Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 416, 2013 г.

И. М. Васильев

СВОЙСТВО $\log(f) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ В ТЕРМИНАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИССА

§1. Введение

В статье [2, с. 695] доказывается следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть $f > 0$ – измеримая на $\mathbb{T}$ функция (где $\mathbb{T}$ – единичная окружность). Тогда $\log f \in BMO(\mathbb{T})$, если и только если существуют $c > 1$, $0 < \rho < 1$ и функция $w > 0$ такие, что $\frac{f}{c} \leqslant w \leqslant cf$ и $|H(w^\rho)| \leqslant cw^\rho$, где H – преобразование Гильберта на $\mathbb{T}$ (то есть, $H(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \fint\limits_{\mathbb{T}} \dfrac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt$).*

Лемма 1.1 относится лишь к единичной окружности $\mathbb{T}$. В связи с этим возникают вопросы о нахождении аналогичного результата для пространства $\mathbb{R}^n$. Естественной, как нам кажется, переформулировкой леммы 1.1 для многомерного случая является следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Пусть $f > 0$ – измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\log f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, если и только если существуют $c > 1$, $0 < \rho < 1$ и функция w, такие, что $\frac{f}{c} \leqslant w \leqslant cf$ и $|R_j(w^\rho)| \leqslant cw^\rho$ для всех j от 1 до n, где R_j – j-ое преобразование Рисса в $\mathbb{R}^n$ $\Big($т.е. $R_j(f)(x) = c_n \fint\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{x_j - y_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)\,dt$, где $c_n = \frac{\Gamma[\frac{n+1}{2}]}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\Big)$.*

Указанное распространение леммы 1.1 на случай пространства $BMO(\mathbb{R}^n)$ мне удалось доказать лишь частично (только достаточность). В полной же общности, тем не менее, было доказано схожее с приведенной гипотезой утверждение. Точнее, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f > 0$ – измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда $\log f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, если и только если существуют положительные функции*

Ключевые слова: преобразование Рисса, субгармоничность, обратное неравенство Гёльдера.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

$g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $f = (\frac{g_1}{g_2})^\alpha$ и при этом $|R_j g_i| \leqslant c g_i$ для всех j от 1 до n и $i \in \{1,2\}$.

Доказательству теоремы 1 и посвящена эта заметка.

Замечание 1. Интерес к многомерным аналогам леммы 1.1 связан с тем, что эта лемма серьезно используется в теории интерполяции одномерных аналитических классов Харди (см. [2]). Однако пока неясно, имеет ли доказанная в заметке теорема 1 интерполяционные следствия.

§2. Две основные леммы

Сформулируем и докажем две основные леммы, которыми впоследствии воспользуемся. Первой из двух лемм мы будет пользоваться при доказательстве достаточности в теореме 1.1, вторая лемма будет в точности необходимостью в теореме 1.1.

Лемма 2.1 (Достаточность). *Пусть $f > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p > 1$, пусть также $|R_j f| \leqslant cf$ для всех j от 1 до n, тогда $\log f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Введем вспомогательную систему сопряженных гармонических функций:

$$F = (U_f, U_{R_1 f}, \ldots, U_{R_n f}),$$

где $U_g(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\frac{t\,dy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ – интеграл Пуассона функции g. Поскольку $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, функция

$$|F|(x,t) = \left(\sum_{i=1}^{n} U^2_{R_j f}(x,t) + U^2_f\right)^{1/2}$$

субгармонична в степени ε для любого ε больше $\frac{n-1}{n}$ (см. [1, с. 286]).

Введем некоторые обозначения:

$G_{t_0}(x) := |F|^\varepsilon(x,t_0)$ для $t_0 > 0$;

$H_{t_0} := U_{G_{t_0}}$;

$U_{t_0}(x,t) := |F|^\varepsilon(x,t_0+t)$.

Заметим, что $H_{t_0}(x,t)$ – гармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, которая при $t = 0$ равна $G_{t_0}(x)$. Далее, $U_{t_0}(x,t)$ – субгармоническая в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функция, $U_{t_0}(x,t)\big|_{t=0} = G_{t_0}(x)$. Рассмотрим функцию $W_{t_0}(x,t) :=$

$U_{t_0}(x,t) - H_{t_0}(x,t)$. Отметим, что функция $W_{t_0}(x,t)$ непрерывна при $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, убывает к нулю на бесконечности и равна нулю на границе. Следовательно, выполнен принцип максимума для области $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и субгармонической функции $W_{t_0}(x,t)$ (см. [3, с. 64]). Из этого вытекает, что, поскольку $H_{t_0}(x,t)$ мажорирует $U_{t_0}(x,t)$ на границе, $H_{t_0}(x,t)$ мажорирует U_{t_0} везде в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, то есть для любой точки $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ верно: $U_{t_0}(x,t) \leqslant H_{t_0}(x,t)$.

Следовательно,

$$|F|^\varepsilon(x,t_0+t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{t_0}(x-y)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |F|^\varepsilon(x-y,t_0)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Далее, переходя к пределу при $t_0 \to 0$, получим:

$$|F|^\varepsilon(x,t) \leqslant \inf_{t_0>0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F|^\varepsilon(x-y,t_0)\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i=1}^n((R_i(f))(x-y))^2+(f(x-y))^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{tdy}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Последнее неравенство верно по теореме Фату. Отсюда имеем:

$$\left((U_f(x,t))^2+\sum_1^n\left(U_{R_jf}(x,t)\right)^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(y)\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Опустим в левой части неравенства второе слагаемое, поскольку оно положительно:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^\varepsilon \leqslant C_1\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(y)\frac{tdt}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

Введем новые обозначения: $\varepsilon := 1/q$; $f^\varepsilon = f_1$; $f = f_1^q$; $q > 1$. Тогда получим, что:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)^q\frac{tdy}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leqslant C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\frac{tdt}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q. \quad (1)$$

Далее зафиксируем куб $Q \subset \mathbb{R}^n$. Пусть Q^N – образ куба Q при гомотетии с центром гомотетии в центре куба и коэффициентом гомотетии N. Положим t в выражении (1) равным l – длине ребра куба Q, x – его центру. Рассмотрим левую и правую части неравенства (1) по отдельности:

$$\begin{aligned}
1)\quad &\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1^q(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&= \int\limits_{Q^N} f_1^q(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\geqslant \frac{1}{(N^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_{Q^N} f_1^q(y)dy\cdot\frac{1}{|Q|} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}; \qquad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad &C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\
&= C_1\cdot\left(\int\limits_{Q^N} f_1(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\
&\leqslant C_1\cdot 2^{q-1}\cdot\left(\int\limits_{Q^N} f_1(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \\
&+ C_1\cdot 2^{q-1}\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1(y)\frac{l\,dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q \leqslant \cdots. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Обозначим первое слагаемое в (2) через А и запишем:

$$\cdots \leqslant A + C_1\cdot 2^{q-1}\cdot\|\varphi_N\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)}\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\cdot\frac{\varphi_N(y)dy}{\|\varphi_N\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\right)^q \leqslant \cdots,$$

где φ_N устроена следующим образом:

$$\varphi_N(y) = \begin{cases} \frac{l}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{если} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus Q^N; \\ 0, & \text{если} \quad y \in Q^N. \end{cases}$$

Продолжим преобразования, применив неравенство Гёльдера:

$$\cdots \leqslant A + C_1 \cdot 2^{q-1} \cdot \|\varphi_N\|^q_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1^q(y) \frac{\varphi_N(y)dy}{\|\varphi_N\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$$
$$= A + C_1 \cdot 2^{q-1} \cdot \|\varphi_N\|^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q^N} f_1^q(y) \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (**)$$

Теперь можно выбрать N, при этом нам потребуются два свойства:

(а) необходимо, чтобы $C_1 \cdot 2^{q-1} \cdot \|\varphi_N\|^{q-1}_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ было бы меньше 1;

(б) чтобы при этом N не зависело от Q.

Для этого оценим $\|\varphi_N\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$:

$$\|\varphi_N\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus Q^N} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leqslant \int\limits_{|x-y| \geqslant \frac{Nl}{2}} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{|x-y| \in [\frac{Nli}{2}, \frac{Nl(i+1)}{2}]} \frac{ldy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$< \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{|x-y| \in [\frac{Nli}{2}, \frac{Nl(i+1)}{2}]} \frac{ldy}{(l^2+\frac{N^2l^2i^2}{4})^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{l}{l^{n+1}(1+\frac{N^2i^2}{4})^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{N^n \cdot l^n \cdot (i+1)^n - N^n \cdot l^n \cdot i^n}{2^n} \cdot C_3 \right]$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} C_4 \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{i^{n-1}}{i^{n+1}} = \frac{1}{N} \cdot C_5,$$

где C_5 зависит только от n. Далее, чтобы $C_1 \cdot 2^{q-1} \cdot \|\varphi_N\|^{q-1}$ было бы меньше 1, достаточно потребовать, чтобы N было больше, чем $2 \cdot C_5 \cdot (C_1)^{\frac{1}{q-1}}$. Именно такие N мы и будем рассматривать.

Из оценки (1) следует, что выражение (∗) не превосходит выражения (∗∗):

$$\frac{1}{(N^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_{Q^N} f_1^q(y)dy\cdot\frac{1}{|Q|}+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\leqslant C_1\cdot 2^{q-1}\cdot\left(\int\limits_{Q^N} f_1(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\right)^q+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q^N} f_1^q(y)\frac{l dy}{(l^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|Q^N|}\cdot\int\limits_{Q^N} f_1^q(y)\,dy\leqslant C_6\cdot\left(\frac{1}{|Q^N|}\cdot\int\limits_{Q^N} f_1(y)\,dy\right)^q.$$

Как мы можем заметить, получилось обратное неравенство Гёльдера для $f_1(y)$ и куба Q^N. Поскольку N не зависит от Q, мы можем изначально взять вместо Q куб $Q^{\frac{1}{N}}$ и получим обратное неравенство Гёльдера для функции $f_1(y)$ и любого куба $Q\subset\mathbb{R}^n$. Следовательно ([1, с. 403]), $f_1(y)\in A_\infty$. Из этого следует ([1, с. 409]), что $\log f_1(y)=\log f^\varepsilon(y)\in BMO(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, $\log f(y)\in BMO(\mathbb{R}^n)$. □

Замечание 2. Из только что доказанной леммы следует достаточность в гипотезе 1.

Замечание 3. В только что доказанной лемме условие $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ не столь важно. Именно, $\|\log f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}$ в условиях леммы не зависит от p. Упомянутая норма зависит лишь от размерности пространства, а также от константы c из неравенства $|R_j f|\leqslant cf$.

Лемма 2.2 (Необходимость)**.** *Пусть $f>0$ – измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция, такая, что $\log f\in BMO(\mathbb{R}^n)$. Тогда существуют $\alpha\in\mathbb{R}$, $g_1\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_i>0$ для $i\in\{1,2\}$ такие, что $f=(\frac{g_1}{g_2})^\alpha$ и $|R_j g_i|\leqslant cg_i$ для всех j от 1 до n и $i\in\{1,2\}$.*

Доказательство. Так как $\log f\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, то существуют $\alpha\in\mathbb{R}$ и функция $v>0$ такие, что $f=v^\alpha$ и $v^2\in A_2$ (см. [1, с. 409]). Как следствие получаем, что функции v, $\dfrac{1}{v}$, $\dfrac{1}{v^2}$ принадлежат A_2.

Рассмотрим оператор S, определенный следующим образом:

$$S(g)(x)=\sum_{i=1}^n|R_i(g)(x)|+\sum_{i=1}^n|R_i(gv)(x)|\cdot\frac{1}{v(x)}.$$

Докажем, что S – непрерывный как оператор: 1) из $L^2(v)$ в $L^2(v)$, 2) из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, 3) из $L^2(v^2)$ в $L^2(v^2)$.

1. Оценим квадрат нормы функции Sg в $L^2(v)$, предположив, что $g \in L^2(v)$:

$$\|Sg\|^2_{L^2(v)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)| + \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 v(x)\,dx$$
$$\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)|^2 v(x)\,dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)|^2 \frac{1}{v(x)}\,dx \leqslant \cdots$$

Заметим, что поскольку R_j – непрерывный оператор из $L^2(v)$ в $L^2(v)$ (см. [1, с. 411]), $\|R_j g\|^2_{L^2(v)} \leqslant c\|g\|^2_{L^2(v)}$. Так как R_j непрерывен из $L^2(\frac{1}{v})$ в $L^2(\frac{1}{v})$ ($\frac{1}{v} \in A^2$) и так как $gv \in L^2(\frac{1}{v})$, то

$$\|R_j(gv)\|^2_{L^2(\frac{1}{v})} \leqslant c\|gv\|^2_{L^2(\frac{1}{v})}.$$

Закончим теперь цепочку неравенств:

$$\cdots \leqslant C\|g\|^2_{L^2(v)} + C\|gv\|^2_{L^2(\frac{1}{v})} = C\|g\|^2_{L^2(v)}.$$

Что и требовалось.

2. Таким же образом оценим норму функции Sg в $L^2(\mathbb{R}^n)$ в квадрате, считая, что $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|Sg\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)| + \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 dx$$
$$\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)|^2\,dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)|^2 \frac{1}{v(x)^2} dx \leqslant \cdots$$

Так как R_j – непрерывный оператор из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|R_j g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Также, поскольку $\frac{1}{v^2} \in A_2$, а $gv \in L^2(\frac{1}{v^2})$ (ибо $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$), получаем, что $\|R_j(gv)\|^2_{L^2(\frac{1}{v^2})} \leqslant c\|gv\|^2_{L^2(\frac{1}{v^2})}$. Продолжим цепочку неравенств:

$$\cdots \leqslant C\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C\|gv\|^2_{L^2(\frac{1}{v^2})} = c_0\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Что и требовалось.

3. Наконец, оценим норму $\|Sg\|^2_{L^2(v^2)}$, считая, что $g \in L^2(v^2)$:

$$\|Sg\|^2_{L^2(v)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)| + \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)| \frac{1}{v(x)} \right)^2 v(x)^2 \, dx$$

$$\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(g)(x)|^2 v(x)^2 \, dx + C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |R_j(gv)(x)|^2 \, dx \leqslant \cdots .$$

Так как оператор R_j непрерывен из $L^2(v^2)$ в $L^2(v^2)$ ($v^2 \in A_2$), а $g \in L^2(v^2)$, то $\|R_j g\|^2_{L^2(v^2)} \leqslant c\|g\|^2_{L^2(v^2)}$. А поскольку оператор R_j непрерывен из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $gv \in L^2(\mathbb{R}^n)$, получаем, что

$$\|R_j(gv)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|gv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Воспользуясь этим, закончим цепочку неравенств:

$$\cdots \leqslant C\|g\|^2_{L^2(v^2)} + C\|gv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = c_1\|g\|^2_{L^2(v^2)}.$$

Что и требовалось.

Вернемся теперь к доказательству леммы. Найдем представление функции v в виде частного функций g_1 и g_2, где $g_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $|R_j g_i| \leqslant c g_i$ при всех j от 1 до n и $i \in \{1, 2\}$.

Определим последовательность функций $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ следующим образом:

1) f_0 – любая функция, обладающая следующими свойствами: $f_0 > 0$, $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_0 \in L^2(v)$, $f_0 \in L^2(v^2)$ (в качестве f_0 можно взять, например, характеристическую функцию единичного шара B);

2) $f_i(x) := Sf_{i-1}(x)$ при $1 \leqslant i$. (Отметим, что по уже доказанному справедливы включения $f_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_i \in L^2(v)$, $f_i \in L^2(v^2)$.)

Теперь определим функцию g_2 таким образом:

$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k(x),$$

где β подобрано так, чтобы $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Это вполне допустимо, так как при $\beta \leqslant \frac{1}{2c_0}$ соответствующий ряд абсолютно сходится:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \|f_k(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c_0^k \|f_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|f_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2\|f_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Далее, получаем выражение для g_1:

$$g_1(x) = v(x) g_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v(x) \beta^k f_k(x).$$

Покажем, что g_1 при $\beta \leqslant \frac{1}{2c_1}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$. Снова докажем, что соответствующий ряд абсолютно сходится в $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \|v(x) f_k(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \|f_k(x)\|_{L^2(v^2)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c_1^k \|f_0(x)\|_{L^2(v^2)}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \|f_0(x)\|_{L^2(v^2)} = 2\|f_0(x)\|_{L^2(v^2)} < \infty.$$

Докажем, наконец, что g_1 и g_2 таковы, что $|R_j(g_i)| \leqslant c g_i$ для всех j от 1 до n и $i \in \{1, 2\}$. Сначала разберемся с g_2:

$$|R_j(g_2)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |R_j(f_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k S(f_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_{k+1} < \frac{f_0}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} g_2.$$

Теперь докажем соответствующее утверждение для g_1:

$$|R_j(g_1)| = |R_j(v g_2)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k |R_j(v f_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k v S(f_k)$$

$$= v \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_{k+1} < v \left(\frac{f_0}{\beta} + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k f_k \right) = \frac{v}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f_k = \frac{1}{\beta} v g_2 = \frac{1}{\beta} g_1.$$

$\square$

Замечание 4. Отметим, что схожие с леммой 2.2 утверждения выполняются, если преобразования Рисса заменить любым сингулярным интегральным оператором или максимальным оператором. Доказательства соответствующих утверждений аналогичны доказательству леммы 2.2.

Замечание 5. Схожее с леммой 2.1 утверждение выполняется, если преобразования Рисса заменить максимальным оператором. Доказательство в случае максимального оператора, в отличие от леммы 2.1, мгновенно следует из известных фактов (см. [1]).

§3. Доказательство основного утверждения

Напомним еще раз формулировку основного результата заметки – теоремы 1.

Теорема 1. *Пусть* $f > 0$ *– измеримая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $\log f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *если и только если существуют положительные функции* $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f = (\frac{g_1}{g_2})^\alpha$ *и при этом* $|R_j g_i| \leqslant c g_i$ *для всех* j *от* 1 *до* n, *и* $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство.

"$\Rightarrow$"

В точности лемма 2.2.

"$\Leftarrow$"

Из леммы 2.1 мы знаем, что $\log g_i \in BMO(\mathbb{R}^n)$ при $i \in \{1, 2\}$, при этом $\log f = \alpha \log g_1 - \alpha \log g_2 \in BMO(\mathbb{R}^n)$. □

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задачи и значительную помощь в ее решении.

Литература

1. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weigthed norm inequalities and related topics.* North-Holland, 1985.
2. S. V. Kislyakov, T. W. Gamelin, *Uniform algebras as Banach spaces.* In "Handbook of Banach Spaces" (W. B. Johnson and J. Lindedstrauss (ed.)), Elsevier Science, 2001.
3. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции.* Мир, М., 1980.

Vasilyev I. M. The property $\log(f) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ in terms of the Riesz transformations.

The condition mentioned in the title is equivalent to the representability of f as a quotient $f = v_1/v_2$ where v_1 and v_2 obey the inequality $|R_j v_i| \leqslant c v_i$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, n$. Here $R_1, \dots, R_n$ are the Riesz transformations.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: milavas@mail.ru

Поступило 24 февраля 2013 г.