Фокусные особенности в классической механике

Г.Е. Смирнов

Аннотация

Изучаются фокусные особенности интегрируемых натуральных механических систем с двумя степенями свободы. Найдено топологическое препятствие к существованию фокусной особенности заданной сложности. Показано, что в типичной механической системе могут возникать лишь простые фокусные особенности.

Введение. Интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы представляет собой симплектическое 4-многообразие (M^4, ω^2) (фазовое пространство) с двумя почти всюду независимыми функциями (первыми интегралами) $H, f : M^4 \to \mathbb{R}$, находящимися в инволюции $\{H, f\} = 0$ относительно естественной скобки Пуассона. Уровень функции $\{H = h\}$ называется *уровнем энергии*. Мы будем предполагать, что все уровни энергии компактны. Отображение $\mathcal{F} : M^4 \to \mathbb{R}^2(h, f)$, $\mathcal{F}(x) = (H(x), f(x))$ называется *отображением момента*. Отображение момента определяет слоение на многообразии M^4, называемое *слоением Лиувилля*, слоями которого являются связные компоненты прообразов $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$. Точка $x \in M^4$ называется *особой (неподвижной)* точкой гамильтоновой системы, если $\operatorname{rank} \mathrm{d}\,\mathcal{F}(x) = 0$, а содержащий ее слой называется *особым слоем*. Если во всех точках слоя ранг отображения момента максимален, то слой называется *регулярным*, и, согласно теореме Лиувилля, связная компактная компонента такого слоя диффеоморфна двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Поэтому интерес представляют именно особые слои отображения $\mathcal{F}$. Изложение основных понятий гамильтоновой механики можно найти в [1]. Топологические методы подробно описаны в [2], а кратким обзором является статья [4].

Существует локальная классификация особых точек, которая дается теоремой Эллиасона (см. [4]). В данной работе мы будет изучать один из типов особых точек. Особая точка x называется особой точкой типа *фокус-фокус*, если в некоторой ее окрестности существуют канонические координаты p_1, q_1, p_2, q_2, $x = (0, 0, 0, 0)$, такие что исходные первые интегралы H, f являются функциями от пары *канонических интегралов* f_1, f_2

$$\omega^2 = \mathrm{d}\,p_1 \wedge \mathrm{d}\,q_1 + \mathrm{d}\,p_2 \wedge \mathrm{d}\,q_2$$

$$f_1 = p_1 q_1 + p_2 q_2,\ \ f_2 = p_1 q_2 - p_2 q_1$$
$$H = H(f_1, f_2),\ \ f = f(f_1, f_2)$$

Пусть L — особый слой лиувиллева слоения, содержащий одну или несколько невырожденных особых точек типа фокус-фокус. Число особых точек на слое будем называть *сложностью* фокусной особенности. В случае только одной особой точки будем говорить, что особенность *простая*. Обозначим эти точки через $x_1, \ldots, x_n$. Особый слой представляет собой последовательность вложенных лагранжевых 2-сфер L_i, на каждой из которых отмечена пара точек x_i, x_{i+1}, и соседние сферы склеены по этим точкам. В каждой точке x_i две соседние сферы L_{i-1} и L_i пересекаются трансверсально внутри 4-мерного многообразия. Особый слой L появляется в результате бифуркации семейства торов. Это бифуркация выглядит следующим образом: на регулярном торе выделяются n параллельных нетривиальных циклов, каждый их которых стягивается в точку. В результате получается «тор с n перетяжками» (рис. 1). Различные свойства фокусных особенностей изучаются в работах [5], [6].

Фокусные особенности возникают во многих интегрируемых системах механики. Укажем для примера случаи интегрируемости Лагранжа и Клебша из динамики твердого тела, а также движение сферического маятника. Однако, во всех рассмотренных системах, возникающие там фокусные особенности просты, то есть содержат только одну особую точку на слое. В то же время, можно построить модельный пример сколь угодно сложной особенности [2]. Приводимые ниже утверждения несколько проясняют то факт, что во всех известных интегрируемых случаях механики фокусные особенности просты.

Топологическое препятствие к существованию фокусной особенности заданной сложности. Напомним необходимые нам сведения из алгебраической топологии [3]. Пусть S — замкнутое компактное ориентированное подмногообразие размерности k в ориентированном многообразии M размерности n. Тогда этому подмногообразию может быть сопоставлен класс когомологий де Рама с компактным носителем $[\eta_S] \in H_c^{n-k}(M)$, однозначно определяемый условием

$$\int_S \omega = \int_M \omega \wedge \eta_S \quad \text{для любой замкнутой } k\text{-формы } \omega.$$

и называемый *двойственным по Пуанкаре* к подмногообразию S. В дальнейшем мы будем говорить о классе $[\eta_S]$ как о классе когомологий в $H^{n-k}(M)$. Для любого компактного замкнутого ориентированного подмногообразия X размерности $n-k$, трансверсально пересекающегося с S, значение интеграла

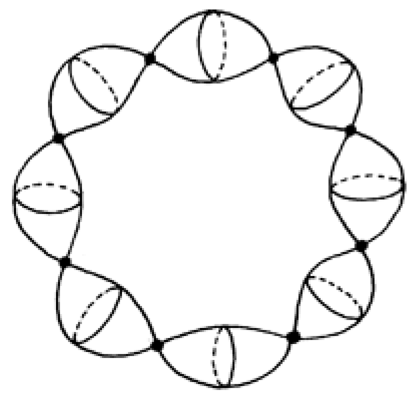

Рис. 1: Фокусный особый слой

$$\int_X \eta_S = X \cdot S = \text{индекс пересечения } X \text{ с } S.$$

Теорема 1. *Пусть интегрируемая гамильтонова система на 4-мерном симплектическом многообразии M содержит фокусную особенность сложности $n \geq 2$. Тогда размерность группы когомологий де Рама $\dim H^2(M) \geq n-1$. Если многообразие M дополнительно является компактным, то $\dim H^2(M) \geq n$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку сфер $L_1, \dots, L_n$ фокусного особого слоя. Обозначим через $[\varphi_i]$ классы, двойственные по Пуанкаре сферам L_i. Так как сфера лагранжева, ее индекс самопересечения равен $+2$. Тогда

$$\int_{L_i} \varphi_i = 2.$$

Таким образом, классы $[\varphi_i]$ нетривиальны. Докажем, что они порождают подпространство размерности не меньше $n-1$ в $H^2(M)$. Выкинем из цепочки одну сферу. В новой незамкнутой цепочке $L_1, \dots, L_{n-1}$ ориентируем сферы таким образом, чтобы индекс пересечения соседних сфер был равен $+1$. Нам нужно показать, что не существует такой линейной комбинации классов $[\varphi_1], \dots, [\varphi_{n-1}]$, чтобы интеграл от нее по любой сфере особого слоя был нулевым. Без ограничения общности для линейной комбинации $\sum_i \lambda_i \varphi_i$ можно положить $\lambda_1 = 1$. Далее, интегрирование по сферам L_i приводит к следующей системе уравнений на коэффициенты

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \ i = 2, \ldots, n-1 \\ \lambda_{n-1} + 2\lambda_n = 0 \end{array} \right. ,$$

которая не имеет решения.

Для доказательства второй части утверждения рассмотрим отображение умножения на симплектическую форму

$$\wedge \omega^2 : H^2(M) \to H^4(M) = \mathbb{R}$$

Все классы $[\varphi_i]$ лежат в ядре данного отображения

$$\int_M \omega^2 \wedge \varphi_i = \int_{S_i} \omega^2 = 0,$$

а все пространство $H^4(M)$ является образом симплектической структуры, т.к. $\omega^2 \wedge \omega^2$— форма объема. □

Приложения к механике. В системах классической механики фазовое пространство является кокасательным расслоением T^*M^2 к двумерному многообразию M^2 (конфигурационному пространству). Предположим, что конфигурационное пространство компактно, то есть в ориентируемом случае является сферой M^2_g с g ручками, а в неориентируемом сферой N^2_μ с μ пленками Мебиуса. Симплектическая форма на фазовом пространстве имеет вид $\omega = \mathrm{d}\,\alpha + \pi^*\varkappa$. Здесь через $\mathrm{d}\,\alpha$ обозначена стандартная симплектическая форма кокасательного расслоения, $\pi : T^*M^2 \to M^2$ — проекция, а $\varkappa$— замкнутая 2-форма на M^2 (форма гироскопических сил).

Теорема 2. *Рассмотрим интегрируемую механическую систему с двумерным компактным конфигурационным пространством M^2. Тогда*

1) Если $M^2 = M^2_g$ и $g > 0$, либо $M^2 = N^2_\mu$, то в системе могут возникать лишь простые фокусные особенности.

2) При $g = 0$ могут возникать фокусные особенности сложности 1 и 2. Особенности сложности 2 могут быть лишь в случае, когда форма $\varkappa$ точна.

Доказательство. 1) Лагранжева сфера сложного особого слоя имеет ненулевой индекс самопересечения и, следовательно, не является границей. В частности, она негомотопна нулю. В то же время, вторая гомотопическая группа фазового пространства нетривиальна только в случае $g = 0$ (сфера) и $\mu = 1$ (проективная плоскость). Если конфигурационным пространством является проективная плоскость, то тривиальна вторая группа когомологий де Рама. Для завершения доказательства первого пункта осталось применить теорему 1.

2) Так как $H^2(T^*S^2) = H^2(S^2) = \mathbb{R}$, то из теоремы 1 получаем, что особенностей сложности выше 2 быть не может. Обозначим через $[\varphi]$ класс, двойственный к одной из сфер S сложного особого слоя, а через $[\omega]$ — класс когомологий симплектической формы. Тогда $[\omega] = k[\varphi]$. В действительности, коэффициент k равен нулю и симплектическая форма точна, потому что

$$\int_S \omega^2 = 0 = k \int_S \varphi = 2k. \quad (S \text{ лагранжева})$$

□

Литература

[1] Арнольд В.И., Математические методы классической механики. М.:Наука, 1989.

[2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: геометрия, топология, классификация. Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

[3] Ботт Р., Ту Л.В., Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.:Наука, 1989.

[4] Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Singularities of integrable Hamiltonian systems, Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publ., 2006, pp 1-67.

[5] Nguyen T. Zung, A note on focus-focus singularities, Differential geometry and applications, 7 (1997), pp 123-120

[6] Nguyen T. Zung, Another note on focus-focus singularities, Lett. Math. Phys. 60:1 (2002), pp 87-99.