УДК 514.765

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ И ГАРМОНИЧЕСКИМ ТЕНЗОРОМ КОНЦИРКУЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ

П.Н. Клепиков

Введение

Особый интерес в дифференциальной геометрии представляют конформные преобразования. Среди нетривиальных конформных преобразований можно выделить те, которые переводят геодезические окружности в геодезические окружности. Такие конформные преобразования были определены К.Яно в [10], и называются конциркулярными. Также К.Яно ввел в рассмотрение тензор конциркулярной кривизны, являющийся инвариантом данного преобразования.

Другой интересной задачей является исследование конциркулярно-гармонических свойств римановых многообразий, где под гармоничностью понимается обращение в нуль дивергенции тензора конциркулярной кривизны риманова многообразия. В этом направлении стоит отметить работы [7, 9], в которых изучались релятивистские свойства тензора конциркулярной кривизны и его дивергенции, а также работу [8], содержащую результаты относительно бездивергентных свойств тензора конциркулярной кривизны контактных многообразий.

Настоящая работа посвящена изучению свойств тензора конциркулярой кривизны и его дивергенции на четырехмерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками, и является продолжением работ [2, 3, 4].

В силу инвариантности римановой метрики вопрос об исследовании тензора конциркулярной кривизны и его бездивергентных свойств на группах Ли может быть сведен к соответствующему вопросу на алгебре Ли группы Ли. Известно (см. [5, 6]), что для каждой четырехмерной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой существует ортонормированный базис, в котором структурные константы алгебры имеют удобный для вычисления вид. Определяя компоненты тензора конциркулярной кривизны и его дивергенции в базисах работ [5, 6], мы решаем вопрос о гармоничности тензора конциркулярной кривизны на четыррехмерныхмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

В работе дана полная классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками и гармоническим тензором конциркулярой кривизны, построен класс конциркулярно-гармонических, но не конциркулярно-плоских левоинваринтных римановых метрик трехмерных групп Ли.

§1. Обозначения и предварительные сведения

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну ρ определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y)$ и $\rho = \mathrm{tr}(r)$.

Рассмотрим в M геодезическую окружность, т.е. кривую, первая кривизна которой постоянна, а остальные кривизны равны нулю. Дифференциальное уравнение геодезической окружности в локальных координатах $\{x^i\}$ имеет вид (см. подробнее [10]).

$$\frac{\delta^3 x^i}{ds^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{ds^2} \frac{\delta^2 x^k}{ds^2} \frac{\delta x^i}{ds} = 0,$$

где $\frac{\delta}{ds}$ обозначает ковариантное дифференцирование вдоль кривой, а s — длину дуги.

Теорема 1. [10] *При произвольном конформном преобразовании $\bar{g}_{jk} = \sigma^2 g_{jk}$ любая геодезическая окружность преобразуется в геодезическую окружность в том и только том случае, если функция σ удовлетворяет соотношению*

$$\sigma_{j;k} - \sigma_j \sigma_k = \theta g_{jk},$$

где $\sigma_j = \frac{\partial \log \sigma}{dx^j}$, $\sigma_{j;k}$ — ковариантная производная σ_j, $\theta = \theta(\sigma) \in C^\infty(M)$.

Определение 1. Конформное преобразование, удовлетворяющее условию теоремы 1, называется *конциркулярным.*

Рассмотрим *тензор конциркулярной кривизны*, определяемый равенством [10]

$$Z = R - \frac{\rho}{2n(n-1)} g \owedge g,$$

где $\owedge$ — произведение Кулкарни-Номидзу (см. [1]), или в координатах

$$Z_{hijk} = R_{hijk} - \frac{\rho}{n(n-1)} (g_{ij} g_{hk} - g_{ik} g_{hj}). \tag{1}$$

Лемма 1. *Тензор конциркулярной кривизны обладает симметриями тензора кривизны и удовлетворяет равенству*

$$Z_{hijk} + Z_{hjki} + Z_{hkij} = 0.$$

Доказательство. Делаем замену индексов $h \leftrightarrow i$ в (1) и, принимая во внимание косую симметрию тензора кривизны по первой паре индексов, получаем $Z_{ihjk} = R_{ihjk} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) = -R_{hijk} + \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}) = -Z_{hijk}$.

Аналогично, выполняя замену индексов $j \leftrightarrow k$ в (1), проверяем кососимметричность тензора Z_{hijk} по последней паре индексов.

С помощью замены индексов $h \leftrightarrow j, i \leftrightarrow k$ в (1), замечаем $Z_{jkhi} = R_{jkhi} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{kh}g_{ji} - g_{ki}g_{jh}) = Z_{hijk}$.

Используя формулу (1), найдем $Z_{h(ijk)} = R_{h(ijk)} - \frac{\rho}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj} + g_{jk}g_{hi} - g_{ji}g_{hk} + g_{ki}g_{hj} - g_{kj}g_{hi})$. Приводя подобные и применяя первое тождество Бьянки, заключаем $Z_{h(ijk)} = R_{h(ikj)} = 0$, что завершает доказательство леммы. □

Определим дивергенцию тензора конциркулярной кривизны формулой

$$(\mathrm{div}Z)_{ijk} = g^{st} Z_{ijkt;s} \tag{2}$$

и, придерживаясь терминологии работы [1], назовем тензор конциркулярной кривизны *гармоническим*, если $(\mathrm{div}Z)_{ijk} = 0$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$(\mathrm{div}Z)_{ijk} = -(\mathrm{div}Z)_{jik}.$$

Доказательство. Вычисляя ковариантную производную тензора конциркулярной кривизны и используя равенство (2), получаем

$$(\mathrm{div}Z)_{ijk} = g^{st}\left(\frac{\partial Z_{ijkt}}{\partial x^s} - \Gamma^p_{si}Z_{pjkt} - \Gamma^p_{sj}Z_{ipkt} - \Gamma^p_{sk}Z_{ijpt} - \Gamma^p_{st}Z_{ijkp}\right).$$

Откуда, применяя лемму 1, имеем

$$(\mathrm{div}Z)_{ijk} = g^{st}\left(-\frac{\partial Z_{jikt}}{\partial x^s} + \Gamma^p_{si}Z_{jpkt} + \Gamma^p_{sj}Z_{pikt} + \Gamma^p_{sk}Z_{jipt} + \Gamma^p_{st}Z_{jikp}\right) =$$

$$-g^{st}Z_{jikt;s} = -(\mathrm{div}Z)_{jik}.$$

□

Замечание 1. *Всюду далее из компонент тензора конциркулярной кривизны и его дивергенции будем приводить только существенные, поскольку остальные либо выражаются через них, либо равны нулю.*

Пусть далее G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\{\mathfrak{g} = T_eG, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством скалярных произведений в $\mathfrak{g}$ и множеством левоинвариантных римановых метрик в G (см. [1]). Будем обозначать соответствующее скалярное произведение через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и называть пару $\{\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ *метрической алгеброй Ли.*

Фиксируем базис $\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ левоинвариантных векторных полей в $\mathfrak{g}$. Положим

$$[E_i,E_j]=c_{ij}^kE_k,\quad \nabla_{E_i}E_j=\Gamma_{ij}^kE_k,\quad \langle E_i,E_j\rangle=g_{ij}, \tag{3}$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $c_{ijs}=c_{ij}^kg_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(c_{ijk}-c_{jki}+c_{kij}\right),\ \Gamma_{ij}^s=\Gamma_{ij,k}g^{ks}, \tag{4}$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Тогда формула для вычисления компонент тензора кривизны Римана представима в виде

$$R_{ijkt}=c_{ij}^s\Gamma_{sk,t}-\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is,t}+\Gamma_{ik}^s\Gamma_{js,t}, \tag{5}$$

компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну соответственно можно найти как

$$r_{ik}=R_{ijkt}g^{jt},\quad \rho=r_{ik}g^{ik}. \tag{6}$$

Из (3) и (4) очевидно следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна ρ, тензор конциркулярной кривизны Z_{ijkt} являются функциями структурных констант c_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij}.

§2. О базисах действительных алгебр Ли 4-мерных групп Ли с левоинваринтными римановыми метриками

Определение 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если след любого внутреннего дифференцирования алгебры Ли равен нулю, т.е.

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X)\equiv 0,\ \forall X\in\mathfrak{g},$$

где $\mathrm{ad}X(Y)=[X,Y]$, для любых $X,Y\in\mathfrak{g}$.

Определение 3. Будем называть алгебру Ли группы Ли *разложимой*, если она представима в виде прямой суммы алгебр Ли меньших размерностей.

Для исследования четырехмерных унимодулярных метрических алгебр Ли с тривиальной дивергенцией тензора конциркулярной кривизны нам понадобится следующие результаты работ [5] и [6].

Таблица 1: Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли и соответствующие им наборы структурных констант

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,1} \oplus A_1$	$C^2_{1,3} = -c$, $C^4_{1,3} = cl$, где $c > 0$.
3	$A_{3,4} \oplus A_1$	$C^3_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = -am$, $C^2_{1,3} = -c$, $C^4_{1,3} = cl$, где $a < 0, c > 0$.
4	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C^1_{2,3} = b$, $C^4_{2,3} = -bk$, $C^2_{1,3} = -c$, $C^4_{1,3} = cl$, где $b > 0, c > 0$.
5	$A_{3,8} \oplus A_1$	$C^3_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = -am$, $C^1_{2,3} = b$, $C^4_{2,3} = -bk$, $C^2_{1,3} = -c$, $C^4_{1,3} = cl$, где $a < 0, b > 0, c > 0$.
6	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C^3_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = -am$, $C^1_{2,3} = b$, $C^4_{2,3} = -bk$, $C^2_{1,3} = -c$, $C^4_{1,3} = cl$, где $a > 0, b > 0, c > 0$.
7	$A_{4,1}$	$C^1_{2,4} = a$, $C^1_{3,4} = b$, $C^2_{3,4} = c$, где $a > 0, c > 0$.
8	$A^{-2}_{4,2}$	$C^1_{1,4} = -2a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^2_{2,4} = a$, $C^1_{3,4} = c$, $C^2_{3,4} = d$, $C^3_{3,4} = a$, где $a > 0, d > 0$.
9	$A^{\alpha,-1-\alpha}_{4,5}$, $\alpha \in (-1, -\frac{1}{2}]$	$C^1_{1,4} = a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^2_{2,4} = c$, $C^1_{3,4} = d$, $C^2_{3,4} = f$, $C^3_{3,4} = -a - c$, где $a > 0, f < 0$.
10	$A^{-2\beta,\beta}_{4,6}$, $\beta \in (0, +\infty)$	$C^1_{1,4} = -2a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^2_{2,4} = a + c$, $C^3_{2,4} = d$, $C^1_{3,4} = f$, $C^2_{3,4} = g$, $C^3_{3,4} = a - c$, где $a > 0, d < 0, g > 0$.
11	$A_{4,8}$	$C^1_{2,3} = a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^2_{2,4} = c$, $C^1_{3,4} = d$, $C^2_{3,4} = f$, $C^3_{3,4} = -c$, где $a > 0, c > 0$.
12	$A_{4,10}$	$C^1_{2,3} = a$, $C^1_{2,4} = b$, $C^3_{2,4} = c$, $C^1_{3,4} = d$, $C^2_{3,4} = g$, где $a > 0, c < 0, g > 0$.

Лемма 3. [5] Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 1.

Лемма 4. [6] Для произвольного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на четырехмерной действительной неунимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle \cdot, \cdot \rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 2.

Таблица 2: Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли и соответствующие им наборы структурных констант

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C_{1,2}^2 = a$, $C_{1,2}^3 = b$, где $a > 0, b \geqslant 0$.
2	$2A_2$	$C_{1,2}^2 = a$, $C_{1,3}^2 = b$, $C_{1,3}^4 = c$, $C_{1,4}^2 = f(a-d)$, $C_{1,4}^4 = d$, $C_{3,4}^2 = -fg$, $C_{3,4}^4 = g$, где $a > 0, g > 0$.
3	$A_{3,2} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{1,3}^4 = b$, $C_{2,3}^1 = c$, $C_{2,3}^4 = d$, где $a > 0, c > 0$.
4	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{2,3}^4 = b$, где $a > 0, b \geqslant 0$.
5	$A_{3,5}^{\alpha} \oplus A_1$, $0 < \lvert\alpha\rvert < 1$	$C_{1,3}^1 = a$, $C_{1,3}^4 = b$, $C_{2,3}^1 = c$, $C_{2,3}^2 = a\alpha$, $C_{2,3}^4 = d$, где $a > 0$.
6	$A_{3,7}^{\alpha} \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C_{1,3}^1 = \alpha l$, $C_{1,3}^2 = -al$, $C_{1,3}^4 = bl$, $C_{2,3}^1 = \frac{l}{a}$, $C_{2,3}^2 = \alpha l$, $C_{2,3}^4 = cl$, где $a > 0, l > 0$.
7	$A_{4,2}^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -2$	$C_{1,4}^1 = \alpha l$, $C_{2,4}^1 = a(\alpha-1)l$, $C_{2,4}^2 = l$, $C_{3,4}^1 = (b(\alpha-1)-ac)l$, $C_{3,4}^2 = cl$, $C_{3,4}^3 = l$, где $c > 0, l > 0$.
8	$A_{4,3}$	$C_{1,4}^1 = l, C_{2,4}^1 = al, C_{3,4}^1 = bl, C_{3,4}^2 = cl$, где $c > 0, l > 0$.
9	$A_{4,4}$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = l$, $C_{2,4}^1 = al$, $C_{3,4}^1 = bl$, $C_{3,4}^2 = cl$, где $a > 0, c > 0, l > 0$.
10	$A_{4,5}^{\alpha,\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \neq -1$	$C_{1,4}^1 = l$, $C_{2,4}^1 = a(\alpha-1)l$, $C_{2,4}^2 = \alpha l$, $C_{3,4}^1 = (ac(\alpha-1)+b(\beta-1))l$, $C_{3,4}^2 = c(\alpha-\beta)l$, $C_{3,4}^3 = \beta l$, где $l > 0$.
11	$A_{4,6}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha \neq -2\beta$	$C_{1,4}^1 = \alpha l$, $C_{2,4}^1 = al$, $C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = \beta l$, $C_{2,4}^3 = -\frac{l}{c}$, $C_{3,4}^1 = bl$, $C_{3,4}^2 = cl$, где $c > 0, l > 0$.
12	$A_{4,7}$	$C_{1,4}^1 = 2a$, $C_{2,3}^1 = b$, $C_{2,4}^1 = c$, $C_{2,4}^2 = a$, $C_{3,4}^1 = d$, $C_{3,4}^2 = f$, $C_{3,4}^3 = a$, где $a > 0, b > 0, f > 0$.
13	$A_{4,9}^{\beta}$	$C_{1,4}^1 = a(\beta+1)$, $C_{2,3}^1 = b$, $C_{2,4}^1 = c$, $C_{2,4}^2 = a$, $C_{3,4}^1 = d$, $C_{3,4}^2 = f(1-\beta)$, $C_{3,4}^3 = a\beta$, где $a > 0, b > 0$.
14	$A_{4,11}^{\alpha}$	$C_{1,4}^1 = 2a\alpha$, $C_{2,3}^1 = b$, $C_{2,4}^1 = c$, $C_{2,4}^2 = a\alpha$, $C_{2,4}^3 = -ad$, $C_{3,4}^1 = f$, $C_{3,4}^2 = \frac{a}{d}$, $C_{3,4}^3 = a\alpha$, где $a > 0, b > 0, d > 0$.
15	$A_{4,12}$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = b$, $C_{1,4}^2 = c$, $C_{2,4}^1 = d$, $C_{3,4}^1 = f$, $C_{3,4}^2 = g$, где $a > 0, c < 0, d > 0$.

§3. Четырехмерные унимодулярные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны

Теорема 2. *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div} Z = 0$ *в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 3.*

Таблица 3: Четырехмерные унимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$4A_1$	
2	$A_{3,6} \oplus A_1$	$C^1_{2,3} = c$, $C^2_{1,3} = -c$, где $c > 0$.
3	$A_{3,9} \oplus A_1$	$C^3_{1,2} = a$, $C^4_{1,2} = -am$, $C^1_{2,3} = a(m^2 + 1)$, $C^2_{1,3} = -a(m^2 + 1)$, где $a > 0$.

Доказательство. Рассмотрим разложимые унимодулярные алгебры Ли (см. таблицу 1). Заметим, что структурные константы всех четырехмерных унимодулярных разложимых алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеют вид

$$\begin{gathered} C^3_{1,2} = a, C^4_{1,2} = -am, C^1_{2,3} = b, \\ C^4_{2,3} = -bk, C^2_{1,3} = -c, C^4_{1,3} = cl, \end{gathered} \tag{7}$$

где знаки a, b, c определяют конкретную алгебру Ли. Используя формулы (1) и (4), рассчитаем компоненты тензора конциркулярной кривизны

$$\begin{aligned} -12Z_{2131} &= 4Z_{4243} = 3amcl, & 12Z_{2132} &= 4Z_{4143} = -3ambk, \\ 4Z_{2141} &= -acl - c^2l + clb, & 4Z_{2142} &= abk + b^2k - bkc, \\ -14Z_{3132} &= 4Z_{4142} = 3bkcl, & 4Z_{3141} &= -cam - a^2m + amb, \\ 4Z_{3143} &= bkc + b^2k - abk, & 4Z_{3242} &= -amb - a^2m + cam, \\ 4Z_{3243} &= clb + c^2l - acl, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24Z_{2121} &= 10ac - 17a^2 + 10ab - 17a^2m^2 + 7c^2 - 14cb + 7b^2 + c^2l^2 + b^2k^2, \\ 24Z_{3131} &= 10ac - 17c^2 + 10cb - 17c^2l^2 + 7a^2 - 14ab + 7b^2 + a^2m^2 + b^2k^2, \\ 24Z_{3232} &= 10ab - 17b^2 + 10cb - 17b^2k^2 + 7a^2 - 14ac + 7c^2 + a^2m^2 + c^2l^2, \\ 24Z_{4141} &= 7a^2m^2 + 7c^2l^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2ab + b^2k^2 - 2cb, \\ 24Z_{4242} &= 7a^2m^2 + 7b^2k^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + c^2l^2 - 2ab - 2cb, \\ 24Z_{4343} &= 7c^2l^2 + 7b^2k^2 + a^2 - 2ac + a^2m^2 + c^2 + b^2 - 2ab - 2cb. \end{aligned}$$

Применяя равенство (2), вычислим дивергенцию тензора конциркулярной кривизны

$$
\begin{aligned}
&4\mathrm{div}Z_{211} = -3a^2mbk - 4amb^2k + ambkc,\\
&4\mathrm{div}Z_{212} = -3a^2mcl + amclb - 4amc^2l,\\
&2\mathrm{div}Z_{214} = m(2a^3(1+m^2) + 2a(c^2l^2 + b^2k^2) - a^2(b+c)),\\
&4\mathrm{div}Z_{311} = 4b^2kcl + 3bkc^2l - bkcla,\\
&4\mathrm{div}Z_{313} = 4a^2mcl - amclb + 3amc^2l,\\
&2\mathrm{div}Z_{314} = -2c^3(l+l^3) - 2a^2m^2cl + c^2lb - 2clb^2k^2 + c^2la,\\
&4\mathrm{div}Z_{322} = bkcla - 3b^2kcl - 4bkc^2l,\\
&4\mathrm{div}Z_{323} = ambkc - 3amb^2k - 4a^2mbk,\\
&2\mathrm{div}Z_{324} = 2(a^2m^2bk + bkc^2l^2 + b^3k^3 + b^3k) - b^2kc - ab^2k,\\
&4\mathrm{div}Z_{412} = 2(a^3m + a^3m^3 + amc^2l^2 + amb^2k^2) - a^2m(b+c) + am(c^2-b^2),\\
&4\mathrm{div}Z_{413} = -2(c^3l + c^3l^3 + a^2m^2cl + clb^2k^2) + c^2l(b+a) + cl(b^2-a^2),\\
&4\mathrm{div}Z_{414} = amc^2l - a^2mcl,\\
&4\mathrm{div}Z_{421} = -2(a^3m + a^3m^3 + amb^2k^2 + amc^2l^2) + a^2m(c+b) + am(c^2-b^2),\\
&4\mathrm{div}Z_{423} = 2(b^3k^3 + b^3k + a^2m^2bk + bkc^2l^2) + bk(a^2-c^2) - b^2k(c+a),\\
&4\mathrm{div}Z_{424} = -amb^2k + a^2mbk,\\
&4\mathrm{div}Z_{431} = 2(c^3l + c^3l^3 + clb^2k^2 + a^2m^2cl) + cl(b^2-a^2) - c^2l(a+b),\\
&4\mathrm{div}Z_{432} = -2(a^2m^2bk + b^3k^3 + b^3k + bkc^2l^2) + bk(a^2-c^2) + b^2k(a+c),\\
&4\mathrm{div}Z_{434} = b^2kcl - bkc^2l,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{div}Z_{213} &= 2(c^3 + b^3 + a^2(b+c) - c^2b - cb^2 + c^3l^2 + b^3k^2) - 4a^3(1+m^2)\\
&\quad + c^2l^2(a-b) + b^2k^2(a-c),\\
4\mathrm{div}Z_{312} &= 2(ab^2 - a^3 - b^3 + a^2b - ac^2 - a^3m^2 - c^2b - b^3k^2) + 4c^3(1+l^2)\\
&\quad + b^2k^2(a-c) + a^2m^2(b-c),\\
4\mathrm{div}Z_{321} &= 2(a^3 + c^3 + ab^2 - a^2c - ac^2 + a^3m^2 + cb^2 + c^3l^2) - 4b^3(1+k^2)\\
&\quad + a^2m^2(b-c) + c^2l^2(b-a).
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений $\mathrm{div}Z = 0$ относительно констант a, b, c, k, m, l и подставляя в структурные константы (7), получаем

1. $C^i_{j,k} = 0, \forall\, i, j, k = 1, 2, 3, 4;$

2. $\left\{ \begin{array}{l} C^1_{2,3} = c, \\ C^2_{1,3} = -c; \end{array} \right.$

3. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = c, \\ C_{1,3}^2 = -c; \end{cases}$

4. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = b, \\ C_{2,3}^1 = b; \end{cases}$

5. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = a, \\ C_{1,2}^4 = -am, \\ C_{2,3}^1 = a(m^2+1), \\ C_{1,3}^2 = -a(m^2+1); \end{cases}$

6. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = c(l^2+1), \\ C_{2,3}^1 = c(l^2+1), \\ C_{1,3}^2 = -c, \\ C_{1,3}^4 = cl; \end{cases}$

7. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = b(k^2+1), \\ C_{2,3}^1 = b, \\ C_{2,3}^4 = -bk, \\ C_{1,3}^2 = -b(k^2+1). \end{cases}$

Решение 1 дает алгебру Ли $4A_1$, решения 2–4 соответствуют алгебре Ли $A_{3,6} \oplus A_1$, а решения 5–7 определяют алгебру Ли $A_{3,9} \oplus A_1$ (см. также [?]).

Выполняя аналогичные действия для унимодулярных неразложимых алгебр Ли, заключаем, что кроме этих трех алгебр Ли, больше нет четырехмерных унимодулярных алгебр Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны. □

Следствие 1. *Среди вещественных четырехмерных унимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны только алгебра $A_{3,9} \oplus A_1$ имеет нетривиальный тензор конциркулярной кривизны.*

Доказательство. Используя компоненты тензора конциркулярной кривизны, полученные при доказательстве теоремы 1, найдем решения системы уравнений $Z = 0$. Тем самым для структурных констант (7) имеем

1. $C_{j,k}^i = 0, \forall\, i, j, k = 1, 2, 3, 4;$

2. $\begin{cases} C_{2,3}^1 = c, \\ C_{1,3}^2 = -c; \end{cases}$

Таблица 4: Четырехмерные неунимодулярные алгебры Ли с гармоническим тензором конциркулярной кривизны

№	Алгебра Ли	Ненулевые структурные константы
1	$A_2 \oplus 2A_1$	$C_{1,2}^2 = a$, где $a > 0$.
2	$2A_2$	$C_{1,2}^2 = a$, $C_{3,4}^4 = g$, где $a > 0, g > 0$.
3	$A_{3,3} \oplus A_1$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, где $a > 0$.
4	$A_{3,7}^{\alpha} \oplus A_1$, $\alpha > 0$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = \alpha l$, $C_{2,3}^1 = -C_{1,3}^2 = l$, где $l > 0$.
5	$A_{4,5}^{1,1}$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = l$, где $l > 0$.
6	$A_{4,6}^{\alpha,0}$, $\alpha \neq 0$	$C_{1,4}^1 = \alpha l$, $C_{2,4}^3 = -l$, $C_{3,4}^2 = l$, где $l > 0$.
7	$A_{4,6}^{\alpha,\alpha}$, $\alpha > 0$	$C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = \alpha l$, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = l$, где $l > 0$.
8	$A_{4,9}^1$	$C_{1,4}^1 = C_{2,3}^1 = 2a$, $C_{2,4}^2 = C_{3,4}^3 = a$, где $a > 0$.
9	$A_{4,11}^{\alpha}$	$C_{1,4}^1 = 2C_{3,4}^3 = 2C_{2,4}^2 = 2a\alpha$, $C_{2,3}^1 = 2a\|\alpha\|$, $C_{3,4}^2 = -C_{2,4}^3 = a$, где $a > 0$.
10	$A_{4,12}$	$C_{1,3}^1 = C_{2,3}^2 = a$, $C_{1,4}^1 = C_{2,4}^2 = b$, $C_{2,4}^1 = -C_{1,4}^2 = d$, где $a > 0, d > 0$.

3. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = c, \\ C_{1,3}^2 = -c; \end{cases}$

4. $\begin{cases} C_{1,2}^3 = b, \\ C_{2,3}^1 = b. \end{cases}$

Решение 1 дает алгебру Ли $4A_1$, решения 2–4 соответствуют алгебре Ли $A_{3,6} \oplus A_1$. Следовательно, только у алгебры Ли $A_{3,9} \oplus A_1$ тензор конциркулярной кривизны нетривиален. Выполняя аналогичные действия для унимодулярных неразложимых алгебр Ли, получаем требуемое. $\square$

§4. Четырехмерные неунимодулярные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны

Теорема 3. *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{div} Z = 0$ в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 4.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ (см. таблицу 2). Вычисления для остальных алгебр Ли приводить не будем в силу их громоздкости, алгоритм их рассмотрения аналогичен изложенному ниже для алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$.

Структурные константы алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ имеют вид

$$C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a, C^4_{2,3} = b, \text{где } a > 0, b \geqslant 0. \tag{8}$$

Используя формулы (4), (1) и (2), рассчитаем компоненты тензора концциркулярной кривизны и его дивергенции

$$\begin{aligned}
&24Z_{2121} = 24Z_{3131} = -12a^2 + b^2, && 2Z_{2141} = -ab,\\
&24Z_{4242} = 24Z_{4343} = -24Z_{3232} = 7b^2 + 12a^2, && 24Z_{4141} = 12a^2 + b^2;\\
&2\mathrm{div}Z_{311} = -3\mathrm{div}Z_{322} = -4\mathrm{div}Z_{434} = -ab^2, && 2\mathrm{div}Z_{324} = -3ba^2 - 2b^3,\\
&2\mathrm{div}Z_{423} = -b^3 - ba^2, && 2\mathrm{div}Z_{432} = 2ba^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений $\mathrm{div}Z = 0$ относительно констант a, b, получаем $b = 0, a > 0$. Или, подставляя в (8), находим $C^1_{1,3} = C^2_{2,3} = a > 0$.

Выполняя аналогичные действия для остальных неунимодулярных алгебр Ли, завершаем доказательство теоремы. □

Следствие 2. *Среди вещественных четырехмерных неунимодулярных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором концциркулярной кривизны только алгебра* $A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$ *имеет тривиальный тензор концциркулярной кривизны.*

Доказательство. Рассмотрим неунимодулярные алгебры Ли с условием гармоничности тензора концциркулярной кривизны. Начнем со случая алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$. Найдем решения системы уравнений $Z = 0$. Имеем $a = 0,\ b = 0$. В силу ограничения $a > 0$ для алгебры Ли $A_{3,3} \oplus A_1$ заключаем, что $Z \neq 0$. Случаи остальных неунимодулярных алгебр Ли изучаются аналогично. В результате остается только алгебра $A^{\alpha,\alpha}_{4,6}$, удовлетворяющая одновременно условиям $Z = 0$, $\mathrm{div}Z = 0$. □

Заключение

В данной работе получена полная классификация дейсвительных четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Как продолжение этой работы автор в будущем планирует получить полную классификацию дейсвительных четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой с сигнатурами $(+,+,+,-)$ *и* $(+,+,-,-)$*. Для этого ведутся работы по получению удобного для вычислений базиса в данных группах.*

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (проект № 2014.312.1.4).

Список литературы

[1] *Бессе А. Л. Многообразия Эйнштейна. // М. : Мир. 1990.*

[2] *Клепиков П.Н., Хромова О.П. О гармоничности тензора конциркулярной кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик трехмерных групп Ли // «Анализ, геометрия и топология» : материалы всероссийской молодёжной школы-семинара в 2 ч. Барнаул, 2013. Ч. 1. С. 130–138*

[3] *Клепиков П.Н., Хромова О.П. Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию концикулярно-гармонических свойств 3-мерных групп Ли с левоинвариантной (ппсевдо)римановой метрикой // «Ломоносовские чтения на Алтае» : материалы международной молодежной школы-семинара в 6 ч. Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2013. Ч. 1. С. 133–138*

[4] *Клепиков П.Н. О гармоничности тензора конциркулярной кривизны левоинвариантных римановых метрик четырехмерных групп Ли // «Студент и научно-технический прогресс» : сборник тезисов 52-ой международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2014. С. 53*

[5] *Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай. // Математические труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 115–147.*

[6] *Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай. // Математические труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 40–116.*

[7] *Ahsan Z., Siddiqui S.A. Concircular Curvature Tensor and Fluid Spacetimes // Int. J. Theor. Phys. 2009. V. 48. P. 3202–3212.*

[8] *De U.C., Pathak G. On a type of contact manifolds // Math. Balk. 1993. New Ser. 7, № 2,P. 113–118.*

[9] *Srivastava J.P., Khajuria Sudershan Concircular curvature tensor and relativistic gravitation // Jnanabha 1996. V. 26. P. 113–114.*

[10] *Yano K. Concircular geometry, I-IV // Proc. Imp. Acad. Tokyo 1940. V. 16. P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.*