ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

МАСЛЕЙ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

Аннотация. Как показал Йоргенсен, вопрос о дискретности произвольной группы сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного гиперболического пространства сводится к вопросу о дискретности ее двупорожденных подгрупп. В работе установлены достаточные условия дискретности для групп с двумя непараболическими порождающими. Получены новые ответы на вопрос Маскита о дискретности групп изометрий специального вида.

Содержание

Введение

Объектом исследования в работе являются дискретные группы сохраняющих ориентацию изометрий трехмерного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$. Теория дискретных групп преобразований восходит к мемуарам А. Пуанкаре и Ф. Клейна конца XIX века. С самых истоков эта тематика элегантно сочетает в себе идеи анализа, теории групп, топологии и геометрии. В последние сорок лет интерес к ней во многом связан с программой геометризации У. Терстона, в которой гиперболические многообразия и орбифолды играют ключевую роль.

Хорошо известно, что группа всех сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbb{H}^3$ изоморфна группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Элемент $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, где $g = \{\pm M\}$ и $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, называется эллиптическим, параболическим или локсодромическим, если $\mathrm{tr}^2(M) \in [0;4)$, $\mathrm{tr}^2(M) = 4$ или $\mathrm{tr}^2(M) \in \mathbb{C} \setminus [0;4]$ соответственно. Нетривиальный непараболический элемент оставляет инвариантной единственную геодезическую в $\mathbb{H}^3$, которая называется его осью. Для такого элемента определены величина сдвига вдоль оси и угол поворота вокруг оси.

Дискретные подгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ действуют собственно разрывно в $\mathbb{H}^3$. Этим объясняется интерес к ним с точки зрения теории униформизации. Основные сведения по теории дискретных групп изложены в [1, 2, 3, 4].

Существует несколько подходов к исследованию свойства дискретности подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Один из них состоит в оценке расстояний между неподвижными точками или осями элементов группы. Напомним, что если стабилизатор точки $p \in \mathbb{H}^3$ в дискретной группе $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ не тривиален, то он изоморфен одной из точечных групп: циклической, диэдральной, тетраэдральной, октаэдральной или икосаэдральной. В [5] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных и в [6] Ф. Геринг, Т. Маршалл, Г. Мартин установили нижние оценки на расстояния между точками в $\mathbb{H}^3$, стабилизаторы которых в дискретной группе изоморфны группе тетраэдра, октаэдра или икосаэдра. Оценки на расстояния между осями эллиптических элементов в дискретной группе были найдены в [7, 8]. Все эти результаты приводят к необходимым условиям дискретности.

Достаточные условия дискретности даются теоремой комбинирования Клейна — Маскита (см. [9, 10, 11]) и теоремой Пуанкаре о фундаментальном многограннике (см. [12, 13, 14]). Эти теоремы позволяют выписать копредставления групп.

Говорят, что группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ элементарна, если существует конечная G-орбита в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$, где $\overline{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$, и не элементарна в противном случае. Все элементарные дискретные группы классифицированы (см., например, [1]). В 1977 году Т. Йоргенсен [15] показал, что неэлементарная группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ дискретна тогда и только тогда, когда любая ее двупорожденная подгруппа дискретна. Для некоторых классов двупорожденных групп известны критерии дискретности. В [16] описаны все дискретные подгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ с двумя порождающими. Критерии дискретности для большинства $\mathcal{RP}$-групп приведены в [17, 18]. Тем не менее, классификация всех двупорожденных дискретных групп до сих пор остается открытой и весьма сложной проблемой.

Среди необходимых условий дискретности для двупоржденных групп отметим теоремы Т. Йоргенсена [19] и Д. Тана [20]. Эти условия имеют вид нестрогих неравенств, связывающих квадрат следа одного из порождающих и след коммутатора порождающих. Именно неравенство такого сорта позволило Йоргенсену свести вопрос о дискретности произвольной группы к рассмотрению ее двупорожденных подгрупп.

Перейдем к описанию структуры работы и точным формулировкам основных результатов.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В параграфе 1.1 изложены определения, а также некоторые известные факты о геометрии гиперболического пространства и группе его сохраняющих ориентацию изометрий. В параграфе 1.2 обсуждаются параметры двупорожденной группы и их геометрический смысл. В параграфе 1.3 сформулирована теорема комбинирования Клейна — Маскита. Раздел завершает параграф 1.4, в котором приводится обзор результатов о дискретности групп, порожденных двумя эллиптическими элементами.

Второй раздел посвящен достаточным условиям дискретности для групп, порожденных двумя непараболическими элементами.

Основным результатом параграфа 2.1 является достаточное условие дискретности для групп с двумя локсодромическими порождающими.

Теорема 2.1. [1*] *Пусть группа* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *такова, что* f *и* g *– локсодромические элементы с величинами сдвигов* τ_f *и* τ_g, $\delta(f,g)$ *и* $\theta(f,g)$ *– расстояние и угол между осями порождающих. Обозначим* $\alpha_f = \arcsin\bigl(1/\operatorname{ch}(\tau_f/2)\bigr)$ *и* $\alpha_g = \arcsin\bigl(1/\operatorname{ch}(\tau_g/2)\bigr)$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $\alpha_f + \alpha_g \le \theta(f,g)$,
(2) $\alpha_f + \alpha_g > \theta(f,g)$ *и* $\operatorname{ch}\delta(f,g) \ge \dfrac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)}$.

Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Основной результат параграфа 2.2 – достаточное условие дискретности для групп с локсодромическим и эллиптическим порождающими.

Теорема 2.2. [1*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f – локсодромический элемент с величиной сдвига τ_f, g – эллиптический элемент порядка $n \geq 2$, $\delta(f,g)$ и $\theta(f,g)$ – расстояние и угол между осями порождающих. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)}.$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Метод доказательства этих теорем состоит в следующем. Для циклических групп, соответствующих порождающим, строятся фундаментальные множества, которые удовлетворяют всем условиям теоремы комбинирования Клейна — Маскита.

Третий раздел посвящен условиям дискретности для подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ специального вида, которые были введены Б. Маскитом в [21]. Кроме того, в нем получены достаточные условия дискретности для групп, порожденных непараболическим элементом и инволюцией (т. е. эллиптическим элементом второго порядка).

В параграфе 3.1 рассматриваются группы с двумя непараболическими порождающими, один из которых является инволюцией. Для таких групп неравенства из основных теорем работ [22, 23] и теоремы 2.2 из параграфа 2.2 приводят к оценкам, не зависящим от угла $\theta(f,g)$. Следующие две теоремы улучшают эти оценки, учитывая значение $\theta(f,g)$.

Теорема 3.1. [2*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f – эллиптический элемент порядка $m \geq 3$ и g – инволюция. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $\theta(f,g) \leq \pi/4$ *и* $\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m)\cos\theta(f,g)$,
(2) $\theta(f,g) \geq \pi/4$ *и* $\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m)\sin\theta(f,g)$.
Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Теорема 3.2. [2*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f – локсодромический элемент с величиной сдвига τ_f и g – инволюция. Обозначим $\alpha_f = \arcsin\big(1/\operatorname{ch}(\tau_f/2)\big)$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $\theta(f,g) \leq \pi/4$ *и* $\alpha_f \leq \theta(f,g)$,
(2) $\theta(f,g) \leq \pi/4$, $\alpha_f > \theta(f,g)$ *и* $\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \operatorname{cth}(\tau_f/2)\cos\theta(f,g)$,
(3) $\theta(f,g) \geq \pi/4$ *и* $\alpha_f \leq \pi/2 - \theta(f,g)$,
(4) $\theta(f,g) \geq \pi/4$, $\alpha_f > \pi/2 - \theta(f,g)$ *и* $\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \operatorname{cth}(\tau_f/2)\sin\theta(f,g)$.
Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Метод доказательства этих теорем состоит в нахождении в данных группах подгрупп со специальными свойствами.

В 1989 году Б. Маскит [21] сформулировал следующий вопрос: *когда группа $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такая, что элемент f имеет две неподвижные точки $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $g(z_1) = z_2$, является дискретной?* Фигурирующие в этом вопросе группы будем называть группами Маскита. В [21] показано, что дискретные группы Маскита разбиваются на пять семейств. Одно из них содержит только элементарные группы и вопрос о их дискретности сводится к известным результатам. Для оставшихся четырех семейств имеют место достаточные условия дискретности и недискретности, полученные в [21] и [24], которые, однако, не дают полного ответа на вопрос Маскита.

В параграфе 3.2 даны новые ответы на вопрос Маскита. Эти ответы приведены в следующих четырех теоремах, сформулированных в терминах параметров двупорожденной группы. Параметры группы $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – это упорядоченная тройка $\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, \beta')$, где $\gamma = \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2$, $\beta = \mathrm{tr}^2(f) - 4$ и $\beta' = \mathrm{tr}^2(g) - 4$. Как показали Ф. Геринг и Г. Мартин [7], группа $\langle f, g\rangle$ является группой Маскита тогда и только тогда, когда $\gamma = \beta \neq 0$. При этом четыре семейства групп Маскита, содержащие неэлементарные дискретные группы, имеют параметры вида (β, β, β'), где $\beta \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Обозначим $\mathfrak{D} = \big\{ -4\sin^2(\pi/m) \bigm| m \in \mathbb{Z},\ m \geq 2 \big\} \cup [0, +\infty)$.

Теорема 3.7. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-4, -4, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если* $0 < |\beta' + 4| < 1$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $-8 < \beta' < 0$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда*

$$\beta' \in \big\{ -4 - 4\cos^2\frac{\pi}{m} \big| m \in \mathbb{Z}, m \geq 3\big\} \cup \big\{ -4\sin^2\frac{\pi}{m} \big| m \in \mathbb{Z}, m \geq 2\big\};$$

(3) *если* $|\beta' + 4| \geq 4$, *то* G *– дискретная группа;*
(4) *если* $\beta' = e^{\pi k i/6} \cdot (r + 4) - 4$, $k \in \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$ *и* $r \in \big\{ -4\sin^2(\pi/m) \big| m \in \mathbb{Z}, m \geq 2\big\}$, *то* G *– дискретная группа;*
(5) *если* $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\beta' + 4| < 4$ *и* $\beta' = p + q\omega$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}$, $\omega = i\sqrt{n}$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *то* G *– дискретная группа;*
(6) *если* $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\beta' + 4| < 4$ *и* $\beta' = p + q\omega$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}$, $\omega = (1 + i\sqrt{4n-1})/2$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *то* G *– дискретная группа.*

Теорема 3.8. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-3, -3, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если хотя бы для одного* $k \in \{0, 2, 4\}$ *выполнено неравенство* $0 < |\beta' + 4 - e^{\pi k i/3}| < 1$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $\beta' = e^{\pi k i/3} \cdot (r + 4) - 4$, $k \in \{0, 2, 4\}$ *и* $r \in [-4, +\infty)$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r \in \mathfrak{D}$*;*
(3) *если* $\beta' = e^{\pi k i/3} \cdot (r + 4) - 4$, $k \in \{1, 3, 5\}$ *и* $r \in \mathfrak{D}$, *то* G *– дискретная группа.*

Теорема 3.9. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-2, -2, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если выполнено хотя бы одно из следующих неравенств*

$$0 < |\beta' + 4 - e^{k\pi i/2}| < 1, \quad 0 < |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/2}| < (\sqrt{5} - 1)/2$$
$$\text{или} \quad 2 < |\beta' + 4| + |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/2}| < \sqrt{3} + 1$$

при $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $\beta' = e^{\pi k i/2} \cdot (r + 4) - 4$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ *и* $r \in [-4, +\infty)$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r \in \mathfrak{D}$.

Теорема 3.10. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-1, -1, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если выполнено хотя бы одно из следующих неравенств*

$$0 < |\beta' + 4 - e^{k\pi i/3}| < 1 \quad \text{или} \quad 0 < |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/3}| \leq 1/2$$

при $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $\beta' = e^{\pi k i/3} \cdot (r + 4) - 4$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *и* $r \in [-4, +\infty)$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r \in \mathfrak{D}$.

Доказательства этих теорем опираются на теорему 3.2 из параграфа 3.1 и используют условия дискретности из [7, 19, 20, 21, 24].

1. Определения и предварительные результаты

1.1. **Группа** $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ **и ее действие на** $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Следуя [1, 4], приведем основные факты о трехмерном гиперболическом пространстве и группе его сохраняющих ориентацию изометрий.

Для $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ обозначим $\mathrm{tr}(M) = a + d$ и $\|M\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$.

Пусть M не является единичным элементом Id и элементом $-\mathrm{Id}$. Он называется *эллиптическим*, если $\mathrm{tr}^2(M) \in [0;4)$; *параболическим*, если $\mathrm{tr}^2(M) = 4$; *локсодромическим*, если $\mathrm{tr}^2(M) \in \mathbb{C} \setminus [0;4]$. Эллиптический элемент называется *примитивным*, если $\mathrm{tr}^2(M) = 4\cos^2(\pi/n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и *непримитивным*, если $\mathrm{tr}^2(M) = 4\cos^2(\pi k/n)$ для таких $k, n \in \mathbb{N}$, что $1 < k < n/2$ и $(k,n) = 1$. Локсодромический элемент называется *гиперболическим*, если $\mathrm{tr}^2(A) > 4$, и *строго локсодромическим* в противном случае. На группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ рассмотрим топологию, индуцированную нормой $\|\cdot\|$.

Напомним, что $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm\mathrm{Id}\}$. Элемент этой группы называется *эллиптическим* (в том числе *примитивным* или *непримитивным*), *параболическим* или *локсодромическим* (в том числе *гиперболическим* или *строго локсодромическим*), если таким является его представитель в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. В дальнейшем мы не будем различать матрицу $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и класс эквивалентности $\{\pm M\} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *дискретной*, если она является дискретным множеством в фактортопологии.

Рассмотрим модель Пуанкаре гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, т. е. множество $\{(z,t) : z \in \mathbb{C},\ t > 0\}$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$. Множество $\partial\mathbb{H}^3$ будем называть *абсолютом* и отождествлять его с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Эта модель конформна. Геодезическими в ней являются дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту, и лучи, перпендикулярные абсолюту. Геодезическими гиперплоскостями – полусферы, перпендикулярные абсолюту, и полуплоскости, перпендикулярные абсолюту.

Если геодезические ℓ_1 и ℓ_2 имеют общую точку на абсолюте, то угол между ними положим равным нулю. В противном случае существует единственная перпендикулярная им геодезическая ℓ_3. *Углом* между ℓ_1 и ℓ_2 назовем величину двугранного угла, образованного гиперплоскостью, содержащей ℓ_1 и ℓ_3, и гиперплоскостью, содержащей ℓ_2 и ℓ_3.

Хорошо известно, что группа всех сохраняющих ориентацию изометрий $\mathbb{H}^3$ изоморфна $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, и элемент $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{H}^3$ следующим образом:

$$g(z,t) = \left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\overline{c}t^2}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz+d|^2 + |c|^2t^2} \right).$$

При этом он действует на $\overline{\mathbb{C}}$ дробно-линейным преобразованием

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Легко видеть, что непараболические элементы, и только они, имеют две различные неподвижные точки в $\overline{\mathbb{C}}$, а параболические элементы, и только они, – ровно одну (см., например, [1, §4.3]). Для локсодромического элемента выделяют притягивающую и отталкивающую неподвижные точки. Точнее, пусть g – локсодромический элемент и $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ – его неподвижные точки. Точка z_1 называется *притягивающей*, если $\lim_{n\to\infty} g^n(z) = z_1$ для всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_2\}$. Соответственно, точка z_2 называется *отталкивающей*. Отметим, что притягивающая неподвижная точка элемента g является отталкивающей неподвижной точкой элемента g^{-1}.

Осью непараболического элемента g назовем геодезическую в $\mathbb{H}^3$, соединяющую его неподвижные точки в $\overline{\mathbb{C}}$, и будем обозначать ее ℓ_g. Ось ℓ_g инварианта относительно действия g. Более того, если g – эллиптический элемент, то ℓ_g – множество его неподвижных точек.

Непараболический элемент g сопряжен в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ элементу $h = \begin{pmatrix} (\varkappa e^{\varphi i})^{1/2} & 0 \\ 0 & (\varkappa e^{\varphi i})^{-1/2} \end{pmatrix}$, где $\varkappa \geq 1$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$. Обозначим $\tau_g = \ln \varkappa$ и $\varphi_g = \varphi$. Величины τ_g и φ_g называются *величиной сдвига* и *углом поворота* элемента g. Заметим, что если g – эллиптический элемент, то угол φ_g определен с точностью до знака. Действительно, в этом случае $\varkappa = 1$ и $h^{-1} = khk^{-1}$, где $k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Поэтому g одновременно сопряжен h и h^{-1}. Тем не менее, корректно определена величина $\cos\varphi_g$.

Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *элементарной*, если существует конечная G-орбита в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. В противном случае группа G называется *неэлементарной*.

Для группы $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ и точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ обозначим через G_p стабилизатор p в G. Полную классификацию элементарных дискретных групп дает следующая теорема.

Теорема 1.1. [4, §2.1] *Пусть $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – элементарная дискретная группа. Тогда имеет место один из следующих случаев:*
(1) *группа G конечна и имеет неподвижную точку в $\mathbb{H}^3$;*
(2) *$G = G_p$ для некоторого $p \in \overline{\mathbb{C}}$;*
(3) *существует G-орбита в $\overline{\mathbb{C}}$, состоящая из двух точек. В этом случае имеется такая подгруппа $H < G$ индекса 2, что $H = H_p$ для некоторого $p \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Следующая теорема позволяет свести вопрос о дискретности неэлементарной группы к изучению ее двупорожденных подгрупп.

Теорема 1.2. [4, §2.4] *Пусть группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ не элементарна. Тогда следующие утверждения равносильны.*
(1) *Группа G дискретна.*
(2) *Каждая подгруппа с двумя образующими в G дискретна.*

Эта теорема была установлена Т. Йоргенсеном [15] в 1977 г. Отметим, что он использовал определение элементарной группы, отличное от того, которое дано выше. А именно, в [15] группа называется элементарной, если коммутатор любых двух ее элементов бесконечного порядка имеет след равный двум. Геометрический смысл этого определения объясняет следующее предложение.

Предложение 1.1. [1, §4.3] *Элементы $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ имеют общую неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = 2$.*

Два приведенных определения элементарной группы не эквивалентны. Это видно из следующего примера. Пусть группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ имеет два эллиптических порождающих f и g бесконечного порядка и $\ell_f \cap \ell_g = \{p\}$ для некоторого $p \in \mathbb{H}^3$. Тогда любой ее элемент оставляет неподвижной точку p, но f и g не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$.

1.2. **Двупорожденные подгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.** Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Тогда определены следующие величины

$$\gamma(f,g) = \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2, \quad \beta(f) = \mathrm{tr}^2(f) - 4, \quad \beta(g) = \mathrm{tr}^2(g) - 4,$$

которые не зависят от выбора матриц из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, представляющих f и g. Для непараболического элемента g имеет место следующая взаимосвязь между величинами τ_g, φ_g и $\beta(g)$.

Лемма 1.1. [25] *Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – нетривиальный непараболический элемент. Тогда*

$$\mathrm{ch}(\tau_g) = \frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)|}{4}, \quad \cos(\varphi_g) = \frac{|\beta(g)+4| - |\beta(g)|}{4}.$$

Приведем простое следствие этой леммы.

Следствие 1.1. *Пусть* $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *– нетривиальный непараболический элемент. Тогда*

$$\operatorname{ch}(\tau_g/2) = \sqrt{\frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)| + 4}{8}}, \quad \operatorname{sh}(\tau_g/2) = \sqrt{\frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)| - 4}{8}}.$$

Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – нетривиальные непараболические элементы. Обозначим через $\delta(f,g)$ гиперболическое расстояние между осями ℓ_f и ℓ_g, и через $\theta(f,g)$ – угол между осями ℓ_f и ℓ_g. Заметим, что $\delta(f,g) \geq 0$ и $0 \leq \theta(f,g) \leq \pi/2$. Имеет место следующая взаимосвязь между величинами $\delta(f,g)$, $\theta(f,g)$ и $\gamma(f,g)$, $\beta(f)$, $\beta(g)$.

Лемма 1.2. [7] *Пусть* $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *– нетривиальные непараболические элементы, которые не имеют общих неподвижных точек на абсолюте. Тогда*

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) = \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + 1\right| + \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right|, \quad \cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr) = \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + 1\right| - \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right|.$$

Эта лемма имеет очевидное следствие.

Следствие 1.2. *Пусть* $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *– нетривиальные непараболические элементы, которые не имеют общих неподвижных точек на абсолюте. Тогда*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| - \frac{1}{2}},$$

$$\cos\theta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}},$$

$$\sin\theta(f,g) = \sqrt{-\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}}.$$

Пусть $\langle f, g\rangle$ – группа, порожденная элементами $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Упорядоченную тройку (γ, β, β'), где $\gamma = \gamma(f,g)$, $\beta = \beta(f)$ и $\beta' = \beta(g)$, будем называть *параметрами* группы $\langle f, g\rangle$ и обозначать

$$\operatorname{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, \beta').$$

Очевидно, параметры группы зависят от выбора ее порождающих. При этом имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. [26] *Пусть* $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и* $\beta, \beta' \in \mathbb{C}$*. Тогда существует группа* $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$*, единственная с точностью до сопряжения в* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$*, такая, что* $\operatorname{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, \beta')$.

1.3. **Теорема комбинирования Клейна — Маскита.** В этом параграфе будет сформулирован результат, полученный Ф. Клейном в [9] и обобщенный Б. Маскитом в [10, 11].

Говорят, что группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *действует разрывно в точке* $z \in \overline{\mathbb{C}}$, если существует окрестность U этой точки такая, что $g(U) \cap U = \emptyset$ для всех элементов $g \in G$, кроме единичного. Множество всех точек, в которых G действует разрывно называется *множеством разрывности* группы G и обозначается $R(G)$. Следуя [10, 11, 27], группу $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ будем называть *клейновой*, если $R(G) \neq \emptyset$. Клейнова группа дискретна (см., например, [27, II.C]).

Пусть G – клейнова группа. Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *частичным фундаментальным множеством* группы G, если

(1) $D \neq \emptyset$,
(2) $D \subset R(G)$,
(3) $g(D) \cap D = \emptyset$ для всех элементов $g \in G$, кроме единичного.

Если множество D удовлетворяет условиям (1) – (3) и

(4) $\bigcup_{g\in G} g(D) = R(G)$,

то оно называется *фундаментальным множеством* группы G. Условие (3) означает, что любые две точки из D не G-эквивалентны, а условие (4) – что любая точка из $R(G)$ G-эквивалентна некоторой точке из D.

Теорема комбинирования Клейна — Маскита. [11] *Пусть G_1, G_2 – клейновы группы; H – их общая подгруппа; D_1, D_2, Δ – частичные фундаментальные множества групп G_1, G_2, H соответственно. Обозначим $E_i = \bigcup_{h\in H} h(D_i)$, где $i = 1, 2$; $D = E_1 \cap E_2 \cap \Delta$ и через D' – внутренность множества D. Предположим, что $D' \neq \emptyset$ и $E_1 \cup E_2 = R(G_1) \cup R(G_2)$. Тогда группа G, порожденная группами G_1 и G_2, является клейновой; D' – частичное фундаментальное множество группы G; $G = G_1 *_H G_2$ и $g(D) \cap D = \emptyset$ для всех элементов $g \in G$, кроме единичного.*

Эта теорема является достаточным условием дискретности. Далее она будет использована в случаях, когда циклические группы G_1 и G_2 имеют тривиальную общую подгруппу H. Если теорема комбинирования выполнена для таких групп, то, в частности, группа G дискретна и является свободным произведением $G_1 * G_2$.

1.4. **Группы с двумя эллиптическими порождающими.** Данный параграф посвящен группам, порожденным двумя эллиптическими элементами f и g. Результаты о дискретности таких групп будут сформулированы в терминах расстояний $\delta(f,g)$ и углов $\theta(f,g)$ между осями порождающих.

Пусть $\delta(f,g) = 0$, т. е. оси ℓ_f и ℓ_g имеют хотя бы одну общую точку в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Тогда группа $\langle f,g\rangle$ элементарна. Напомним, что все элементарные дискретные группы классифицированы (см. теорему 1.1).

Пусть $\delta(f,g) \neq 0$ и $\theta(f,g) = 0$, т. е. оси ℓ_f и ℓ_g лежат в одной гиперплоскости. Тогда группа $\langle f,g\rangle$ оставляет инвариантной гиперплоскость, перпендикулярную ℓ_f и ℓ_g, и сохраняет ее ориентацию. Следовательно, $h\langle f,g\rangle h^{-1} < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ для некоторого $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Критерии дискретности подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ с двумя эллиптическими порождающими были получены А. Кнаппом в [28] и Дж. Мательски в [29] (см. также [5]). Поскольку свойство группы быть дискретной сохраняется при сопряжении, все дискретные группы $\langle f,g\rangle$ описываются этими критериями.

Пусть $\delta(f,g) \neq 0$ и $\theta(f,g) = \pi/2$, т. е. оси ℓ_f и ℓ_g являются взаимно перпендикулярными геодезическими. В этом случае критерий дискретности групп $\langle f,g\rangle$ был установлен Е. Я. Клименко в [30].

Таким образом, критерии дискретности известны только для некоторых семейств двупорожденных групп. Тем не менее, имеют место весьма общие необходимые и достаточные условия дискретности.

Ф. Геринг и Г. Мартин показали, что в дискретной группе $\langle f,g\rangle$, порождающие которой не являются инволюциями (т. е. эллиптическим элементами порядка два), расстояние $\delta(f,g)$ либо равно нулю, либо ограничено снизу. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. [7] *Пусть $G = \langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – дискретная группа такая, что f и g – эллиптические элементы порядков $m \geq 3$ и $n \geq 2$, $\delta(f,g)$ – расстояние между осями ℓ_f и ℓ_g. Тогда либо $\delta(f,g) = 0$, либо имеет место неравенство*

$$\delta(f,g) \geq \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Arch}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right) = 0,197\ldots\ .$$

Замечание 1.1. *Если группа $\langle f,g\rangle$ порождена двумя инволюциями, то она является элементарной. Этот факт очевиден, если оси ℓ_f и ℓ_g имеют общую точку в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. В противном случае рассмотрим общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. Две точки, которые он соединяет на абсолюте, образуют конечную орбиту. В любом случае для проверки дискретности группы $\langle f,g\rangle$ можно воспользоваться теоремой 1.1.*

С другой стороны, как видно из следующих двух теорем, если в группе $\langle f, g\rangle$, порождающие которой не являются инволюциями, расстояние $\delta(f,g)$ достаточно велико, то она дискретна и изоморфна свободному произведению циклических групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$.

Теорема 1.5. [22] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f и g – эллиптические элементы порядков $m \geq 3$ и $n \geq 2$, $\delta(f,g)$ – расстояние между осями ℓ_f и ℓ_g. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \frac{\cos(\pi/m)\cos(\pi/n)+1}{\sin(\pi/m)\sin(\pi/n)}. \tag{1}$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Эта теорема была установлена Ф. Герингом, К. Маклаханом и Г. Мартином. Неравенство (1) в ней не зависит от угла $\theta(f,g)$. Следующий результат А. А. Рассказова улучшает эту оценку, учитывая значение $\theta(f,g)$.

Теорема 1.6. [23] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f и g – эллиптические элементы порядков $m \geq 3$ и $n \geq 2$, $\delta(f,g)$ и $\theta(f,g)$ – расстояние и угол между осями ℓ_f и ℓ_g. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \frac{\cos(\pi/m)\cos(\pi/n)\cos\theta(f,g)+1}{\sin(\pi/m)\sin(\pi/n)}. \tag{2}$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

2. Достаточные условия дискретности

Как отмечено в параграфе 1.1, каждый элемент группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ является эллиптическим, параболическим или локсодромическим. Для групп, порожденных двумя эллиптическими элементами, достаточные условия дискретности были получены Ф. Герингом, К. Маклаханом, Г. Мартином и А. А. Рассказовым (см. теоремы 1.5 и 1.6). В данном разделе мы установим достаточные условия дискретности для групп, порожденных двумя локсодромическими элементами, и групп, порожденных локсодромическим и эллиптическим элементами.

Напомним, что для элемента $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такого, что $g(\infty) \neq \infty$, множество

$$I_g = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c}\right| = \frac{1}{|c|}\right\}$$

называется *изометрической окружностью*. Легко видеть, что радиусы окружностей I_g и $I_{g^{-1}}$ совпадают. Обозначим

$$B_g = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c}\right| < \frac{1}{|c|}\right\} \quad \text{и} \quad \overline{B}_g = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c}\right| \leq \frac{1}{|c|}\right\}.$$

2.1. **Группы с двумя локсодромическими порождающими.** Для локсодромического элемента $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с величиной сдвига τ_g обозначим

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\tau_g/2)}\right). \tag{3}$$

Из этого определения следует, что $0 < \alpha_g < \pi/2$.

Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – гиперболический элемент с неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w – его притягивающая неподвижная точка. Здесь и далее будем полагать, что

$$C_g^+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg(w) - \alpha_g \leq \arg(z) \leq \arg(w) + \alpha_g\} \cup \{\infty\},$$
$$C_g^- = \{z \in \mathbb{C} : \arg(-w) - \alpha_g \leq \arg(z) \leq \arg(-w) + \alpha_g\} \cup \{\infty\},$$
$$C_g = C_g^+ \cup C_g^-,$$

$$\partial_1 C_g = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(\arg(w)+\alpha_g)},\ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\},$$
$$\partial_2 C_g = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(\arg(w)-\alpha_g)},\ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Углы C_g^+ и C_g^- являются вертикальными, имеют величину $2\alpha_g$ и общую вершину $0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Их объединение C_g имеет границу, состоящую из двух прямых $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$. Множества C_g и $C_{g^{-1}}$ совпадают, так как g и g^{-1} имеют одинаковые неподвижные точки и $\tau_g = \tau_{g^{-1}}$.

Лемма 2.1. [1*] *Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – гиперболический элемент с величиной сдвига τ_g и неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\overline{B}_g \subset C_g$, $\overline{B}_{g^{-1}} \subset C_g$ и прямые $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ являются общими касательными к окружностям I_g и $I_{g^{-1}}$.*

Доказательство. Поскольку множества C_g и $C_{g^{-1}}$ совпадают, можем считать, что g имеет притягивающую неподвижную точку w. При этом, g – гиперболический элемент с величиной сдвига τ_g тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}^2(g) = 4\,\mathrm{ch}^2(\tau_g/2)$ (см., например, [1, §7.34]). Пользуясь этими фактами, нетрудно показать, что

$$g = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tau_g/2) & w\,\mathrm{sh}(\tau_g/2) \\ w^{-1}\,\mathrm{sh}(\tau_g/2) & \mathrm{ch}(\tau_g/2) \end{pmatrix}.$$

Значит, круги $\overline{B}_g$ и $\overline{B}_{g^{-1}}$ задаются неравенствами

$$|z + w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)| \le \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)} \quad \text{и} \quad |z - w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)| \le \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}.$$

Их центры лежат на биссектрисах углов C_g^- и C_g^+. В самом деле, биссектрисами являются $b^- = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \arg(-w)\} \cup \{\infty\}$ и $b^+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \arg(w)\} \cup \{\infty\}$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что евклидово расстояние от центров кругов $\overline{B}_g$ и $\overline{B}_{g^{-1}}$ до прямых $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ равно их радиусу. Покажем это для $\overline{B}_g$ и $\partial_1 C_g$. Из рассмотрения треугольника OPQ с вершинами $O = 0 \in \mathbb{C}$, $P = -w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2) \in \mathbb{C}$ и углами $\angle O = \alpha_g$, $\angle Q = \pi/2$ получаем, что искомое расстояние равно

$$PQ = |w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)|\,\sin\alpha_g = \frac{|w|\ \mathrm{cth}(\tau_g/2)}{\mathrm{ch}(\tau_g/2)} = \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}.$$

Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству основной теоремы этого параграфа.

Теорема 2.1. [1*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f и g – локсодромические элементы с величинами сдвигов τ_f и τ_g, $\delta(f,g)$ и $\theta(f,g)$ – расстояние и угол между осями порождающих. Обозначим $\alpha_f = \arcsin\big(1/\,\mathrm{ch}(\tau_f/2)\big)$ и $\alpha_g = \arcsin\big(1/\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\big)$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $\alpha_f + \alpha_g \le \theta(f,g)$,
(2) $\alpha_f + \alpha_g > \theta(f,g)$ *и* $\mathrm{ch}\,\delta(f,g) \ge \dfrac{\mathrm{ch}(\tau_f/2)\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g) + 1}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}$.
Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.
Случай 1. Предположим, что для группы G выполнено условие (1).

Покажем, что G – неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ является бесконечной. Из условия (1) и определения величин α_f и α_g следует, что $\theta(f,g) > 0$. Значит, f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Тогда p не является неподвижной точкой относительно хотя бы одного из элементов f или g. Поэтому ее орбита относительно действия циклической группы, порожденной этим элементом, бесконечна.

Покажем, что G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. С точностью до сопряжения в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ можем считать, что геодезическая ℓ соединяет точки $0, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ и притягивающей неподвижной точкой элемента g является $-1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Поскольку теперь ℓ_f и ℓ_g соединяют симметричные относительно нуля точки, то $1 \in \overline{\mathbb{C}}$ – отталкивающая неподвижная точка элемента g, а неподвижные точки элемента f имеют вид $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$. Значит, $\ell \cap \ell_f = \{(0, |w|) \in \mathbb{H}^3\}$ и $\ell \cap \ell_g = \{(0,1) \in \mathbb{H}^3\}$. Гиперболическое расстояние между точками $(0,|w|)$ и $(0,1)$ равно $\bigl|\ln|w|\bigr|$. Оно также равно $\delta(f,g)$. Поэтому $|w| = e^{\pm\delta(f,g)}$. Более того, можно полагать, что $|w| = e^{\delta(f,g)}$. Действительно, если $|w| = e^{-\delta(f,g)}$, то вместо f и g рассмотрим hfh^{-1} и hgh^{-1}, где $h = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Легко видеть, что $h(0) = \infty$, $h(\infty) = 0$, $h(\pm 1) = \pm 1$ и $h(\pm w) = \mp w^{-1}$. Следовательно, общий перпендикуляр к осям $\ell_{hfh^{-1}}$ и $\ell_{hgh^{-1}}$ совпадает с ℓ, $-1 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $1 \in \overline{\mathbb{C}}$ – притягивающая и отталкивающая неподвижные точки элемента hgh^{-1}, $\pm w^{-1}$ – неподвижные точки элемента hfh^{-1} и их модули равны $e^{\delta(f,g)}$.

В качестве w выберем ту неподвижную точку элемента f, для которой $-\pi/2 < \arg(w) \le \pi/2$. Тогда $|\arg(w)| = \theta(f,g)$. Заменяя, если необходимо, f на f^{-1}, будем считать, что $w \in \overline{\mathbb{C}}$ – притягивающая неподвижная точка элемента f.

Рассмотрим действие f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Множества разрывности для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ имеют вид $R\langle f\rangle = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm w\}$ и $R\langle g\rangle = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle f\rangle$. Пусть

$$\tilde f = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tau_f/2) & w\,\mathrm{sh}(\tau_f/2) \\ w^{-1}\,\mathrm{sh}(\tau_f/2) & \mathrm{ch}(\tau_f/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).$$

Из доказательства леммы 2.1 видно, что $\tilde f$ – гиперболический элемент с величиной сдвига τ_f и неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w – его притягивающая неподвижная точка. Очевидно, $\alpha_{\tilde f} = \alpha_f$. Обозначим $c_{\tilde f} = -w\,\mathrm{cth}(\tau_f/2)$, $r_{\tilde f} = |w|/\,\mathrm{sh}(\tau_f/2)$ и

$$D^1_f = \bigl\{z \in \mathbb{C} : \bigl|z - c_{\tilde f}\bigr| \ge r_{\tilde f},\ \bigl|z + c_{\tilde f}\bigr| > r_{\tilde f}\bigr\} \cup \{\infty\}.$$

Указанное множество, внешность кругов $\overline{B}_{\tilde f}$ и $B_{\tilde f^{-1}}$, является фундаментальным для группы $\langle f\rangle$, и $f(I_{\tilde f}) = I_{\tilde f^{-1}}$. В самом деле, пусть элемент $t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такой, что $t(w) = \infty$, $t(-w) = 0$ и $t(v) = 1$ для некоторой точки $v \in I_{\tilde f}$. Тогда $tft^{-1} = \begin{pmatrix} e^{(\tau_f + i\phi_f)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(\tau_f + i\phi_f)/2} \end{pmatrix}$, $t(I_{\tilde f}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $t(I_{\tilde f^{-1}}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{\tau_f}\}$ и $t(D^1_f) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| < e^{\tau_f}\}$ – кольцо, которое, по определению, является фундаментальным множеством группы $\langle tft^{-1}\rangle$.

Заметим, что если $u \in D^1_f$, то множество $\bigl(D^1_f \setminus \{u\}\bigr) \cup \bigl\{f(u)\bigr\}$ также является фундаментальным для группы $\langle f\rangle$.

Аналогично, используя гиперболический элемент

$$\tilde g = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tau_g/2) & -\mathrm{sh}(\tau_g/2) \\ -\mathrm{sh}(\tau_g/2) & \mathrm{ch}(\tau_g/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}),$$

для группы $\langle g\rangle$ построим фундаментальное множество

$$D^1_g = \{z \in \mathbb{C} : |z - c_{\tilde g}| \ge r_{\tilde g},\ |z + c_{\tilde g}| > r_{\tilde g}\} \cup \{\infty\},$$

где $c_{\tilde g} = \mathrm{cth}(\tau_g/2)$ и $r_{\tilde g} = 1/\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)$. Оно является внешностью кругов $\overline{B}_{\tilde g}$ и $B_{\tilde g^{-1}}$. При этом, если $u \in D^1_g$, то $\bigl(D^1_g \setminus \{u\}\bigr) \cup \bigl\{g(u)\bigr\}$ – еще одно фундаментальное множество группы $\langle g\rangle$. Отметим также, что $\alpha_{\tilde g} = \alpha_g$ и $g(I_{\tilde g}) = I_{\tilde g^{-1}}$.

Из элементарных геометрических рассмотрений следуют свойства:

1^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \emptyset$.

2^0. $I_{\tilde f^{-1}}$ *и* $I_{\tilde g}$ *касаются внешним образом тогда и только тогда, когда* $I_{\tilde f}$ *и* $I_{\tilde g^{-1}}$ *касаются внешним образом.*

3^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \emptyset$.

4^0. $I_{\tilde f^{-1}}$ *и* $I_{\tilde g^{-1}}$ *касаются внешним образом тогда и только тогда, когда* $I_{\tilde f}$ *и* $I_{\tilde g}$ *касаются внешним образом.*

Для элементов $\tilde f$ и $\tilde g$ рассмотрим угловые множества $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$, определенные в начале этого параграфа. В последней части доказательства разберем все возможные случаи и подслучаи.

Пусть $\alpha_f+\alpha_g<\theta(f,g)$. Тогда из определения множеств $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$ следует, что $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\{0,\infty\}$. По лемме 2.1, $\overline{B}_{\tilde f}\subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g}\subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}}\subset C_{\tilde g}$. Значит, $D_f^1\cup D_g^1=\overline{\mathbb{C}}=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$. Очевидно, внутренность множества $D_f^1\cap D_g^1$ не пуста. Таким образом, выбор D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования Клейна — Маскита (см. §1.3). Следовательно, G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $\alpha_f+\alpha_g=\theta(f,g)$. Тогда $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_1 C_{\tilde g}$, $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_2 C_{\tilde g}$ или $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_1 C_{\tilde f}\cup\partial_2 C_{\tilde f}=\partial_1 C_{\tilde g}\cup\partial_2 C_{\tilde g}$.

Пусть $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_1 C_{\tilde g}$ или $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_2 C_{\tilde g}$. В силу леммы 2.1, $\overline{B}_{\tilde f}\subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g}\subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}}\subset C_{\tilde g}$. Вновь применяя теорему комбинирования для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ с фундаментальными множествами D_f^1 и D_g^1, видим, что G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}=\partial_1 C_{\tilde f}\cup\partial_2 C_{\tilde f}=\partial_1 C_{\tilde g}\cup\partial_2 C_{\tilde g}$. По лемме 2.1, $\overline{B}_{\tilde f}\subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g}\subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}}\subset C_{\tilde g}$. Значит, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\emptyset$ или окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\emptyset$. Из свойства 3^0 следует, что $\overline{B}_{\tilde f}\cap\overline{B}_{\tilde g}=\emptyset$. Как и выше, все условия теоремы комбинирования выполнены для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ с фундаментальными множествами D_f^1 и D_g^1. Поэтому G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde f^{-1}}\cap I_{\tilde g^{-1}}=\{z_1\}$ для некоторой точки $z_1\in C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g}$. Тогда $D_f^1\cup D_g^1=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{z_1\}\neq R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$ и выбор множеств D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ делает невозможным использование теоремы комбинирования. Для этих групп построим другие фундаментальные множества D_f^2 и D_g^2 такие, что $D_f^2\cup D_g^2=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$.

По свойству 4^0, окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом. Легко видеть, что окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ также касаются внешним образом. Из свойства 2^0 вытекает, что и окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом. Обозначим $z_2=f^{-1}(z_1)$, $z_3=g^{-1}(z_2)$, $z_4=f^{-1}(z_3)$. Зададим фундаментальные множества D_f^2 и D_g^2 следующим образом.
Если $I_{\tilde f}\cap I_{\tilde g^{-1}}\neq\{z_2\}$, то пусть

$$D_f^2=\big(D_f^1\setminus\{z_2\}\big)\cup\{z_1\}\quad \text{и}\quad D_g^2=D_g^1\quad (\text{рис. 2.1a}).$$

Если $I_{\tilde f}\cap I_{\tilde g^{-1}}=\{z_2\}$ и $I_{\tilde f^{-1}}\cap I_{\tilde g}\neq\{z_3\}$, то пусть

$$D_f^2=\big(D_f^1\setminus\{z_2\}\big)\cup\{z_1\}\ \text{ и }\ D_g^2=\big(D_g^1\setminus\{z_3\}\big)\cup\{z_2\}\ \ (\text{рис. 2.1b}).$$

Если $I_{\tilde f}\cap I_{\tilde g^{-1}}=\{z_2\}$ и $I_{\tilde f^{-1}}\cap I_{\tilde g}=\{z_3\}$, то пусть

$$D_f^2=\big(D_f^1\setminus\{z_2,z_4\}\big)\cup\{z_1,z_3\}\ \text{ и }\ D_g^2=\big(D_g^1\setminus\{z_3\}\big)\cup\{z_2\}\ \ (\text{рис. 2.1c}).$$

В каждом из этих трех случаев $D_f^2\cup D_g^2=\overline{\mathbb{C}}=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$ и внутренность множества $D_f^2\cap D_g^2$ не пуста. Следовательно, выбор множеств D_f^2 и D_g^2 в качестве фундаментальных для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования. Из чего заключаем, что G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$. Теорема доказана в случае 1.
Случай 2. Предположим, что для группы G выполнено условие (2).

Покажем, что G – неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p\in\mathbb{H}^3\cup\overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ является бесконечной. Из первого неравенства условия (2) и определения величин α_f и α_g следует, что

$$\begin{aligned}\cos\theta(f,g) &> \cos(\alpha_f+\alpha_g)=\cos\alpha_f\cos\alpha_g-\sin\alpha_f\sin\alpha_g\\ &= \operatorname{th}(\tau_f/2)\operatorname{th}(\tau_g/2)-\frac{1}{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)},\end{aligned}$$

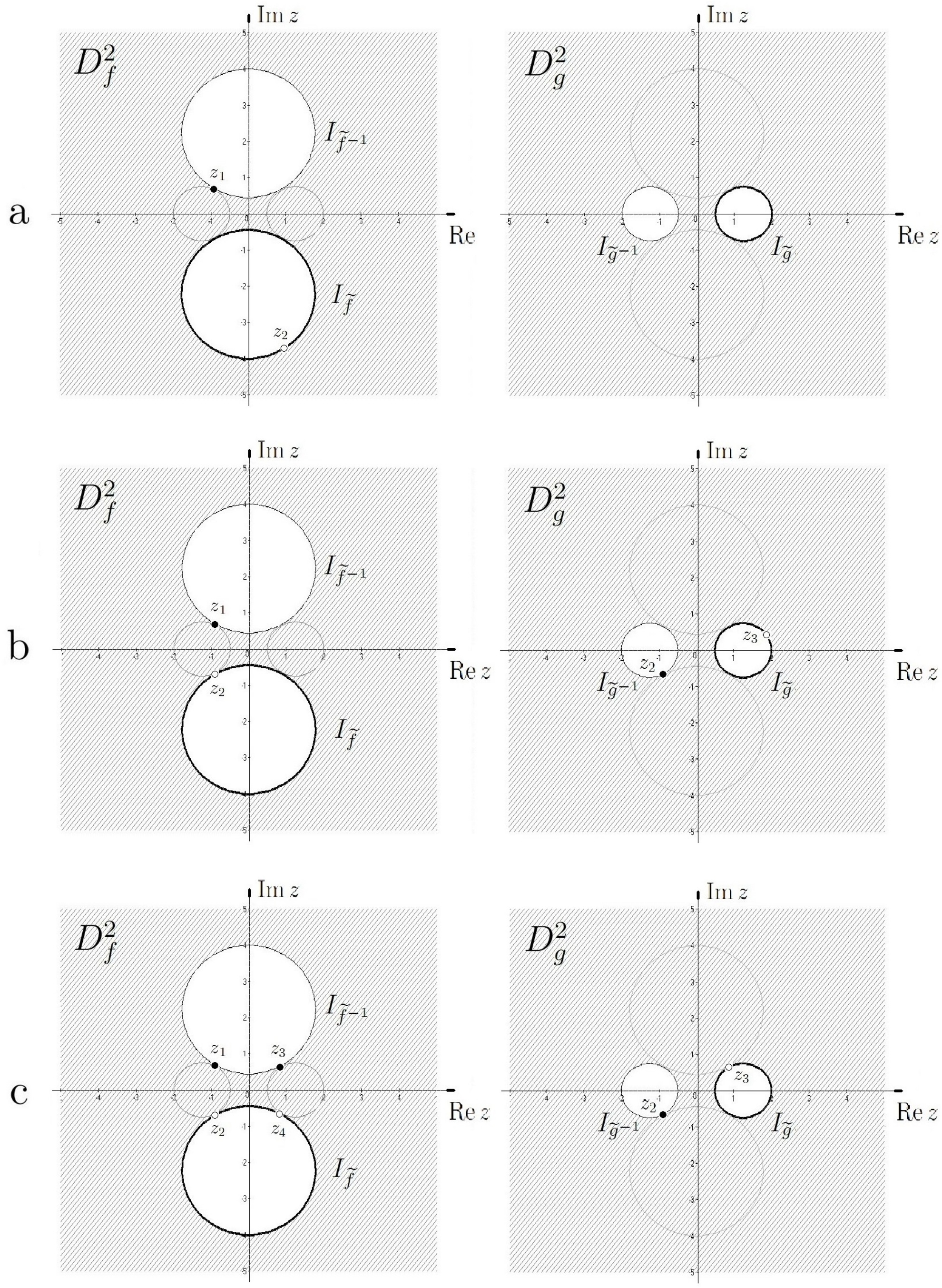


Рис. 1. Множества D_f^2 и D_g^2.

откуда

$$\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)} > 1.$$

Из этого неравенства и второго неравенства условия (2) вытекает, что $\delta(f,g) > 0$. Значит, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек. Аналогично случаю 1 можно показать, что для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна.

Покажем, что G – дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$. Рассуждая как в случае (1), можем считать, что элемент f имеет неподвижные точки $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w – его притягивающая неподвижная точка; а элемент g оставляет неподвижными точки $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$ и -1 – его притягивающая неподвижная точка. Далее рассмотрим действие f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Используя гиперболические элементы $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, построим фундаментальные множества D_f^1 и D_g^1 для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$.

Поскольку выполнено первое неравенство условия (2), то угловые множества $C_{\tilde{f}}$ и $C_{\tilde{g}}$ имеют общие внутренние точки. Тем не менее, если имеет место второе неравенство условия (2), то множество $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}}$ состоит не более чем из одной точки. Действительно, в этом неравенстве распишем гиперболический косинус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)}+1\ge 0.$$

Используя тождество для гиперболических функций, перепишем последнее неравенство следующим образом:

$$\left(e^{2\delta(f,g)}+1\right)\frac{\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)-1}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}-2e^{\delta(f,g)}\,\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)}\ge 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$\begin{aligned}\frac{e^{2\delta(f,g)}\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}+\frac{\operatorname{ch}^2(\tau_g/2)}{\operatorname{sh}^2(\tau_g/2)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)}&\\ \ge\left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_g/2)}\right)^2&,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}|w|^2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)+\operatorname{cth}^2(\tau_g/2)-2|w|\operatorname{cth}(\tau_f/2)\operatorname{cth}(\tau_g/2)\cos\bigl(\arg(w)\bigr)&\\ \ge\left(\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_g/2)}\right)^2&.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и теоремы косинусов для евклидовых треугольников следует, что евклидово расстояние между центрами кругов $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}$ и $\overline{B}_{\tilde{g}}$ не меньше суммы их радиусов. Поэтому реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}}=\emptyset$, либо окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}}=\emptyset$. Тогда из элементарных геометрических рассуждений следует, что $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}^{-1}}=\emptyset$. По свойствам 1^0 и 3^0 из доказательства случая 1, $\overline{B}_{\tilde{f}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}^{-1}}=\emptyset$ и $\overline{B}_{\tilde{f}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}}=\emptyset$. Значит, $D_f^1\cup D_g^1=\overline{\mathbb{C}}=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$. Очевидно, внутренность множества $D_f^1\cap D_g^1$ не пуста. Таким образом, выбор D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования Клейна — Маскита. Следовательно, G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом. Тогда $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}^{-1}}=\emptyset$ или $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}^{-1}}=\emptyset$. В силу свойств 2^0 и 3^0 из доказательства случая 1, окружности $I_{\tilde{f}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом и $\overline{B}_{\tilde{f}}\cap\overline{B}_{\tilde{g}}=\emptyset$. Вновь применяя теорему комбинирования для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ с фундаментальными множествами D_f^1 и D_g^1, видим, что G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde{f}^{-1}}\cap I_{\tilde{g}^{-1}}=\{z_1\}$ для некоторой точки $z_1\in\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично случаю 1 можно построить множества D_f^2 и D_g^2 и показать, что их выбор в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования. Поэтому G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$. Теорема доказана в случае 2. □

Расписывая условие теоремы 2.1 с использованием следствий 1.1 и 1.2, получаем следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, \beta')$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $\beta, \beta' \in \mathbb{C}\setminus[-4,0]$. *Предположим, что для тройки* (γ, β, β') *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}&\sqrt{|4\gamma+\beta\beta'|-4|\gamma|+|\beta\beta'|}\\&\le \sqrt{2|\beta\beta'|}\cdot\frac{\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|-4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|-4\big)}-8}{\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|+4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|+4\big)}}.\end{aligned}$$

Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Следствие 2.2. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, \beta')$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $\beta, \beta' \in \mathbb{C}\setminus[-4,0]$. *Предположим, что для тройки* (γ, β, β') *выполнено условие*

$$\begin{aligned}&\sqrt{|4\gamma+\beta\beta'|-4|\gamma|+|\beta\beta'|}\\&> \sqrt{2|\beta\beta'|}\cdot\frac{\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|-4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|-4\big)}-8}{\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|+4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|+4\big)}}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|-4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|-4\big)\big(|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|+|\beta\beta'|\big)}\\&-\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|+4\big)\big(|\beta'+4|+|\beta'|+4\big)\big(|4\gamma+\beta\beta'|-4|\gamma|+|\beta\beta'|\big)}\\&\qquad\ge 8\cdot\sqrt{2|\beta\beta'|}.\end{aligned}$$

Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

2.2. **Группы с локсодромическим и эллиптическим порождающими.** Следующая теорема является достаточным условием дискретности для подгруппы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, порожденной локсодромическим и эллиптическим элементами.

Теорема 2.2. [1*] *Пусть группа* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *такова, что* f *– локсодромический элемент с величиной сдвига* τ_f, g *– эллиптический элемент порядка* $n \ge 2$, $\delta(f,g)$ *и* $\theta(f,g)$ *– расстояние и угол между осями порождающих. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \ge \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)}. \tag{4}$$

Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.
Случай 1. Предположим, что для группы G выполнено условие теоремы и g – эллиптический элемент порядка $n = 2$.

Покажем, что G – неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3\cup\overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ является бесконечной. Из неравенства (4) следует, что $\delta(f,g) > 0$. Значит, f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3\cup\overline{\mathbb{C}}$. Достаточно показать, что если p – неподвижная точка элемента f, то ее орбита $G(p)$ бесконечна. В самом деле, если p – неподвижная точка элемента f, то $g(p) \in \overline{\mathbb{C}}$ не является его неподвижной точкой (так как в противном случае $\delta(f,g) = 0$). Поэтому орбита $\langle f\rangle\big(g(p)\big)$ является бесконечной.

Покажем, что G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. С точностью до сопряжения в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ можем считать, что геодезическая ℓ соединяет точки $0, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ и одной из неподвижных точек элемента g является $-1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Поскольку теперь ℓ_f и ℓ_g соединяют симметричные относительно нуля точки, то $1 \in \overline{\mathbb{C}}$ – вторая неподвижная точка элемента g, а неподвижные точки элемента f имеют вид $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$. Значит, $\ell\cap\ell_f = \{(0,|w|) \in \mathbb{H}^3\}$ и $\ell\cap\ell_g = \{(0,1) \in \mathbb{H}^3\}$. Гиперболическое расстояние между точками $(0,|w|)$ и $(0,1)$ равно $\big|\ln|w|\big|$. Оно также равно $\delta(f,g)$.

Поэтому $|w| = e^{\pm\delta(f,g)}$. Более того, можно полагать, что $|w| = e^{\delta(f,g)}$. Действительно, если $|w| = e^{-\delta(f,g)}$, то вместо f и g рассмотрим hfh^{-1} и hgh^{-1}, где $h = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Легко видеть, что $h(0) = \infty$, $h(\infty) = 0$, $h(\pm 1) = \pm 1$ и $h(\pm w) = \mp w^{-1}$. Следовательно, общий перпендикуляр к осям $\ell_{hfh^{-1}}$ и $\ell_{hgh^{-1}}$ совпадает с ℓ, $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$ – неподвижные точки элемента hgh^{-1}, $\pm w^{-1}$ – неподвижные точки элемента hfh^{-1} и их модули равны $e^{\delta(f,g)}$.

В качестве w выберем ту неподвижную точку элемента f, для которой $0 \le \arg(w) < \pi$. Если $0 \le \arg(w) \le \pi/2$, то $\arg(w) = \theta(f,g)$; если $\pi/2 < \arg(w) < \pi$, то $\arg(w) = \pi - \theta(f,g)$. Заменяя, если необходимо, f на f^{-1}, будем считать, что $w \in \overline{\mathbb{C}}$ – притягивающая неподвижная точка элемента f.

Рассмотрим действие f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Множества разрывности для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ имеют вид $R\langle f\rangle = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm w\}$ и $R\langle g\rangle = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$.

Аналогично случаю 1 доказательства теоремы 2.1, используя гиперболический элемент

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tau_f/2) & w\,\mathrm{sh}(\tau_f/2) \\ w^{-1}\,\mathrm{sh}(\tau_f/2) & \mathrm{ch}(\tau_f/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}),$$

для группы $\langle f\rangle$ построим фундаментальное множество

$$D_f^1 = \big\{z \in \mathbb{C} : \big|z - c_{\tilde f}\big| \ge r_{\tilde f},\ \big|z + c_{\tilde f}\big| > r_{\tilde f}\big\} \cup \{\infty\},$$

где $c_{\tilde f} = -w\,\mathrm{cth}(\tau_f/2)$ и $r_{\tilde f} = |w|/\,\mathrm{sh}(\tau_f/2)$. Оно является внешностью кругов $\overline{B}_{\tilde f}$ и $B_{\tilde f^{-1}}$. При этом, если $u \in D_f^1$, то $\big(D_f^1 \setminus \{u\}\big) \cup \big\{f(u)\big\}$ – еще одно фундаментальное множество группы $\langle f\rangle$. Отметим также, что $f(I_{\tilde f}) = I_{\tilde f^{-1}}$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle g\rangle$. Поскольку g – эллиптический элемент второго порядка, то $\mathrm{tr}(g) = 0$. При этом, он имеет неподвижные точки $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Пользуясь этими фактами, нетрудно показать, что

$$g = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).$$

Обозначим

$$D_{g,2}^1 = \Big\{z \in \mathbb{C} :\ |z| \ge 1,\ \mathrm{Im} z \ne -\sqrt{1 - \mathrm{Re}^2 z}\Big\} \cup \{\infty\}.$$

Указанное множество является фундаментальным для группы $\langle g\rangle$, и $g(I_g) = I_g$. В самом деле, пусть элемент $t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такой, что $t(1) = 0$, $t(-1) = \infty$ и $t(v) = 1$ для некоторой точки $v \in I_g \cap D_{g,2}^1$. Тогда $tft^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $t(I_{\tilde f}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$ и $t(D_{g,2}^1) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi < \arg(z) \le 0\}$ – это полуплоскость, которая, по определению, является фундаментальным множеством группы $\langle tgt^{-1}\rangle$.

Заметим, что если $u \in D_{g,2}^1$, то множество $\big(D_{g,2}^1 \setminus \{u\}\big) \cup \big\{g(u)\big\}$ также является фундаментальным для группы $\langle g\rangle$.

Из элементарных геометрических рассмотрений следуют свойства:
1^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g = \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_g = \emptyset$.
2^0. $I_{\tilde f^{-1}}$ *и* I_g *касаются внешним образом тогда и только тогда, когда* $I_{\tilde f}$ *и* I_g *касаются внешним образом.*

Поймем, каково взаимное расположение D_f^1 и $D_{g,2}^1$. Для этого покажем, что если имеет место неравенство (4), то множество $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g$ состоит не более чем из одной точки. В этом неравенстве распишем гиперболический синус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)} - 2e^{\delta(f,g)}\frac{1}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)} - 1 \ge 0.$$

Используя тождество для гиперболических функций, перепишем последнее неравенство следующим образом:

$$e^{2\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)-1}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}-1\geq 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$e^{2\delta(f,g)}\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\geq\left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}+1\right)^2,$$

откуда

$$|w|^2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\geq\left(\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}+1\right)^2.$$

Из последнего неравенства следует, что евклидово расстояние между центрами кругов $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}$ и $\overline{B}_g$ не меньше суммы их радиусов. Поэтому реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_g=\emptyset$, либо окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и I_g касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}\cap\overline{B}_g=\emptyset$. По свойству 1^0, $\overline{B}_{\tilde{f}}\cap\overline{B}_g=\emptyset$. Значит, $D^1_f\cup D^1_{g,2}=\overline{\mathbb{C}}=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$. Очевидно, внутренность множества $D^1_f\cap D^1_{g,2}$ не пуста. Таким образом, выбор D^1_f и $D^1_{g,2}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования Клейна — Маскита. Следовательно, G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и I_g касаются внешним образом. В силу свойства 2^0, окружности $I_{\tilde{f}}$ и I_g также касаются внешним образом. Рассмотрим случаи $I_{\tilde{f}^{-1}}\cap I_g\neq\{1\}$ и $I_{\tilde{f}^{-1}}\cap I_g=\{1\}$.

Пусть $I_{\tilde{f}^{-1}}\cap I_g\neq\{1\}$. Вновь применяя теорему комбинирования для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ с фундаментальными множествами D^1_f и $D^1_{g,2}$, видим, что G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde{f}^{-1}}\cap I_g=\{1\}$. Тогда $D^1_f\cup D^1_{g,2}=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{1\}\neq R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$ и выбор множеств D^1_f и $D^1_{g,2}$ в качестве фундаментальных для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ делает невозможным использование теоремы комбинирования. Тем не менее, справедливость теоремы 2.2 можно установить отдельно при $f^{-1}(1)\neq-1$ и при $f^{-1}(1)=-1$.

Пусть $f^{-1}(1)\neq-1$. Для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ построим фундаментальные множества D^2_f и $D^2_{g,2}$ такие, что $D^2_f\cup D^2_{g,2}=R\langle f\rangle\cup R\langle g\rangle$. А именно, пусть $D^2_f=\big(D^1_f\setminus\{f^{-1}(1)\}\big)\cup\{1\}$ и $D^2_{g,2}=D^1_{g,2}$ (рис. 2.2a). Теперь все условия теоремы комбинирования выполнены. Из чего заключаем, что G – дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $f^{-1}(1)=-1$. Тогда $f(-1)=1$. Покажем, что элементы f и $\tilde{f}$ совпадают. Из построения $\tilde{f}$ следует, что $\tilde{f}(w)=w$ и $\tilde{f}(-w)=-w$. Заметим, что $\tilde{f}(-1)=1$. Действительно, поскольку $1\in I_{\tilde{f}^{-1}}$, то

$$|1-w\operatorname{cth}(\tau_f/2)|=\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}.$$

Из элементарных геометрических рассуждений следует, что w – положительное вещественное число. Поэтому $w=|w|=e^{\delta(f,g)}>1$ и

$$-1+w\operatorname{cth}(\tau_f/2)=\frac{w}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)},\quad\text{откуда}\quad w=\frac{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}{\operatorname{ch}(\tau_f/2)-1}.$$

Используя полученное равенство, видим, что

$$\begin{aligned}\tilde{f}(-1)&=\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cdot(-1)+w\operatorname{sh}(\tau_f/2)}{w^{-1}\operatorname{sh}(\tau_f/2)\cdot(-1)+\operatorname{ch}(\tau_f/2)}=-\operatorname{ch}(\tau_f/2)+\frac{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}{\operatorname{ch}(\tau_f/2)-1}\\&=\frac{-\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)+\operatorname{ch}(\tau_f/2)+\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}{\operatorname{ch}(\tau_f/2)-1}=1.\end{aligned}$$

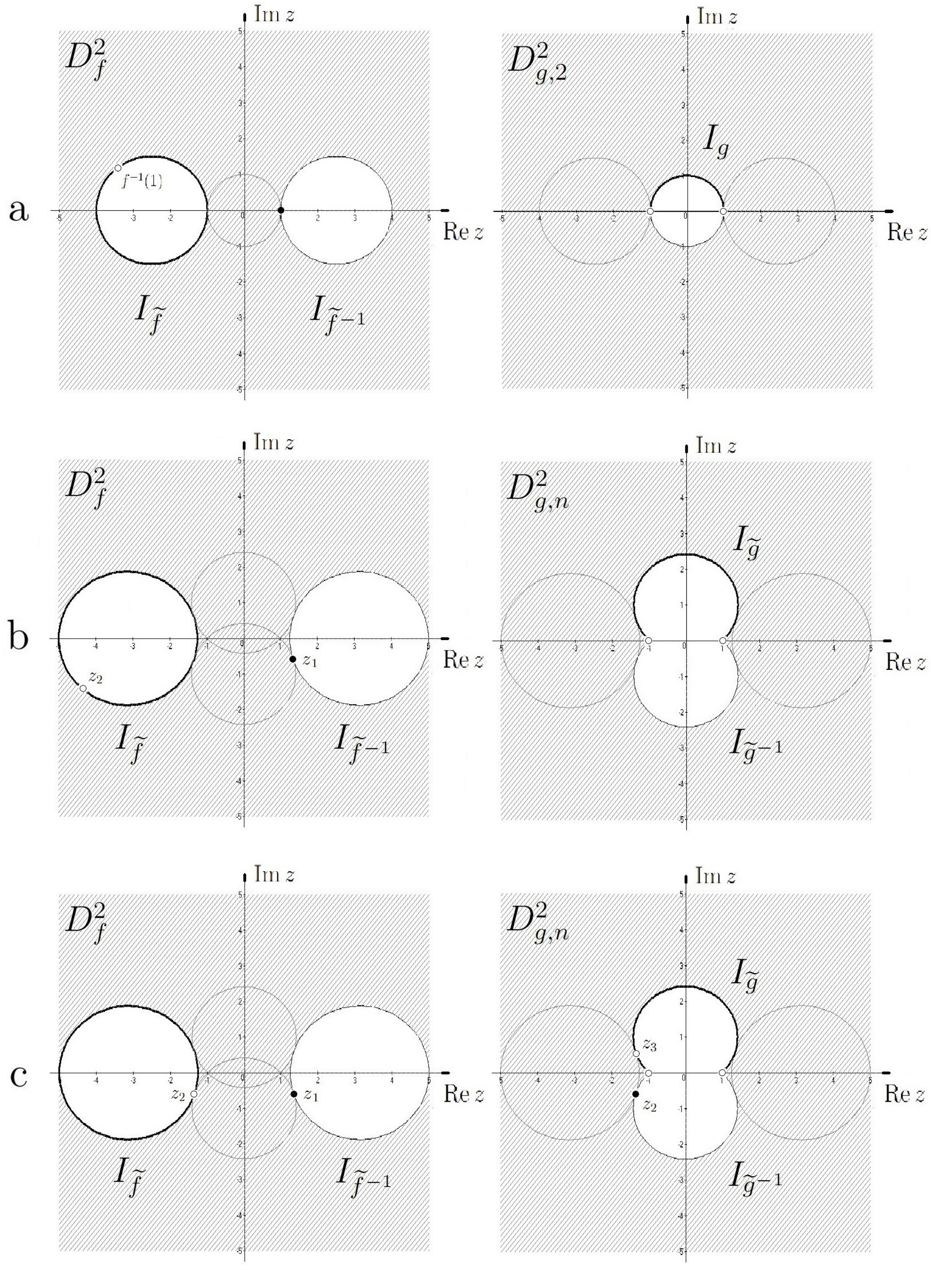


Рис. 2. Множества D^2_f и $D^2_{g,2}$, а также D^2_f и $D^2_{g,n}$, где $n \geq 3$.

Хорошо известно (см., например, [1, §4.1]), что каковы бы ни были три попарно различные точки $u_1, u_2, u_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три попарно различные точки $v_1, v_2, v_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, существует единственный элемент $k \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ такой, что $k(u_i) = v_i$, где $i \in \{1, 2, 3\}$. Итак, f – гиперболический элемент и $f(-1) = 1$. При этом, $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$ – неподвижные точки эллиптического элемента второго порядка. Как установил Б. Маскит в [21] (см. теорему 3.3), G – дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$. Теорема доказана в случае 1.

Случай 2. Предположим, что для группы G выполнено условие теоремы и g – эллиптический элемент порядка $n \geq 3$.

Покажем, что G – неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ является бесконечной. Из неравенства (4) следует, что $\delta(f, g) > 0$. Значит, f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Достаточно показать, что если p –

неподвижная точка элемента f, то ее орбита $G(p)$ бесконечна. В самом деле, если p – неподвижная точка элемента f, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $g^m(p) \in \overline{\mathbb{C}}$ не является его неподвижной точкой. Поэтому орбита $\langle f\rangle\big(g^m(p)\big)$ является бесконечной.

Покажем, что G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Рассуждая как в случае 1, можем считать, что элемент f имеет неподвижные точки $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w – его притягивающая неподвижная точка; а элемент g оставляет неподвижными точки $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Заменяя, если необходимо, g на g^{-1}, будем считать, что

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\pi k/n) & i\sin(\pi k/n) \\ i\sin(\pi k/n) & \cos(\pi k/n) \end{pmatrix},$$

где $1 \le k < n/2$ и $(k,n) = 1$. Рассмотрим действие f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично случаю 1, используя гиперболический элемент $\tilde f$, построим фундаментальное множество D^1_f для группы $\langle f\rangle$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle g\rangle$. Пусть

$$\tilde g = \begin{pmatrix} \cos(\pi/n) & i\sin(\pi/n) \\ i\sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde g$ – примитивный эллиптический элемент порядка n с неподвижными точками $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$D^1_{g,n} = \{z \in \mathbb{C}:\ |z - c_{\tilde g}| \ge r_{\tilde g},\ |z + c_{\tilde g}| > r_{\tilde g}\} \cup \{\infty\},$$

где $c_{\tilde g} = i\operatorname{ctg}(\pi/n)$ и $r_{\tilde g} = \dfrac{1}{\sin(\pi/n)}$. Указанное множество, внешность кругов $\overline{B}_{\tilde g}$ и $B_{\tilde g^{-1}}$, является фундаментальным для группы $\langle g\rangle$, и $g(I_{\tilde g}) = I_{\tilde g^{-1}}$. Действительно, пусть элемент $t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такой, что $t(1) = 0$, $t(-1) = \infty$ и $t(v) = 1$ для некоторой точки $v \in I_{\tilde g} \cap D^1_{g,n}$. Тогда $tgt^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\pi k i/n} & 0 \\ 0 & e^{\pi k i/n} \end{pmatrix}$, $t(I_{\tilde g}) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \arg(z) = 0\}$, $t(I_{\tilde g^{-1}}) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \arg(z) = -2\pi/n\}$, $t(D^1_{g,n}) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : -2\pi/n < \arg(z) \le 0\}$ – плоский угол, который, по определению, является фундаментальным множеством группы $\langle tgt^{-1}\rangle$.

Заметим, что если $u \in D^1_{g,n}$, то множество $\big(D^1_{g,n}\setminus\{u\}\big) \cup \big\{\tilde g(u)\big\}$ также является фундаментальным для группы $\langle g\rangle$.

Из элементарных геометрических рассмотрений следуют свойства:

3^0. *$\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \emptyset$.*

4^0. *$I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом.*

5^0. *$\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \emptyset$.*

6^0. *$I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом.*

Поймем, каково взаимное расположение D^1_f и $D^1_{g,n}$. Для этого покажем, что если имеет место неравенство (4), то множество $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g$ состоит не более чем из одной точки. В этом неравенстве распишем гиперболический синус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)} - 2e^{\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} - 1 \ge 0.$$

Используя тождества для гиперболических и тригонометрических функций, перепишем полученное неравенство следующим образом:

$$e^{2\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}^2(\tau_f/2) - 1}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)} - 2e^{\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} - \frac{1 - \cos^2(\pi/n)}{\sin^2(\pi/n)} \ge 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$\frac{e^{2\delta(f,g)}\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)} - 2e^{\delta(f,g)}\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g)}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} + \frac{\cos^2(\pi/n)}{\sin^2(\pi/n)} \geq \left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + \frac{1}{\sin(\pi/n)}\right)^2,$$

откуда

$$|w|^2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2) + \operatorname{ctg}^2(\pi/n) - 2|w|\operatorname{cth}(\tau_f/2)\operatorname{ctg}(\pi/n)\cos\bigl(\pi/2 - \arg(w)\bigr) \geq \left(\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + \frac{1}{\sin(\pi/n)}\right)^2.$$

Из последнего неравенства и теоремы косинусов для евклидовых треугольников следует, что евклидово расстояние между центрами кругов $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}}$ и $\overline{B}_{\tilde{g}}$ не меньше суммы их радиусов. Поэтому реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \emptyset$, либо окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \emptyset$. Тогда из элементарных геометрических рассуждений следует, что $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \emptyset$. По свойствам 3^0 и 5^0, $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \emptyset$ и $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \emptyset$. Значит, $D^1_f \cup D^1_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} = R\langle f\rangle \cup R\langle g\rangle$. Очевидно, внутренность множества $D^1_f \cap D^1_{g,n}$ не пуста. Таким образом, выбор D^1_f и $D^1_{g,n}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования Клейна — Маскита. Следовательно, G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом. Тогда $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \emptyset$ или $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \emptyset$. В силу свойств 4^0 и 5^0, окружности $I_{\tilde{f}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом и $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \emptyset$. Вновь применяя теорему комбинирования для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ с фундаментальными множествами D^1_f и $D^1_{g,n}$, видим, что G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde{f}^{-1}} \cap I_{\tilde{g}^{-1}} = \{z_1\}$ для некоторой точки $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $D^1_f \cup D^1_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1\} \neq R\langle f\rangle \cup R\langle g\rangle$ и выбор множеств D^1_f и D^1_g в качестве фундаментальных для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ делает невозможным использование теоремы комбинирования. Для этих групп построим другие фундаментальные множества D^2_f и $D^2_{g,n}$ такие, что $D^2_f \cup D^2_{g,n} = R\langle f\rangle \cup R\langle g\rangle$.

По свойствам 4^0 и 6^0, окружности $I_{\tilde{f}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом и окружности $I_{\tilde{f}}$ и $I_{\tilde{g}}$ также касаются внешним образом. Обозначим $z_2 = f^{-1}(z_1)$ и $z_3 = \tilde{g}^{-1}(z_2)$. Зададим фундаментальные множества D^2_f и D^2_g следующим образом. Если $I_{\tilde{f}} \cap I_{\tilde{g}^{-1}} \neq \{z_2\}$, то пусть

$$D^2_f = \bigl(D^1_f \setminus \{z_2\}\bigr) \cup \{z_1\} \quad \text{и} \quad D^2_{g,n} = D^1_{g,n} \quad \text{(рис. 2.2b).}$$

Если $I_{\tilde{f}} \cap I_{\tilde{g}^{-1}} = \{z_2\}$, то пусть

$$D^2_f = \bigl(D^1_f \setminus \{z_2\}\bigr) \cup \{z_1\} \ \text{ и } \ D^2_g = \bigl(D^1_{g,n} \setminus \{z_3\}\bigr) \cup \{z_2\} \ \text{ (рис. 2.2c).}$$

В каждом из этих двух случаев $D^2_f \cup D^2_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} = R\langle f\rangle \cup R\langle g\rangle$ и внутренность множества $D^2_f \cap D^2_{g,n} \neq \emptyset$ не пуста. Следовательно, выбор множеств D^2_f и D^2_g в качестве фундаментальных для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему комбинирования. Из чего заключаем, что G – дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Теорема доказана в случае 2. □

Расписывая условие теоремы 2.2 с использованием следствий 1.1 и 1.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\operatorname{par}\langle f,g\rangle = (\gamma,\beta,\beta')$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus [-4,0]$ *и* $\beta' = -4\sin^2(\pi k/n)$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n/2$ *и* $(k,n) = 1$. *Предположим, что для* *тройки (γ, β, β') выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \sin(\pi/n)\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|-4\big)\big(|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|-|\beta\beta'|\big)} \\ -\cos(\pi/n)\sqrt{\big(|\beta+4|+|\beta|+4\big)\big(-|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|+|\beta\beta'|\big)} \\ \geq 4\sqrt{|\beta\beta'|}. \end{aligned}$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

3. Условия дискретности для групп Маскита

3.1. **Группы, порожденные непараболическим элементом и инволюцией.** Достаточные условия дискретности для подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, порожденных двумя эллиптическими элементами, были установлены Ф. Герингом, К. Маклаханом, Г. Мартином и А. А. Рассказовым (см. теоремы 1.5 и 1.6). Для подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, порожденных локсодромическим и эллиптическим элементами, такое условие было получено в параграфе 2.2. В данном параграфе эти результаты улучшаются для случая, когда эллиптический порождающий является инволюцией, т. е. элементом второго порядка или, эквивалентно, элементом с нулевым следом.

Прежде всего покажем, что в любой группе с двумя порождающими, один из которых является инволюцией, существует подгруппа специального вида, наличие некоторых свойств у которой влечет их наличие у самой группы.

Лемма 3.1. [2*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что g – инволюция. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h\rangle$. Тогда*
(1) *если H не элементарна, то G не элементарна;*
(2) *если H дискретна, то G дискретна;*
(3) *если $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$, то $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.*

Доказательство. Предположим, что H – неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $H(p)$ бесконечна. Поскольку $H(p) \subset G(p)$, утверждение (1) доказано.

Предположим, что H – дискретная группа. Покажем, что подгруппа H имеет индекс не более двух в группе G. Рассмотрим гомоморфизм $\Phi : G \to \mathbb{Z}_2$, который сопоставляет элементу $w = f^{s_1}g^{t_1}\cdots f^{s_m}g^{t_m}$ вычет $\Phi(w) = t_1 + \ldots + t_m \mod 2$. Заметим, что $\ker\Phi = H$. Из теоремы о гомоморфизме следует, что $G/H \cong \Phi(G) < \mathbb{Z}_2$. Таким образом, группа G имеет дискретную подгруппу конечного индекса. Следовательно, G – дискретная группа. Утверждение (2) доказано.

Предположим, что $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$, т. е. группа H является свободным произведением циклических групп, одна из которых порождена элементом f, а другая – элементом h. По лемме 2.7 из [17], $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Утверждение (3) доказано. □

Лемма 3.2. [7] *Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – нетривиальный непараболический элемент, $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – инволюция и $h = gfg^{-1}$. Тогда имеет место равенство $\delta(f,h) = 2\delta(f,g)$.*

Лемма 3.3. [2*] *Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – нетривиальный непараболический элемент, $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ – инволюция и $h = gfg^{-1}$. Тогда*
(1) *если $\theta(f,g) \leq \pi/4$, то $\theta(f,h) = 2\theta(f,g)$;*
(2) *если $\theta(f,g) \geq \pi/4$, то $\theta(f,h) = \pi - 2\theta(f,g)$.*

Доказательство. Обозначим $\gamma = \gamma(f,g)$ и $\beta = \beta(f)$. Поскольку элементы f и h сопряжены, то $\beta(h) = \beta$. Рассмотрим два случая.

Предположим, что f и h имеют общую неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\theta(f,h) = 0$. По предложению 1.1, $\gamma(f,h) = 0$. Используя тождество (2.2) из работы [7],

$$\gamma(f,h) = \gamma(f,g)\big(\gamma(f,g) - \beta(f)\big), \tag{5}$$

видим, что $\gamma(\gamma - \beta) = 0$. Значит, $\gamma = 0$ или $\gamma = \beta$.

Пусть $\gamma = 0$. Из предложения 1.1 следует, что элементы f и g имеют общую неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, $\theta(f,g) = 0$ и $\theta(f,h) = 0 = 2\theta(f,g)$.

Пусть $\gamma = \beta$. Вновь в силу предложения 1.1, f и g не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$. Применим вторую формулу из леммы 1.2 для этих элементов:

$$\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr) = \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + 1\right| - \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| = \left|\frac{4\gamma}{-4\beta} + 1\right| - \left|\frac{4\gamma}{-4\beta}\right| = -1.$$

Поэтому $\theta(f,g) = \pi/2$. Следовательно, $\theta(f,h) = 0 = \pi - 2\theta(f,g)$.

Предположим, что f и h не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$. Покажем, что

$$\cos\theta(f,g) = \bigl|\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr)\bigr|. \tag{6}$$

Используя третью формулу из следствия 1.2 и (5), получим

$$\begin{aligned}
\cos\theta(f,h) &= \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,h)}{\beta(f)\beta(h)} + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{2\gamma(f,h)}{\beta(f)\beta(h)}\right| + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\left|\frac{2\gamma(\gamma-\beta)}{\beta^2} + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{2\gamma(\gamma-\beta)}{\beta^2}\right| + \frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{|4\gamma(\gamma-\beta)+\beta^2| - |4\gamma(\gamma-\beta)| + |\beta^2|}{|2\beta^2|}} \\
&= \sqrt{\frac{|2\gamma-\beta|^2 - 4|\gamma||\gamma-\beta| + |\beta|^2}{2|\beta|^2}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено тождество

$$|2z_1 - z_2|^2 = 2|z_1 - z_2|^2 + 2|z_1|^2 - |z_2|^2. \tag{8}$$

В самом деле, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\begin{aligned}
|2z_1 - z_2|^2 &= \bigl|(2x_1 - x_2) + i(2y_1 - y_2)\bigr|^2 = (2x_1 - x_2)^2 + (2y_1 - y_2)^2 \\
&= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 4y_1^2 - 4y_1y_2 + y_2^2 \\
&= 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_2^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 \\
&= 2(x_1 - x_2)^2 + 2(y_1^2 - y_2)^2 + 2(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2) \\
&= 2|z_1 - z_2|^2 + 2|z_1|^2 - |z_2|^2.
\end{aligned}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\begin{aligned}
\cos\theta(f,h) &= \sqrt{\frac{2|\gamma-\beta|^2 + 2|\gamma|^2 - |\beta|^2 - 4|\gamma||\gamma-\beta| + |\beta|^2}{2|\beta|^2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{|\gamma-\beta| - |\gamma|}{|\beta|}\right)^2} = \bigl|\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr)\bigr|.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства утверждений (1) и (2) осталось раскрыть модуль в (6). □

Рассмотрим неравенство (2) из теоремы 1.6,

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \frac{\cos(\pi/m)\cos(\pi/n)\cos\theta(f,g) + 1}{\sin(\pi/m)\sin(\pi/n)},$$

где $m \geq 3$ и $n \geq 2$ – натуральные числа. Если в условии указанной теоремы группа G такова, что g – инволюция, т. е. $n = 2$, то это неравенство принимает вид

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \frac{1}{\sin(\pi/m)},$$

который не зависит от угла $\theta(f,g)$. Перепишем его, используя гиперболические и тригонометрические тождества:

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m). \tag{9}$$

Следующая теорема улучшает эту оценку, учитывая значение $\theta(f,g)$.

Теорема 3.1. [2*] *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f – эллиптический элемент порядка $m \geq 3$ и g – инволюция. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) *$\theta(f,g) \leq \pi/4$ и $\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m)\cos\theta(f,g)$,*
(2) *$\theta(f,g) \geq \pi/4$ и $\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \operatorname{ctg}(\pi/m)\sin\theta(f,g)$.*
Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h\rangle$. Поскольку элементы f и h сопряжены, h – эллиптический элемент порядка m.

Предположим, что для группы G выполнено условие (1). Возводя в квадрат второе неравенство из этого условия и используя тождество для гиперболических функций, получаем, что

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 1 + 2\operatorname{ctg}^2(\pi/m)\cos^2\theta(f,g).$$

Из этого неравенства и лемм 3.2, 3.3 следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\delta(f,h) &= \operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 1 + 2\operatorname{ctg}^2(\pi/m)\cos^2\theta(f,g)\\ &= 1 + \operatorname{ctg}^2(\pi/m) + \operatorname{ctg}^2(\pi/m)\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr)\\ &= \frac{1+\cos^2(\pi/m)\cos\theta(f,h)}{\sin^2(\pi/m)}.\end{aligned}$$

Таким образом, для группы H можно применить теорему 1.6. Значит, H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$. В силу леммы 3.1, теорема с условием (1) доказана.

Предположим, что для группы G выполнено условие (2). Тогда

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 1 + 2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{m}\sin^2\theta(f,g),$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\delta(f,h) &= \operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 1 + 2\operatorname{ctg}^2(\pi/m)\sin^2\theta(f,g)\\ &= 1 + \operatorname{ctg}^2(\pi/m) - \operatorname{ctg}^2(\pi/m)\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr)\\ &= \frac{1+\cos^2(\pi/m)\cos\bigl(\pi - 2\theta(f,g)\bigr)}{\sin^2(\pi/m)}\\ &= \frac{1+\cos^2(\pi/m)\cos\theta(f,h)}{\sin^2(\pi/m)}.\end{aligned}$$

Итак, для группы H выполнено условие теоремы 1.6. Следовательно, H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$. Применение леммы 3.1 завершает доказательство теоремы с условием (2). □

На рисунке 3 для значений $m = 3$, $m = 4$ и $m = 12$ разными штриховками выделены полосы и криволинейные треугольники. Легко видеть, что точки, принадлежащие полосе, и только они, имеют координаты, удовлетворяющие неравенству (9) для соответствующего m; точки, принадлежащие объединению полосы с криволинейным треугольником, и только они, имеют координаты, удовлетворяющие неравенствам из условия (1) или условия (2) теоремы 3.1 для соответствующего m.

Расписывая условие теоремы 3.1 с использованием следствий 1.1 и 1.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $par\langle f, g\rangle = (\gamma, \beta, -4)$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta = -4\sin^2(\pi k/m)$, $m \geq 3$, $1 \leq k < m/2$ *и* $(k, m) = 1$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $|\gamma| - |\gamma - \beta| \leq 0$ *и* $|\gamma| - \cos(2\pi/m)|\gamma - \beta| \geq |\beta|$,
(2) $|\gamma - \beta| - |\gamma| \leq 0$ *и* $|\gamma - \beta| - \cos(2\pi/m)|\gamma| \geq |\beta|$.
Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

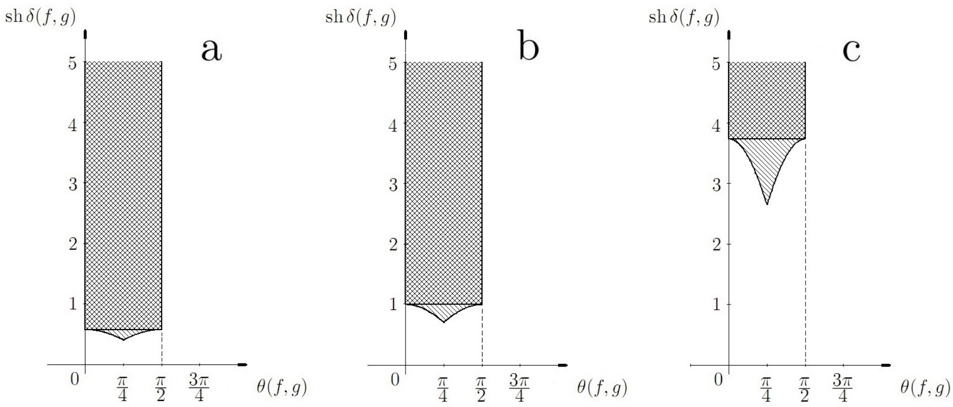


Рис. 3. Полосы и криволинейные треугольники для значений $m = 3$ (a), $m = 4$ (b) и $m = 12$ (c).

Перейдем к рассмотрению неравенства (4) из теоремы 2.2,

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)},$$

где $n \geq 2$ – натуральное число. При $n = 2$ это неравенство записывается в виде

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \geq \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}$$

и эквивалентно неравенству

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \operatorname{cth}(\tau_f/2), \tag{10}$$

которое не зависит от угла $\theta(f,g)$. В этом случае следующий результат дает более сильное достаточное условие дискретности, чем теорема 2.2, и учитывает значение $\theta(f,g)$.

Теорема 3.2. [2*] *Пусть группа* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *такова, что* f *– локсодромический элемент с величиной сдвига* τ_f *и* g *– инволюция. Обозначим* $\alpha_f = \arcsin\big(1/\operatorname{ch}(\tau_f/2)\big)$. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*
(1) $\theta(f,g) \leq \pi/4$ *и* $\alpha_f \leq \theta(f,g)$,
(2) $\theta(f,g) \leq \pi/4$, $\alpha_f > \theta(f,g)$ *и* $\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \operatorname{cth}(\tau_f/2)\cos\theta(f,g)$,
(3) $\theta(f,g) \geq \pi/4$ *и* $\alpha_f \leq \pi/2 - \theta(f,g)$,
(4) $\theta(f,g) \geq \pi/4$, $\alpha_f > \pi/2 - \theta(f,g)$ *и* $\operatorname{ch}\delta(f,g) \geq \operatorname{cth}(\tau_f/2)\sin\theta(f,g)$.
Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h\rangle$. Элемент h является локсодромическим и имеет величину сдвига $\tau_h = \tau_f$, так как h и f сопряжены. Значит, $\alpha_h = \alpha_f$.

Предположим, что для группы G выполнено условие (1) или (2). Если имеет место (1), то из леммы 3.3 следует, что

$$\alpha_f + \alpha_h = 2\alpha_f \leq 2\theta(f,g) = \theta(f,h).$$

Если имеет место (2), то, аналогично, $\alpha_f + \alpha_h > \theta(f,h)$, и

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\cos^2\theta(f,g) - 1.$$

Далее, используя леммы 3.2 и 3.3, видим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\delta(f,h) &= \operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\cos^2\theta(f,g) - 1\\ &= \operatorname{cth}^2(\tau_f/2) + \operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr) - 1\\ &= \frac{1 + \operatorname{ch}^2(\tau_f/2)\cos\theta(f,h)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}.\end{aligned}$$

По теореме 2.2, в каждом из этих двух случаев H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$. В силу леммы 3.1, теорема с условиями (1) и (2) доказана.

Предположим, что для группы G выполнено условие (3) или (4). Если имеет место (3), то из леммы 3.3 следует, что

$$\alpha_f + \alpha_h = 2\alpha_f \leq \pi - 2\theta(f,g) = \theta(f,h).$$

Если имеет место (4), то, аналогично, $\alpha_f + \alpha_h > \theta(f,h)$, и

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\sin^2\theta(f,g) - 1,$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}\delta(f,h) &= \operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) \geq 2\operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\sin^2\theta(f,g) - 1\\ &= \operatorname{cth}^2(\tau_f/2) - \operatorname{cth}^2(\tau_f/2)\cos\bigl(2\theta(f,g)\bigr) - 1\\ &= \frac{1 + \operatorname{ch}^2(\tau_f/2)\cos\bigl(\pi - 2\theta(f,g)\bigr)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}\\ &= \frac{1 + \operatorname{ch}^2(\tau_f/2)\cos\theta(f,h)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)}.\end{aligned}$$

Таким образом, в каждом из этих двух случаев для группы H можно применить теорему 2.2. Следовательно, H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f\rangle * \langle h\rangle$. Использование леммы 3.1 завершает доказательство теоремы с условиями (3) и (4). □

Обозначим

$$\tau_1 = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 1,76\ldots \quad \text{и} \quad \tau_2 = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2,63\ldots\ .$$

На рисунке 4 для значений $\tau_f = 1$, $\tau_f = \tau_1$ и $\tau_f = \tau_2$ разными штриховками выделены полосы и некоторые множества. Заметим, что точка принадлежит полосе тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют неравенству (10) для соответствующего τ_f; точка принадлежит объединению полосы с множеством тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют неравенствам из условия (1), условия (2), условия (3) или условия (4) теоремы 3.2 для соответствующего τ_f.

Расписывая условие теоремы 3.2 с использованием следствий 1.1 и 1.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Пусть* $G = \langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $par\langle f,g\rangle = (\gamma,\beta,-4)$, *где* $\gamma\in\mathbb{C}$ *и* $\beta \in \mathbb{C}\setminus[-4;0]$. *Обозначим*

$$A = \frac{|\beta|\cdot\bigl(12 - |\beta+4| - |\beta|\bigr)}{|\beta+4| + |\beta| + 4} \quad \text{и} \quad B = \frac{|\beta+4| + |\beta|}{4}.$$

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:
(1) $|\gamma| - |\gamma-\beta| \leq 0$ *и* $|\gamma| - |\gamma-\beta| \geq A$,
(2) $|\gamma| - |\gamma-\beta| \leq 0$, $|\gamma| - |\gamma-\beta| < A$ *и* $B\cdot|\gamma| - |\gamma-\beta| \geq |\beta|$,
(3) $|\gamma-\beta| - |\gamma| \leq 0$ *и* $|\gamma-\beta| - |\gamma| \geq A$,

(4) $|\gamma-\beta|-|\gamma|\le 0$, $|\gamma-\beta|-|\gamma|<A$ *и* $B\cdot|\gamma-\beta|-|\gamma|\ge|\beta|$.
Тогда G *– неэлементарная дискретная группа и* $G=\langle f\rangle * \langle g\rangle$.

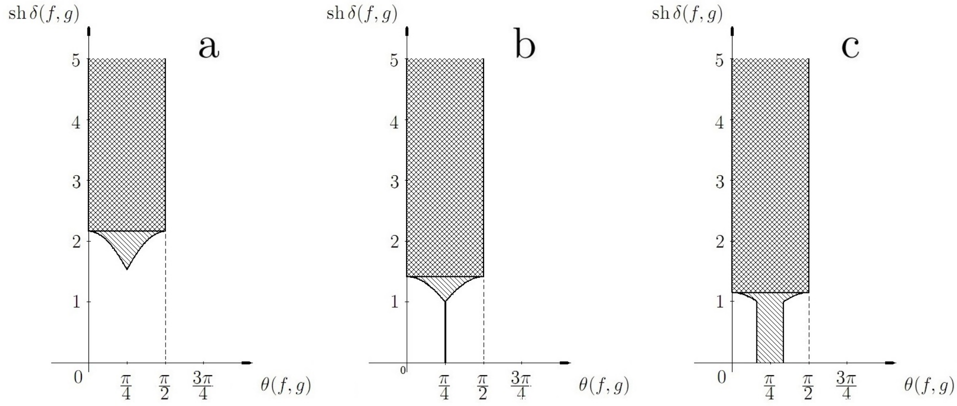


Рис. 4. Полосы и другие множества для значений $\tau_f=1$ (a), $\tau_f=\tau_1$ (b) и $\tau_f=\tau_2$ (c).

3.2. **Группы Маскита.** Группа $\langle f,g\rangle<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *группой Маскита*, если элемент f имеет две неподвижные точки $z_1,z_2\in\overline{\mathbb{C}}$ и $g(z_1)=z_2$. Впервые эти группы исследовались Б. Маскитом в 1989 году (см. [21]) и, насколько известно автору, до сих пор нет исчерпывающего ответа на вопрос: при каких условиях на порождающие такая группа является дискретной? В данном параграфе мы дадим частичный ответ на этот вопрос.

Прежде всего отметим, что условие на группу быть группой Маскита накладывает весьма жесткие ограничения на один из ее порождающих. А именно, имеет место альтернатива, указанная в следующем предложении.

Предложение 3.1. [21] *Пусть* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа Маскита. Тогда либо* f *– эллиптический элемент порядка* 2, 3, 4 *или* 6, *либо* g *– инволюция.*

Замечание 3.1. *Поскольку неподвижные точки эллиптического элемента являются неподвижными точками для его степеней, имеют место следующие утверждения:*
(1) *если* $\langle f,g\rangle$ *– группа Маскита и* f *– эллиптический элемент порядка* 4, *то ее подгруппа* $\langle h,g\rangle$, *где* $h=f^2$, *также является группой Маскита;*
(2) *если* $\langle f,g\rangle$ *– группа Маскита и* f *– эллиптический элемент порядка* 6, *то ее подгруппы* $\langle h,g\rangle$, *где* $h=f^2$, *и* $\langle k,g\rangle$, *где* $k=f^3$, *также являются группами Маскита. Следовательно,*
(3) *если группа* $\langle h,g\rangle$ *не дискретна, то группа* $\langle f,g\rangle$ *не дискретна;*
(4) *если группа* $\langle k,g\rangle$ *не дискретна, то группа* $\langle f,g\rangle$ *не дискретна;*
(5) *если группа* $\langle f,g\rangle$ *дискретна, то группа* $\langle h,g\rangle$ *дискретна;*
(6) *если группа* $\langle f,g\rangle$ *дискретна, то группа* $\langle k,g\rangle$ *дискретна.*

Замечание 3.2. *Если* $\langle f,g\rangle$ *– группа Маскита и* g *– инволюция, то* $\langle f,g\rangle$ *элементарна. В самом деле, в этом случае элемент* g *переставляет неподвижные точки элемента* f, *принадлежащие абсолюту. Эти точки и образуют конечную* $\langle f,g\rangle$*-орбиту. Следовательно, группа* $\langle f,g\rangle$ *дискретна тогда и только тогда, когда* f *не является эллиптическим элементом бесконечного порядка.*

Для первого случая из альтернативы предложения 3.1 известно достаточное условие дискретности.

Теорема 3.3. [21] *Пусть* $\langle f,g\rangle$ *– группа Маскита и* f *– эллиптический элемент порядка* 2, 3, 4 *или* 6. *Если* g *– примитивный эллиптический, параболический или гиперболический элемент, то* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа.*

Для того же случая имеет место достаточное условие недискретности, полученное Е. Я. Клименко в [24].

Теорема 3.4. [24] *Пусть* $\langle f,g\rangle$ *– группа Маскита и* f *– эллиптический элемент порядка* 2, 3, 4 *или* 6. *Если* g *– непримитивный эллиптический элемент, то* $\langle f,g\rangle$ *– недискретная группа.*

Таким образом, остается открытым вопрос о дискретности тех групп Маскита $\langle f,g\rangle$, для которых f – эллиптический элемент порядка 2, 3, 4 или 6, и g – строго локсодромический элемент. В дальнейшем нас будет интересовать именно этот случай.

Как показали Ф. Геринг и Г. Мартин в [7], определение группы Маскита можно переформулировать в терминах параметров.

Лемма 3.4. [7] *Группа* $\langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *является группой Маскита тогда и только тогда, когда* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,\beta')$ *и* $\beta\neq 0$.

Следствие 1.2 позволяет найти расстояния $\delta(f,g)$ и углы $\theta(f,g)$ между осями непараболических порождающих в группах Маскита.

Предложение 3.2. *Пусть* $\langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,\beta')$, *где* $\beta\neq 0$ *и* $\beta'\neq 0$. *Тогда*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g)=\sqrt{\left|\frac{4+\beta'}{2\beta'}\right|+\left|\frac{2}{\beta'}\right|+\frac{1}{2}},\quad \cos\theta(f,g)=\sqrt{\left|\frac{4+\beta'}{2\beta'}\right|-\left|\frac{2}{\beta'}\right|+\frac{1}{2}}.$$

Следствие 3.3. *Пусть* $\langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *– группа Маскита. Тогда*

(1) *если* g *– примитивный эллиптический элемент порядка* $m\geq 2$, *то*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g)=1/\sin(\pi/m)\quad \text{и}\quad \theta(f,g)=\pi/2;$$

(2) *если* g *– гиперболический элемент с величиной сдвига* τ_g, *то*

$$\operatorname{sh}\delta(f,g)=1/\operatorname{sh}(\tau_g/2)\quad \text{и}\quad \theta(f,g)=0.$$

Доказательство. Для примитивного эллиптического элемента g порядка $m\geq 2$, по определению, имеем

$$\beta(g)=\mathrm{tr}^2(g)-4=4\cos^2(\pi/m)-4=-4\sin^2(\pi/m).$$

Для гиперболического элемента g с величиной сдвига τ_g выполнено равенство $\mathrm{tr}^2(g) = 4\operatorname{ch}^2(\tau_g/2)$ (см., например, [1, §7.34]) и поэтому

$$\beta(g)=\mathrm{tr}^2(g)-4=4\operatorname{ch}^2(\tau_g/2)-4=4\operatorname{sh}^2(\tau_g/2).$$

Осталось подставить найденные значения $\beta(g)$ в формулы из предложения 3.2 и воспользоваться гиперболическим тождеством. □

Другое доказательство пункта (1) следствия 3.3, основанное на чисто геометрических рассуждениях, было установлено автором совместно с Н. А. Исаченко в [3*].

Пользуясь леммой 3.4, перепишем в терминах параметров приведенные выше утверждения о дискретности групп Маскита. Отметим, что если f – эллиптический элемент порядка 2, 3, 4 или 6, то $\beta(f) = -4$, -3, -2 или -1; если g – инволюция, то $\beta(g) = -4$ (см., например, [1, §7.33]).

Следствие 3.4. *Пусть* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа Маскита. Тогда* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,-4)$, *где* $\beta\neq 0$, *или* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,\beta')$, *где* $\beta\in\{-4,-3,-2,-1\}$.

Здесь и далее будем полагать, что

$$\mathfrak{D}=\big\{-4\sin^2(\pi/m)\;\big|\; m\in\mathbb{Z},\ m\geq 2\big\}\cup[0,+\infty).$$

Следствие 3.5. *Пусть* $\langle f,g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,\beta')$, *где* $\beta\in\{-4,-3,-2,-1\}$. *Если* $\beta'\in[-4;+\infty)$, *то* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа тогда и только тогда, когда* $\beta'\in\mathfrak{D}$.

Следующая лемма показывает, как преобразуются параметры группы Маскита при выборе новых пар порождающих.

Лемма 3.5. [4*] *Пусть* $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f,g\rangle = (\beta,\beta,\beta')$, *где* $\beta = -4\sin^2(\pi/m)$, $m \in \{2,3,4,6\}$ *и* $\beta' \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\mathrm{par}\langle f, gf^k\rangle = \big(\beta,\beta, e^{2\pi ki/m}\cdot(\beta'+4)-4\big)$$

для любого $k \in \{1,...,m-1\}$.

Доказательство. По определению параметров $\gamma(f,gf^k)$ и $\gamma(f,g)$,

$$\gamma(f,gf^k) = \mathrm{tr}(fgf^kf^{-1}f^{-k}g^{-1}) - 2 = \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2 = \gamma(f,g).$$

Следовательно, $\gamma(f,gf^k) = \gamma(f,g) = \beta$.

С точностью до сопряжения в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ элемент f имеет неподвижные точки $0,\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ и элемент g такой, что $g(0)=\infty$. Заменяя, если необходимо, f на f^{-1}, можем считать, что

$$f = \begin{pmatrix} e^{\pi i/m} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/m}\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g = \begin{pmatrix} s & t \\ -t^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

для некоторых $s \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Вычислим параметр $\beta(gf^k)$:

$$\beta(gf^k) = \mathrm{tr}^2(gf^k) - 4 = (e^{\pi ki/m}s)^2 - 4 = e^{2\pi ki/m}\cdot(\beta'+4)-4.$$

Лемма доказана. □

На интересующие нас группы Маскита далее будем смотреть как на четыре семейства, параметризуемых комплексным числом β'. Для каждого из этих семейств на комплексной плоскости можно отметить те значения параметра, которые соответствуют дискретным группам, и те, которые соответствуют недискретным группам. Лемма 3.5 имеет очевидное следствие, которое показывает, что эти множества обладают поворотными симметриями.

Теорема 3.5. [4*] *Пусть* $\langle f, g_1\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\langle f, g_2\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{par}\langle f,g_1\rangle = (\beta,\beta,\beta_1')$ *и* $\mathrm{par}\langle f,g_2\rangle = (\beta,\beta,\beta_2')$, *где* $\beta = -4\sin^2(\pi/m)$, $m\in\{2,3,4,6\}$, $\beta_1' \in \mathbb{C}$ *и* $\beta_2' = e^{2\pi ki/m}\cdot(\beta_1'+4)-4$, $k \in \{1,...,m-1\}$. *Группа* $\langle f, g_1\rangle$ *дискретна тогда и только тогда, когда группа* $\langle f, g_2\rangle$ *дискретна.*

Замечание 3.1 влечет следующую теорему о взаимосвязи между параметрическими плоскостями разных семейств групп Маскита.

Теорема 3.6. *Пусть* $\langle f_m, g_m\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}\langle f_m,g_m\rangle = (\beta,\beta,\beta_m')$, *где* $m \in \{2,3,4,6\}$, $\beta = -4\sin^2(\pi/m)$ *и* $\beta_m' \in \mathbb{C}$. *Тогда*
(1) *если группа* $\langle f_2, g_2\rangle$ *не дискретна при* β_2', *то группа* $\langle f_4, g_4\rangle$ *не дискретна при* $\beta_4' = \beta_2'$ *и группа* $\langle f_6, g_6\rangle$ *не дискретна при* $\beta_6' = \beta_2'$.
(2) *если группа* $\langle f_3, g_3\rangle$ *не дискретна при* β_3', *то группа* $\langle f_6, g_6\rangle$ *не дискретна при* $\beta_6' = \beta_3'$.
(3) *если группа* $\langle f_4, g_4\rangle$ *дискретна при* β_4', *то группа* $\langle f_2, g_2\rangle$ *дискретна при* $\beta_2' = \beta_4'$.
(4) *если группа* $\langle f_6, g_6\rangle$ *дискретна при* β_6', *то группа* $\langle f_2, g_2\rangle$ *дискретна при* $\beta_2' = \beta_6'$ *и группа* $\langle f_3, g_3\rangle$ *дискретна при* $\beta_3' = \beta_6'$.

Ниже нам будут полезны следующие леммы.

Лемма 3.6. [7] *Пусть* $\langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *– дискретная группа,* $\gamma(f,g) \neq 0$ *и* $\gamma(f,g) \neq \beta(g)$. *Тогда существует инволюция* $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *такая, что группа* $\langle h, g\rangle$ *дискретна и*

$$\gamma(h,g) = \beta(g) - \gamma(f,g).$$

Лемма 3.7. [17] *Пусть* $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* g *– инволюция. Тогда*

$$\beta(fg) = \gamma(f,g) - \beta(f) - 4.$$

Суммируем все приведенные выше и доказанные ниже утверждения о дискретности групп Маскита с параметрами (β,β,β'), где $\beta\in\{-4,-3,-2,-1\}$, в следующих четырех теоремах.

Теорема 3.7. [4*] *Пусть* $G=\langle f,g\rangle<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f,g\rangle=(-4,-4,\beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если* $0<|\beta'+4|<1$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $-8<\beta'<0$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда*

$$\beta'\in\Big\{-4-4\cos^2\frac{\pi}{m}\ \Big|\ m\in\mathbb{Z},\ m\geq 3\Big\}\cup\Big\{-4\sin^2\frac{\pi}{m}\ \Big|\ m\in\mathbb{Z},\ m\geq 2\Big\};$$

(3) *если* $|\beta'+4|\geq 4$, *то* G *– дискретная группа;*
(4) *если* $\beta'=e^{\pi ki/6}\cdot(r+4)-4$, $k\in\{2,3,4,8,9,10\}$ *и* $r\in\big\{-4\sin^2(\pi/m)\big|m\in\mathbb{Z},m\geq 2\big\}$, *то* G *– дискретная группа;*
(5) *если* $\beta'\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $|\beta'+4|<4$ *и* $\beta'=p+q\omega$, *где* $p,q\in\mathbb{Z}$, $\omega=i\sqrt{n}$ *и* $n\in\mathbb{N}$, *то* G *– дискретная группа;*
(6) *если* $\beta'\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $|\beta'+4|<4$ *и* $\beta'=p+q\omega$, *где* $p,q\in\mathbb{Z}$, $\omega=(1+i\sqrt{4n-1})/2$ *и* $n\in\mathbb{N}$, *то* G *– дискретная группа.*

Доказательство. Установим каждый пункт теоремы отдельно.

Лемма 3.8. *Если* $0<|\beta'+4|<1$, *то* $\langle f,g\rangle$ *– недискретная группа.*

Доказательство. Предположим, от противного, что $\langle f,g\rangle$ – дискретная группа. По лемме 3.6, существует инволюция $h\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такая, что группа $\langle h,g\rangle$ дискретна и

$$\gamma(h,g)=\beta(g)-\gamma(f,g)=\beta'+4.$$

Из этого равенства и леммы 3.7 видим, что дискретная группа $\langle hg,g\rangle$ имеет параметры

$$\gamma(hg,g)=\mathrm{tr}(hggg^{-1}h^{-1}g^{-1})-2=\mathrm{tr}(hgh^{-1}g^{-1})-2=\gamma(h,g)=\beta'+4,$$
$$\beta(hg)=\gamma(h,g)-\beta(g)-4=\beta'+4-\beta'-4=0.$$

Значит, hg – параболический элемент и $0<|\gamma(hg,g)|<1$. В силу леммы Шимицу [27, §II.C], $\langle hg,g\rangle$ – недискретная группа. Получили противоречие. Таким образом, G – недискретная группа. □

Пункты (2) и (3) являются следствиями двух лемм.

Лемма 3.9. *Если* $\beta'\in\mathbb{R}$, *то* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа тогда и только тогда, когда* $\beta'=\pm(r+4)-4$, *где* $r\in\mathfrak{D}$.

Эта лемма доказывается при помощи теоремы 3.5 и следствия 3.5.

Лемма 3.10. *Если* $\beta'\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *и* $|\beta'+4|\geq 4$, *то* $\langle f,g\rangle$ *– дискретная группа.*

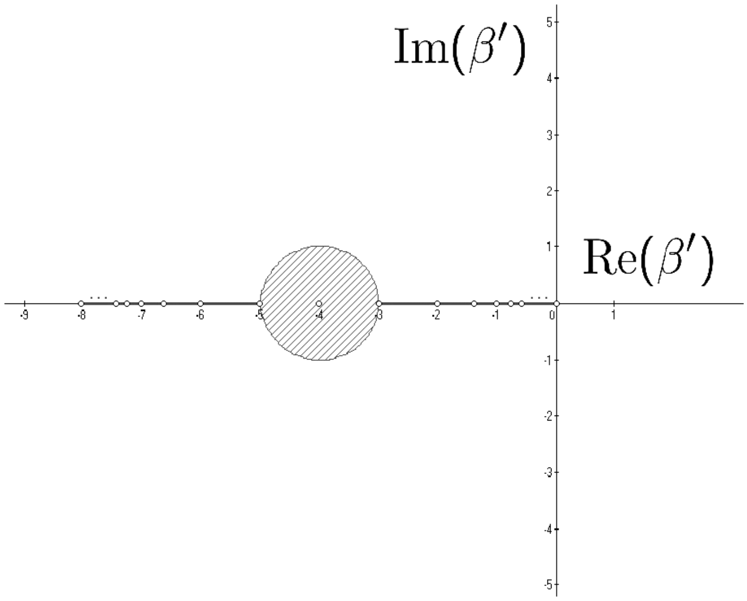
Доказательство. Очевидно,

$$|\gamma|-|\gamma-\beta'|=4-|\beta'+4|\leq 0,\tag{11}$$

$$\frac{|\beta'+4|+|\beta'|}{4}\cdot|\gamma|-|\gamma-\beta'|=\frac{|\beta'+4|+|\beta'|}{4}\cdot 4-|\beta'+4|=|\beta'|.\tag{12}$$

Из рассмотрения треугольника на комплексной плоскости с вершинами в точках -4, 0, β' получаем, что для числа β' выполнены неравенства $|\beta'|<4+|\beta'+4|$ и $|\beta'|+|\beta'+4|>4$. Значит,

$$\big(|\beta'|-4\big)^2-|\beta'+4|^2=\big(|\beta'|-4-|\beta'+4|\big)\big(|\beta'|-4+|\beta'+4|\big)<0,$$



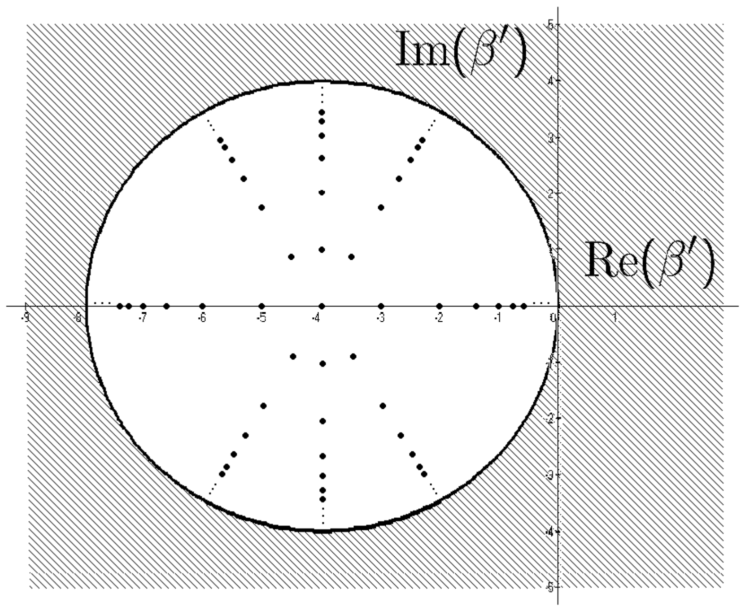


Рис. 5. Множества точек, соответствующих недискретным (сверху) и дискретным (снизу) группам с параметрами $(-4, -4, \beta')$.

откуда $|\beta'|^2 - 8|\beta'| + 16 - |\beta' + 4|^2 < 0$ и поэтому

$$4|\beta' + 4| - |\beta' + 4|^2 + 4|\beta'| - |\beta' + 4||\beta'| + 16 - 4|\beta' + 4|$$
$$< 12|\beta'| - |\beta' + 4||\beta'| - |\beta'|^2.$$

Используя последнее неравенство, нетрудно показать, что

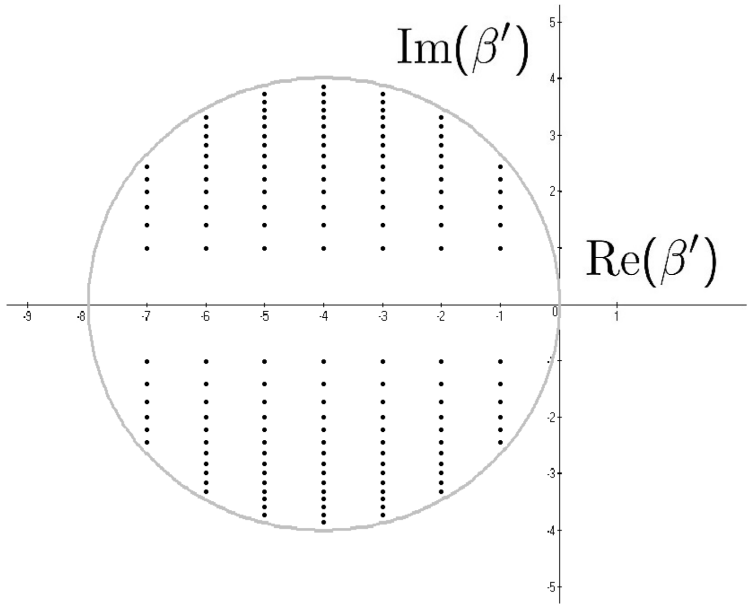
$$|\gamma| - |\gamma - \beta'| = 4 - |\beta' + 4| < \frac{|\beta'| \cdot \big(12 - |\beta' + 4| - |\beta'|\big)}{|\beta' + 4| + |\beta'| + 4}. \tag{13}$$

Из (11), (12) и (13) следует, что выполнено условие (2) следствия 3.2. Итак, $\langle f, g\rangle$ – дискретная группа. □

Пункт (4) получается как следствие теорем 3.6, 3.9(2) и 3.10(2).

Пункты (5) и (6) – прямые следствия теоремы 7.21 и леммы 7.23 из [7].

Теорема доказана. □



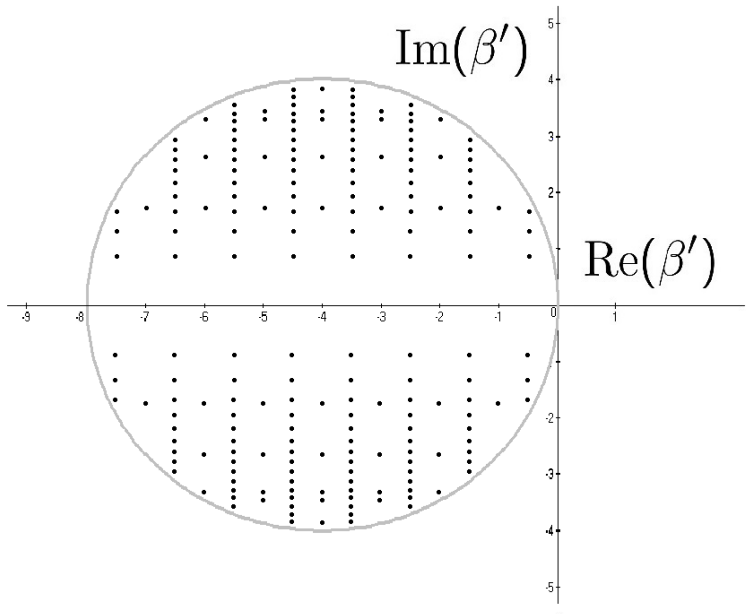


Рис. 6. Множества точек, соответствующих дискретным группам с параметрами $(-4,-4,\beta')$.

Теорема 3.8. [4*] *Пусть* $G=\langle f,g\rangle<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*
$$\mathrm{par}\langle f,g\rangle=(-3,-3,\beta').$$
Тогда имеют место следующие свойства:
(1) *если хотя бы для одного* $k\in\{0,2,4\}$ *выполнено неравенство* $0<|\beta'+4-e^{\pi ki/3}|<1$, *то* G *– недискретная группа;*
(2) *если* $\beta'=e^{\pi ki/3}\cdot(r+4)-4$, $k\in\{0,2,4\}$ *и* $r\in[-4,+\infty)$, *то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r\in\mathfrak{D}$;
(3) *если* $\beta'=e^{\pi ki/3}\cdot(r+4)-4$, $k\in\{1,3,5\}$ *и* $r\in\mathfrak{D}$, *то* G *– дискретная группа.*

Доказательство. Для доказательства пункта (1) применяются теорема 3.5 и следующая лемма.

Лемма 3.11. *Если* $0<|\beta'+3|<1$, *то* $\langle f,g\rangle$ *– недискретная группа.*

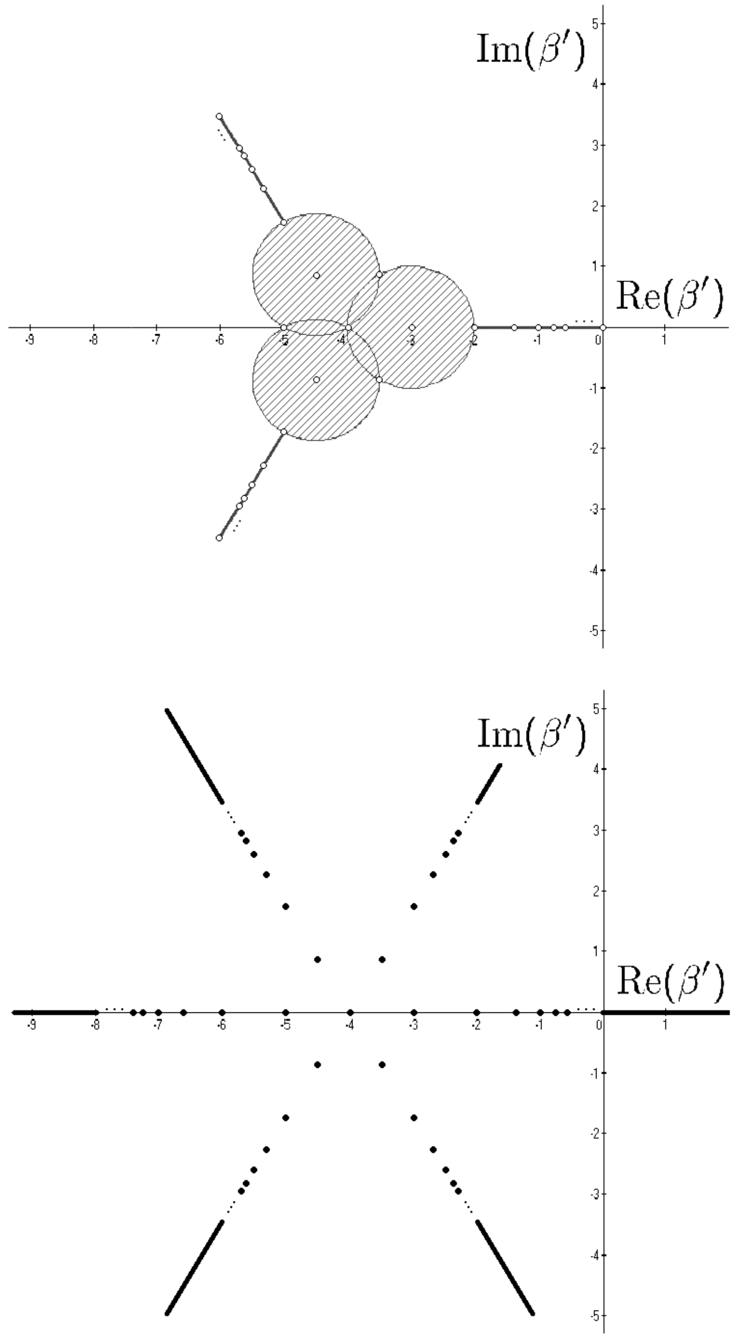


Рис. 7. Множества точек, соответствующих недискретным (сверху) и дискретным (снизу) группам с параметрами $(-3, -3, \beta')$.

Доказательство. Используем метод, предложенный в параграфе 5 работы [31]. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $\langle f, g\rangle$ – дискретная группа. Тогда, по лемме 3.6, существует инволюция $h \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ такая, что группа $\langle h, g\rangle$ дискретна и

$$\gamma(h, g) = \beta(g) - \gamma(f, g) = \beta' + 3.$$

Из этого равенства и леммы 3.7 следует, что дискретная группа $\langle hg, g\rangle$ имеет параметры

$$\gamma(hg, g) = \mathrm{tr}(hggg^{-1}h^{-1}g^{-1}) - 2 = \mathrm{tr}(hgh^{-1}g^{-1}) - 2 = \gamma(h, g) = \beta' + 3,$$
$$\beta(hg) = \gamma(h, g) - \beta(g) - 4 = \beta' + 3 - \beta' - 4 = -1.$$

Поэтому hg – эллиптический элемент порядка 6 и $0 < |\gamma(hg,g)| < 1$. В силу теоремы 3.4 из [7], $\langle hg, g\rangle$ – недискретная группа. Получили противоречие. Из чего заключаем, что G – недискретная группа. □

Пункт (2) является следствием теоремы 3.5 и следствия 3.5.

Пункт (3) – следствие теорем 3.6 и 3.10(2).

Доказательство теоремы завершено. □

Теорема 3.9. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-2, -2, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:

(1) *если выполнено хотя бы одно из следующих неравенств*

$$0 < |\beta' + 4 - e^{k\pi i/2}| < 1, \quad 0 < |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/2}| < (\sqrt{5}-1)/2$$
$$\text{или} \quad 2 < |\beta' + 4| + |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/2}| < \sqrt{3}+1$$

при $k \in \{0,1,2,3\}$*, то* G *– недискретная группа;*

(2) *если* $\beta' = e^{\pi k i/2}\cdot(r+4) - 4$*,* $k \in \{0,1,2,3\}$ *и* $r \in [-4, +\infty)$*, то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Пункт (1) выводится из теоремы 3.5 и следующей леммы.

Лемма 3.12. *Если выполнено хотя бы одно из следующих неравенств*

$$0 < |\beta' + 3| < 1, \quad 0 < |\beta' + 2| < (\sqrt{5}-1)/2$$
$$\text{или} \quad 2 < |\beta' + 4| + |\beta' + 2| < \sqrt{3}+1,$$

то $\langle f, g\rangle$ *– недискретная группа.*

Доказательство. Вновь используем метод из [31]. Предположим, от противного, что $\langle f, g\rangle$ – дискретная группа. По лемме 3.6, существует инволюция $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такая, что группа $\langle h, g\rangle$ дискретна и

$$\gamma(h,g) = \beta(g) - \gamma(f,g) = \beta' + 2.$$

Из этого равенства и леммы 3.7 видим, что дискретная группа $\langle hg, g\rangle$ имеет параметры

$$\gamma(hg,g) = \mathrm{tr}(hggg^{-1}h^{-1}g^{-1}) - 2 = \mathrm{tr}(hgh^{-1}g^{-1}) - 2 = \gamma(h,g) = \beta' + 2,$$
$$\beta(hg) = \gamma(h,g) - \beta(g) - 4 = \beta' + 2 - \beta' - 4 = -2.$$

Значит, hg – эллиптический элемент порядка 4 и

$$0 < |\gamma(hg,g) + 1| < 1, \quad 0 < |\gamma(hg,g)| < (\sqrt{5}-1)/2$$
$$\text{или} \quad 2 < |\gamma(hg,g) + 2| + |\gamma(hg,g)| < \sqrt{3}+1.$$

В силу результатов, полученных в пункте 5.9 работы [7], $\langle hg, g\rangle$ – недискретная группа. Получили противоречие. Таким образом, G – недискретная группа. □

Пункт (2) устанавливается при помощи теоремы 3.5 и следствия 3.5.

Теорема доказана. □

Теорема 3.10. [4*] *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и*

$$\mathrm{par}\langle f, g\rangle = (-1, -1, \beta').$$

Тогда имеют место следующие свойства:

(1) *если выполнено хотя бы одно из следующих неравенств*

$$0 < |\beta' + 4 - e^{k\pi i/3}| < 1 \quad \text{или} \quad 0 < |\beta' + 4 - 2e^{k\pi i/3}| \le 1/2$$

при $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$*, то* G *– недискретная группа;*

(2) *если* $\beta' = e^{\pi k i/3}\cdot(r+4) - 4$*,* $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ *и* $r \in [-4, +\infty)$*, то группа* G *дискретна тогда и только тогда, когда* $r \in \mathfrak{D}$.

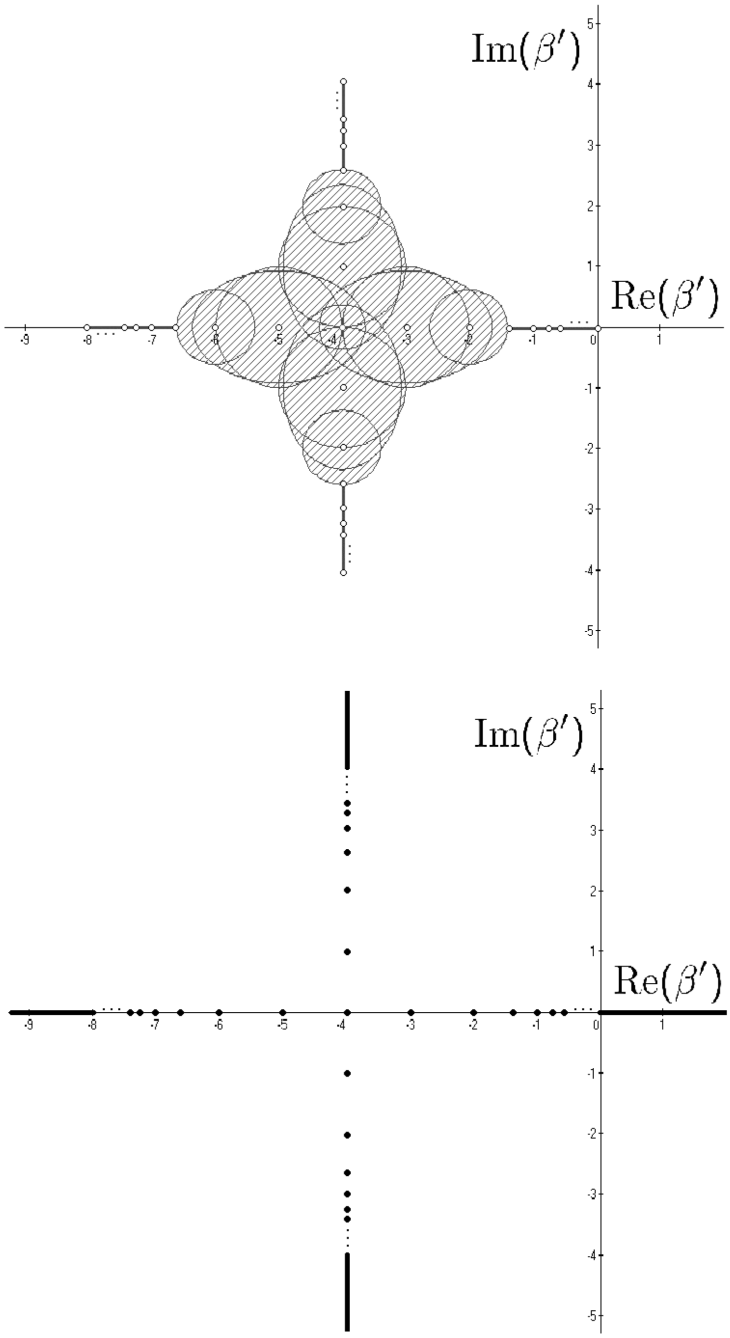


Рис. 8. Множества точек, соответствующих недискретным (сверху) и дискретным (снизу) группам с параметрами $(-2,-2,\beta')$.

Доказательство. Для доказательства пункта (1) применяется теорема 3.5 и следующая лемма.

Лемма 3.13. *Если выполнено хотя бы одно из неравенств*

$$0 < |\beta' + 3| < 1 \quad \text{\textit{или}} \quad 0 < |\beta' + 2| \leq 1/2,$$

то $\langle f, g\rangle$ *– недискретная группа.*

Доказательство. Предположим, что $0 < |\beta' + 3| < 1$. Из леммы 3.11 и теоремы 3.6 следует, что G – недискретная группа.

Предположим, что $0 < |\beta' + 2| \leq 1/2$. Тогда, по теореме 1 из [20], G – недискретная группа. $\square$

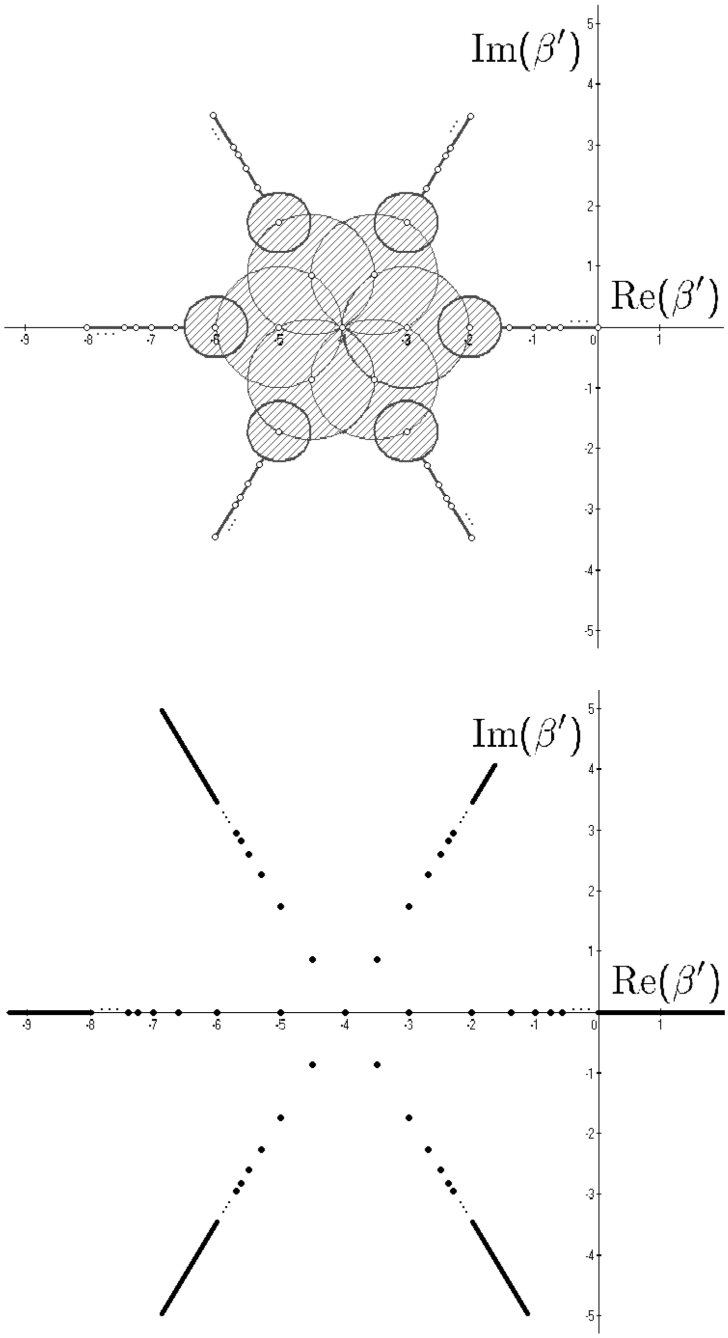


Рис. 9. Множества точек, соответствующих недискретным (сверху) и дискретным (снизу) группам с параметрами $(-1, -1, \beta')$.

Пункт (2) получается как следствие теоремы 3.5 и следствия 3.5. Доказательство теоремы завершено. □

Список литературы

[1] Бердон, А. *Геометрия дискретных групп* / А. Бердон. — Москва: Наука, 1986. — 304 с.

[2] Крушкаль, С. Л. *Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах* / С. Л. Крушкаль, Б. Н. Апанасов, Н. А. Гусевский — Новосибирск: Наука, 1981. — 249 с.

[3] Ratcliffe, J. *Foundations of Hyperbolic Manifolds. Second Edition* / J. Ratcliffe. — New York: Springer-Verlag, 2006. — 779 p.

[4] Груневальд, Ф. *Группы, действующие на гиперболическом пространстве* / Ф. Груневальд, Й. Меннике, Ю. Эльстродт. — Москва: МЦНМО, 2003. — 640 с.

[5] Деревнин, Д. А. *Геометрические свойства дискретных групп, действующих в пространстве Лобачевского с неподвижными точками* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Докл. АН СССР. — 1989. — 300, №1. — С. 27 – 30.

[6] Gehring, F. W. *Recent Results in the Geometry of Kleinian Groups* / F. W. Gehring, T. H. Marshall, G. J. Martin // Comput. Methods Funct. Theory. — 2003. — 2, №1. — P. 249 – 256.

[7] Gehring, F. W. *Commutators, collars and the geometry of Mobius groups* / F. W. Gehring, G. J. Martin // J. Anal. Math. — 1994. — 63, №1. — P. 175 – 219.

[8] Gehring, F. W. *The spectrum of elliptic axial distances in Kleinian groups* / F. W. Gehring, T. H. Marshall, G. J. Martin // Indiana Univ. Math. J. — 1998. — 47. — P. 1 – 10.

[9] Klein, F. *Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie*/ F. Klein // Math. Ann. — 1883. — 21. — P. 141 – 218.

[10] Maskit, B. *Construction of Kleinian groups* / B. Maskit // Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minnesota, 1964. — 1965. — P. 281 – 296.

[11] Maskit, B. *On Klein's combination theorem* / B. Maskit // Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — 120. — P. 499 – 509.

[12] Poincaré, H. *Théorie des groupes fuchsiens* / H. Poincaré // Acta Math. — 1882. — 1. — P. 1 – 62.

[13] Poincaré, H. *Mémoire sur les groupes Kleinéens* / H. Poincaré // Acta Math. — 1883. — 3. — P. 49 – 92.

[14] Epstein, D. B. A. *An Exposition of Poincare's Polyhedron Theorem* / D. B. A. Epstein, C. Petronio // Enseign. Math., II. Sér. — 1994. — 40. — P. 113 – 170.

[15] Jørgensen, T. *A note on subgroups of SL(2,C)* / T. Jørgensen // Q. J. Math. — 1977. — 28, №110. — P. 209 – 211.

[16] Gilman, G. *Two-generator discrete subgroups of PSL(2,C)* / G. Gilman. — Providence, Rhode Island: AMS, 1995. — 204 p.

[17] Gehring, F. W. *Kleinian groups with real parameters* / F. W. Gehring, J. P. Gilman, G. J. Martin // Commun. Contemp. Math. — 2001. — 3, №2. — P. 163 – 186

[18] Klimenko, E. *All discrete RP-groups whose generator have real trace* / E. Klimenko, N. Kopteva // Int. J. Algebra Comput. — 2005. — 15, №3. — P. 577 – 618.

[19] Jørgensen, T. *On discrete groups of Mobius transformations* / T. Jørgensen // Am. J. Math. — 1976. — 98. — P. 739 – 749.

[20] Tan, D. *On two-generator discrete groups of Mobius transformations* / D. Tan // Proc. Am. Math. Soc. — 1989. — 106. — P. 763 – 770.

[21] Maskit, B. *Some special 2-generator Kleinian groups* / B. Maskit // Proc. Am. Math. Soc. — 1989. — 106. — P. 175 – 186.

[22] Gehring, F. W. *On the discreteness of the free product of finite cyclic groups* / F. W. Gehring, C. Maclachlan, G. J. Martin // Mitt. Math. Semin. Gießen. — 1996. — 228. — P. 9 – 15.

[23] Rasskazov, A. *On the distance between the axes of elliptic elements generating a free product of cyclic groups* / A. Rasskazov // Adv. Geom. — 2006. — 6, №1. — P. 85 – 92.

[24] Клименко, Е. Я. *Об одном классе двупорожденных подгрупп PSL(2,C)* / Клименко Е. Я. // Сиб. мат. ж. — 1989. — 30, №5. — С. 74 – 76.

[25] Gehring, F. W. *Chebyshev polynomials and discrete groups* / F. W. Gehring, G. J. Martin // Proceedings of the Conference on Complex Analysis (Tianjin, 1992). — 1994. — P. 114 – 125.

[26] Gehring, F. W. *Stability and extremality in Jørgensen's inequality* / F. W. Gehring, G. J. Martin // Complex Variables, Theory Appl. — 1989. — 12, №1 – 4. — P. 277 – 282.

[27] Maskit, B. *Kleinian groups* / B. Maskit. — Berlin: Springer-Verlag, 1987. — 326 p.

[28] Knapp, A. W. *Doubly generated Fuchsian groups* / A. W. Knapp // Mich. Math. J. — 1968. — 15. — P. 289 – 304.

[29] Matelski, J. P. *The classification of discrete 2-generator subgroups of PSL(2,R)* / J. P. Matelski // Isr. J. Math. — 1982. — 21, №4. — P. 309 – 317.

[30] Клименко, Е. Я. *О дискретных группах в трехмерном пространстве Лобачевского, порожденных двумя поворотами* / Е. Я. Клименко // Сиб. мат. ж. — 1989. — 30, № 1. — С. 123 – 128.

[31] Gehring, F. W. *On the Margulis constant for Kleinian groups, I* / F. W. Gehring, G. J. Martin // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. — 1996. — 21, №2. — P. 439 – 462.

[1*] Маслей, А. В. *Достаточные условия дискретности для двупорожденных подгрупп PSL(2,C)* / А. В. Маслей // Сиб. мат. ж. — 2013. — 54, №5. — С. 1069 – 1086.

[2*] Маслей, А. В. *Достаточные условия дискретности для подгрупп PSL(2,C), порожденных инволюцией и непараболическим элементом* / А. В. Маслей // Мат. заметки. — 2014. — 95, №2. — С. 317 – 320.

[3*] Исаченко, Н. А. *Расстояние между осями эллиптических элементов в дискретных подгруппах PSL(2,C)* / Н. А. Исаченко, А. В. Маслей // Вестн. Омск. ун-та. — 2011. — №4. — С. 31 – 36.

[4*] Маслей, А. В. *О необходимых и достаточных условиях дискретности для подгрупп PSL(2,C)* / А. В. Маслей // Сборник научных статей Международной школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае», Барнаул. — 2013. — С. 39 – 44.