Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №5

IЕнтрАЛьнАя ЗАМКнутость унИтАрноЙ Группы ЁтЕЙнБЕрГА

© **А. В. Лавренов**

Пусть (R, Λ) — произвольное форменное кольцо, $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ обозначает гиперболическую унитарную группу, $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$ — ее элементарную подгруппу, $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$ — унитарную группу Стейнберга. Мы доказываем, что при естественном для подобных результатов предположении $n \geqslant 5$ любое центральное расширение группы $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$ расщепляется. Этот результат позволяет описать мультипликатор Шура элементарной унитарной группы как ядро естественного эпиморфизма $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$ на $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$, если известно, что это ядро содержится в центре унитарной группы Стейнберга. Мы используем описание соотношений Стейнберга из работы [10], что позволяет дать наиболее простые доказательства этих результатов.

Введение

В настоящей работе доказано, что определенная Баком унитарная группа Стейнберга (см. [7–9], а также [1, 10–14, 17, 18]) является центрально замкнутой группой.

Аналогичные результаты для стабильной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(R, \Lambda)$, т.е. прямого предела последовательности

$$\dots \to \mathrm{StU}(2n, R, \Lambda) \to \mathrm{StU}(2n+2, R, \Lambda) \to \dots,$$

были получены еще в [9]. В действительности тем же методом можно доказать и центральную замкнутость унитарных групп Стейнберга конечной степени. Однако в первоначальном подходе Бака соотношения Стейнберга группировались в соответствии с матричной индексацией входящих в них унитарных трансвекций и проверка всех деталей в таких обозначениях довольно трудоемка. Вместо этого в настоящей статье мы используем упрощенный подход к описанию соотношений в терминах корней, предложенный в [10]. Именно это позволило нам дать значительно более короткие доказательства, чем доказательства Бака для стабильного случая.

Ключевые слова: унитарная группа Стейнберга, мультипликатор Шура, унитарная группа, форменный параметр, нестабильная K-теория.

Из результатов настоящей статьи следует, что в случае, когда группа Стейнберга является центральным расширением элементарной унитарной группы, она является ее универсальным центральным расширением, или, другими словами, в случае, когда унитарный K_2 централен в группе Стейнберга, он совпадает с двумерной группой гомологий элементарной унитарной группы.

Ранее аналогичные результаты были получены для групп Шевалле в работе [16]. Для полной линейной группы подробное изложение этих фактов можно найти в [2, 5]. В частности, в [2, теорема 5.10] доказано, что при $n \geqslant 5$ линейная группа Стейнберга $\mathrm{St}(n,\, R)$ является центрально замкнутой. В настоящей работе автор, следуя тому же плану, доказывает для унитарной группы Стейнберга аналогичный результат.

Теорема 1. *Унитарная группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$*, где* R *— произвольное ассоциативное кольцо с единицей,* Λ *— произвольный форменный параметр, центрально замкнута при* $n \geqslant 5$.

Согласно хорошо известному теоретико-групповому факту для доказательства этой теоремы достаточно проверить следующее утверждение, доказательству которого посвящена настоящая статья.

Теорема 2. *Пусть* $(E,\, \epsilon)$ *— произвольное центральное расширение унитарной группы Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$*, где* $(R,\, \Lambda)$ *— форменное кольцо,* $n \geqslant 5$*. Тогда это расширение расщепляется: существует такой гомоморфизм* $\sigma : \mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda) \to E$*, что* $\epsilon\sigma = \mathrm{id}$.

Все необходимые определения изложены в §1–2, после чего §3–6 посвящены непосредственно доказательству теоремы 1.

§1. Унитарная группа Стейнберга

В этом параграфе мы напомним основные необходимые определения. Более подробное их изложение можно найти, например, в [1, 10–13].

Всюду в этой статье R означает произвольное ассоциативное кольцо с 1, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ — антиинволюцию на R, т.е. $\forall \alpha,\, \beta \in R$, $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \overline{\beta}\,\overline{\alpha}$ и $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

Определение 1. Фиксируем элемент $\lambda \in \mathrm{Cent}(R)$ такой, что $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Положим

$$\Lambda_{\min} = \{\alpha - \lambda\overline{\alpha} \mid \alpha \in R\}, \quad \Lambda_{\max} = \{\alpha \in R \mid \alpha = -\lambda\overline{\alpha}\}.$$

Форменным параметром Λ называется аддитивная подгруппа в R такая, что

(1) $\Lambda_{\min} \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda_{\max}$,

(2) $\alpha\Lambda\overline{\alpha} \subseteq \Lambda$ для любого $\alpha \in R$.

Пара $(R,\, \Lambda)$ называется *форменным кольцом.*

Всюду далее λ означает фиксированный центральный элемент, а $\Lambda_{\min}$, $\Lambda_{\max}$ и Λ — определенные с его помощью минимальный, максимальный и произвольный форменные параметры.

Для того чтобы определить унитарную группу, рассмотрим свободный R-модуль $V \cong R^{2n}$. Можно рассматривать элементы V как столбцы высоты $2n$ с элементами из R. В частности, через e_i обозначим столбцы с i-й координатой, равной 1, а остальными — равными нулю. Пусть этот базис занумерован следующим образом: $e_1, \dots, e_n,\, e_{-n}, \dots, e_{-1}$. Множество индексов $\{1, \dots, n,\, -n, \dots, -1\}$ всюду в этой статье обозначается через Ω, множество $\{1, \dots, n\}$ — через Ω_+ и $\{-n, \dots, -1\}$ — через Ω_-. Для $i,\, j \in \Omega$ через e_{ij} обозначается матричная единица, т.е. матрица $2n \times 2n$ с единицей на пересечении i-й строки и j-го столбца и нулями во всех остальных позициях. Через e обозначается единичная матрица, т.е. матрица, у которой стоят единицы на главной диагонали и нули во всех остальных позициях. Кроме того, через p_n обозначим матрицу $n \times n$, у которой стоят единицы на побочной диагонали и нули на всех остальных позициях. Всюду в этой статье будем полагать $n \geqslant 3$.

Определение 2. Рассмотрим полуторалинейную форму f на V, которая относительно базиса $e_1, \dots, e_{-1}$ имеет матрицу Грама $\left(\begin{smallmatrix} 0 & p_n \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. С помощью этой формы определим четную λ-эрмитову форму $h = f + \lambda\overline{f}$, где $\overline{f}(u,\, v) = \overline{f(v,\, u)}$, и Λ-квадратичную форму $q : V \to R/\Lambda$, полагая $q(u) = f(u,u) \bmod \Lambda$.

Тогда *унитарной группой* будем называть группу

$$\mathrm{U}(2n, R, \Lambda) = \{g \in \mathrm{GL}(2n, R) \mid \forall u, v \in V\ \ h(gu, gv) = h(u, v),\ \ q(gu) = q(u)\}.$$

Другими словами, унитарная группа состоит из таких элементов $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(2n,\, R)$, которые сохраняют λ-эрмитову форму h и Λ-квадратичную форму q.

Для $i \in \Omega$ через $\varepsilon(i)$ всюду далее обозначается 1, если $i \in \Omega_+$, и -1, если $i \in \Omega_-$.

Определение 3. Для $i,\, j \in \Omega$ таких, что $i \neq \pm j$, $\zeta \in R$, рассмотрим элемент

$$T_{ij}(\zeta) = e + \zeta e_{ij} - \lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\zeta} e_{-j,-i}.$$

Кроме того, для $j = -i$ и $\alpha \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$ рассмотрим

$$T_{i,-i}(\alpha) = e + \alpha e_{i,-i}.$$

Эти элементы будем называть *элементарными унитарными трансвекциями.* Подгруппа унитарной группы $\mathrm{U}(2n,\, R,\, \Lambda)$, порожденная всеми элементарными унитарными трансвекциями, называется *элементарной унитарной группой* и обозначается $\mathrm{EU}(2n,\, R,\, \Lambda)$.

Легко показать, что для элементарных трансвекций выполняются следующие коммутационные соотношения.

Лемма 1. *Пусть $i,\, j,\, h,\, k \in \Omega$, $i \neq j$, $h \neq k$, $\alpha \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$, $\zeta,\, \xi,\, \eta \in R$, причем либо $i \neq -j$, либо $\zeta, \xi \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$ и либо $h \neq -k$, либо $\eta \in \lambda^{-(\varepsilon(h)+1)/2}\Lambda$. Тогда справедливы следующие соотношения*:

$$T_{ij}(\zeta) = T_{-j,-i}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\zeta}); \tag{R1}$$

$$T_{ij}(\zeta)T_{ij}(\xi) = T_{ij}(\zeta+\xi); \tag{R2}$$

если $h \neq j, -i$, $k \neq i, -j$, то

$$[T_{ij}(\zeta),\, T_{hk}(\eta)] = e; \tag{R3}$$

если $i, h \neq \pm j$ и $i \neq \pm h$, то

$$[T_{ij}(\zeta),\, T_{jh}(\xi)] = T_{ih}(\zeta\xi); \tag{R4}$$

если $i \neq \pm j$, то

$$[T_{ij}(\zeta),\, T_{j,-i}(\xi)] = T_{i,-i}(\zeta\xi - \lambda^{-\varepsilon(i)}\overline{\xi}\,\overline{\zeta}); \tag{R5}$$

если $i \neq \pm j$, то

$$[T_{i,-i}(\alpha),\, T_{-i,j}(\zeta)] = T_{ij}(\alpha\zeta)T_{-j,j}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(-i))/2}\overline{\zeta}\alpha\zeta). \tag{R6}$$

Проверка леммы 1 предоставляется читателю. Соотношения R1–R6 называют унитарными соотношениями Стейнберга. Эти соотношения задают унитарную группу Стейнберга.

Определение 4. *Унитарной группой Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$ называется группа, заданная образующими $X_{ij}(\zeta)$, где $i \neq j \in \Omega$, $\zeta \in R$, причем либо $i \neq -j$, либо $\zeta \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$, и соотношениями R1–R6 с $X_{ij}(\zeta)$ вместо $T_{ij}(\zeta)$:

$$\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda) = \langle X_{ij}(\zeta) \mid \text{R1–R6}\rangle.$$

Обозначим через ϖ естественный эпиморфизм унитарной группы Стейнберга на элементарную унитарную группу, переводящий каждую образующую $X_{ij}(\zeta)$ в элементарную трансвекцию $T_{ij}(\zeta)$. Ядро этого эпиморфизма обозначается $\mathrm{K_2U}(2n,\, R,\, \Lambda)$. В данной работе будет доказано, что в случае, когда $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \Lambda) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda))$, $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \Lambda)$ совпадает с двумерной группой гомологий элементарной унитарной группы:

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\, R,\, \Lambda) = \mathrm{H}_2(\mathrm{EU}(2n,\, R,\, \Lambda); \mathbb{Z}).$$

§2. Центральные расширения

Понятие центрального расширения было определено Шуром для конечных групп. Теорию для произвольных групп можно найти у Стейнберга в [5], причем для случая конечных групп его определения равносильны определениям Шура. Кроме того, эти результаты можно найти в [2].

Определение 5. Рассмотрим короткую точную последовательность групп

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow E \xrightarrow{\ \epsilon\ } G \longrightarrow 1.$$

Если $C \subseteq \mathrm{Cent}(E)$, будем говорить, что $(E,\, \epsilon)$ является *центральным расширением* группы G.

Если зафиксировать группу G, то универсально отталкивающий объект в категории ее центральных расширений называют универсальным центральным расширением.

Определение 6. Центральное расширение $(U,\, \pi)$ группы G называется ее *универсальным центральным расширением*, если для любого другого центрального расширения $(E,\, \epsilon)$ этой группы существует единственный гомоморфизм $\psi : U \to E$, замыкающий диаграмму[1]

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[dl, "\epsilon"] \\ G & \end{tikzcd}$$

до коммутативной.

Разумеется, если универсальное центральное расширение существует, то оно единственно с точностью до изоморфизма.

Лемма 2. *Если (U, π), (U', π') — два универсальных центральных расширения группы G, то найдется изоморфизм $\varphi : U \to U'$ такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

[1]Для печати коммутативных диаграмм использован пакет XY-pic.

коммутативна.

Однако не любая группа допускает универсальное центральное расширение.

Лемма 3. *Универсальное расширение группы G существует в том и только в том случае, когда G совершенна* (*т.е. совпадает со своим коммутантом* $[G, G]$).

Эта лемма не будет доказана в данной работе, а интересующегося читателя автор отсылает к [2, теорема 5.7].

Определение 7. Пусть (U, π) —универсальное центральное расширение группы G. Тогда $\operatorname{Ker}\pi$ называется мультипликатором Шура группы G.

Хопф определял двумерную группу гомологий $\mathrm{H}_2(G; \mathbb{Z})$ группы G именно как ее мультипликатор Шура. В [2] Милнор определяет двумерную группу гомологий чуть иначе и в [2, следствие 5.8] доказывает, что она совпадает с мультипликатором Шура.

Дадим еще несколько определений.

Определение 8. Рассмотрим центральное расширение (E, ϵ) группы G и рассмотрим соответствующую ему короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\epsilon) \longrightarrow E \xrightarrow{\ \epsilon\ } G \longrightarrow 1.$$

Будем говорить, что расширение (E, ϵ) *расщепляется*, если расщепляется соответствующая короткая точная последовательность, т.е. если существует такой гомоморфизм σ, что $\epsilon\sigma = \mathrm{id}$. Сам σ будем при этом называть *сечением.*

Определение 9. Будем говорить, что группа G *центрально замкнута*, если (G, id) является ее универсальным центральным расширением.

Следующий факт о центральных расширениях также не будет доказан в этой статье, его доказательство можно найти в [2, теорема 5.3].

Лемма 4. *Центральное расширение (U, π) группы G является универсальным в том и только в том случае, когда группа U совершенна и любое ее центральное расширение расщепляется.*

Из леммы 4 вытекает следующий результат.

Следствие. *Группа G центрально замкнута тогда и только тогда, когда она совершенна, а любое ее центральное расширение расщепляется.*

В связи с этим следствием можно сформулировать лемму 4 в такой форме: центральное расширение (U, π) универсально, если и только если U центрально замкнута.

В настоящей статье обсуждается центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга, но, как только будет доказано, что $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n,\,R,\,\Lambda) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\Lambda))$ при тех или иных предположениях, из теоремы 1 данной работы будет вытекать, что в соответствующих условиях унитарная группа Стейнберга будет являться универсальным центральным расширением элементарной унитарной группы.

§3. План доказательства теоремы 1

Во всех наших доказательствах существенным образом используются следующие тождества с коммутаторами. Справедливость этих тождеств проверяется прямым вычислением, которое предоставляется читателю.

Лемма 5. *Пусть G — группа, через $[a,\,b]$ будем обозначать коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$ двух элементов $a,\,b \in G$, через ${}^a b$ — сопряженный с b элемент aba^{-1}. Рассмотрим произвольные элементы $x,\,y,\,z,\,y_1,\ldots,y_n \in G$. Тогда справедливы тождества*

$$[xy,\,z] = {}^x[y,\,z]\cdot[x,\,z], \tag{C1}$$

$$[x,\,yz] = [x,\,y]\cdot{}^y[x,\,z], \tag{C2}$$

$$[x,\,y_1\cdot\ldots\cdot y_n] = [x,\,y_1]\cdot{}^{y_1}[x,\,y_2]\cdot{}^{y_1y_2}[x,\,y_3]\cdot\ldots\cdot{}^{y_1\cdot\ldots\cdot y_{n-1}}[x,\,y_n], \tag{C3}$$

$$[x,\,y][x,\,z] = [x,\,yz][y,\,[z,\,x]], \tag{C4}$$

$${}^y[x,\,[y^{-1},\,z]]\cdot{}^z[y,\,[z^{-1},\,x]]\cdot{}^x[z,\,[x^{-1},\,y]] = 1 \tag{C5}$$

(*тождество Холла–Витта*),

$${}^z[y,\,[z^{-1},\,x]] = [{}^z y,\,[x,\,z]]. \tag{C6}$$

Приступим к доказательству центральной замкнутости унитарной группы Стейнберга.

Следующий результат легко следует из соотношений R4 и R6.

Лемма 6. *Унитарная группа Стейнберга* $\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\Lambda)$ *совершенна.*

Таким образом, согласно следствию леммы 4 для того, чтобы показать, что $\mathrm{StU}(2n,\,R,\,\Lambda)$ центрально замкнута, необходимо и достаточно проверить, что любое ее центральное расширение расщепляется, т.е. теорема 1 данной работы непосредственно вытекает из теоремы 2.

При доказательстве теоремы 2 мы будем следовать плану, изложенному в [2, теорема 5.10], где доказана центральная замкнутость линейной группы Стейнберга. Основную идею доказательства проще изложить в обозначениях линейного случая.

Пусть $\mathrm{GL}(n, R)$ — полная линейная группа над ассоциативным кольцом с единицей, $\mathrm{E}(n,\, R)$ — ее элементарная подгруппа, $\mathrm{St}(n,\, R)$ — группа Стейнберга, порожденная образующими $x_{ij}(\zeta)$ и соотношениями

$$x_{ij}(\zeta)x_{ij}(\xi) = x_{ij}(\zeta + \xi), \tag{S1}$$

$$[x_{ij}(\zeta),\, x_{hk}(\xi)] = 1, \tag{S2}$$

$$[x_{ij}(\zeta),\, x_{jk}(\xi)] = x_{ik}(\zeta\xi), \tag{S3}$$

где $i,\, j,\, h,\, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq h$, $i \neq k$, $\zeta,\, \xi \in R$. Если бы у ее центрального расширения $(E,\, \epsilon)$ существовало сечение σ, то в прообразе каждой образующей $x_{ij}(\zeta)$ группы Стейнберга нашелся бы элемент $s_{ij}(\zeta) = \sigma(x_{ij}(\zeta))$, причем для $s_{ij}(\zeta)$ также выполнялись бы соотношения Стейнберга S1–S3. Но верно и обратное: если в прообразе каждой образующей выбрать элемент $s_{ij}(\zeta)$ так, чтобы для них выполнялись соотношения Стейнберга, то можно рассмотреть естественный гомоморфизм $\sigma : x_{ij}(\zeta) \mapsto s_{ij}(\zeta)$, причем ясно, что это будет сечение. Таким образом, задача построения сечения равносильна задаче поиска таких элементов $s_{ij}(\zeta)$.

Теперь отметим следующую особенность центральных расширений.

Лемма 7. *Пусть $(E,\, \epsilon)$ — центральное расширение группы G. Тогда для любых $g,\, h \in G$ и для любых $x_1,\, x_2 \in \epsilon^{-1}(g)$, $y_1,\, y_2 \in \epsilon^{-1}(h)$*

$$[x_1,\, y_1] = [x_2,\, y_2].$$

Доказательство. Так как расширение $(E,\, \epsilon)$ центрально, $x_1x_2^{-1}$, $y_1y_2^{-1} \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq \mathrm{Cent}(E)$, тогда можно написать, что $x_1 = cx_2$, а $y_1 = dy_2$, где c, $d \in \mathrm{Cent}(E)$, а тогда $[x_1,\, y_1] = [cx_2,\, dy_2] = [x_2,\, y_2]$. □

Поэтому разумно дать следующее определение.

Определение 10. Пусть $(E,\, \epsilon)$ — центральное расширение группы G, рассмотрим элементы $g,\, h \in G$. Тогда через $[\epsilon^{-1}(g),\, \epsilon^{-1}(h)]$ будем обозначать коммутатор $[x,\, y] \in E$ любых двух элементов $x \in \epsilon^{-1}(g)$, $y \in \epsilon^{-1}(h)$.

Итак, если искомые элементы $s_{ij}(\zeta)$ существуют, то, в частности, для них выполняется соотношение S2: $[s_{ij}(\zeta),\, s_{jk}(\xi)] = s_{ik}(\zeta\xi)$, которое в связи с леммой 7 можно переписать в виде $s_{ik}(\zeta\xi) = [\epsilon^{-1}x_{ij}(\zeta),\, \epsilon^{-1}x_{jk}(\xi)]$. Таким образом, $s_{ik}(\zeta\xi)$ можно положить равным по определению элементу $[\epsilon^{-1}x_{ij}(\zeta),\, \epsilon^{-1}x_{jk}(\xi)]$, при этом, разумеется, будет необходимо проверять корректность, после чего доказать, что для $s_{ij}(\zeta)$ выполняются соотношения Стейнберга, что, как уже отмечено выше, позволяет продолжить отображение $x_{ij}(\zeta) \mapsto s_{ij}(\zeta)$ до гомоморфизма групп.

Теперь вернемся к рассматриваемой нами группе $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$, заданной образующими $X_{ij}(\zeta)$ и соотношениями R1–R6. В линейном случае мы выбирали прообраз, исходя из соотношения S2. Отметим, что в случае, когда $\Lambda = \Lambda_{\min}$, можно выбрать прообраз любой образующей, исходя или из соотношения R4, или из соотношения R5, и на такую ситуацию значительная часть рассуждений переносится с линейного случая без изменений (этим фактом мы косвенно воспользуемся). Для произвольного же форменного параметра приходится пользоваться соотношениями R4 и R6. Этот план реализован в §4–5.

§4. Построение сечения: корректность

Начиная с этого места $(E,\, \epsilon)$ означает центральное расширение группы $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$, где $n \geqslant 5$.

Прежде всего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть $i, j, h, k \in \Omega$ такие, что $i \neq j$, $h \neq k$, $h \neq j, -i$, $k \neq i, -j$. Тогда*

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta),\, \epsilon^{-1}X_{hk}(\xi)] = 1.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $h \neq -k$. Поскольку $n \geqslant 5$, можно выбрать $l \neq \pm i, \pm j, \pm h, \pm k$ и рассмотреть $x \in \epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{hl}(\xi)$ и $z \in \epsilon^{-1}X_{lk}(1)$. Ясно, что $[y,\, z] \in \epsilon^{-1}X_{hk}(\xi)$. Кроме того, $[x,\, y]$, $[x,\, z] \in \mathrm{Cent}(E)$. Тогда согласно соотношению C2

$$1 = [x,\, y^{-1}y] = [x,\, y^{-1}] \cdot {}^{y^{-1}}[x,\, y] = [x,\, y^{-1}][x,\, y],$$

т.е. $[x,\, y^{-1}] = [y,\, x]$ и аналогично $[x,\, z^{-1}] = [z,\, x]$. Тогда, пользуясь соотношением C3 и центральностью $[x,\, y]$ и $[x,\, z]$, получаем, что

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta),\, \epsilon^{-1}X_{hk}(\xi)] = [x,\, [y,\, z]] = [x,\, y][x,\, z][x,\, y^{-1}][x,\, z^{-1}] = 1.$$

Пусть теперь $h = -k$. Выберем $l \neq \pm i,\ \pm j,\ \pm h$, тогда

$$X_{h,-h}(\xi) = [X_{l,-l}(-\lambda^{(\varepsilon(h)-\varepsilon(l))/2}\xi),\, X_{-l,-h}(1)]X_{l,-h}(\lambda^{(\varepsilon(h)-\varepsilon(l))/2}\xi).$$

Рассмотрим элементы $x \in \epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta)$, $u \in \epsilon^{-1}X_{l,-l}(-\lambda^{(\varepsilon(h)-\varepsilon(l))/2}\xi)$, $v \in \epsilon^{-1}X_{-l,-h}(1)$ и $z \in \epsilon^{-1}X_{l,-h}(\lambda^{(\varepsilon(h)-\varepsilon(l))/2}\xi)$. Как уже показано выше, $[x,\, z] = 1$. Кроме того, ясно, что $[x,\, u]$, $[x,\, v] \in \mathrm{Cent}(E)$. Тогда, поскольку $[u,\, v]z \in \epsilon^{-1}X_{h,-h}(\xi)$, из соотношения C2 вытекает, что

$$[\epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta),\, \epsilon^{-1}X_{h,-h}(\xi)] = [x,\, [u,\, v]z] = [x,\, [u,\, v]] \cdot {}^{[u,\, v]}[x,\, z] = [x,\, [u,\, v]],$$

а такой коммутатор равен единице, как уже показано в первой части доказательства. □

Лемма 8 утверждает, что любые прообразы x и y образующих группы Стейнберга $X_{ij}(\zeta)$ и $X_{hk}(\xi)$, где $h \neq j, -i$, $k \neq i, -j$, коммутируют. Этот факт будет постоянно использоваться в дальнейшем без каких-либо специальных ссылок.

Теперь приступим непосредственно к построению сечения. Во-первых, соотношение R4 подсказывает нам рассмотреть для $k \neq \pm h$ элементы $S_{hk}(\zeta) = [\epsilon^{-1}X_{hj}(\zeta), \epsilon^{-1}X_{jk}(1)] \in \epsilon^{-1}X_{hk}(\zeta)$. Для этого нужно показать, что такой коммутатор не зависит от выбора j. В действительности имеет место следующее более сильное утверждение.

Лемма 9. *Пусть i, j, h, $k \in \Omega$, $h \neq k$, i, $j \neq \pm h$, $\pm k$, $i \neq \pm j$, ξ, $\zeta \in R$. Тогда*

$$[\epsilon^{-1}X_{hi}(\zeta), \epsilon^{-1}X_{ik}(\xi)] = [\epsilon^{-1}X_{hj}(\zeta\xi), \epsilon^{-1}X_{jk}(1)].$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in \epsilon^{-1}X_{hi}(\zeta)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{ij}(-\xi)$, $z \in \epsilon^{-1}X_{jk}(1)$. Поскольку $[z^{-1}, x] = 1$, тождество C5 перепишется как

$$^{y}[x, [y^{-1}, z]] = {}^{x}[[x^{-1}, y], z],$$

но $[y^{-1}, z] \in \epsilon^{-1}X_{ik}(\xi)$, а $[x^{-1}, y] \in \epsilon^{-1}X_{hj}(\zeta\xi)$. Если $k \neq -h$, положим $\eta = \zeta\xi$, а если $k = -h$, положим $\eta = \zeta\xi - \lambda^{-\varepsilon(h)}\overline{\xi}\,\overline{\zeta}$. Теперь, пользуясь тем, что $[x, [y^{-1}, z]]$, $[[x^{-1}, y], z] \in \epsilon^{-1}X_{hk}(\eta)$, а значит, коммутируют с x и y, получаем искомое равенство. $\square$

После того как лемма 9 доказана, можно дать следующее определение.

Определение 11. Для h, $k \in \Omega$, $h \neq \pm k$, $\zeta \in R$, будем обозначать через $S_{hk}(\zeta)$ элемент $[\epsilon^{-1}X_{hi}(\zeta), \epsilon^{-1}X_{ik}(1)]$, где $i \neq \pm h$, $\pm k$.

Тогда из леммы 9 вытекает следующий результат.

Лемма 9A. *Пусть j, h, $k \in \Omega$, $h \neq \pm k$, $j \neq \pm h$, $\pm k$, ξ, $\zeta \in R$. Тогда*

$$[\epsilon^{-1}X_{hj}(\zeta), \epsilon^{-1}X_{jk}(\xi)] = S_{hk}(\zeta\xi).$$

Когда мы будем ссылаться на лемму 9, иногда будет подразумеваться именно эта ее переформулировка.

Ясно, что для $\Lambda = \Lambda_{\min}$ лемма 9 позволяет дать определение $S_{hk}(\alpha)$ и для $h = -k$, $\alpha \in \lambda^{-(\varepsilon(h)+1)/2}\Lambda_{\min}$, но в случае произвольного форменного параметра для того, чтобы построить $S_{-k,k}(\alpha)$, можно исходить только из соотношения R6, т.е. определить этот элемент с помощью формулы

$$S_{-k,k}(\alpha) = [\epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha), \epsilon^{-1}X_{-j,k}(1)]S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha).$$

Для этого необходимо проверить, что такое выражение не зависит от выбора j. Этот результат вытекает из следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть* $i,\ j,\ k \in \Omega,\ i,\ j \neq \pm k,\ i \neq \pm j,\ \alpha \in \lambda^{(\varepsilon(k)-1)/2}\Lambda,\ \xi \in R.$ *Тогда*

$$[\epsilon^{-1}X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi),\ \epsilon^{-1}X_{-i,k}(1)]S_{ik}(\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi)$$
$$= [\epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha),\ \epsilon^{-1}X_{-j,k}(\xi)]S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим элементы $x \in \epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{-j,-i}(-\xi)$, $w \in \epsilon^{-1}X_{j,-i}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)$, а также $z \in \epsilon^{-1}X_{-i,k}(1)$. Тогда легко видеть, что

$$[x^{-1},\ y]w \in \epsilon^{-1}X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi),$$

а значит,

$$[\epsilon^{-1}X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi),\ \epsilon^{-1}X_{-i,k}(1)]$$
$$= {}^{x}[\epsilon^{-1}X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi),\ \epsilon^{-1}X_{-i,k}(1)] = {}^{x}[[x^{-1},\ y]w,\ z].$$

Пользуясь тождеством C1, можно преобразовать это выражение следующим образом:

$${}^{x}[[x^{-1},\ y]\cdot w,\ z] = {}^{x[x^{-1},\ y]}[w,\ z]\cdot {}^{x}[[x^{-1},\ y],\ z],$$

а поскольку $[z^{-1},\ x] = 1$, с помощью C5 получаем, что

$${}^{x}[[x^{-1},\ y],\ z] = {}^{y}[x,\ [y^{-1},\ z]] = [y,\ [x,\ [y^{-1},\ z]]]\cdot[x, [y^{-1},\ z]].$$

Согласно соотношению R1 в группе Стейнберга $y \in \epsilon^{-1}X_{ij}(\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\xi})$. Кроме того, $[y^{-1},\ z] = S_{-j,k}(\xi)$, а тогда

$$[x, [y^{-1},\ z]] \in \epsilon^{-1}\left(X_{jk}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)\cdot X_{-k,k}(\overline{\xi}\alpha\xi)\right).$$

Поскольку $[\epsilon^{-1}X_{ij}(\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\xi}),\ \epsilon^{-1}X_{-k,k}(\overline{\xi}\alpha\xi)] = 1$, из C2 вытекает, что

$$[y,\ [x,\ [y^{-1},\ z]]]$$
$$= [\epsilon^{-1}X_{ij}(\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\xi}),\ \epsilon^{-1}\left(X_{jk}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)\cdot X_{-k,k}(\overline{\xi}\alpha\xi)\right)]$$
$$= [\epsilon^{-1}X_{ij}(\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\xi}),\ \epsilon^{-1}X_{jk}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)]$$
$$= S_{ik}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi),$$

а значит,

$${}^{x}[[x^{-1},\ y],\ z]$$
$$= S_{ik}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi)[\epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha),\ \epsilon^{-1}X_{-j,k}(\xi)].$$

Теперь, пользуясь тем, что $[w,\ z] = S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)$, и так как

$$[x^{-1},\ y] \in \epsilon^{-1}\left(X_{j,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)\cdot X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi)\right),$$

элемент $[w,\, z]$ коммутирует и с $[x^{-1},\, y]$, и с x, получаем, что

$$
\begin{aligned}
{}^{x}[[x^{-1},\, y]\cdot w,\, z] = S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi)S_{ik}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\overline{\xi}\alpha\xi)\\
\cdot [\epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha),\, \epsilon^{-1}X_{-j,k}(\xi)],
\end{aligned}
$$

что завершает доказательство леммы. □

Теперь дадим следующее определение.

Определение 12. Для $k \in \Omega$, $\alpha \in \lambda^{(\varepsilon(k)-1)/2}\Lambda$ обозначим через $S_{-k,k}(\alpha)$ элемент

$$
[\epsilon^{-1}X_{i,-i}(-\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\alpha),\, \epsilon^{-1}X_{-i,k}(1)]S_{ik}(\lambda^{-(\varepsilon(i)+\varepsilon(k))/2}\alpha),
$$

где $i \neq \pm k$.

В связи с этим определением можно переформулировать лемму 10.

Лемма 10А. *Пусть $j,\, k \in \Omega$, $j \neq \pm k$, $\alpha \in \Lambda$, $\xi \in R$. Тогда*

$$
[\epsilon^{-1}X_{j,-j}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha),\, \epsilon^{-1}X_{-j,k}(\xi)]S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\alpha\xi) = S_{-k,k}(\overline{\xi}\alpha\xi).
$$

Итак, в прообразе каждой образующей унитарной группы Стейнберга $X_{ij}(\zeta)$ мы выбрали элемент $S_{ij}(\zeta)$. Далее мы проверим, что для $S_{ij}(\zeta)$ выполняются соотношения Стейнберга R1–R6.

§5. Построение сечения: гомоморфность

В этом параграфе $(E,\, \epsilon)$ — центральное расширение унитарной группы Стейнберга $\mathrm{StU}(2n,\, R,\, \Lambda)$, $n \geqslant 5$, элементы $S_{ij}(\zeta)$ выбраны согласно определениям 11 и 12. Покажем, что для них выполняются соотношения Стейнберга R1–R6.

Прежде всего заметим, что, поскольку $S_{ij}(\zeta) \in \epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta)$, из лемм 8, 9, 10 следует, что для $S_{ij}(\zeta)$ выполняются соотношения R3, R4 и R6 соответственно. Проверим, что для них выполняются и оставшиеся три соотношения.

Сначала покажем, что справедливо соотношение R2.

Лемма 11. *Рассмотрим $i,\, j \in \Omega$, $i \neq j$, $\zeta,\, \xi \in R$. Пусть либо $i \neq -j$, либо $\zeta,\, \xi \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$. Тогда*

$$
S_{ij}(\zeta)S_{ij}(\xi) = S_{ij}(\zeta+\xi).
$$

Доказательство. Пусть сначала $i \neq -j$. Рассмотрим $l \neq \pm i,\, \pm j$ и рассмотрим $x \in \epsilon^{-1}X_{il}(1)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{lj}(\zeta)$ и $z \in \epsilon^{-1}X_{lj}(\xi)$. Тогда

$$
[x,\, y] = S_{ij}(\zeta), \quad [x,\, z] = S_{ij}(\xi), \quad [x,\, yz] = S_{ij}(\zeta+\xi).
$$

Кроме того, $[y, [z, x]] = [\epsilon^{-1}X_{lj}(\zeta), \epsilon^{-1}X_{ij}(-\xi)] = 1$. Тогда, пользуясь C4, получаем, что

$$[x, y][x, z] = [x, yz],$$

и необходимое тождество доказано.

Теперь рассмотрим $i = -j$. Пусть $k \neq \pm j$, пусть $x \in \epsilon^{-1}X_{-k,j}(1)$, $y \in \epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta)$ и $z \in \epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\xi)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}&[y, [z, x]]\\ &\quad= \Big[\epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(j))/2}\zeta), \epsilon^{-1}\Big(X_{kj}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\xi)X_{-j,j}(\xi)\Big)\Big] = 1.\end{aligned}$$

Обозначим элемент $S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta)$ через u, $S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\xi)$ через v, а $S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}(\zeta+\xi))$ через w. Как уже было показано выше, $uv = w$. Тогда из тождества C4 следует, что

$$[z, x][y, x]uv = [yz, x]w,$$

т.е.

$$\begin{aligned}&[\epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\xi), \epsilon^{-1}X_{-k,j}(1)]S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\xi)\\ &\quad\cdot[\epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta), \epsilon^{-1}X_{-k,j}(1)]S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta)\\ &\quad= [\epsilon^{-1}X_{k,-k}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}(\xi+\zeta)), \epsilon^{-1}X_{-k,j}(1)]S_{kj}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}(\xi+\zeta)),\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. □

Теперь проверим соотношение R1.

Лемма 12. *Пусть $i, j \in \Omega$, $i \neq j$, $\zeta \in R$, при этом либо $i \neq -j$, либо $\zeta \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$. Тогда*

$$S_{ij}(\zeta) = S_{-j,-i}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\zeta}).$$

Доказательство. Для $\zeta \in \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\Lambda$ утверждение леммы напрямую следует из определения форменного параметра.

Теперь пусть $i \neq -j$. Рассмотрим $l \neq \pm i, \pm j$. Поскольку соотношение R2 уже проверено, доказательство леммы завершается следующей выкладкой:

$$\begin{aligned}S_{ij}(\zeta) &= [\epsilon^{-1}X_{il}(1), \epsilon^{-1}X_{lj}(\zeta)]\\ &= [\epsilon^{-1}X_{-l,-i}(-\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(i))/2}), \epsilon^{-1}X_{-j,-l}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(l))/2}\overline{\zeta})]\\ &= [\epsilon^{-1}X_{-j,-l}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(l))/2}\overline{\zeta}), \epsilon^{-1}X_{-l,-i}(-\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(i))/2})]^{-1}\\ &= S_{-j,-i}(\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\zeta})^{-1} = S_{-j,-i}(-\lambda^{(\varepsilon(j)-\varepsilon(i))/2}\overline{\zeta}).\end{aligned}$$

□

Докажем оставшееся соотношение R5. Ввиду леммы 9 достаточно доказать более слабое утверждение.

Лемма 13. *Пусть $j,\, k \in \Omega$, $j \neq \pm k$, $\zeta \in R$. Тогда*

$$[\epsilon^{-1} X_{-k,j}(\zeta),\, \epsilon^{-1} X_{jk}(1)] = S_{-k,k}(\zeta - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{\zeta}).$$

Доказательство. Выберем индекс $l \in \Omega$, отличный от $\pm j$, $\pm k$. Обозначим $S_{jl}(-\lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(j))/2}\overline{\zeta})$ через x, $S_{l,-j}(1)$ — через y, $S_{-j,k}(1)$ — через z, $S_{jk}(\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta - \lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(j))/2}\overline{\zeta})$ — через w. Тогда

$$S_{-k,k}(\zeta - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{\zeta}) = {}^{x}S_{-k,k}(\zeta - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{\zeta}) = {}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] \cdot w.$$

Пользуясь соотношением C5, получаем, что

$${}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] \cdot w = {}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]] \cdot {}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]] \cdot w.$$

Так как с помощью C1

$${}^{y}[y^{-1} \cdot {}^{z}y,\, [x,\, z]] = {}^{yy^{-1}}[{}^{z}y,\, [x,\, z]] \cdot {}^{y}[y^{-1},\, [x, z]],$$

а согласно C6

$${}^{z}[y,\, [z^{-1},\, x]] = [{}^{z}y,\, [x,\, z]],$$

можно написать, что

$${}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] \cdot w = {}^{y}[x,\, [y^{-1},\, z]] \cdot {}^{y}[[y^{-1},\, z],\, [x,\, z]] \cdot {}^{y}[[x,\, z],\, y^{-1}] \cdot w.$$

Легко видеть, что $[y^{-1},\, z] = S_{lk}(-1)$, а $[x,\, z] = S_{-l,k}(\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(k))/2}\zeta)$, поэтому

$$[x,\, [y^{-1},\, z]] = S_{jk}(\lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(j))/2}\overline{\zeta}), \quad [[x,\, z],\, y^{-1}] = S_{jk}(-\lambda^{-(\varepsilon(j)+\varepsilon(k))/2}\zeta),$$

а

$$\begin{aligned}[[y^{-1},\, z],\, [x,\, z]] &= [\epsilon^{-1} X_{-k,-l}(\lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(l))/2}),\, \epsilon^{-1} X_{-l,k}(\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(k))/2}\zeta)] \\ &\in \epsilon^{-1} X_{-k,k}(\zeta - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{\zeta}),\end{aligned}$$

и все эти элементы коммутируют с y и между собой. Тогда, пользуясь тем, что произведение $[x,\, [y^{-1},\, z]][[x,\, z],\, y^{-1}] = w^{-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned}{}^{x}[[x^{-1},\, y],\, z] \cdot w &= [[y^{-1},\, z],\, [x,\, z]] \\ &= [\epsilon^{-1} X_{-k,-l}(\lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(l))/2}),\, \epsilon^{-1} X_{-l,k}(\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(k))/2}\zeta)].\end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 9:

$$\begin{aligned}&[\epsilon^{-1} X_{-k,-l}(\lambda^{(\varepsilon(k)-\varepsilon(l))/2}),\, \epsilon^{-1} X_{-l,k}(\lambda^{(\varepsilon(l)-\varepsilon(k))/2}\zeta)] \\ &\quad = [\epsilon^{-1} X_{-k,j}(\zeta),\, \epsilon^{-1} X_{jk}(1)].\end{aligned}$$

□

Разумеется, из леммы 13 моментально следует и более общий факт.

Лемма 13А. *Пусть j, $k \in \Omega$, $j \neq \pm k$, ζ, $\xi \in R$. Тогда*

$$[\epsilon^{-1}X_{-k,j}(\zeta),\, \epsilon^{-1}X_{jk}(\xi)] = S_{-k,k}(\zeta\xi - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{\xi}\,\overline{\zeta}).$$

Доказательство. Рассмотрим $l \neq \pm j$, $\pm k$. Пользуясь леммами 9 и 13, получаем, что

$$[\epsilon^{-1}X_{-k,j}(\zeta),\, \epsilon^{-1}X_{jk}(\xi)] = [\epsilon^{-1}X_{-k,l}(\zeta\xi),\, \epsilon^{-1}X_{lk}(1)] = S_{-k,k}(\zeta\xi - \lambda^{\varepsilon(k)}\overline{(\zeta\xi)}).$$

□

Итак, для $S_{ij}(\zeta)$ выполняются все соотношения Стейнберга R1–R6, и на этом завершается проверка центральной замкнутости $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$. В следующем параграфе мы сформулируем все полученные результаты.

§6. Основные результаты

Теперь есть все необходимые леммы для того, чтобы дать доказательства обещанным результатам. Во-первых, докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть (E, ϵ) — центральное расширение унитарной группы Стейнберга. Определим элементы $S_{ij}(\zeta) \in E$, как в определениях 11 и 12. Тогда из лемм 8–13 следует, что для $S_{ij}(\zeta)$ выполняются соотношения Стейнберга R3, R4, R6, R2, R1 и R5 соответственно. Таким образом, можно рассмотреть естественный гомоморфизм $\sigma : \mathrm{StU}(2n, R, \Lambda) \to E$, переводящий образующую $X_{ij}(\zeta)$ в элемент $S_{ij}(\zeta)$. Но поскольку $S_{ij}(\zeta) \in \epsilon^{-1}X_{ij}(\zeta)$, композиция $\epsilon\sigma = \mathrm{id}$. Таким образом, расширение (E, ϵ) расщепляется. □

Теперь доказательство теоремы 1 напрямую следует из следствия леммы 4, а также леммы 6 и теоремы 2.

В случае, когда унитарная группа Стейнберга является центральным расширением элементарной унитарной группы, из теоремы 1 легко извлечь следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть $n \geqslant 5$, (R, Λ) — форменное кольцо такое, что $(\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda), \varpi)$ будет центральным расширением элементарной унитарной группы $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$. Тогда расширение $(\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda), \varpi)$ является универсальным центральным расширением $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$.*

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 5$, (R, Λ) — форменное кольцо такое, что $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ централен:*

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda) \subseteq \mathrm{Cent}(\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)).$$

Тогда $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ совпадает с мультипликатором Шура элементарной унитарной группы $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$.

Поскольку мультипликатор Шура группы — это в точности ее вторая группа гомологий с целыми коэффициентами, следствие 2 можно переписать в следующей форме.

Следствие 3. *Пусть* $n \geqslant 5$, (R, Λ) *— форменное кольцо такое, что* $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ *централен. В таком случае* $\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ *совпадает с двумерной группой гомологий элементарной унитарной группы*:

$$\mathrm{K}_2\mathrm{U}(2n, R, \Lambda) = \mathrm{H}_2(\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda), \mathbb{Z}).$$

В настоящее время центральность K_2 известна только в линейном случае для произвольных коммутативных колец (см. работы [6, 15]). Аналогичный результат для классических четных групп (в том числе и для четной унитарной группы, обсуждаемой в данной статье) был анонсирован Энтони Баком и Гуопинг Тангом, однако на момент публикации настоящей работы детальные доказательства не появились.

Заключение

В данной работе доказана центральная замкнутость баковских гиперболических унитарных групп $\mathrm{StU}(2n, R, \Lambda)$. Автор планирует перенести этот результат на нечетные группы, определенные Виктором Петровым, которые в настоящее время являются наиболее широким и естественным обобщением рассмотренных выше четных групп. Интересующийся читатель может прочесть о нечетных группах в работах [3, 4].

Автор хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю Николаю Вавилову за помощь в работе над настоящей статьей, а также Энтони Баку за чрезвычайно полезные обсуждения, в ходе которых автору удалось глубже понять имеющиеся результаты и методы унитарной K-теории.

Список литературы

[1] Дыбкова Е. В., *Подгруппы гиперболических унитарных групп*, Докт. дис., С.-Петербург. гос. ун-т, СПб., 2006.

[2] Милнор Дж., *Введение в алгебраическую K-теорию*, Мир, М., 1974.

[3] Петров В. А., *Нечетные унитарные группы*, Зап. науч. семин. ПОМИ **305** (2003), 195–225.

[4] Петров В. А., *Надгруппы классических групп*, Канд. дис., С.-Петербург. гос. ун-т, СПб., 2005.

[5] Стейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.

[6] Туленбаев М. С., *Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **86** (1979), 162–169.

[7] Bak A., *The stable structure of quadratic modules*, Thesis Columbia Univ., 1969.
[8] Bak A., *On modules with quadratic forms*, Algebraic K-Theory and Its Geometric Applications (Hull, 1969), Springer-Verlag, Berlin, 1969, pp. 55–66.
[9] Bak A., *K-theory of forms*, Ann. of Math. Stud., vol. 98, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
[10] Bak A., Vavilov N., *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups*, Algebra Colloq. **7** (2000), no. 2, 159–196.
[11] Hahn A., O'Meara O., *The classical groups and K-theory*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 291, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[12] Hazrat R., *Dimension theory and nonstable* K_1 *of quadratic modules*, K-Theory **27** (2002), 293–328.
[13] Hazrat R., Vavilov N., *Bak's work on K-theory of rings*, with an appendix by Max Karoubi, J. K-Theory **4** (2009), 1–65.
[14] Hazrat R., Vavilov N., Zhang Zuhong, *Relative unitary commutator calculus, and applications*, J. Algebra **343** (2011), 107–137.
[15] van der Kallen W., *Another presentation for Steinberg groups*, Indag. Math. **39** (1977), 304–312.
[16] Stein M., *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.
[17] Stepanov A., Vavilov N., *Decomposition of transvections*: *a theme with variations*, K-Theory **19** (2000), 109–153.
[18] Tang Guoping, *Hermitian groups and* K*-theory*, K-Theory **13** (1998), 209–267.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия
E-mail: avlavrenov@gmail.com

Поступило 22 мая 2012 г.