Захаров А.О.

# О ранге пересечения свободных подгрупп почти свободных групп

Мы доказываем оценку для ранга пересечения свободных подгрупп в почти свободной группе, аналогичную неравенству Х. Нейман в свободной группе и оценке С.В.Иванова для подгрупп свободных произведений групп. Мы также доказываем более общую оценку для ранга пересечения свободных подгрупп фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными группами.

## 1. Введение.

Пусть сначала $G$ — свободная группа, а $H$ и $K$ — конечно порождённые подгруппы в $G$. В 1954 году Хаусон [1] доказал, что в этом случае подгруппа $H \cap K$ также конечно порождена. Далее, в 1957 году Х.Нейман [2] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободной группе (*неравенство Х.Нейман*):

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 2\,\overline{r}(H)\overline{r}(K), \tag{1}$$

где $\overline{r}(H) = max\,(r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг подгруппы $H$, $r(H)$ — ранг подгруппы $H$.

В 2011 году Игорь Минеев [3] доказал знаменитую гипотезу Х.Нейман, утверждающую, что коэффициент 2 в неравенстве (1) можно убрать, то есть выполняется неравенство

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant \overline{r}(H)\overline{r}(K).$$

С.В.Иванов доказал оценку, аналогичную неравенству Х.Нейман, для подгрупп свободных произведений групп. А именно, в 1999 году в работе [4] С.В.Иванов доказал, что, если $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а $H$ и $K$ — конечно порожденные подгруппы в $G$, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям $G_1$ и $G_2$ (следовательно, по теореме Куроша [5], свободные), то их пересечение $H \cap K$ также конечно порождено и выполняется оценка:

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6\,\overline{r}(H)\overline{r}(K), \tag{2}$$

Позднее С.В.Иванов и У.Дикс [6] доказали более точную оценку для подгрупп свободных произведений, обобщающую неравенство (2). Кроме того, С.В.Иванов [7] доказал аналогичную оценку для ранга Куроша произвольных подгрупп в свободном произведении групп.

Автор [8] доказал оценку для ранга пересечения свободных подгрупп свободных произведений групп с объединенной нормальной конечной подгруппой, обобщающую неравенство (2) и оценку С.В.Иванова и У. Дикса из [6].

В этой статье будет доказана оценка, являющаяся обобщением неравенства (2) на случай подгрупп фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными группами. В качестве следствий будут получены оценки для ранга перечесения подгрупп свободных произведений с объединенной конечной подгруппой, а также HNN-расширений с конечными ассоциированными подгруппами. Кроме того, с помощью теоремы Столлингса будет получено следствие о ранге перечечения свободных подгрупп почти свободных групп.

## 2. Теория Басса-Серра.

Мы будем в дальнейшем использовать теорию Басса-Серра действий групп на деревьях, некоторые элементы которой представлены ниже. Более подробное изложение теории Басса-Серра можно найти в работах [9], [10].

Сначала мы напомним некоторые определения теории графов и фиксируем обозначения.

### Графы, факторграфы

Граф $X$ состоит из непустого множества вершин $V(X)$, множества ребер $E(X)$ и трех отображений: $\alpha : E(X) \to V(X)$ (взятие начала ребра), $\omega : E(X) \to V(X)$ (взятие конца ребра) и $^{-1} : E(X) \to E(X)$ (взятие обратного ребра), причем для любого $e \in E(X)$ должно выполняться $(e^{-1})^{-1} = e$, $e^{-1} \neq e$, $\alpha(e) = \omega(e^{-1})$. Граф конечен, если его множества вершин и ребер конечны. Естественным образом определяется понятие подграфа. Морфизмом из графа $X$ в граф $Y$ называется отображение $p$ из множества вершин и ребер графа $X$ в множество вершин и ребер графа $Y$, переводящее вершины в вершины, ребра в ребра, причем $\alpha(p(e)) = p(\alpha(e))$, $\omega(p(e)) = p(\omega(e))$, $p(e^{-1}) = (p(e))^{-1}$. Биективный морфизм графов называется изоморфизмом. Степенью вершины $v \in V(X)$ называется количество ребер графа $X$ с началом в $v$ (обозначение: $deg\, v$). Морфизм графов называется локально инъективным, если он переводит любые два различные ребра с общим началом в различные ребра.

Граф называется ориентированным, если в каждой паре $e, e^{-1}$ его взаимно обратных ребер выбрано одно из них и названо положительно ориентированным, а другое названо отрицательно ориентированным. Множество всех положительно ориентированных ребер графа $X$ будем обозначать через $E(X)^+$, а множество всех отрицательно ориентированных ребер — через $E(X)^-$. Если графы $X$ и $Y$ ориентированы, а $p$ — морфизм из графа $X$ в граф $Y$, переводящий положительно ориентированные ребра $X$ в положительно ориентированные ребра $Y$, то мы говорим, что $p$ сохраняет ориентацию. Ниже, при построении некоторых графов, мы будем определять только их положительно ориентированные ребра, в таком случае отрицательно ориентированные ребра определяются естественным образом как обратные к положительно ориентированным.

Последовательность $l = e_1e_2...e_n$ ребер графа $X$ называется путем с началом в $\alpha(e_1)$ и концом в $\omega(e_n)$, если $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, $i = 1, ..., n-1$. (Любую вершину $v$ графа $X$ мы также считаем путем с началом и концом в $v$, называемым тривиальным путем в $v$.) Путь называется несократимым, если он не содержит подпутей вида $dd^{-1}$, где $d \in E(X)$. Путь называется циклически несократимым, если он несократим и его первое ребро не совпадает с обратным к последнему; тривиальный путь мы также считаем циклически несократимым. Путь замкнут, если его начало и конец совпадают. Граф связен, если для любых двух его вершин $u$ и $v$ существует путь с началом в $u$ и концом в $v$. Деревом называется связный граф, в котором нет нетривиальных несократимых замкнутых путей. Максимальным поддеревом в связном графе $X$ мы называем поддерево, максимальное по включению; легко видеть, что такое поддерево содержит все вершины графа $X$. Образ пути при морфизме графов определяется естественным образом: $p(e_1e_2...e_n) = p(e_1)p(e_2)...p(e_n)$.

Пусть $X$ — связный граф с выделенной вершиной $x$. Два замкнутых пути $p_1$ и $p_2$ в графе $X$ с началом в $x$ называются гомотопными, если от $p_1$ к $p_2$ можно перейти с помощью конечного числа вставок и вычеркивания подпутей вида $ee^{-1}$, $e \in E(X)$. Легко видеть, что множество замкнутых несократимых путей в графе $X$ с началом в $x$ образует группу относительно следующего умножения: произведением несократимых путей $e_1e_2...e_n$ и $f_1f_2...f_m$ ($e_i, f_j \in E(X)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$) является единственный несократимый путь с началом в $x$, гомотопный пути $e_1e_2...e_nf_1f_2...f_m$; единицей является тривиальный путь в вершине $x$; обратным к пути $l = e_1...e_n$ является путь $l^{-1} = e_n^{-1}...e_1^{-1}$. Эта группа называется фундаментальной группой графа $X$ относительно вершины $x$ и обозначается $\pi_1(X,x)$. Легко видеть, что фундаментальная группа связного графа не зависит от выбора выделенной вершины с точностью до изоморфизма. Класс изоморфности фундаментальных групп данного графа $X$ обозначается через $\pi_1(X)$.

Фундаментальная группа любого связного графа $X$ свободна. Более того, пусть $S$ — максимальное поддерево в графе $X$, $r_v$ (для каждой $v \in V(X)$) — единственный несократимый путь с началом в $x$ и концом в $v$, лежащий в дереве $S$, $q_e = r_{\alpha(e)} e r^{-1}_{\omega(e)}$ (для каждого $e \in E(X)$). Ориентируем $X$ произвольным образом (тогда $S$ также будет ориентированным). Тогда можно доказать, что пути $q_e$, $e \in E(X)^+ - E(S)^+$, являются свободными порождающими группы $\pi_1(X,x)$ (см., например, [9]).

Пусть граф $X$ конечен. Тогда мы имеем

$$r(\pi_1(X,x)) = |E(X)^+| - |E(S)^+| = |E(X)^+| - |V(X)| + 1, \tag{3}$$

где последнее равенство выполнено, поскольку $S$ — дерево, содержащее все вершины графа $X$.

Говорят, что группа $G$ действует слева на графе $X$, если определены левые действия группы $G$ на множествах $V(X)$ и $E(X)$, такие что $g\alpha(e) = \alpha(ge)$, $g\omega(e) = \omega(ge)$ и $ge^{-1} = (ge)^{-1}$ для всех $g \in G$, $e \in E(X)$. Действие называется действием без инверсий ребер, если $ge \neq e^{-1}$ для всех $e \in E(X)$, $g \in G$.

Пусть группа $G$ действует на графе $X$ без инверсий ребер. Для $x \in V(X) \cup E(X)$ обозначим через $Orb\,(x)$ орбиту $x$ относительно действия группы $G$, то есть $Orb\,(x) = \{gx,\ g \in G\}$. Определим *факторграф* $G \setminus X$ (или $X \,/\, G$) как граф с вершинами $Orb\ (v)$, $v \in V(X)$ и ребрами $Orb\,(e)$, $e \in E(X)$, причем вершина $Orb\,(v)$ — начало ребра $Orb\,(e)$ (в графе $G \setminus X$), если существует $g \in G$, такое что вершина $gv$ — начало ребра $e$ (в графе $X$); обратным к ребру $Orb\,(e)$ является ребро $Orb\,(e^{-1})$.

Заметим, что ребра $Orb\,(e)$ и $Orb\,(e^{-1})$ не совпадают, так как $G$ действует на $X$ без инверсий ребер. Легко видеть, что отображение $p:\ X \to G \setminus X$, $p(x) = Orb\,(x)$, $x \in V(X) \cup E(X)$, является сюръективным морфизмом графов; мы будем называть его проекцией на факторграф.

**Фундаментальная группа графа групп**

*Граф групп* $(\Gamma, Y)$ состоит из связного графа $Y$, наборов групп $\{G_v,\ v \in V(Y)\}$ (вершинные группы), $\{G_e,\ e \in E(Y)\}$ (реберные группы), с условием $G_e = G_{e^{-1}}$ для всех $e \in E(Y)$, и вложений групп $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)}$, $e \in E(Y)$. Также удобно использовать вложение групп $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)}$, $\omega_e = \alpha_{e^{-1}}$. Граф групп $(\Gamma, Y)$ называется конечным, если граф $Y$ конечен. Граф групп $(\Gamma, Y)$ называется графом конечных групп, если все вершинные (а, следовательно, и все реберные) группы графа групп $(\Gamma, Y)$ конечны.

Пусть $S$ – некоторое максимальное поддерево графа $Y$. *Фундаментальной группой графа групп* $(\Gamma, Y)$ относительно максимального поддерева $S$ (обозначение $\pi_1(\Gamma, Y, S)$) называется факторгруппа свободного произведения всех вершинных групп $G_v, v \in V(Y)$, и свободной группы с базисом $\{t_e, e \in E(Y)\}$ по нормальному замыканию следующих элементов:

$$t_e^{-1}\alpha_e(g)t_e \cdot (\alpha_{e^{-1}}(g))^{-1} \quad (e \in E(Y),\ g \in G), \qquad t_e t_{e^{-1}}\ (e \in E(Y)), \qquad t_e\ (e \in E(S)).$$

Можно доказать (см., например, [9]), что фундаментальная группа графа групп $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ не зависит от выбора максимального поддерева $S$ в $Y$ с точностью до изоморфизма. Вследствие этого мы будем иногда говорить о фундаментальной группе графа групп, не упоминая максимальное поддерево.

Приведем несколько примеров. В случае, когда граф $Y$ состоит из одной пары взаимно обратных ребер $e, e^{-1}$ и двух вершин $u, v$ (степени 1), легко понять, что фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ изоморфна свободному произведению групп $G_u$ и $G_v$ с объединением по $\alpha_e(G_e) = \omega_e(G_e)$.

В случае, когда граф $Y$ состоит из одной пары взаимно обратных ребер $e, e^{-1}$ и одной вершины $u$ (степени 2), легко понять, что фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ изоморфна HNN-расширению с базой $G_u$ и ассоциированными подгруппами $\alpha_e(G_e)$ и $\omega_e(G_e)$.

Фиксируем произвольную ориентацию графа $Y$.

Несложно заметить, что, если $(\Gamma, Y)$ – произвольный конечный граф групп, $S$ – максимальное поддерево в $Y$, то фундаментальная группа графа групп $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ получается последовательным применением конструкции свободного произведения с объединенной подгруппой (для положительно ориентированных ребер дерева $S$), а затем конструкции HNN-расширения (для положительно ориентированных ребер графа $Y$, не вошедших в дерево $S$).

Также нетрудно понять, что, если все вершинные (а, следовательно, и все реберные) группы графа групп $(\Gamma, Y)$ тривиальны, то фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(Y)$ графа $Y$ (в обычном смысле), то есть, в частности, является свободной. Действительно, тот факт, что группа $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ в данном случае является свободной, сразу следует из определения фундаментальной группы графа групп; кроме того, ее ранг, как видно из определения, равен количеству положительно ориентированных ребер графа $Y$, не вошедших в максимальное поддерево $S$ графа $Y$, а ранг фундаментальной группы графа $Y$, как отмечено выше, тоже равен этому числу.

Можно доказать (см., например, [9]), что вершинные группы $G_v$, $v \in V(Y)$ канонически вкладываются в группу $\pi_1(\Gamma, Y, S)$. Условимся отождествлять группу $G_v$ с ее каноническим образом в группе $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ для каждой вершины $v \in V(Y)$. Кроме того, условимся отождествлять группу $G_e$ с каноническим образом подгруппы $\alpha_e(G_e)$ в группе $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ для каждого $e \in E(Y)^+$ (для положительно ориентированных ребер $Y$).

### Основная теорема теории Басса-Серра

Следующая теорема показывает взаимосвязь между фундаментальными группами графов групп и группами, действующими на деревьях (без инверсий ребер). Более подробную формулировку и доказательство теоремы можно найти в работах [9] и [10].

**Теорема (Басс, Серр).** (1) *Пусть $G = \pi_1(\Gamma, Y, S)$ — фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ относительно максимального поддерева $S$. Тогда группа $G$ действует без инверсий ребер на некотором дереве $T$ так, что*

1. *Факторграф $G \setminus T$ изоморфен графу $Y$.*
2. *Для любой вершины $v \in V(T)$ стабилизатор вершины $v$ при действии $G$ сопряжен с вершинной группой $G_{p(v)}$ графа групп $(\Gamma, Y)$.*
3. *Для любого ребра $e \in E(T)$ стабилизатор ребра $e$ при действии $G$ сопряжен с реберной группой $G_{p(e)}$ графа групп $(\Gamma, Y)$.*

*(Здесь $p : T \to G \setminus T$ — проекция на факторграф; в силу первого пункта мы можем отождествить графы $Y$ и $G \setminus T$ и считать, что $p : T \to Y$.)*

(2) *Обратно, пусть группа $G$ действует без инверсий ребер на дереве $T$. Тогда группа $G$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\Gamma, Y, S)$ некоторого графа групп $(\Gamma, Y)$, причем для этого графа групп выполняются условия 1, 2, 3 из первой части теоремы. В частности (в силу сюръективности $p$), каждая вершинная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ равна стабилизатору некоторой вершины $T$, а каждая реберная группа графа групп $(\Gamma, Y)$ равна стабилизатору некоторого ребра $T$.*

### Дерево Басса-Серра

Пусть $G = \pi_1(\Gamma, Y, S)$. Нам понадобится явная конструкция дерева $T$, на котором действует группа $G$, из первой части теоремы Басса-Серра. Построенное таким образом $T$ будем называть *деревом Басса-Серра*.

Если $H \subseteq G$, то обозначим через $G/H$ множество всех левых смежных классов $G$ по $H$.

Граф $T$ определяется следующим образом (он является ориентированным; все объединения дизъюнктные):

- Вершинами $T$ являются левые смежные классы группы $G$ по вершинным группам графа групп $(\Gamma, Y)$:
$$V(T) = \bigcup_{v \in V(Y)} G/G_v.$$
- Положительно ориентированными ребрами $T$ являются левые смежные классы группы $G$ по реберным группам графа групп $(\Gamma, Y)$:
$$E(T)^+ = \bigcup_{e \in E(Y)^+} G/G_e.$$
- Выполняются следующие равенства:
$$\alpha(gG_e) = gG_{\alpha(e)}, \quad \omega(gG_e) = gt_eG_{\omega(e)}, \quad g \in G,\ e \in E(Y)^+. \tag{4}$$

(Напомним, что мы отождествляем группу $G_e$ с каноническим образом подгруппы $\alpha_e(G_e)$ в группе $G$ для каждого $e \in E(Y)^+$; $t_e = 1$ тогда и только тогда, когда ребро $e$ лежит в максимальном поддереве $S$.)

Можно доказать (см., например, [9]), что $T$ действительно является деревом.

Определим левое действие $G$ на $T$ как действие левым умножением:
$$g_1 \cdot (gG_v) = g_1gG_v, \quad g_1 \cdot (gG_e) = g_1gG_e, \quad g, g_1 \in G,\ v \in V(Y),\ e \in E(Y)^+.$$

(На отрицательно ориентированных ребрах $T$ действие $G$ определяется естественным образом: $g \cdot f = (g \cdot f^{-1})^{-1}$, $f \in E(T)^-$, $g \in G$.) Легко видеть, что это действительно будет действие $G$ на $T$, причем без инверсий ребер.

Несложно заметить, что условия 1, 2, 3 из теоремы Басса-Серра выполняются для построенного таким образом дерева Басса-Серра $T$.

### Подгруппы фундаментальной группы графа групп, тривиально пересекающиеся с сопряженными к вершинным группам

Пусть $G = \pi_1(\Gamma, Y, S)$ и $H \subseteq G$ — подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными ко всем вершинным (а, следовательно, и ко всем реберным) группам графа групп $(\Gamma, Y)$. В силу первой части теоремы Басса-Серра, группа $G$ действует на дереве $T$ (без инверсий ребер), причем выполняются условия 1, 2, 3 из теоремы, а дерево $T$ устроено так, как было описано в предыдущем пункте (дерево Басса-Серра).

Следовательно, группа $H$ также действует на дереве $T$ естественным образом (ограничим действие группы $G$ на ее подгруппу $H$). Пусть $v \in V(T)$. Обозначим через $Stab_G\,(v)$ стабилизатор вершины $v$ при действии $G$ на $T$, а через $Stab_H\,(v)$ — стабилизатор вершины $v$ при действии $H$ на $T$, тогда имеем: $Stab_H\,(v) = Stab_G\,(v) \cap H = \{1\}$. Здесь последнее равенство выполняется, поскольку, в силу условия 2 из теоремы Басса-Серра, подгруппа $Stab_G\,(v)$ сопряжена с некоторой вершинной группой графа групп $(\Gamma, Y)$, а подгруппа $H$ по условию тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам.

Итак, группа $H$ действует на дереве $T$ (без инверсий ребер), причем стабилизаторы всех вершин (а, следовательно, и ребер) $T$ при этом действии тривиальны. Согласно второй части теоремы Басса-Серра, мы получаем, что $H \cong \pi_1(\Gamma', Y', S')$, где $(\Gamma', Y')$ — некоторый граф групп, $S'$ — максимальное поддерево в $Y'$, причем граф $Y'$ изоморфен факторграфу $H \setminus T$ (в силу условия 1 теоремы), а все вершинные группы графа групп $(\Gamma', Y')$ равны стабилизаторам некоторых вершин $T$ при действии $H$, то есть тривиальны. Следовательно, как было отмечено выше,

$$H \cong \pi_1(\Gamma', Y', S') \cong \pi_1(Y') \cong \pi_1(H \setminus T),$$

в частности, группа $H$ свободна.

Итак, если подгруппа $H \subseteq \pi_1(\Gamma, Y, S)$ тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам $(\Gamma, Y)$, то $H$ свободна и, более того,

$$H \cong \pi_1(H \setminus T), \tag{5}$$

где $T$ — дерево Басса-Серра для $G$.

Если $H_1, H_2 \subseteq G$, то обозначим через $H_1 \backslash G / H_2$ множество двойных смежных классов $G$ по $H_1$ и $H_2$ (вида $H_1 g H_2$, $g \in G$).

Несложно заметить, что, в соответствии со строением дерева Басса-Серра $T$, граф $H \setminus T$ устроен следующим образом (он является ориентированным; все объединения дизъюнктные):

- Вершины $H \setminus T$ являются двойными смежными классами следующего вида:

$$V(T) = \bigcup_{v \in V(Y)} H \backslash G / G_v.$$

- Положительно ориентированные ребра $H \backslash T$ являются двойными смежными классами следующего вида:

$$E(T)^+ = \bigcup_{e \in E(Y)^+} H \backslash G / G_e.$$

- Выполняются следующие равенства (вытекающие из равенств (4)):

$$\alpha(HgG_e) = HgG_{\alpha(e)}, \quad \omega(HgG_e) = Hgt_e G_{\omega(e)}, \quad g \in G,\ e \in E(Y)^+. \tag{6}$$

## 3. Основные результаты.

Сформулируем основные результаты данной работы.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — фундаментальная группа конечного графа групп $(\Gamma, Y)$ с конечными реберными группами, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем вершинным группам графа групп $(\Gamma, Y)$ (следовательно, свободные). Тогда*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\, \overline{r}(K), \tag{7}$$

*где $m$ — максимум порядков реберных групп графа групп $(\Gamma, Y)$.*

(Напомним, что $\overline{r}(H) = max\,(r(H) - 1, 0)$ — редуцированный ранг подгруппы $H$.)

Применяя теорему 1 в случае, когда граф $Y$ содержит только одну пару взаимно обратных ребер и две вершины, мы получаем следующее следствие.

**Следствие 1.** *Пусть $G$ — свободное произведение двух групп с объединенной конечной подгруппой порядка $m$, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям $G$ (следовательно, свободные). Тогда*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Применяя теорему 1 в случае, когда граф $Y$ содержит только одну пару взаимно обратных ребер и одну вершину, мы получаем следующее следствие.

**Следствие 2.** *Пусть $G$ — HNN-расширение с конечными ассоциированными подгруппами порядка $m$, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными к базе $G$ (следовательно, свободные). Тогда*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6m \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K).$$

Группа называется почти свободной, если она содержит свободную подгруппу конечного индекса. Напомним, что графом конечных групп мы называем граф групп, в котором все вершинные и реберные группы конечны.

**Теорема (Столлингс, [11]).** *Пусть группа $G$ конечно порождена. Тогда $G$ почти свободна тогда и только тогда, когда $G$ является фундаментальной группой конечного графа конечных групп.*

Ниже будет показано, что из теоремы 1 и теоремы Столлингса вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — почти свободная группа, подгруппы $H, K \subseteq G$ свободны и конечно порождены. Тогда*

$$\overline{r}(H \cap K) \leqslant 6n \cdot \overline{r}(H)\,\overline{r}(K), \tag{8}$$

*где $n$ — минимальный из индексов свободных подгрупп группы $G$.*

## 4. Доказательство теоремы 2.

Выведем теорему 2 из теоремы 1 и теоремы Столлингса.

Сначала заметим, что достаточно доказать теорему 2 для конечно порожденной группы $G$. Действительно, мы можем перейти от группы $G$ к группе $G_0 \subseteq G$, порожденной подгруппами $H$ и $K$; группа $G_0$ будет конечно порождена, поскольку $H$ и $K$ конечно порождены. Кроме того, если $R \subseteq G$ – подгруппа почти свободной группы, то $R$ также почти свободна и минимальный индекс свободной подгруппы в $R$ не превосходит минимального индекса свободной подгруппы в $G$. (Действительно, пусть $F \subseteq G$ — свободная подгруппа минимального индекса, тогда $R \cap F \subseteq R$ – свободная подгруппа конечного индекса, причем $|R : R \cap F| \leqslant |G : F|$.) Таким образом, $G_0$ почти свободна и достаточно доказать оценку (8) для $G_0$.

Итак, мы можем считать, что группа $G$ конечно порождена. Воспользуемся теоремой Столлингса. Мы получим, что группа $G$ является фундаментальной группой конечного графа конечных групп $(\Gamma, Y)$, причем подгруппы $H$ и $K$ конечно порождены и тривиально пересекаются с сопряженными к вершинным группам графа групп $(\Gamma, Y)$ (поскольку $H$ и $K$ свободны, а вершинные группы графа групп $(\Gamma, Y)$ конечны). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Воспользовавшись этой теоремой, мы получим, что выполняется оценка (7); значит, для того, чтобы доказать оценку (8) теоремы 2, достаточно показать, что максимум порядков реберных групп графа групп $(\Gamma, Y)$ не превосходит минимального индекса $n$ свободной подгруппы в группе $G$ (то есть в фундаментальной группе графа групп $(\Gamma, Y)$).

Покажем, что, более того, максимум порядков вершинных групп $(\Gamma, Y)$ не превосходит $n$. Предположим противное: пусть существует вершинная группа $G_v$ графа групп $(\Gamma, Y)$, такая, что $|G_v| > n = |G : F|$, где подгруппа $F \subseteq G$ свободна. Тогда существуют $g_1 \neq g_2 \in G_v : g_1 F = g_2 F$, то есть $1 \neq g_2^{-1} g_1 \in G_v \cap F$, что невозможно, поскольку группа $G_v$ конечна, а $F$ свободна. Таким образом, неравенство (8) выполняется.

## 5. Доказательство теоремы 1.

Пусть $(\Gamma, Y)$ — конечный граф групп с вершинными группами $G_v$ ($v \in V(Y)$) и конечными реберными группами $G_e$ ($e \in E(Y)$), а $\alpha_e : G_e \to G_{\alpha(e)}$ и $\omega_e : G_e \to G_{\omega(e)}$ — вложения реберных групп в (соответствующие) вершинные.

Пусть, согласно условию теоремы 1, $G$ — фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$, $H, K \subseteq G$ — конечно порожденные подгруппы, тривиально пересекающиеся с сопряженными ко всем вершинным группам графа групп $(\Gamma, Y)$.

Пусть также $T$ — дерево Басса-Серра, соответствующее графу групп $(\Gamma, Y)$ (см. раздел 2).

Тогда, согласно теории Басса-Серра (см. раздел 2), подгруппы $H$ и $K$ свободны, причем, более того, согласно (5),

$$H \cong \pi_1(T/H), \quad K \cong \pi_1(T/K), \quad H \cap K \cong \pi_1(T/(H \cap K)) \tag{9}$$

(здесь рассматриваются фундаментальные группы графов в обычном смысле, они являются свободными).

Как было отмечено в разделе 2, граф $T/H$ устроен следующим образом: его вершины соответствуют двойным смежным классам вида $HgG_v$, $v \in V(Y)$, положительно ориентированные ребра соответствуют двойным смежным классам вида $HgG_e$, $e \in E(Y)^+$, причем выполняется (6):

$$\alpha(HgG_e) = HgG_{\alpha(e)}, \quad \omega(HgG_e) = Hgt_e G_{\omega(e)}, \quad g \in G,\ e \in E(Y)^+$$

(здесь $t_e$ из определения фундаментальной группы графа групп; мы отождествляем реберную группу $G_e$ с $\alpha_e(G_e)$ для $e \in E(Y)^+$).

Мы также будем говорить, что вершина вида $HgG_u$ графа $T/H$ отвечает вершине $u \in V(Y)$, а ребро вида $HgG_e$ графа $T/H$ отвечает ребру $e \in E(Y)^+$.

Заметим, что, если ребро вида $Hg'G_e$ графа $T/H$ начинается в вершине $HgG_u$ ($g, g' \in G$, $e \in E(Y)$, $u \in V(Y)$), то, согласно (6), $Hg'G_u = HgG_u$, то есть $g' = hgg_u$, $h \in H$, $g_u \in G_u$, откуда $Hg'G_e = Hgg_uG_e$. Итак, все положительно ориентированные ребра графа $T/H$ с началом в данной вершины $HgG_u$ имеют вид $Hgg_uG_e$, где $\alpha(e) = u$, $g_u \in G_u$.

Аналогично, если ребро $Hg'G_e$ графа $T/H$ заканчивается в вершине $HgG_u$ ($g, g' \in G$, $e \in E(Y)$, $u \in V(Y)$), то, согласно (6), $Hg't_eG_u = HgG_u$, то есть $g' = hgg_ut_e^{-1}$, $h \in H$, $g_u \in G_u$, откуда $Hg'G_e = Hgg_ut_e^{-1}G_e$. Итак, все положительно ориентированные ребра графа $T/H$ с концом в данной вершине $HgG_u$, имеют вид $Hgg_ut_e^{-1}G_e$, где $\omega(e) = u$, $g_u \in G_u$.

Аналогичным образом устроены графы $T/K$ и $T/(H \cap K)$.

Определим отображения проекций $\pi_H : T/(H \cap K) \to T/H$ и $\pi_K : T/(H \cap K) \to T/K$ следующим образом:

$$\pi_H((H \cap K)gG_u) = HgG_u,\ \pi_H((H \cap K)gG_e) = HgG_e, \quad g \in G, u \in V(Y), e \in E(Y)^+ \tag{10}$$

и аналогично для $K$; $\pi_H$ и $\pi_K$ доопределяются естественным образом на отрицательно ориентированных ребрах.

Легко видеть, что $\pi_H$ и $\pi_K$ являются морфизмами графов, сохраняющими ориентацию.

Докажем теперь несколько лемм.

Следующая лемма показывает, что проекции $\pi_H$ и $\pi_K$ являются локально инъективными морфизмами графов.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $z_1 \neq z_2$ — ребра графа $T/(H \cap K)$, причем $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$ или $\omega(z_1) = \omega(z_2)$. Тогда $\pi_H(z_1) \neq \pi_H(z_2)$ и $\pi_K(z_1) \neq \pi_K(z_2)$.*

$\square$ Можно считать, что ребра $z_1$ и $z_2$ одинаково ориентированы (оба положительно или оба отрицательно), так как в противном случае их проекции $\pi_H(z_1)$ и $\pi_H(z_2)$ также по-разному ориентированы (одна положительно, а другая отрицательно), и, следовательно, $\pi_H(z_1) \neq \pi_H(z_2)$; аналогично для $\pi_K$.

Переходя при необходимости от $z_1$ и $z_2$ к $z_1^{-1}$ и $z_2^{-1}$ соответственно, можно считать, что оба ребра $z_1$ и $z_2$ положительно ориентированы.

Далее, можно считать, что оба ребра $z_1$ и $z_2$ отвечают одному и тому же ребру $e \in E(Y)^+$, так как в противном случае их проекции $\pi_H(z_1)$ и $\pi_H(z_2)$ также отвечают различным ребрам графа $Y$, и, следовательно, $\pi_H(z_1) \neq \pi_H(z_2)$; аналогично для $\pi_K$.

Пусть сначала $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$. Пусть $\alpha(z_1) = \alpha(z_2) = v$ отвечает вершине $u \in V(Y)$, где $\alpha(e) = u$, тогда, как было отмечено выше,

$$v = (H \cap K)gG_u, \quad z_1 = (H \cap K)gg_1G_e, \quad z_2 = (H \cap K)gg_2G_e, \quad g \in G,\ g_1, g_2 \in G_u.$$

Тогда, по определению проекции $\pi_H$,

$$\pi_H(v) = HgG_u, \quad \pi_H(z_1) = Hgg_1G_e, \quad \pi_H(z_2) = Hgg_2G_e,$$

причем $\alpha(\pi_H(z_1)) = \alpha(\pi_H(z_2)) = \pi_H(v)$. Предположим, что $\pi_H(z_1) = \pi_H(z_2)$. Тогда имеем: $Hgg_1G_e = Hgg_2G_e$, то есть $h = g(g_2g_eg_1^{-1})g^{-1}$, где $h \in H$, $g_e \in G_e \subseteq G_u$ (последнее включение выполнено, поскольку мы отождествляем $G_e$ с $\alpha_e(G_e)$). Мы видим, что элемент $h \in H$ сопряжен с элементом $g_2g_eg_1^{-1} \in G_u$, но $H$ тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам (в том числе $G_u$). Следовательно, $h = 1$, то есть $gg_1G_e = gg_2G_e$. Таким образом, $(H \cap K)gg_1G_e = (H \cap K)gg_2G_e$, то есть $z_1 = z_2$, противоречие. Итак, в этом случае $\pi_H(z_1) \neq \pi_H(z_2)$; аналогично доказывается, что $\pi_K(z_1) \neq \pi_K(z_2)$.

Пусть теперь $\omega(z_1) = \omega(z_2)$. Пусть $\omega(z_1) = \omega(z_2) = v$ отвечает вершине $u \in V(Y)$, где $\omega(e) = u$, тогда, как было отмечено выше,

$$v = (H \cap K)gG_u, \quad z_1 = (H \cap K)gg_1t_e^{-1}G_e, \quad z_2 = (H \cap K)gg_2t_e^{-1}G_e, \quad g \in G,\ g_1, g_2 \in G_u.$$

Тогда, по определению проекции $\pi_H$,

$$\pi_H(v) = HgG_u, \quad \pi_H(z_1) = Hgg_1t_e^{-1}G_e, \quad \pi_H(z_2) = Hgg_2t_e^{-1}G_e,$$

причем $\omega(\pi_H(z_1)) = \omega(\pi_H(z_2)) = \pi_H(v)$. Предположим, что $\pi_H(z_1) = \pi_H(z_2)$. Тогда имеем: $Hgg_1t_e^{-1}G_e = Hgg_2t_e^{-1}G_e$, то есть $h = g(g_2t_e^{-1}g_et_eg_1^{-1})g^{-1}$, где $h \in H$, $g_e \in G_e$, $t_e^{-1}g_et_e \in G_u$ (последнее включение выполнено, поскольку мы отождествляем $G_e$ с $\alpha_e(G_e)$, следовательно, $t_e^{-1}G_et_e = \omega_e(G_e) \subseteq G_u$). Мы видим, что элемент $h \in H$ сопряжен с элементом $g_2(t_e^{-1}g_et_e)g_1^{-1} \in G_u$, но $H$ тривиально пересекается с сопряженными ко всем вершинным группам (в том числе $G_u$). Следовательно, $h = 1$, то есть $gg_1t_e^{-1}G_e = gg_2t_e^{-1}G_e$. Таким образом, $(H \cap K)gg_1t_e^{-1}G_e = (H \cap K)gg_2t_e^{-1}G_e$, то есть $z_1 = z_2$, противоречие. Итак, в этом случае также $\pi_H(z_1) \neq \pi_H(z_2)$; аналогично доказывается, что $\pi_K(z_1) \neq \pi_K(z_2)$. $\blacksquare$

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $x, y$ — ребра графов $T/H$, $T/K$ соответственно. Тогда существует не более $m$ ребер графа $T/(H \cap K)$, проецирующихся под действием $\pi_H$ в $x$ и под действием $\pi_K$ в $y$ (одновременно), где $m$ — максимум порядков реберных групп графа групп $(\Gamma, Y)$.*

□ Можно считать, что ребра $x$ и $y$ одинаково ориентированы (оба положительно или оба отрицательно), так как в противном случае не существует ребер графа $T/(H \cap K)$, проецирующихся под действием $\pi_H$ в $x$ и под действием $\pi_K$ в $y$ (одновременно).

Переходя при необходимости от $x$ и $y$ к $x^{-1}$ и $y^{-1}$ соответственно, можно считать, что оба ребра $x$ и $y$ положительно ориентированы.

Далее, можно считать, что оба ребра $x$ и $y$ отвечают одному и тому же ребру $e \in E(Y)^+$, так как в противном случае не существует ребер графа $T/(H \cap K)$, проецирующихся под действием $\pi_H$ в $x$ и под действием $\pi_K$ в $y$ (одновременно).

Как было отмечено выше, можно считать, что

$$x = Hg_1G_e, \quad y = Kg_2G_e, \quad g_1, g_2 \in G.$$

Покажем, что существует не более $|G_e|$ ребер графа $T/(H \cap K)$, проецирующихся под действием $\pi_H$ в $x$ и под действием $\pi_K$ в $y$ (одновременно). Тогда лемма будет доказана, поскольку $|G_e| \leqslant m$.

Пусть

$$z = (H \cap K)gG_e \in E(T/(H \cap K)) \ (g \in G): \ \pi_H(z) = x, \ \pi_K(z) = y.$$

Тогда по определению проекций

$$HgG_e = Hg_1G_e, \quad KgG_e = Kg_2G_e,$$

то есть

$$g = hg_1g_e = kg_2g'_e,$$

где $g_e, g'_e \in G_e, h \in H, k \in K$. Переходя от $g$ к $gg'^{-1}_e$ (и от $g_e$ к $g_eg'^{-1}_e$), мы можем считать, что $g'_e = 1$, то есть $g = hg_1g_e = kg_2$. Достаточно показать, что для фиксированного элемента $g_e \in G_e$ этим условием двойной смежный класс $(H \cap K)gG_e$ определен однозначно (тогда для всевозможных $g_e \in G_e$ мы получим не более $|G_e|$ возможных ребер $z \in E(T/(H \cap K))$, проецирующихся в $x$ и $y$). Действительно, пусть

$$g = hg_1g_e = kg_2, \quad g' = h'g_1g_e = k'g_2, \quad h, h' \in H, \ k, k' \in K.$$

Тогда имеем:

$$g'g^{-1} = h'g_1g_eg_e^{-1}g_1^{-1}h^{-1} = h'h^{-1} \in H,$$
$$g'g^{-1} = k'g_2g_2^{-1}k^{-1} = k'k^{-1} \in K,$$

то есть $g'g^{-1} \in H \cap K$, откуда

$$(H \cap K)g'G_e = (H \cap K)(g'g^{-1})gG_e = (H \cap K)gG_e,$$

что и требовалось доказать. ■

Заметим, что, если (в условиях теоремы 1) граф $T/H$ является деревом, то, поскольку $H \cong \pi_1(T/H)$, подгруппа $H$ (а, следовательно, и $H \cap K$) тривиальна, и в этом случае оценка (7), а значит и утверждение теоремы 1, выполняется автоматически; то же верно и в случае, когда графы $T/K$ или $T/(H \cap K)$ являются деревьями. Таким образом, везде далее мы будем считать, что графы $T/H$, $T/K$ и $T/(H \cap K)$ не являются деревьями.

Пусть граф $X$ не является деревом. *Ядром графа* $X$ будем называть подграф графа $X$, состоящий из тех вершин и ребер графа $X$, которые лежат на каком-либо нетривиальном замкнутом циклически несократимом пути в графе $X$. Несложно заметить, что, если вершина $v \in V(X)$ лежит в ядре графа $X$, то ядро графа $X$ содержит те и только те вершины и ребра графа $X$, которые лежат на каком-либо несократимом замкнутом пути в графе $X$ с началом в вершине $v$.

Для нетривиальной подгруппы $H$ группы $G$ (где $G$ — фундаментальная группа графа групп $(\Gamma, Y)$) обозначим через $\Psi(H)$ ядро графа $T/H$. Заметим, что, поскольку исходный граф $T/H$ является связным, то и его ядро $\Psi(H)$ — связный граф. Заметим также, что граф $\Psi(H)$ не содержит вершин степени меньше 2.

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия теоремы 1 (то есть, в частности, подгруппа $H \subseteq G$ конечно порождена и тривиально пересекается с сопряженными к вершинным группам графа групп $(\Gamma, Y)$) и пусть подгруппа $H$ нетривиальна. Тогда граф $\Psi(H)$ конечен, $H \cong \pi_1(\Psi(H))$ и*

$$\overline{r}(H) = |E(\Psi(H))^+| - |V(\Psi(H))| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Psi(H))} (deg\, v - 2). \tag{11}$$

*Аналогичные утверждения верны для подгрупп $K$ и $H \cap K$ из теоремы 1.*

$\square$ Как было показано выше, $H \cong \pi_1(T/H)$. Фиксируем вершину $v \in V(T/H)$, лежащую в подграфе $\Psi(H)$. Поскольку любой несократимый замкнутый путь в графе $T/H$ с началом в вершине $v$ содержится в подграфе $\Psi(H)$, мы имеем $\pi_1(T/H, v) \cong \pi_1(\Psi(H), v)$, следовательно, $H \cong \pi_1(\Psi(H))$.

Далее, пусть несократимые пути $p_1, ..., p_n$ являются свободными порождающими группы $\pi_1(\Psi(H), v)$; их конечное число, поскольку $H \cong \pi_1(\Psi(H))$ и $H$ конечно порождена по условию. Любой замкнутый несократимый путь в графе $\Psi(H)$ с началом в вершине $v$ представляется как произведение некоторых путей из $p_1, ..., p_n$ и обратных к ним. По определению ядра, любое ребро $e$ графа $\Psi(H)$ лежит на некотором замкнутом циклически несократимом пути в этом графе, а значит $e$ лежит на некотором замкнутом несократимом пути в графе $\Psi(H)$ с началом в вершине $v$, то есть $e$ содержится хотя бы в одном из путей $p_1, ..., p_n$ и обратных к ним. Следовательно, граф $\Psi(H)$ конечен.

Далее, согласно (3), мы имеем

$$r(H) = |E(\Psi(H))^+| - |V(\Psi(H))| + 1.$$

Таким образом, первое равенство в (11) выполняется.

Наконец, для любого (ориентированного) графа сумма степеней его вершин равна удвоенному количеству его положительно ориентированных ребер, поэтому второе равенство в (11) также выполняется.

Очевидно, что те же рассуждения применимы и для подгрупп $K$ и $H \cap K$ из теоремы 1. $\blacksquare$

**Лемма 4.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда образ графа $\Psi(H \cap K)$ при проекциях $\pi_H, \pi_K$ лежит в графах $\Psi(H)$, $\Psi(K)$ соответственно. Таким образом, мы можем рассматривать ограничение проекций $\pi_H : \Psi(H \cap K) \to \Psi(H)$, $\pi_K : \Psi(H \cap K) \to \Psi(K)$.*

$\square$ Это утверждение сразу же следует из леммы 1. Действительно, пусть $v$ — вершина графа $\Psi(H \cap K)$. Тогда $v$ лежит на некотором замкнутом циклически несократимом пути $p$ в графе $T/(H \cap K)$. В силу локальной инъективности $\pi_H$ (лемма 1) замкнутый путь $\pi_H(p)$ в графе $T/H$ также будет циклически несократимым, причем $\pi_H(v)$ лежит на этом пути, следовательно, $\pi_H(v)$ лежит в графе $\Psi(H)$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\pi_K(v)$ лежит в графе $\Psi(K)$. $\blacksquare$

**Лемма 5.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $a, b$ — вершины графов $\Psi(H)$, $\Psi(K)$ соответственно, отвечающие одной и той же вершине графа $Y$. Пусть $w_1, ..., w_s$ — все вершины графа $\Psi(H \cap K)$, проецирующиеся под действием $\pi_H$ в $a$ и под действием $\pi_K$ в $b$. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$deg\, w_i \leqslant deg\, a, \quad deg\, w_i \leqslant deg\, b, \quad i = 1, ..., s \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{s} deg\, w_i \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b, \tag{13}$$

*где $m$ — максимум порядков реберных групп графа групп $(\Gamma, Y)$.*

□ Согласно лемме 4, любое ребро графа $\Psi(H \cap K)$ с началом в одной из вершин $w_i$ $(i = 1, ..., s)$ при проекции $\pi_H$ перейдет в ребро графа $\Psi(H)$ с началом в вершине $a$, а при проекции $\pi_K$ перейдет в ребро графа $\Psi(K)$ с началом в вершине $b$.

Теперь неравенство (12) сразу следует из леммы 1.

Применяя лемму 2 для каждого ребра $x$ графа $\Psi(H)$ с началом в вершине $a$ и каждого ребра $y$ графа $\Psi(K)$ с началом в вершине $b$, мы получаем, что неравенство (13) также выполняется. ■

Завершим теперь доказательство теоремы 1.

Воспользовавшись формулами (11) из леммы 3, перепишем неравенство (7) теоремы 1 в терминах степеней вершин графов $\Psi$:

$$\sum_{w \in V(\Psi(H\cap K))} (deg\, w - 2) \leqslant 3m \cdot \sum_{a \in V(\Psi(H))} (deg\, a - 2) \cdot \sum_{b \in V(\Psi(K))} (deg\, b - 2) \tag{14}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать неравенство (14). Заметим, что для доказательства неравенства (14), в свою очередь, достаточно доказать, что выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2), \tag{15}$$

для всех вершин $a \in V(\Psi(H))$, $b \in V(\Psi(K))$, таких что $a$ отвечает той же вершине графа $Y$, что и $b$. Здесь $w_1^{a,b}, ..., w_{s_{a,b}}^{a,b}$ — все вершины графа $\Psi(H \cap K)$, проецирующиеся под действием $\pi_H$ в $a$ и под действием $\pi_K$ в $b$.

Действительно, пусть выполняется неравенство (15). Тогда, согласно лемме 4, мы имеем:

$$\sum_{w \in V(\Psi(H\cap K))} (deg\, w - 2) = \sum_{(a,b)} \sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant \sum_{(a,b)} 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2) \leqslant$$

$$\leqslant 3m \cdot \sum_{a \in V(\Psi(H))} (deg\, a - 2) \cdot \sum_{b \in V(\Psi(K))} (deg\, b - 2),$$

где в сумме вида $\sum_{(a,b)}$ суммирование ведется по всем $a \in V(\Psi(H))$, $b \in V(\Psi(K)$, таким что $a$ отвечает той же вершине графа $Y$, что и $b$. (Здесь первое равенство выполняется вследствие того, что, если $w \in V(\Psi(H \cap K))$ отвечает вершине $v \in V(Y)$, то проекции $\pi_H(w) \in V(\Psi(H))$ и $\pi_K(w) \in V(\Psi(K))$ также отвечают вершине $v \in V(Y)$.) Таким образом, если выполнено (15), то выполнено и (14).

Остается доказать неравенство (15). Без ограничения общности можно считать, что

$$deg\, a \leqslant deg\, b. \tag{16}$$

Мы видим, что выполняются условия леммы 5, согласно которой имеют место неравенства

$$deg\, w_i^{a,b} \leqslant deg\, a, \quad i = 1, ..., s_{a,b}, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} deg\, w_i^{a,b} \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b. \tag{18}$$

Рассмотрим два случая. Если $s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\, b$, то, воспользовавшись неравенством (17), мы получим

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant s_{a,b}(deg\, a - 2) \leqslant m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2).$$

Если же $s_{a,b} \geqslant m \cdot deg\, b$, то, воспользовавшись неравенством (18), мы получим

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) = \sum_{i=1}^{s_{a,b}} deg\, w_i^{a,b} - 2s_{a,b} \leqslant m \cdot deg\, a \cdot deg\, b - 2m \cdot deg\, b = m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2).$$

Таким образом, в любом случае выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{s_{a,b}} (deg\, w_i^{a,b} - 2) \leqslant m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2). \tag{19}$$

Далее, в графе $\Psi(H)$ нет вершин степени меньше 2. Значит, в соответствии с (16), $deg\, b \geqslant deg\, a \geqslant 2$. Если $deg\, b = 2$, то и $deg\, a = 2$, а значит (19) влечет (15). Если же $deg\, b \geqslant 3$, то $deg\, b \leqslant 3(deg\, b - 2)$, следовательно,

$$m \cdot deg\, b \cdot (deg\, a - 2) \leqslant 3m \cdot (deg\, a - 2) \cdot (deg\, b - 2),$$

то есть (19) опять влечет (15). Таким образом, неравенство (15) всегда выполняется, что и требовалось доказать.

Итак, теорема 1 доказана.

Автор благодарит А.А. Клячко за множество полезных обсуждений. Автор также благодарит У.Дикса за полезные замечания.

## Список литературы

[1] A.G.Howson, *On the intersection of finitely generated free groups*, J. London Math. Soc. 29(1954), 428-434

[2] H.Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publ.Math. 4(1956), 186-189; Addendum, Publ.Math. 5(1957), 128

[3] Igor Mineyev, *Groups, graphs and the Hanna Neumann Conjecture*, J. Topol. Anal. 4(2012), no. 1, 1-12.

[4] S.V.Ivanov, *On the intersection of finitely generated subgroups in free products of groups.* Internat. J. Algebra and Comp. **9** (1999), no. 5, 521-528.

[5] A.G.Kurosh, *Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen*, Ann.Math. **109**(1934), 647-660.

[6] W.Dicks and S.V.Ivanov, *On the intersection of free subgroups in free products of groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144(2008), 511-534.

[7] S.V.Ivanov, *On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups*, Adv. Math. 218(2008), 465-484

[8] А.О. Захаров, *Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой*, Математический сборник **204**:2 (2013), 73-86.

[9] Oleg Bogopolski, *Introduction to Group Theory*, EMS Publishing House, 2008.

[10] J.-P.Serre, *Trees*, Springer-Verlag, 1980.

[11] J.R.Stallings, *Group theory and three dimensional manifolds*, Yale Mathematical Monographs 4, Yale University Press, New Haven 1971.