3) $X(t;\boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = \mathcal{X}(0) = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, и $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.6) ядро $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0)$ n-мерно. Условие 1.1 выполнено. Величина d^0 допускает оценку (5.8). Как показано в [BSu1, гл. 2, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$ также выполнено.

Далее, роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом согласно (5.9) $Y(t;\boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\begin{aligned} &Y_0\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \operatorname{col}\{D_1 f\mathbf{u}, \dots, D_d f\mathbf{u}\}, \quad \operatorname{Dom} Y_0 = \mathfrak{d}; \\ &Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \operatorname{col}\{\theta_1 f\mathbf{u}, \dots, \theta_d f\mathbf{u}\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Условие 1.2 выполнено за счет оценки (5.10). Оператор Y_2 определен в (5.11). Условие 1.3 выполнено в силу (5.12). Роль формы $\mathfrak{q}$ из п. 1.3 играет форма q_Ω. Условие 1.4 выполнено в силу (5.13). Роль оператора Q_0 из п. 1.3 играет оператор умножения на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$. Ограничение (1.5) на параметр λ выполнено в силу (4.18). Оценки (5.14), (5.15) соответствуют неравенствам (1.7), (1.9).

Наконец, в качестве операторного пучка $B(t,\varepsilon)$ (см. (1.10)) выступает операторное семейство (5.16): $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta},\varepsilon)$.

Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

6.2

В соответствии с п. 1.5 надлежит фиксировать положительное число δ такое, что $\delta < \kappa d^0/13$. Учитывая (5.7), (5.8), положим

$$\delta = \frac{1}{4}\kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\kappa \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2. \tag{6.2}$$

Заметим, что из (4.1), (4.2) и (6.1) вытекает

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| = \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{6.3}$$

Вместо точного значения постоянной (1.12), зависящего от $\boldsymbol{\theta}$ и равного $\delta^{1/2}((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|^2_{L_\infty})^{-1/2}$, примем следующее заниженное значение, подходящее при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$\tau_0 = \delta^{1/2}((2 + c_1^2 + c_2)\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|^2_{L_\infty})^{-1/2}. \tag{6.4}$$

Условие (2.1) выполнено в силу (5.7). Тогда с учетом (5.14) для оператора $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ выполнено условие вида (2.2):

$$B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) \geqslant \check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)I, \quad \mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}\in\widetilde{\Omega}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{6.5}$$

$$\check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*, 2\beta\}. \tag{6.6}$$

6.3 Эффективные характеристики

Эффективные характеристики для случая $f=\mathbf{1}_n$ построены в [Su6, п. 6.3, 6.4, 7.1]. В этом пункте будут сформулированы необходимые результаты.

Все объекты, относящиеся к случаю $f=\mathbf{1}_n$, далее помечаются верхним значком „$\widehat{\ }$“. Имеем $\widehat{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. В соответствии с п. 6.1 $\widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta})=\widehat{X}_0+t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{X}_0=h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$, $\operatorname{Dom}\widehat{X}_0=\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, и $\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})$. Формально $\widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta})=\widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta})^*\widehat{X}(t;\boldsymbol{\theta})$. В случае $f=\mathbf{1}_n$ ядро (5.6) совпадает с подпространством констант $\widehat{\mathfrak{N}}=\{\mathbf{u}\in\mathfrak{H} \ : \ \mathbf{u}=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}$. Ортогональный проектор $\widehat{P}$ пространства $\mathfrak{H}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}=\mathbb{C}^n$ — оператор усреднения по ячейке Ω: $\widehat{P}\mathbf{u}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Далее, $\widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta})=\widehat{Y}_0+t\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta}):\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}$, где $\widehat{Y}_0\mathbf{u}=\mathbf{D}\mathbf{u}=\operatorname{col}\{D_1\mathbf{u},\dots,D_d\mathbf{u}\}$, $\operatorname{Dom}\widehat{Y}_0=\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, и $\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}=\operatorname{col}\{\theta_1\mathbf{u},\dots,\theta_d\mathbf{u}\}$. Оператор $\widehat{Y}_2:\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}$ действует на области определения $\operatorname{Dom}\widehat{Y}_2=\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ по правилу $\widehat{Y}_2\mathbf{u}=\operatorname{col}\{a_1^*\mathbf{u},\dots,a_d^*\mathbf{u}\}$. Роль формы $\widehat{\mathfrak{q}}[\mathbf{u},\mathbf{u}]$ играет форма $\int_\Omega\langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$, в роли оператора $\widehat{Q}_0$ выступает тождественный оператор I.

Операторный пучок $\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$ формально дается выражением

$$\widehat{B}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})=\widehat{A}(t;\boldsymbol{\theta})+\varepsilon(\widehat{Y}_2^*\widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta})+\widehat{Y}(t;\boldsymbol{\theta})^*\widehat{Y}_2)+\varepsilon^2 Q+\lambda\varepsilon^2 I.$$

В соответствии с п. 1.6 введем операторы $\widehat{Z}$, $\widehat{\widetilde{Z}}$. Оператор $\widehat{Z}$ сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Как показано в [BSu3, (4.2)], $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})=\Lambda b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}$, где $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n\times m)$-матрица-функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)=0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0. \tag{6.7}$$

В соответствии с [Su6, п. 6.3] $\widehat{\widetilde{Z}}=\widetilde{\Lambda}\widehat{P}$, где $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n\times n)$-матрица-функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})+\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^*=0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0. \tag{6.8}$$

Спектральный росток $\widehat{S}$, введенный в п. 1.7, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [BSu1, гл. 3, §1] оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как оператор умножения на матрицу $b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Здесь g^0 — постоянная $(m \times m)$-матрица, называемая *эффективной матрицей* и заданная выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)\, d\mathbf{x}. \tag{6.9}$$

В соответствии с [Su6, (7.2), (7.3)] определим постоянные матрицы

$$V := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{6.10}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{6.11}$$

Оператор $\widehat{L}(t,\varepsilon)$, введенный в (2.21), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Вернемся к параметру $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$: $\widehat{L}(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta}) = \widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Оказывается (см. [Su6, (7.8)]), справедливо представление

$$\begin{aligned}\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) + \varepsilon(-b(\mathbf{k})^* V - V^* b(\mathbf{k})) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) k_j \\ + \varepsilon^2(-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I),\end{aligned} \tag{6.12}$$

где $(\overline{a_j + a_j^*}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (a_j(\mathbf{x}) + a_j(\mathbf{x})^*)\, d\mathbf{x}$ и

$$\overline{\mathcal{Q}} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega d\mu(\mathbf{x}). \tag{6.13}$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}), \quad \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) = -b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* V + \sum_{j=1}^d \overline{a_j}(D_j + k_j),$$

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon(\widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) + \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k})^*) + \varepsilon^2(\overline{\mathcal{Q}} - W + \lambda I).$$

Тогда

$$\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}. \tag{6.14}$$

6.4 Случай $f \neq \mathbf{1}_n$

Возвращаемся к рассмотрению операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ общего вида (4.22) и соответствующих семейств $B(t,\varepsilon;\boldsymbol{\theta})$, описанных в п. 6.1. Верхний значок „$\widehat{\ }$“ удерживается для обозначения объектов, отвечающих $f = \mathbf{1}_n$ при сохранении тех же b, g, a_j, $j = 1, \dots, d$, λ, $\mathcal{Q}$.

Воспользуемся схемой п. 1.10–1.12. Сейчас $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, а роль изоморфизма M играет оператор умножения на матрицу-функцию f. В качестве оператора G из п. 1.10 (см. (1.40)) выступает ρ — оператор умножения на матрицу-функцию $\rho(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок ρ в ядре $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{\rho} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\,d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (3.1)) играет оператор умножения на постоянную матрицу $f_0 := (\overline{\rho})^{-1/2}$. Заметим, что

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{6.15}$$

В соответствии с (5.7) выполнено неравенство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_*|\mathbf{k}|^2 I$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, где $\widehat{c}_* = \alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Отметим, что постоянные c_* и $\widehat{c}_*$ связаны равенством $c_* = \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\widehat{c}_*$. Согласно (1.47) $\beta \leqslant \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\widehat{\beta}$. В силу (6.6) имеем $\check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*, 2\beta\}$, $\widehat{\check{c}}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa\widehat{c}_*, 2\widehat{\beta}\}$. Следовательно, $\check{c}_* \leqslant \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\widehat{\check{c}}_*$. В соответствии с (2.22) $\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon) \geqslant \widehat{\check{c}}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)\mathbf{1}_n$. С учетом (6.15) отсюда вытекает оценка

$$f_0\widehat{L}(\mathbf{k},\varepsilon)f_0 \geqslant \check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)\mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.16}$$

7 Аппроксимация оператора $f\exp(-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s)f^*$

7.1 Старший член аппроксимации

Старший член аппроксимации оператора $f\exp(-\mathcal{A}(\mathbf{k})s)f^*$ был получен в [Su2, п. 6.2], аппроксимация при учете корректора — в [Su5, §8]. Рассмотрим теперь экспоненту оператора

$$\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon) = f^*\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)f. \tag{7.1}$$

Будем применять теорему 3.2 к оператору (7.1). Для этого нужно реализовать значения постоянных. Постоянные c_1, $C(\nu)$, κ, c_0, c_2, c_3, c_4 определены в §4 (см. (4.7), (4.9), (4.11), (4.13), (4.14), (4.16)). Постоянная λ подчинена условию (4.18), β определено в (4.19), а c_* и $\check{c}_*$ определены в (5.7), (6.6). Постоянные δ и τ_0 определяются в соответствии с (6.2) и (6.4).

Согласно (1.29), (1.30) введем постоянные $C_T^{(1)}$ и $C_T^{(2)}$, которые теперь зависят от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Учитывая (4.7) и (6.3), примем следующие завышенные значения, подходящие при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$C_T^{(1)} = \max\{2 + \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, (\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty} + C(1))\delta^{-1}\},$$
$$C_T^{(2)} = \max\{c_2 + 1, (\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty} + \|f\|^2_{L_\infty} + C(1) + c_3 + |\lambda|\|f\|^2_{L_\infty})\delta^{-1}\}.$$

Используя эти значения $C_T^{(1)}$ и $C_T^{(2)}$, определяем постоянные C_T, C_T^0, C_1, C_2, C_5, C_6 по формулам (1.31), (1.32), (1.33), (2.13) и (2.19); тогда все эти постоянные не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно (2.17) полагаем

$$C_* = \frac{1}{2}\min\{\check{c}_*; \delta\tau_0^{-2}\}. \tag{7.2}$$

Введем обозначение $\mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s) := f_0 e^{-f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon) f_0 s} f_0$ и воспользуемся теоремой 3.2. С учетом (6.14) из (3.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s} f^* - \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad \leqslant C_6\|f\|^2_{L_\infty}(1+s)^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Теперь проведем оценки в случае $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$. Из (6.5) следует, что

$$\|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s} f^*\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s}. \tag{7.4}$$

В силу (6.14), (6.15) и (6.16) имеем

$$\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant |f_0|^2 e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s}. \tag{7.5}$$

Объединяя (7.4), (7.5) и используя (7.2) и неравенство $e^{-\alpha} \leqslant (1+\alpha)^{-1/2}$, $\alpha \geqslant 0$, находим, что при $s \geqslant 0$ и $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$ выполнено

$$\begin{aligned} &\|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s} f^* - \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} \max\{1; \sqrt{2}\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}\}(1+s)^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

На основании оценок (7.3) и (7.6) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s} f^* - \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \max\{C_6; 2\sqrt{2}\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}\}(1+s)^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Покажем, что в (7.7) оператор $\widehat{P}$ может быть заменен на I. Так как $\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)$ — оператор с символом $f_0\exp(-f_0\widehat{L}(\mathbf{b}+\mathbf{k},\varepsilon)f_0 s)f_0$, в силу (6.16), (6.15) и (7.2) имеем

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)(I-\widehat{P})\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}+\mathbf{b}|^2+\varepsilon^2)s} \\
&\leqslant \|f\|^2_{L_\infty}\max\{1;\sqrt{2}\check{c}_*^{-1/2}r_0^{-1}\}(1+s)^{-1/2}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Комбинируя (7.7) и (7.8), приходим к следующему результату.

Теорема 7.1. *При $s\geqslant 0$, $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$
\|fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_1(1+s)^{-1/2}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}.
$$

Здесь $\mathcal{C}_1 := \|f\|^2_{L_\infty}\max\{C_6; 2\sqrt{2}\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}\} + \|f\|^2_{L_\infty}\max\{1;\sqrt{2}\check{c}_*^{-1/2}r_0^{-1}\}$.

7.2 Аппроксимация при учете корректора

Будем применять теорему 3.3 к операторному семейству $\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)$. Для этого нужно реализовать значения оценочных постоянных. Постоянные C_T, C_1, C_2 определены в п. 7.1. Согласно (1.25) и учитывая (6.3), примем следующее завышенное значение постоянной c_5:

$$
\begin{aligned}
c_5 := &\left(\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty} + c_1 C(1)^{1/2}\right)^2 + 2C(1)^{1/2}\|f\|_{L_\infty} \\
&+ \max\{|c_0|; c_3\} + |\lambda|\|f\|^2_{L_\infty}.
\end{aligned}
$$

При таком значении c_5 определим постоянные C_3, C_4, C_7, C_8 в соответствии с (1.36), (1.38), (2.29) и (2.32); тогда они не зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

Теперь введем операторы $\widehat{Z}_\rho(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\widehat{Z}}_\rho$, действующие в $\mathfrak{H}$, по рецепту из п. 1.13. Определим Γ-периодическую $(n\times m)$-матрицу-функцию $\Lambda_\rho(\mathbf{x})$, удовлетворяющую уравнению

$$
b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})\left(b(\mathbf{D})\Lambda_\rho(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right) = 0, \quad \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\Lambda_\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,
$$

которое понимается в слабом смысле. Ср. [BSu3, §5]. Очевидно, $\Lambda_\rho(\mathbf{x})$ отличается от решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (6.7) на постоянное слагаемое:

$$
\Lambda_\rho(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_\rho^0, \quad \Lambda_\rho^0 = -\left(\overline{\rho}\right)^{-1}\left(\overline{\rho\Lambda}\right). \tag{7.9}
$$

В [BSu3, п. 7.3] установлена следующая оценка:

$$|\Lambda_\rho^0| \leqslant C_\rho := m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2. \qquad (7.10)$$

Согласно [BSu3, §5] роль оператора $\widehat{Z}_G$ из п. 1.13 играет оператор $\widehat{Z}_\rho(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_\rho b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}$. С учетом $b(\mathbf{D})\widehat{P} = 0$ имеем $t\widehat{Z}_\rho(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_\rho b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

В соответствии с (1.56) определим в $\mathfrak{H}$ оператор $\widehat{\widehat{Z}}_\rho$, сопоставляющий элементу $\widehat{\mathbf{u}} \in \mathfrak{H}$ решение $\mathbf{w}^{(\rho)} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{w}^{(\rho)} + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{c} = 0, \quad \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\mathbf{w}^{(\rho)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{c} = \widehat{P}\widehat{\mathbf{u}}.$$

Введем Γ-периодическую $(n \times n)$-матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}_\rho(\mathbf{x})$, решающую уравнение

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_\rho(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\widetilde{\Lambda}_\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Это уравнение понимается в слабом смысле. Заметим, что

$$\widetilde{\Lambda}_\rho(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \widetilde{\Lambda}_\rho^0, \quad \widetilde{\Lambda}_\rho^0 = -\left(\overline{\rho}\right)^{-1}\left(\overline{\rho\widetilde{\Lambda}}\right), \qquad (7.11)$$

где $\widetilde{\Lambda}$ — Γ-периодическое решение задачи (6.8). Как показано в [Su6, (7.52)],

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty},$$

где постоянная C_a определена ниже в (7.24). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}|\overline{\rho\widetilde{\Lambda}}| &\leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2|\Omega|^{-1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leqslant (2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2|\Omega|^{-1/2}.\end{aligned}$$

Следовательно, для $\widetilde{\Lambda}_\rho^0$ верна оценка

$$|\widetilde{\Lambda}_\rho^0| \leqslant \widetilde{C}_\rho := (2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2|\Omega|^{-1/2}. \qquad (7.12)$$

Из определений $\widehat{\widehat{Z}}_\rho$ и $\widetilde{\Lambda}_\rho$ вытекает тождество $\widehat{\widehat{Z}}_\rho = \widetilde{\Lambda}_\rho\widehat{P}$.

С учетом равенств $t\widehat{Z}_\rho(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_\rho b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}$, $\widehat{\widetilde{Z}}_\rho = \widetilde{\Lambda}_\rho \widehat{P}$ из теоремы 3.3 следует оценка

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \left(I + \Lambda_\rho b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_\rho\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_8\|f\|_{L_\infty} s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s>0, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2. \tag{7.13}$$

Используя (7.9), (7.11), покажем, что в (7.13) Λ_ρ и $\widetilde{\Lambda}_\rho$ могут быть заменены на Λ и $\widetilde{\Lambda}$ соответственно. Используя (5.15) в случае $f = \mathbf{1}_n$, несложно убедиться (см. [Su6, (7.32)]), что справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_P(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{1/2}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \tag{7.14}$$

с постоянной $C_P = \max\{(2+c_1^2+c_2)^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}; (\widehat{C}(1)+\widehat{c}_3+|\lambda|)^{1/2}\}$. Комбинируя (4.1), (7.5), (7.10), (7.12), (7.14), с учетом $b(\mathbf{D})\widehat{P}=0$ и (7.2) находим

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}&\left(\Lambda_\rho^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}_\rho^0\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\leqslant \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\|(\alpha_1^{1/2}|\Lambda_\rho^0||\mathbf{k}| + |\widetilde{\Lambda}_\rho^0|\varepsilon)\|f\|_{L_\infty}^2 e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s} \\ &\leqslant 2C_P\check{c}_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2(\alpha_1^{1/2}C_\rho+\widetilde{C}_\rho)s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s>0, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.15}$$

Объединяя оценки (7.13) и (7.15) и принимая во внимание (7.9), получим

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}&\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\leqslant C_9 s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s>0, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2,\end{aligned} \tag{7.16}$$

где $C_9 = C_8\|f\|_{L_\infty} + 2C_P\check{c}_*^{-1}\|f\|_{L_\infty}^2(\alpha_1^{1/2}C_\rho+\widetilde{C}_\rho)$.

7.3 Оценки в случае $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2 > \tau_0^2$

Каждый член под знаком нормы в (7.16) будем оценивать по отдельности. Из (7.1) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2 &= (\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\mathbf{u}, fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\mathbf{u})_{\mathfrak{H}} \\ &= \|\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2 \leqslant \|\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}^2\|f\|_{L_\infty}^2\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2.\end{aligned} \tag{7.17}$$

В силу (6.5) и (7.2) имеем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant \sup_{\alpha\geqslant \check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)} 2\alpha^{-1/2}s^{-1}e^{-\alpha s/2}\\ &\leqslant 2\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s>0, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (7.17) при $s>0$ и $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$ вытекает оценка

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}. \tag{7.18}$$

Из (7.2), (7.5) и (7.14) следует, что при $s>0$ и $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}C_P\check{c}_*^{-1}\tau_0^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}. \tag{7.19}$$

Оценим теперь норму корректора. Имеем

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ &\quad\leqslant \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ &\quad+\varepsilon\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Оценим норму оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}$. Комбинируя (4.1), (7.2), (7.5) и тождество $b(\mathbf{D})\widehat{P}=0$, находим

$$\begin{aligned}\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant \alpha_1^{1/2}|\mathbf{k}|\|f\|^2_{L_\infty}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s}\\ &\leqslant 2\alpha_1^{1/2}\check{c}_*^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.21}$$

Операторы $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m$, $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\Lambda}\widehat{P}$ оценивались в [Su6, леммы 7.2 и 7.3]. Сформулируем результаты.

Лемма 7.2. *При $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_\Lambda(\mathbf{k},\varepsilon), \tag{7.22}$$

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbf{k},\varepsilon), \tag{7.23}$$

где величины $C_\Lambda(\mathbf{k},\varepsilon)$, $C_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbf{k},\varepsilon)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}C_\Lambda(\mathbf{k},\varepsilon)^2 &= (2+c_1^2+c_2)m(\|g\|^{1/2}_{L_\infty}+c^{(1)}|\mathbf{k}|)^2+c^{(2)}\varepsilon^2,\\ C_{\widetilde{\Lambda}}(\mathbf{k},\varepsilon)^2 &= (2+c_1^2+c_2)n|\Omega|^{-1}(c^{(3)}+c^{(4)}|\mathbf{k}|)^2+c^{(5)}\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Здесь
$$C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_\Omega |a_j(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}, \tag{7.24}$$
$$c^{(1)} = (2r_0)^{-1}\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|_{L_\infty},$$
$$c^{(2)} = (\widehat{C}(1)+\widehat{c}_3+|\lambda|)m(2r_0)^{-2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|g\|_{L_\infty},$$
$$c^{(3)} = C_a\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \quad c^{(4)} = (2r_0)^{-1}C_a\alpha_0^{-1}\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty},$$
$$c^{(5)} = (\widehat{C}(1)+\widehat{c}_3+|\lambda|)(2r_0)^{-2}C_a^2 n\alpha_0^{-2}\|g^{-1}\|^2_{L_\infty}|\Omega|^{-1}.$$

Следствие 7.3. *При* $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*
$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_\Lambda(r_1,1), \quad \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{\widetilde{\Lambda}}(r_1,1). \tag{7.25}$$

Заметим, что из (7.21) и (7.22) вытекает оценка
$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ &\quad\leqslant C_\Lambda(\mathbf{k},\varepsilon)\alpha_1^{1/2}2\check{c}_*^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s}\\ &\quad\leqslant \check{c}_*^{-1}C_\Lambda\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s}, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2,\end{aligned} \tag{7.26}$$
где
$$C_\Lambda^2 = 4\alpha_1(2+c_1^2+c_2)m\left(\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\tau_0^{-1}+c^{(1)}\right)^2+\alpha_1 c^{(2)}.$$
Аналогично из (7.2), (7.5) и (7.23) следует, что при $|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$ имеем
$$\varepsilon\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \check{c}_*^{-1}C_{\widetilde{\Lambda}}\|f\|^2_{L_\infty}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s}, \tag{7.27}$$
где
$$C_{\widetilde{\Lambda}}^2 = (2+c_1^2+c_2)n|\Omega|^{-1}(2c^{(3)}\tau_0^{-1}+c^{(4)})^2+4c^{(5)}.$$

Подытожим результаты. Из (7.20), (7.26) и (7.27) вытекает оценка
$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ &\quad\leqslant \check{c}_*^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}(C_\Lambda+C_{\widetilde{\Lambda}})s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s}, \quad s>0, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2.\end{aligned} \tag{7.28}$$

Комбинируя (7.18), (7.19) и (7.28), находим
$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*-\left(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\ &\quad\leqslant C_{10}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s}, \quad s>0, \quad |\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2>\tau_0^2,\end{aligned} \tag{7.29}$$

где $C_{10} = 2\|f\|_{L_\infty}\check{c}_*^{-1/2}\tau_0^{-1}+2\|f\|^2_{L_\infty}C_P\check{c}_*^{-1}\tau_0^{-1}+\check{c}_*^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}(C_\Lambda+C_{\widetilde{\Lambda}})$.

7.4

Объединяя (7.16) и (7.29), приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \left(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\&\quad\leqslant \max\{C_9;C_{10}\}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s},\quad s>0,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned}\tag{7.30}$$

Покажем, что в старшем члене аппроксимации оператор $\widehat{P}$ может быть заменен на I. Для этого оценим норму оператора $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp$. В силу оценки (5.15) для случая $f=\mathbf{1}_n$ имеем

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\leqslant(2+c_1^2+c_2)\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\\&\quad+\left(\widehat{C}(1)+\widehat{c}_3+|\lambda|\right)\varepsilon^2\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}},\quad \mathbf{u}\in\mathfrak{H}.\end{aligned}\tag{7.31}$$

Так как $\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)$ — оператор с символом $f_0\exp(-f_0\widehat{L}(\mathbf{b}+\mathbf{k},\varepsilon)f_0s)f_0$, в силу (4.1), (6.15), (6.16), (7.2) и оценки $|\mathbf{b}+\mathbf{k}|\geqslant r_0$ при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$, $0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}$, имеем

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\&\quad\leqslant\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}+\mathbf{k}|e^{-\check{c}_*(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)s}\\&\quad\leqslant 2\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\check{c}_*^{-1}r_0^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s},\quad s>0.\end{aligned}\tag{7.32}$$

Аналогично, учитывая (6.16) и (7.2), получим

$$\varepsilon\|\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant\|f\|^2_{L_\infty}\check{c}_*^{-1}r_0^{-1}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s},\quad s>0.\tag{7.33}$$

Подставляя (7.32) и (7.33) в (7.31), приходим к оценке

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\widehat{P}^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\leqslant C_{11}s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s},\quad s>0,\tag{7.34}$$

где $C_{11}=r_0^{-1}\check{c}_*^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}(4\|g\|_{L_\infty}\alpha_1(2+c_1^2+c_2)+\widehat{C}(1)+\widehat{c}_3+|\lambda|)^{1/2}$.

Объединяя (7.30) и (7.34), получим оценку

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^*-\left(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\\&\quad\leqslant\mathcal{C}_2s^{-1}e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_*s},\quad s>0,\quad\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\end{aligned}\tag{7.35}$$

с постоянной $\mathcal{C}_2=\max\{C_9;C_{10}\}+C_{11}$.

7.5 Оценки при $0 < s < 1$

Покажем теперь, что при $s > 0$ левая часть (7.35) может быть также оценена через $\mathcal{C}_3 s^{-1/2} \exp(-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s)$ с некоторой постоянной $\mathcal{C}_3$. При $0 < s < 1$ эта оценка предпочтительнее, чем (7.35), но при $s \geqslant 1$ предпочтительнее оценка (7.35). Сейчас каждый член под знаком нормы в (7.35) будем оценивать независимо.

Используя (6.5), (7.2), (7.17) и неравенство $e^{-\alpha/2} \leqslant \alpha^{-1/2}$, $\alpha > 0$, заключаем, что при $s > 0$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2} f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s} f^* \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant \|f\|_{L_\infty} s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s}. \tag{7.36}$$

В силу (5.15) для случая $f = \mathbf{1}_n$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2} \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|^2_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} &\leqslant (2 + c_1^2 + c_2) \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|^2_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \\ &+ \left(\widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|\right) \varepsilon^2 \|\mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|^2_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Так как $\mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)$ — оператор с символом $f_0 \exp(-f_0 \widehat{L}(\mathbf{b}+\mathbf{k}, \varepsilon) f_0 s) f_0$, с учетом (4.1), (6.15), (6.16), (7.2) и неравенства $e^{-\alpha/2} \leqslant \alpha^{-1/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} &\leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sup_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}| e^{-\check{c}_* (|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) s} \\ &\leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \check{c}_*^{-1/2} s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s}, \quad s > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Аналогично

$$\varepsilon \|\mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \check{c}_*^{-1/2} s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s}, \quad s > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{7.39}$$

Из (7.37), (7.38) и (7.39) вытекает оценка

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2} \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant C_{12} s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s}, \quad s > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{7.40}$$

где $C_{12} = \check{c}_*^{-1/2} \|f\|^2_{L_\infty} (\|g\|_{L_\infty} \alpha_1 (2 + c_1^2 + c_2) + \widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|)^{1/2}$.

Оценим норму корректора. Подставляя оценки (7.25) в (7.20) и учитывая (4.1), (7.2), (7.5), при $s > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ имеем

$$\begin{aligned} &\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2} \left(\Lambda b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}\right) \mathcal{E}^0(\mathbf{k}, \varepsilon, s) \widehat{P} \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \\ &\quad \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \check{c}_*^{-1/2} (\alpha_1^{1/2} C_\Lambda(r_1, 1) + C_{\widetilde{\Lambda}}(r_1, 1)) s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) C_* s}. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Объединяя (7.36), (7.40) и (7.41), приходим к неравенству

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P} + \varepsilon\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_3 s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, \quad s>0, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \tag{7.42}$$

где $\mathcal{C}_3 = \|f\|_{L_\infty} + C_{12} + \|f\|^2_{L_\infty}\check{c}_*^{-1/2}(\alpha_1^{1/2}C_\Lambda(r_1,1) + C_{\widetilde{\Lambda}}(r_1,1))$.

Используя оценки (7.42) при $0 < s < 1$, (7.35) при $s \geqslant 1$, получим следующий результат.

Теорема 7.4. *При сделанных предположениях справедлива оценка*

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)s}f^* - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P} + \varepsilon\widetilde{\Lambda}\widehat{P}\right)\mathcal{E}^0(\mathbf{k},\varepsilon,s)\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \Phi_1(\mathbf{k},s,\varepsilon), \quad s>0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{7.43}$$

где

$$\Phi_1(\mathbf{k},s,\varepsilon) = \begin{cases} \mathcal{C}_2 s^{-1} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, & s\geqslant 1, \\ \mathcal{C}_3 s^{-1/2} e^{-(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)C_* s}, & 0<s<1. \end{cases}$$

8 Аппроксимация оператора $f\exp(-\mathcal{B}(\varepsilon)s)f^*$

8.1 Старший член аппроксимации

Вернемся к изучению оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим также оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$, отвечающий случаю $f = \mathbf{1}_n$. Оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ соответствует квадратичной форме $\widehat{\mathfrak{b}}(\varepsilon)$, получающейся из формы (4.17) при $f = \mathbf{1}_n$.

Согласно [BSu1, гл. 3, §1] оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{8.1}$$

называется *эффективным оператором* для $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Эффективная матрица g^0 определена в (6.9). Далее, положим

$$\widehat{\mathcal{Y}}^0 = -b(\mathbf{D})^* V + \sum_{j=1}^d \overline{a_j} D_j, \tag{8.2}$$

где матрица V определена в (6.10). Рассмотрим оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon) = \widehat{\mathcal{A}}^0 + \varepsilon(\widehat{\mathcal{Y}}^0 + (\widehat{\mathcal{Y}}^0)^*) + \varepsilon^2(\overline{\mathcal{Q}} - W + \lambda I).$$

Здесь W — матрица (6.11). Оператор $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ — ДО второго порядка с постоянными коэффициентами. Символ оператора $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ — матрица (6.12).

Обозначим $\mathcal{E}^0(\varepsilon, s) := f_0 e^{-f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon) f_0 s} f_0$. С помощью разложений операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ в прямой интеграл (см. §5) из теоремы 7.1 получаем следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям п.* 4.5. *Тогда при $s \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, справедлива оценка*

$$\|f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* - \mathcal{E}^0(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+s)^{-1/2} e^{-\varepsilon^2 C_* s}.$$

8.2 Аппроксимация при учете корректора

Пользуясь теоремой 7.4, получим более точную аппроксимацию для оператора $f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^*$. Отметим, что оператор $b(\mathbf{D})$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$, а операторы умножения на Γ-периодические матрицы-функции Λ и $\widetilde{\Lambda}$ под действием преобразования Гельфанда переходят в операторы умножения на те же матрицы-функции Λ и $\widetilde{\Lambda}$. Далее, положим $\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, где $[\widehat{P}]$ — оператор в $\mathcal{H}$ (см. (5.1)), действующий послойно как оператор $\widehat{P}$ усреднения по ячейке. В [BSu3, п. 6.1] показано, что Π — псевдодифференциальный оператор (ПДО) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$. Здесь $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$. То есть

$$(\Pi \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} (\mathcal{F}\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье.

Таким образом, оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi + \varepsilon \widetilde{\Lambda}\Pi \right) \mathcal{E}^0(\varepsilon, s) \right)$$

под действием преобразования Гельфанда раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (7.43). Отсюда и из (7.43) вытекает следующий результат.

Теорема 8.2. *Выполнена оценка*

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s}f^* - \left(I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi + \varepsilon\widetilde{\Lambda}\Pi\right)\mathcal{E}^0(\varepsilon,s)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant \Phi_2(s,\varepsilon),\quad s>0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\end{aligned} \tag{8.3}$$

где

$$\Phi_2(s,\varepsilon) = \begin{cases}\mathcal{C}_2 s^{-1}e^{-\varepsilon^2 C_* s}, & s\geqslant 1,\\ \mathcal{C}_3 s^{-1/2}e^{-\varepsilon^2 C_* s}, & 0<s<1.\end{cases} \tag{8.4}$$

8.3 Устранение оператора Π в корректоре при $s\geqslant 1$

Проанализируем возможность замены оператора Π на тождественный оператор I в корректоре. Для этого требуется оценить по норме оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\varepsilon,s)(I-\Pi).$$

Предложение 8.3. *Пусть* $\Xi(\varepsilon,s) = \mathcal{E}^0(\varepsilon,s)(I-\Pi)$. *Тогда при всех* $l>0$ *операторы* $b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)$ *и* $\varepsilon\Xi(\varepsilon,s)$ *ограничены из* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *в* $H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *и*

$$\|b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\mathcal{C}_l s^{-(l+1)/2}e^{-\varepsilon^2 C_* s},\quad s>0, \tag{8.5}$$

$$\varepsilon\|\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_l s^{-(l+1)/2}e^{-\varepsilon^2 C_* s},\quad s>0. \tag{8.6}$$

Доказательство. Так как $\Xi(\varepsilon,s)$ — псевдодифференциальный оператор с символом $f_0 e^{-f_0\widehat{L}(\boldsymbol{\xi},\varepsilon)f_0 s}f_0(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))$, в силу (4.1), (6.15) и (6.16) имеем

$$\begin{aligned}\|b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2\to H^l} &\leqslant \alpha_1^{1/2}\|f\|^2_{L_\infty}\sup_{|\boldsymbol{\xi}|>r_0}|\boldsymbol{\xi}|(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{l/2}e^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)s},\\ \varepsilon\|\Xi(\varepsilon,s)\|_{L_2\to H^l} &\leqslant \|f\|^2_{L_\infty}\sup_{|\boldsymbol{\xi}|>r_0}\varepsilon(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{l/2}e^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)s}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Здесь учтено, что $1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ при $|\boldsymbol{\xi}|\leqslant r_0$. Из (7.2) и (8.7) вытекают оценки (8.5), (8.6), где $\mathcal{C}_l = \|f\|^2_{L_\infty}\check{c}_*^{-(l+1)/2}(r_0^{-2}+1)^{l/2}\gamma_l$, а $\gamma_l = \sup_{\alpha>0}\alpha^{(l+1)/2}e^{-\alpha/2} = (l+1)^{(l+1)/2}e^{-(l+1)/2}$. $\square$

Предложение 8.4. *Пусть* $l=1$ *при* $d=1$, $l>1$ *при* $d=2$, *и* $l=d/2$ *при* $d\geqslant 3$. *Пусть* $[\Lambda]$ *и* $[\widetilde{\Lambda}]$ — *операторы умножения на матричнозначные функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *соответственно. Тогда операторы* $g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]$:

$H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $g^{1/2}b(\mathbf{D})[\widetilde{\Lambda}] : H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ непрерывны, причем

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_d, \tag{8.8}$$

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\widetilde{\Lambda}]\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_d. \tag{8.9}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_d$ и $\widetilde{\mathfrak{C}}_d$ зависят только от l, данных задачи (4.23) *и параметров решетки* Γ.

Доказательство. Оценка (8.8) установлена в [Su5, предложение 9.3]. Постоянную $\mathfrak{C}_d$ можно выписать явно (см. [Su5, п. 9.2]).

Докажем (8.9). Пусть $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$, $i = 1,\dots,n$, — столбцы матрицы $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{v}_i \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ является слабым Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_i = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{v}_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{8.10}$$

Здесь $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$. Так как $\mathbf{v}_i$ — Γ-периодическая функция с нулевым средним значением, справедлива оценка $\|\mathbf{v}_i\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1}\|\mathbf{D}\mathbf{v}_i\|_{L_2(\Omega)}$. Учитывая это и используя „энергетическое“ неравенство, несложно показать, что (см. [Su6, (7.51), (7.52)])

$$\|\mathbf{v}_i\|_{H^1(\Omega)} \leqslant (1 + (2r_0)^{-2})^{1/2} C_a \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{8.11}$$

где C_a — постоянная (7.24).

Напомним, что $b(\mathbf{D}) = \sum_{k=1}^d b_k D_k$, причем $|b_k| \leqslant \alpha_1^{1/2}$ в силу (4.1). Пусть $u \in H^l(\mathbb{R}^d)$. Справедливо равенство

$$g^{1/2}b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_i u) = g^{1/2}(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i)u + \sum_{k=1}^d g^{1/2} b_k (D_k u)\mathbf{v}_i. \tag{8.12}$$

Оценим второй член правой части (8.12):

$$\Big\| \sum_{k=1}^d g^{1/2} b_k (D_k u)\mathbf{v}_i \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 |\mathbf{v}_i|^2\,d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \tag{8.13}$$

Далее,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 |\mathbf{v}_i|^2\,d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \int_{\Omega+\mathbf{a}} |\mathbf{D}u|^2 |\mathbf{v}_i|^2\,d\mathbf{x}. \tag{8.14}$$

Будем использовать вложение $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n) \subset L_q(\Omega;\mathbb{C}^n)$, где $q=\infty$ при $d=1$, $q<\infty$ при $d=2$ и $q=2d/(d-2)$ при $d\geqslant 3$. При $d=2$ выберем $q=2/(l-1)$. Пусть $C(d,n)$ — норма рассматриваемого оператора вложения. Тогда

$$\|\mathbf{v}_i\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C(d,n)\|\mathbf{v}_i\|_{H^1(\Omega)}. \tag{8.15}$$

С помощью неравенства Гёльдера получим

$$\int_\Omega |\mathbf{v}_i|^2|\mathbf{D}u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \|\mathbf{v}_i\|^2_{L_q(\Omega)}\|\mathbf{D}u\|^2_{L_p(\Omega)}, \tag{8.16}$$

где $p=2$ при $d=1$, $p=2q/(q-2)=2/(2-l)$ при $d=2$, $p=d$ при $d\geqslant 3$.

Теперь используем вложение $H^{l-1}(\Omega;\mathbb{C}^d)\subset L_p(\Omega;\mathbb{C}^d)$, где $l=1$ и $p=2$ при $d=1$, $1<l<2$ и $p=2/(2-l)$ при $d=2$, $l=d/2$ и $p=d$ при $d\geqslant 3$. Пусть $\widetilde{c}_d$ — норма рассматриваемого оператора вложения. Тогда

$$\|\mathbf{D}u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \widetilde{c}_d\|u\|_{H^l(\Omega)}. \tag{8.17}$$

Подставляя (8.15), (8.17) в (8.16), получим

$$\int_\Omega |\mathbf{v}_i|^2|\mathbf{D}u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant C(d,n)^2\widetilde{c}_d^{\,2}\|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)}\|u\|^2_{H^l(\Omega)}.$$

В силу (8.14) и периодичности $\mathbf{v}_i$ отсюда следует

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2|\mathbf{v}_i|^2\,d\mathbf{x} \leqslant C(d,n)^2\widetilde{c}_d^{\,2}\|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)}\|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.18}$$

С учетом (8.13) неравенство (8.18) влечет оценку

$$\Big\|\sum_{k=1}^d g^{1/2}b_k(D_k u)\mathbf{v}_i\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C(d,n)\widetilde{c}_d\|\mathbf{v}_i\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.19}$$

Далее, из (8.10) вытекает тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i, b(\mathbf{D})\mathbf{w}\rangle\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^d\langle a_j(\mathbf{x})^*\mathbf{e}_i, D_j\mathbf{w}\rangle\,d\mathbf{x} = 0 \tag{8.20}$$

при любом $\mathbf{w}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ таком, что $\mathbf{w}(\mathbf{x})=0$ при $|\mathbf{x}|>R$ (с каким-либо $R>0$).

Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = |u(\mathbf{x})|^2 \mathbf{v}_i$. Подставив это в выражение (8.20), получим (ср. [Su6, (8.36)]), что

$$\mathcal{J}_0 := \int_{\mathbb{R}^d} |g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2, \tag{8.21}$$

$$\mathcal{J}_1 = -\int_{\mathbb{R}^d} \left\langle g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i, \sum_{k=1}^d g^{1/2} b_k ((D_k u)\overline{u} + u(D_k \overline{u}))\mathbf{v}_i \right\rangle d\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= -\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \langle a_j^* \mathbf{e}_i, D_j(|u|^2 \mathbf{v}_i)\rangle \, d\mathbf{x} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d \langle a_j^* \mathbf{e}_i, (D_j(u\mathbf{v}_i))\overline{u} + \mathbf{v}_i u (D_j \overline{u})\rangle \, d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Следуя [Su6], оценим член $\mathcal{J}_1$:

$$|\mathcal{J}_1| \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_i|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} + 2\|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 |\mathbf{v}_i|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Отсюда с учетом (8.18) получаем, что

$$|\mathcal{J}_1| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{J}_0 + 2\|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d C(d,n)^2 \widetilde{c}_d^{\,2} \|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.22}$$

Перейдем к оценке члена $\mathcal{J}_2$. В силу условия (4.8) на коэффициенты a_j и условия на l выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant C^2_{\Omega,l,\varrho} \|a_j\|^2_{L_\varrho(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.23}$$

Здесь $C_{\Omega,l,\varrho}$ — константа вложения $H^l(\Omega) \subset L_{2\varrho/(\varrho-2)}(\Omega)$. Имеем (ср. [Su6])

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}_2| &\leqslant \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} (|D_j(\mathbf{v}_i u)||a_j||u| + |\mathbf{v}_i||D_j u||a_j||u|) \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant \mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_i u)|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_i|^2 |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x} + \Big(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4}\Big) \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

при любом $\mu > 0$. Отсюда в силу (8.18), (8.23) вытекает оценка

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}_2| \leqslant \mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_i u)|^2 \, d\mathbf{x} + C(d,n)^2 \widetilde{c}_d^{\,2} \|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\mu}\Big) C^2_{\Omega,l,\varrho} \sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\varrho(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Объединяя (8.21), (8.22), (8.24), получим

$$\frac{1}{2}\mathcal{J}_0 \leqslant \mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_i u)|^2\, d\mathbf{x} + (2\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d + 1)C(d,n)^2 \widetilde{c}_d^{\,2} \|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\mu}\Big) C^2_{\Omega,l,\varrho} \sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\varrho(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.25}$$

Сопоставляя (8.12), (8.19) и (8.25), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \|g^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_i u)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\mathcal{J}_0 + 2\Big\| \sum_{k=1}^d g^{1/2} b_k (D_k u)\mathbf{v}_i \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant (10\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d + 4)C(d,n)^2 \widetilde{c}_d^{\,2} \|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ &+ (1+\mu^{-1}) C^2_{\Omega,l,\varrho} \sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\varrho(\Omega)} \|u\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)} + 4\mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_i u)|^2\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

В силу нижней оценки (4.5) для случая $f = \mathbf{1}_n$ имеем

$$4\mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_i u)|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{2} \|g^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_i u)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ \text{ при } \ \mu = \frac{1}{8}\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}.$$

Отсюда и из (8.26) с учетом (8.11) вытекает оценка $\|g^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_i u)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_v \|u\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}$, где

$$\mathfrak{C}_v^2 = (20\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d + 8)C(d,n)^2 \widetilde{c}_d^{\,2} (1 + (2r_0)^{-2}) C_a^2 \alpha_0^{-2} \|g^{-1}\|^2_{L_\infty}$$
$$+ (2 + 16\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}) C^2_{\Omega,l,\varrho} \sum_{j=1}^d \|a_j\|^2_{L_\varrho(\Omega)}.$$

Таким образом, $\|g^{1/2} b(\mathbf{D})[\mathbf{v}_i]\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_v$, $i = 1, \dots, n$, а тогда выполнена оценка (8.9) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_d = n^{1/2}\mathfrak{C}_v$. □

Предложение 8.5. *Пусть $\mathfrak{r} = 0$ при $d = 1$, $\mathfrak{r} > 0$ при $d = 2$, $\mathfrak{r} = d/2 - 1$ при $d \geqslant 3$. Тогда $[\Lambda] : H^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и $[\widetilde{\Lambda}] : H^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — непрерывные операторы, и выполнены оценки*

$$\|[\Lambda]\|_{H^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda, \tag{8.27}$$

$$\|[\widetilde{\Lambda}]\|_{H^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}. \tag{8.28}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_\Lambda$ и $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ зависят только от данных задачи (4.23) и параметров решетки Γ; в случае $d = 2$ они зависят также от $\mathfrak{r}$.

Доказательство. Оценка (8.27) установлена в [Su5, предложение 11.3]. Постоянную $\mathfrak{C}_\Lambda$ можно выписать явно (см. [Su5, п. 11.2]).

Докажем (8.28). Предположим, что $0 < \mathfrak{r} < 1$ в случае $d = 2$. Аналогично (8.14)–(8.18) с заменой $l-1$ на $\mathfrak{r}$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_i(\mathbf{x})|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant C(d,n)^2 \check{c}_d^2 \|\mathbf{v}_i\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Здесь $\check{c}_d$ — константа вложения $H^{\mathfrak{r}}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, где $\mathfrak{r} = 0$ и $p = 2$ при $d = 1$; $0 < \mathfrak{r} < 1$ и $p = 2/(1-\mathfrak{r})$ при $d = 2$; $\mathfrak{r} = d/2 - 1$ и $p = d$ при $d \geqslant 3$. Отсюда и из (8.11) вытекает оценка (8.28) с постоянной $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} = n^{1/2} C(d,n) \check{c}_d (1 + (2r_0)^{-2})^{1/2} C_a \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$. $\square$

На основании предложений 8.4 и 8.5 установим следующий результат.

Предложение 8.6. *Пусть $l = 1$ при $d = 1$, $l > 1$ при $d = 2$ и $l = d/2$ при $d \geqslant 3$. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Тогда $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}[\Lambda] : H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}[\widetilde{\Lambda}] : H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — непрерывные операторы, и*

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}[\Lambda]\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\mathcal{B}}, \quad \|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}[\widetilde{\Lambda}]\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{B}}. \quad (8.29)$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}$ и $\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{B}}$ зависят только от данных задачи (4.23) и параметров решетки Γ; в случае $d = 2$ они зависят также от l.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. В силу (4.21) для случая $f = \mathbf{1}_n$

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}\Lambda\mathbf{u}\|^2_{L_2} \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\Lambda\mathbf{u}\|^2_{L_2} + \left(\widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|\right)\varepsilon^2\|\Lambda\mathbf{u}\|^2_{L_2}. \quad (8.30)$$

Очевидно, $\mathfrak{r} := l-1$ удовлетворяет условиям предложения 8.5, поэтому из (8.27) следует, что

$$\|\Lambda\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\mathfrak{C}_\Lambda)^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\mathfrak{C}_\Lambda)^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \quad (8.31)$$

Согласно (8.8) справедлива оценка $\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\Lambda\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_d^2\|\mathbf{u}\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}$. Отсюда и из (8.30), (8.31) вытекает первая из оценок (8.29) с постоянной $\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}^2 = (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{C}_d^2 + \big(\widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|\big)\mathfrak{C}_\Lambda^2$.

На основании (8.9), (8.28) аналогично доказывается вторая из оценок (8.29) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{B}}^2 = (2 + c_1^2 + c_2)\widetilde{\mathfrak{C}}_d^2 + \big(\widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|\big)\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}^2$. $\square$

Объединяя (8.5), (8.6) и (8.29), получим, что

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\varepsilon,s)(I-\Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\quad\leqslant\left(\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}\alpha_1^{1/2}\mathcal{C}_l+\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{B}}\mathcal{C}_l\right)s^{-(l+1)/2}e^{-\varepsilon^2C_*s},\quad s>0,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\end{aligned}$$

где $l=1$ при $d=1$, $l>1$ при $d=2$, и $l=d/2$ при $d\geqslant 3$. Если $s\geqslant 1$, то $s^{-(l+1)/2}\leqslant s^{-1}$. В случае $d=2$ фиксируем l (например, $l=3/2$). Вместе с теоремой 8.2 это влечет следующий результат.

Теорема 8.7. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s}f^*-\left(I+\Lambda b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}\right)\mathcal{E}^0(\varepsilon,s)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\quad\leqslant\mathcal{C}_2' s^{-1}e^{-\varepsilon^2C_*s},\quad s\geqslant 1,\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_2'=\mathcal{C}_2+\mathfrak{C}_{\mathcal{B}}\alpha_1^{1/2}\mathcal{C}_l+\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{B}}\mathcal{C}_l$.

Глава 3
Усреднение периодических дифференциальных операторов

9 Аппроксимация оператора $f^\varepsilon\exp(-\mathcal{B}_\varepsilon s)(f^\varepsilon)^*$

9.1 Операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$

Для любой Г-периодической функции $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, обозначим $\phi^\varepsilon(\mathbf{x}):=\phi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon=b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon b(\mathbf{D})$, порожденный замкнутой квадратичной формой $\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]=(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u},b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Для формы $\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon$ справедливы оценки, аналогичные (4.5):

$$\alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\|\mathbf{Du}\|_{L_2}^2\leqslant\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]\leqslant\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{Du}\|_{L_2}^2,\quad\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).\quad(9.1)$$

Далее, пусть $\widehat{\mathcal{Y}}:L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$ — оператор, действующий по формуле $\widehat{\mathcal{Y}}\mathbf{u}=\operatorname{col}\{D_1\mathbf{u},\dots,D_d\mathbf{u}\}$, где $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\widehat{\mathcal{Y}}_{2,\varepsilon}:L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^{dn})$ — оператор, заданный соотношением $\widehat{\mathcal{Y}}_{2,\varepsilon}\mathbf{u}=\operatorname{col}\{(a_1^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\mathbf{u},\dots,(a_d^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\mathbf{u}\}$, $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Пусть $d\mu(\mathbf{x})$ — матричнозначная мера в $\mathbb{R}^d$, определенная в п. 4.4. Определим меру $d\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$ следующим образом. Для любого борелевского множества $\Delta\subset\mathbb{R}^d$ рассмотрим множество $\varepsilon^{-1}\Delta:=\{\mathbf{y}=\varepsilon^{-1}\mathbf{x}\ :\ \mathbf{x}\in\Delta\}$ и положим $\mu^\varepsilon(\Delta) := \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}\Delta)$. Рассмотрим квадратичную форму $\widehat{q}_\varepsilon$, определенную равенством $\widehat{q}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Все условия из п. 4.1–4.5 предполагаются выполненными. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ квадратичную форму

$$\widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\mathrm{Re}\,(\widehat{\mathcal{Y}}\mathbf{u}, \widehat{\mathcal{Y}}_{2,\varepsilon}\mathbf{u})_{L_2} + \widehat{q}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \lambda \|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования*, действующий по правилу $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{y}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{y})$. При любом $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ справедливы тождества

$$\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\widehat{\mathfrak{a}}[T_\varepsilon\mathbf{u}, T_\varepsilon\mathbf{u}], \quad \widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}\widehat{\mathfrak{b}}(\varepsilon)[T_\varepsilon\mathbf{u}, T_\varepsilon\mathbf{u}], \tag{9.2}$$

где $\widehat{\mathfrak{a}}$ — форма из п. 4.2 в случае $f = \mathbf{1}_n$, $\widehat{\mathfrak{b}}(\varepsilon)$ — форма (4.17) в случае $f = \mathbf{1}_n$. В силу (9.2) и оценок (4.20), (4.21) выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{\kappa}{2}\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \widehat{\beta}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\\
&\widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\widehat{\mathfrak{a}}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + (\widehat{C}(1) + \widehat{c}_3 + |\lambda|)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Таким образом, форма $\widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon$ замкнута и положительно определена. Самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, порожденный формой $\widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon$, будем обозначать через $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$. Формально можно записать

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j + D_j (a_j^\varepsilon)^*) + \mathcal{Q}^\varepsilon + \lambda I,$$

где $\mathcal{Q}^\varepsilon$ следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu^\varepsilon$.

Далее, в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим самосопряженный положительно определенный оператор $\mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^*\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon$, порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \widehat{\mathfrak{b}}_\varepsilon[f^\varepsilon\mathbf{u}, f^\varepsilon\mathbf{u}], \quad \mathrm{Dom}\,\mathfrak{b}_\varepsilon = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}.$$

9.2 Эффективный оператор для $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$

Пусть оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0$ определен в (8.1), $\widehat{\mathcal{Y}}^0$ — в (8.2), $\overline{\mathcal{Q}}$ — в (6.13), W — в (6.11). Оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = \widehat{\mathcal{A}}^0 + \widehat{\mathcal{Y}}^0 + (\widehat{\mathcal{Y}}^0)^* + \overline{\mathcal{Q}} - W + \lambda I \tag{9.4}$$

назовем *эффективным оператором* для $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$. Иными словами,

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j + \overline{\mathcal{Q}} - W + \lambda I.$$

9.3 Старший член аппроксимации

Обозначим

$$\mathcal{E}^0(s) := f_0 e^{-f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0 s} f_0. \tag{9.5}$$

Заметим, что

$$f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* = T_\varepsilon^* f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)\widetilde{s}} f^* T_\varepsilon, \quad \mathcal{E}^0(s) = T_\varepsilon^* \mathcal{E}^0(\varepsilon, \widetilde{s}) T_\varepsilon, \tag{9.6}$$

где $\mathcal{B}(\varepsilon)$ — оператор (4.22), $\widetilde{s} = \varepsilon^{-2} s$. Поэтому, воспользовавшись масштабным преобразованием, из теоремы 8.1 выведем следующий результат.

Теорема 9.1. *Пусть выполнены предположения п.* 4.1–4.5. *Пусть* $\mathcal{B}_\varepsilon$ — *оператор, определенный в п.* 9.1, *пусть* $\mathcal{E}^0(s)$ — *оператор* (9.5). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{E}^0(s) \|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\ &\qquad \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon (\varepsilon^2 + s)^{-1/2} e^{-C_* s}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad s \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Постоянные C_* *и* $\mathcal{C}_1$ *зависят только от данных задачи* (4.23) *и от параметров решетки* Γ.

9.4 Аппроксимация по $(L_2 \to H^1)$-норме

Сперва построим аппроксимацию с корректором на основании теоремы 8.2.

Обозначим через Π_ε ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (\mathcal{F}\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{9.8}$$

Справедливы тождества (9.6), а также тождества $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\widetilde{\Lambda}] T_\varepsilon$, $\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* \Lambda b(\mathbf{D}) T_\varepsilon$, $\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon^{1/2} \Big(f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \Pi_\varepsilon) \mathcal{E}^0(s) \Big) \\ &\quad = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)^{1/2} \Big(f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)\widetilde{s}} f^* - (I + \Lambda b(\mathbf{D}) \Pi + \varepsilon \widetilde{\Lambda} \Pi) \mathcal{E}^0(\varepsilon, \widetilde{s}) \Big) T_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $\widetilde{s} = \varepsilon^{-2}s$. Заменяя s на $\widetilde{s}$ в неравенстве (8.3) и учитывая унитарность T_ε, получим отсюда следующую оценку:

$$\begin{aligned} &\|\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon^{1/2}\left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\Pi_\varepsilon)\mathcal{E}^0(s)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \varepsilon^{-1}\Phi_2(\widetilde{s},\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad s > 0. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Построим теперь аппроксимацию оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*$ по операторной норме из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ на основании оценки (9.9).

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *— периодическое решение задачи* (6.7), *а матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *— периодическое решение задачи* (6.8). *Положим* $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. *Пусть* Π_ε *— оператор* (9.8). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\Pi_\varepsilon)\mathcal{E}^0(s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \Psi(s,\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad s > 0. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Величина $\Psi(s,\varepsilon)$ *определена равенством*

$$\Psi(s,\varepsilon) = \begin{cases} \mathcal{C}_4\varepsilon s^{-1}e^{-C_* s}, & s > 0,\ \ 0 < \varepsilon \leqslant s^{1/2}, \\ \mathcal{C}_5 s^{-1/2}e^{-C_* s}, & s > 0,\ \ \varepsilon > s^{1/2}. \end{cases} \tag{9.11}$$

Здесь $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_2\mathfrak{c}$, $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_3\mathfrak{c}$ *и* $\mathfrak{c} = \max\{\sqrt{2}\kappa^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}; \widehat{\beta}^{-1/2}\}$. *Постоянные* $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, C_* *зависят только от данных задачи* (4.23) *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Обозначим

$$\Upsilon(\varepsilon,s) := f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^* - (I + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\Pi_\varepsilon)\mathcal{E}^0(s).$$

В силу (9.3) и (9.9) выполнена оценка

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa}{2}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\beta}\|\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon^{1/2}\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \varepsilon^{-2}\Phi_2(\widetilde{s},\varepsilon)^2\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \boldsymbol{\eta} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad s > 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу нижней оценки (9.1) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa}{2}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\beta}\|\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \varepsilon^{-2}\Phi_2(\widetilde{s},\varepsilon)^2\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \boldsymbol{\eta} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad s > 0. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\|\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \max\{2\kappa^{-1}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty};\widehat{\beta}^{-1}\} \\ &\times\left(\frac{\kappa}{2}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\beta}\|\Upsilon(\varepsilon,s)\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).\end{aligned}\tag{9.13}$$

Из (9.12) и (9.13) с учетом (8.4) вытекает оценка (9.10). □

9.5 Аппроксимация при $\varepsilon \leqslant s^{1/2}$

Аналогичным образом из теоремы 8.7 выводится следующее утверждение.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 9.2. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s}(f^\varepsilon)^*-(I+\varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon))\mathcal{E}^0(s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \varepsilon\mathcal{C}_4' s^{-1}e^{-C_* s},\quad 0<\varepsilon\leqslant s^{1/2},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned}\tag{9.14}$$

Постоянные $\mathcal{C}_4' := \mathcal{C}_2'\mathfrak{c}$, C_* *зависят только от данных задачи* (4.23) *и от параметров решетки* Γ.

10 Применение к усреднению параболической задачи Коши

10.1 Задача Коши

Пусть $\rho(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая $(n\times n)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и равномерно положительно определенная. Пусть $0<T\leqslant\infty$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s}=-\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)+\mathbf{F}(\mathbf{x},s),\quad \rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\tag{10.1}$$

$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $s\in(0,T)$, где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in\mathcal{H}_p(T):=L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $1<p\leqslant\infty$. Факторизуем матрицу $\rho(\mathbf{x})$ следующим образом $\rho(\mathbf{x})^{-1}=f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*$. Тогда $\mathbf{v}_\varepsilon:=(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s}=-(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},s)+(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\mathbf{F}(\mathbf{x},s),\\ &\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon(\mathbf{x})$, имеем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_\varepsilon &= \exp(-\mathcal{B}_\varepsilon s)(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int_0^s \exp(-\mathcal{B}_\varepsilon(s-\widetilde{s}))(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\, d\widetilde{s}, \\
\mathbf{u}_\varepsilon &= f^\varepsilon \exp(-\mathcal{B}_\varepsilon s)(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int_0^s f^\varepsilon \exp(-\mathcal{B}_\varepsilon(s-\widetilde{s}))(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\, d\widetilde{s}.
\end{aligned} \tag{10.2}
$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение „усредненной“ задачи:

$$
\overline{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad \overline{\rho}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{10.3}
$$

где $\overline{\rho} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Заметим, что $\overline{\rho} = f_0^{-2}$. Аналогично (10.2) получим

$$
\mathbf{u}_0 = f_0 \exp\left(-f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0 s\right) f_0 \boldsymbol{\phi} + \int_0^s f_0 \exp\left(-f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0 (s-\widetilde{s})\right) f_0 \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\, d\widetilde{s}. \tag{10.4}
$$

10.2 Сходимость решений в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

В силу (9.7) имеем

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon (\varepsilon^2 + s)^{-1/2} e^{-C_* s} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \mathcal{C}_1 \varepsilon \int_0^s (\varepsilon^2 + s - \widetilde{s})^{-1/2} e^{-C_*(s-\widetilde{s})} \|\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\, d\widetilde{s}.
\end{aligned} \tag{10.5}
$$

При $1 < p \leqslant \infty$ оценим интеграл в правой части (10.5) с помощью неравенства Гёльдера ($p^{-1} + (p')^{-1} = 1$):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s (\varepsilon^2 + s - \widetilde{s})^{-1/2} e^{-C_*(s-\widetilde{s})} \|\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\, d\widetilde{s} \\
&\quad \leqslant \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(s)} \left(\int_0^s (\varepsilon^2 + s - \widetilde{s})^{-p'/2} e^{-C_* p'(s-\widetilde{s})}\, d\widetilde{s} \right)^{1/p'}.
\end{aligned} \tag{10.6}
$$

В случае $2 < p \leqslant \infty$ ($1 \leqslant p' < 2$) правая часть (10.6) оценится через $\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(s)} \left(C_* p'\right)^{1/2 - 1/p'} \left(\Gamma(1 - p'/2)\right)^{1/p'}$. При $1 < p < 2$ оценим интеграл, используя неравенство $e^{-C_* p'(s-\widetilde{s})} \leqslant 1$:

$$
\int_0^s (\varepsilon^2 + s - \widetilde{s})^{-p'/2} e^{-C_* p'(s-\widetilde{s})}\, d\widetilde{s} \leqslant \varepsilon^{2-p'} (p'/2 - 1)^{-1}. \tag{10.7}
$$

В случае $p=2$ сделаем замену переменной $\zeta = s-\widetilde{s}$ и разобьем промежуток интегрирования:

$$\begin{aligned}\int_0^s (\varepsilon^2+s-\widetilde{s})^{-1} e^{-2C_*(s-\widetilde{s})} d\widetilde{s} \leqslant \int_0^1 (\varepsilon^2+\zeta)^{-1} d\zeta + \int_1^s e^{-2C_*\zeta} d\zeta \\ \leqslant \ln 2 + 2|\ln\varepsilon| + (2C_*)^{-1}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned} \tag{10.8}$$

Комбинируя оценки (10.5)–(10.8), получим следующий результат.

Теорема 10.1. *Пусть* $\mathbf{F}\in\mathcal{H}_p(T)$ *при некотором* $1<p\leqslant\infty$. *Тогда при любом* $s\in(0,T)$ *решения* $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s)$ *сходятся к* $\mathbf{u}_0(\cdot,s)$ *по норме в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *При* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s)-\mathbf{u}_0(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon(\varepsilon^2+s)^{-1/2}e^{-C_*s}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta_1(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(s)}.$$

Величина $\theta_1(\varepsilon,p)$ *имеет вид*

$$\theta_1(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/p}\mathcal{C}_1(p'/2-1)^{-1/p'}, & 1<p<2, \\ \varepsilon\mathcal{C}_1\left(\ln 2+2|\ln\varepsilon|+(2C_*)^{-1}\right)^{1/2}, & p=2, \\ \varepsilon\mathcal{C}_1\left(C_*p'\right)^{-1/2+1/p}\left(\Gamma(1-p'/2)\right)^{1/p'}, & 2<p\leqslant\infty, \end{cases}$$

где $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

10.3 Аппроксимация в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ решений однородной задачи Коши

Рассмотрим теперь однородную задачу Коши

$$\rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},s), \quad \rho(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{10.9}$$

где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Соответствующая „усредненная“ задача имеет вид

$$\overline{\rho}\frac{\partial\mathbf{u}_0(\mathbf{x},s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},s), \quad \overline{\rho}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{10.10}$$

Из (9.14) непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены предположения п.* 4.1–4.4. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (10.9) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (10.10). *Тогда*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s)-\mathbf{u}_0(\cdot,s)-\varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\mathbf{u}_0(\cdot,s)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathcal{C}_4'\varepsilon s^{-1}e^{-C_*s}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad 0<\varepsilon\leqslant s^{1/2}.\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_4'$, C_* *зависят только от данных задачи* (4.23) *и от параметров решетки* Γ.

10.4 Аппроксимация в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ решений неоднородной задачи Коши

Вернемся к рассмотрению задачи (10.1).

Теорема 10.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (10.1)*, где* $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in\mathcal{H}_p(T)$*,* $2<p\leqslant\infty$*. Пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (10.3)*. Пусть* Π_ε *— оператор* (9.8)*. Пусть* $0<\varepsilon\leqslant 1$*. Тогда при* $0<s\leqslant T$ *и* $0<\varepsilon\leqslant s^{1/2}$ *имеем*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s)-\mathbf{u}_0(\cdot,s)-\varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,s)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant \mathcal{C}_4\varepsilon s^{-1}e^{-C_* s}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\theta_2(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(s)},\end{aligned}\tag{10.11}$$

где

$$\theta_2(\varepsilon,p)=\begin{cases}\varepsilon^{1-2/p}\left(\mathcal{C}_4(p'-1)^{-1/p'}+\mathcal{C}_5(1-p'/2)^{-1/p'}\right), & 2<p<\infty,\\ 2\mathcal{C}_4\varepsilon|\ln\varepsilon|+\mathcal{C}_4\varepsilon C_*^{-1}e^{-C_*}+2\mathcal{C}_5\varepsilon, & p=\infty.\end{cases}$$

Здесь $p^{-1}+(p')^{-1}=1$*.*

Доказательство. Пусть $0<s\leqslant T$ и $0<\varepsilon\leqslant\min\{s^{1/2},1\}$. Из (9.10) и (10.2), (10.4) следует, что

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,s)-\mathbf{u}_0(\cdot,s)-\varepsilon\left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\right)\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,s)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\mathcal{C}_4\varepsilon s^{-1}e^{-C_*s}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\int_0^s\Psi(s-\widetilde{s},\varepsilon)\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{s},\end{aligned}\tag{10.12}$$

где величина $\Psi(s,\varepsilon)$ определена в (9.11). Обозначим

$$\mathcal{I}:=\int_0^s\Psi(s-\widetilde{s},\varepsilon)\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{s}.\tag{10.13}$$

Интеграл $\mathcal{I}$ может быть записан как

$$\begin{aligned}\mathcal{I}=\mathcal{C}_4\varepsilon&\int_0^{s-\varepsilon^2}(s-\widetilde{s})^{-1}e^{-C_*(s-\widetilde{s})}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{s}\\&+\mathcal{C}_5\int_{s-\varepsilon^2}^{s}(s-\widetilde{s})^{-1/2}e^{-C_*(s-\widetilde{s})}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{s})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{s}.\end{aligned}\tag{10.14}$$

При $2<p<\infty$ воспользуемся оценкой $e^{-C_*(s-\widetilde{s})}\leqslant 1$ и неравенством Гёльдера ($p^{-1}+(p')^{-1}=1$). Получим

$$\mathcal{I}\leqslant\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p(s)}\varepsilon^{1-2/p}\left(\mathcal{C}_4(p'-1)^{-1/p'}+\mathcal{C}_5(1-p'/2)^{-1/p'}\right).\tag{10.15}$$

При $p=\infty$ равенство (10.14) влечет оценку

$$\mathcal{I} \leqslant \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_\infty(s)} \left(\mathcal{C}_4 \varepsilon \int_0^{s-\varepsilon^2} (s-\widetilde{s})^{-1} e^{-C_*(s-\widetilde{s})}\, d\widetilde{s} + \mathcal{C}_5 \int_{s-\varepsilon^2}^{s} (s-\widetilde{s})^{-1/2}\, d\widetilde{s} \right). \tag{10.16}$$

Заметим, что

$$\int_0^{s-\varepsilon^2} (s-\widetilde{s})^{-1} e^{-C_*(s-\widetilde{s})}\, d\widetilde{s} \leqslant 2|\ln \varepsilon| + C_*^{-1} e^{-C_*}. \tag{10.17}$$

Комбинируя (10.16) и (10.17), находим

$$\mathcal{I} \leqslant \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_\infty(s)} \left(2\mathcal{C}_4 |\ln \varepsilon| + \mathcal{C}_4 C_*^{-1} e^{-C_*} + 2\mathcal{C}_5 \right). \tag{10.18}$$

Объединяя (10.12), (10.13), (10.15) и (10.18), получим оценку (10.11). $\square$

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam–New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 3–60.

[VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), №2, 102–146.

[VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), №2, 1–103.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[M] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.

[OISh] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во МГУ, М., 1990.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анал. и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Nonlinear equations and spectral theory, 201–233, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of periodic second order differential operators including first order terms*, Spectral theory of differential operators, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 225, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 227–252.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение параболической задачи Коши в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Функц. анал. и его прил. **44** (2010), №4, 91–96.

[Su5] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su6] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

[Su7] Суслина Т. А., *Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра*, Алгебра и анализ **25** (2013), №5, 221–251.