О резольвенте и спектре возмущённого периодического дифференциального оператора

Головина Анастасия Михайловна

Аннотация

Рассматривается многомерный матричный эллиптический оператор общего вида с конечным числом разбегающихся возмущений. Возмущениями являются произвольные локализованные операторы, локализованность которых описывается с помощью определённым образом введённых весовых функций. Исследуется поведение резольвенты и собственных значений возмущённого оператора, когда расстояние между областями, где локализованы возмущения, стремится к бесконечности. Для резольвенты возмущённого оператора выведена явная формула, на основе которой доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному и выписано полное асимптотическое разложение. Доказано существование изолированных собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к предельным изолированным собственным значениям. Построены полные асимптотические ряды для данных собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора. Доказана равномерная сходимость построенных рядов и выведены явные формулы для их коэффициентов.

Введение

Классическим примером оператора с разбегающимися возмущениями является дифференциальный оператор второго порядка с двойной потенциальной ямой

$$\mathcal{H}_\ell = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathrm{V}(\cdot + \ell) + \mathrm{W}(\cdot - \ell) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}), \tag{0.1}$$

где V, W – вещественные финитные измеримые потенциалы, ℓ – большой положительный параметр. При $\ell \to \infty$ носители потенциалов оператора $\mathcal{H}_\ell$ находятся на большом расстоянии друг от друга (см. рис.1). Именно этим объясняется термин “разбегающиеся возмущения”.

Операторы с разбегающимися возмущениями рассматривались разными авторами (см., например, [19], [20], [22] – [25], [27], [28], [32], [33] – [36], [38] – [50]). Основное внимание уделялось изучению асимптотического поведения резольвенты, а также собственных значений и собственных функций как в случае простого, так

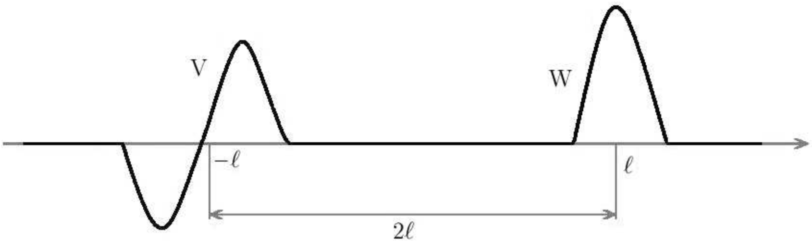

Рис. 1: Пример разбегающихся возмущений

и в случае кратного предельного собственного значения. При этом достаточно большое количество работ посвящено изучению собственных значений и собственных функций оператора Лапласа, возмущённого потенциалами в случае простого предельного собственного значения (см., например, [19], [20], [27], [35], [39], [41], [45], [48]). Исследования асимптотического поведения собственных значений и собственных функций оператора Лапласа с несколькими разбегающимися потенциалами в случае кратного предельного собственного значения проводились в работах [32], [33], [38]. Резольвента оператора Лапласа с несколькими разбегающими потенциалами исследовалась в работе [22], книге [28, Гл. 8, §8.6] и статье [43]. Имеется также ряд работ, в которых возмущения задавались иным образом, то есть, не в виде потенциалов (см., например, [23] – [25], [42]). Остановимся подробнее на каждой из цитированных выше работ.

В [22] исследовалось поведение резольвенты оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя разбегающимися потенциалами. Потенциалы удовлетворяли двум условиям, первое из которых обеспечивало относительную компактность, а второе описывало аналитические свойства потенциалов. Была доказана сходимость резольвенты возмущённого оператора к резольвенте невозмущённого оператора в смысле сильной резольвентной сходимости. Также было приведено разложение резольвенты возмущённого оператора в ряд Неймана, сходящийся в смысле сильной резольвентной сходимости. В книге [28, Гл. 8, §8.6] изучались асимптотические свойства оператора Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возмущениями здесь являлись два вещественных убывающих на бесконечности потенциала. Доказана сходимость резольвенты унитарного преобразования некоторого матричного оператора, который строился на основе исходного оператора с разбегающимися возмущениями. При этом унитарное преобразование вводилось специальным образом и само зависело от расстояния между разбегающимися потенциалами. В [43] рассматривался оператор $\mathcal{H}_\ell = -\Delta + \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2(\cdot - \ell)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, где V_1, V_2 – вещественнозначные функции из класса Ролльника (Rollnik class). Класс Ролльника вводился как множество функций $V = V(x)$, для которых

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dxdy < \infty.$$

Исследовалось поведение резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_\ell$ при $|\ell| \to +\infty$. Была доказана равномерная сходимость к нулю в норме Гильберта-Шмидта оператора

$$(\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_1 - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_2 - \lambda)^{-1} + (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}, \tag{0.2}$$

где $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, $\mathcal{H}_1 = -\Delta + \mathrm{V}_1$, $\mathcal{H}_2 = -\Delta + \mathrm{V}_2$, а число λ не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$. Другими словами, возмущённый оператор $\mathcal{H}_\ell$ в пределе "расщеплялся" на три предельных оператора.

В статьях [19], [20], [27], [35], [39], [41], [45], [48], исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций оператора Шрёдингера в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ с несколькими разбегающимися возмущениями. Рассматривался случай, когда возмущённое собственное значение сходится к простому предельному собственному значению. Возмущениями в [20], [27], [35], [41], [48] являлись потенциалы, удовлетворяющие различным условиям, обеспечивающим гладкость и убывание на бесконечности. Были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае простого предельного собственного значения. В работах [19], [45] в качестве возмущений рассматривались кулоновские потенциалы. Были построены полные асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае простого предельного собственного значения. Отметим, что формулы для коэффициентов этих рядов выведены не были. В [39] разбегающимися возмущениями являлись финитные потенциалы, рассматриваемые в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 1$ или $d = 3$. В случае простого предельного собственного значения были получены представления для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора в виде равномерно сходящихся рядов и выведены оценки на их коэффициенты. Данные ряды одновременно являлись асимптотическими. Формулы для коэффициентов этих рядов также выведены не были.

В статьях [32], [33], [38] рассматривался оператор Лапласа с несколькими разбегающимися потенциалами. Изучалось поведение собственных значений данного оператора, когда предельное собственное значения являлось простым собственным значением первого предельного оператора (оператор Лапласа с первым потенциалом) и простым собственным значением второго предельного оператора (оператор Лапласа со вторым потенциалом). Возмущениями в [33], [38] были два убывающие на бесконечности потенциала, а в [32] возмущениями являлись три кулоновские потенциала. В работах [33], [38] были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций в случае двукратного предельного собственного значения. В [33] также было показано, что первые поправки собственных значений возмущённого оператора симметричны относительно нуля, то есть, равны по модулю, но противоположны по знаку. В статье [32] были построены представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций в виде равномерно сходящихся рядов. Выведены оценки на их коэффициенты. Однако формулы для коэффициентов этих рядов не были получены.

В работах [36], [40], [44], [46], [49], [50], изучалось поведение собственных значений, возникающих из края существенного спектра предельного оператора. Исследованы различные случаи существования таких собственных значений. Получено описание первых членов асимптотических разложений данных собственных значений. В статьях [34], [47] изучалось поведение собственных значений оператора Дирака в трёхмерном пространстве в случае простого предельного собственного значения. В [34] возмущениями были убывающие на бесконечности потенциалы, а в [47] возмущениями являлись кулоновские потенциалы. Построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора в случае простого предельного собственного значения. В [42] изучались свойства спектральных лакун оператора Лапласа, возмущённого дельта-потенциалом. Были получены нижние оценки для первой спектральной лакуны оператора Лапласа. Данные оценки применимы и к разбегающемуся дельта-потенциалу. В работе [25] исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций оператора Лапласа с несколькими разбегающимися возмущениями в случае простого предельного собственного значения. В качестве возмущений рассматривалась смена типа граничных условий. Участки границы, на которых менялся тип граничных условий, находились на большом расстоянии друг от друга. Были доказаны теоремы сходимости и построены первые члены асимптотических рядов для собственных значений и собственных функций в случае простого предельного собственного значения.

В [23], [24] исследовалось асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора Лапласа с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном пространстве и бесконечном цилиндре. Возмущающими операторами здесь были произвольные абстрактные локализованные операторы. Локализованность данных возмущений заключалась в том, что каждый из них был определён на некоторой ограниченной области. Была доказана сходимость собственных значений и собственных функций возмущённого оператора к соответствующим им собственным значениям и собственным функциям предельного оператора при произвольной кратности предельного собственного значения. Были получены первые члены асимптотических разложений собственных значений и соответствующих им собственных функций.

Достаточно близкими к задачам с разбегающимися возмущениями являются задачи об операторах с малым параметром перед старшей производной и заданным фиксированным потенциалом. Подобного рода операторы давно являются объектом многочисленных исследований различных авторов. Например, в работах [9], [10], [29] рассматривался оператор Лапласа с малым параметром перед старшей производной и несколькими потенциалами. Исследовалось поведение собственных значений возмущённого оператора как в случае простого, так и в случае двукратного предельного собственного значения. Были получены экспоненциальные оценки для первых спектральных лакун. Операторы с малым параметром перед старшей производной и несколькими потенциалами с помощью замены переменной можно свести к описанным выше операторам с разбегающимися потенциалами. Однако, носители последних будут расширяться одновременно с разбеганием. В нашем случае разбегающиеся возмущения предполагаются фиксированными и именно в этом заключается отличие операторов с разбегающимися возмущениями от операторов с малым параметром перед старшей производной.

В настоящей работе рассматривается эллиптический оператор с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном пространстве. Невозмущённый оператор – это многомерный матричный периодический дифференциальный оператор произвольного чётного порядка достаточно общего вида. Возмущениями являются произвольные абстрактные операторы, основным свойством которых является локализованность. Локализация возмущений описывается весовыми функциями, входящими в определение возмущающих операторов. На весовые функции накладывается определённый набор требований, которые фактически обеспечивают гладкость весовых функций и их убывание на бесконечности вместе с фиксированным набором производных. Если возмущающими операторами являются потенциалы, то наше условие локализованности превращается в условие убывания этих потенциалов. При этом практически отсутствуют ограничения на скорость убывания. Возмущения всех предыдущих работ (за исключением работы [25]) являются частным случаем возмущений, описанных в настоящей работе. Даже абстрактные возмущения, описанные в [23], [24], получаются из наших, если весовые функции выбрать финитными. Фактически, рассмотренные в настоящей работе возмущения являются обобщением всех вышеупомянутых. Отметим, что возмущения, аналогичные нашим, были рассмотрены в [2], но для другого типа задач. В качестве возмущающих операторов можно выбрать дифференциальный оператор высокого порядка, не превосходящего порядок невозмущённого оператора, интегральный оператор, конечномерный оператор, псевдодифференциальный оператор. В работе [23, п.8, пример 5] описано преобразование, с помощью которого дельта–потенциал можно свести к дифференциальному оператору второго порядка. Если воспользоваться этим преобразованием, то в качестве возмущающего оператора можно взять и дельта-потенциал.

В настоящей работе исследуются резольвента и спектр возмущённого оператора при стремлении к бесконечности расстояний между областями, в которых локализованы возмущения. В третьем параграфе выводится явное представление для резольвенты возмущённого оператора, на основе которого доказывается равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному. Приводится разложение резольвенты возмущённого оператора в полный асимптотический ряд, сходящийся в равномерной операторной норме. Данный результат получен без различного рода ограничений, накладываемых на невозмущённый оператор. А именно, невозмущённый оператор не обязательно является симметричным и, следовательно, самосопряжённым. Более того, он не предполагается даже секториальным. Единственное условие, которое накладывается на невозмущённый оператор в данном случае – замкнутость (см. лемму 3.2). Для получения данного представления разработана новая достаточно простая оригинальная схема (см. доказательство теоремы 0.1). Её суть заключается в том, что с помощью определённых алгебраических преобразований задача о нахождении резольвенты возмущённого оператора сводится к обращению почти единичного оператора.

В предположении, что невозмущённый и возмущённый операторы самосопряжены, а возмущающие операторы симметричны, в третьем параграфе доказывается устойчивость существенного спектра возмущённого оператора относительно возмущений и сходимость собственных значений возмущённого оператора к собственным значениям предельного оператора в случае произвольной кратности предельного собственного значения. Существование и сходимость собственного значения возмущённого оператора доказывается на основе результатов о равномерной резольвентной сходимости.

В четвёртом и пятом параграфах при аналогичных предположениях о самосопряжённости и симметричности, строятся представления в виде равномерно сходящихся рядов для собственных значений возмущённого оператора, когда предельное собственное значение является простым или двукратным. Выводятся явные формулы и степенные оценки для их членов. Для построения этих рядов также разработана новая довольно простая методика (см. доказательства теорем 0.5, 0.6, 0.7). Суть её состоит в том, что уравнение на собственные значения возмущённого оператора сводится к некоторому регулярно возмущённому уравнению в специальном гильбертовом пространстве. При этом малость возмущения удаётся описать двумя характерными малыми параметрами. Применение затем адаптированной версии метода Бирмана-Швингера, описанной в работах [5], [3], позволяет свести задачу к анализу операторного уравнения и поиску нулей некоторой голоморфной функции. Анализ данной функции позволяет получить представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора в виде равномерно сходящихся рядов. Для поиска членов построенных рядов предложен достаточно простой и изящный метод (см. пятый параграф настоящей работы, пункт 5.2). Методика, с помощью которой строятся ряды для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора применима и в общем случае, то есть, при произвольной кратности предельного собственного значения. Вместе с тем, в общем случае процесс построения рядов для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора является довольно громоздким. Это объясняется тем, что возникают многочисленные частные случаи, связанные с возможными расщеплениями возмущённых собственных значений. Поэтому случай предельного собственного значения произвольной кратности мы не рассматриваем. Лишь в пятом параграфе показано, что для двух различных разбегающихся возмущений в случае произвольной кратности предельного собственного значения первые поправки возмущённых собственных значений симметричны относительно нуля.

В первом параграфе настоящей работы приводятся примеры невозмущённых, возмущающих операторов и весовых функций, для которых справедливы все полученные результаты. Невозмущёнными и возмущающими операторами могут быть практически все основные операторы математической физики, например, дифференциальный оператор второго порядка, матричный и магнитный операторы Шрёдингера, оператор теории упругости, оператор Паули, интегральный оператор, δ – потенциал, псевдодифференциальный оператор, бигармонический оператор и другие. Класс весовых функций также достаточно широк, так как требованием, которому они должны удовлетворять – это убывание на бесконечности вместе с конечным набором их производных, причём без каких-либо условий на скорость убывания. Именно поэтому весовыми функциями могут быть финитные функции, экспоненциально убывающие функции, степенные функции, а также логарифмически убывающие функции. Во втором параграфе в качестве демонстрации все основные результаты сформулированы для классического примера оператора с разбегающимися возмущениями (0.1).

Опишем постановку задачи и основные результаты.

Пусть $x = (x_1, ..., x_d)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, Γ – произвольная периодическая решётка в $\mathbb{R}^d$ размерности d. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{H}_0 := (-1)^m \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=|\gamma|=m}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \mathrm{a}_{\beta\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2m-1}} \mathrm{b}_\beta \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$$

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{a}_{\beta\gamma} \in C^m(\mathbb{R}^d)$,

$\mathrm{b}_\beta \in C^{2m-1}(\mathbb{R}^d)$ – матричнозначные, зависящие от x функции, периодические относительно решетки Γ. Здесь и далее в работе под пространствами $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ будем понимать соболевские пространства вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^n$. Будем предполагать, что оператор $\mathcal{H}_0$ эллиптичен:

$$\nu|\theta|^{2m} \leqslant \Big| \det \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|=|\gamma|=m}} \mathrm{a}_{\beta\gamma}(x)\theta^{\beta+\gamma}\Big|, \tag{0.3}$$

где $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d) \in \mathbb{R}^d$, ν – некоторая положительная константа, не зависящая от x и θ. Данное условие эквивалентно условию сильной эллиптичности (1.7) в статье [18]. Отметим, что это условие не обеспечивает полуограниченности снизу оператора $\mathcal{H}_0$.

Пусть $a = a(r)$ – функция из $C^{2m-1}[0,+\infty)$, обращающаяся в нуль в некоторой окрестности нуля. Будем предполагать, что все производные функции $a(r)$ до порядка $(2m-1)$ равномерно ограничены и выполнено равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} a(t)dt = +\infty. \tag{0.4}$$

Будем говорить, что функция $\varsigma = \varsigma(r)$ удовлетворяет условию (A1), если

(A1). Функция $\varsigma \in C^{2m}(\mathbb{R}_+)$ неотрицательна, в некоторой окрестности нуля равна единице и выполнена оценка

$$\varsigma(r) \leqslant Ce^{-\int\limits_0^r a(t)dt}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где C – некоторая константа.

Из (0.4) и условия (A1) следует, что

$$\varsigma(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty. \tag{0.5}$$

Будем говорить, что функция $\eta = \eta(r)$ удовлетворяет условию (A2), если

(A2). Функция $\eta \in C^{2m}(\mathbb{R}_+)$ неотрицательна, в некоторой окрестности нуля равна единице и стремится к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными вплоть до порядка $2m$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ семейство произвольных операторов $\mathcal{L}_i^0$, $i=1,...,k$, с областями определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Предполагается, что данные операторы ограничены как операторы из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, но вообще говоря, неограничены как операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i=1,...,k$, операторы в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, действующие по правилу

$$(\mathcal{L}_i u)(x) := \varsigma_i(|x|)(\mathcal{L}_i^0 \eta_i(|\cdot|)u)(x)$$

с областями определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь функции ς_i удовлетворяют условию (A1), а функции η_i – условию (A2), $i=1,\ldots,k$.

В работе рассматриваются разбегающиеся возмущения вида

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i).$$

Здесь $X_i \in \Gamma$ – дискретные параметры, $\mathcal{S}(\cdot)$ – оператор сдвига, действующий следующим образом:

$$(\mathcal{S}(Y)u)(x) := u(x+Y), \quad Y \in \Gamma.$$

Обозначим через X вектор вида $X=(X_1,\ldots,X_k)$ и положим $\tau(X) := \min\limits_{i\neq j}|X_i - X_j|$. Будем предполагать, что $\tau(X) \to +\infty$. Ясно, что любые две различные точки X_i переводятся друг в друга с помощью конечного числа сдвигов вдоль решётки Γ. Если $\mathcal{L}_i = \mathrm{V}_i$ – вещественные ограниченные финитные измеримые потенциалы, то в этом случае разбегающиеся возмущения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}_i(\cdot - X_i).$$

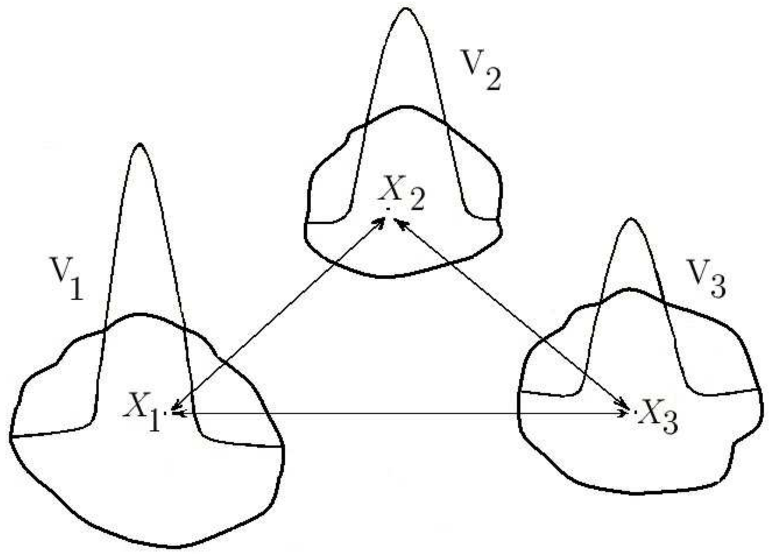

Рис. 2: Финитные разбегающиеся потенциалы

Схематически поведение такой суммы потенциалов показано на рис. 2. При $\tau(X) \to +\infty$ области, в которых локализовано каждое из возмущений, находятся на большом расстоянии друг от друга, то есть “разбегаются”.

Основными объектами изучения в работе являются резольвента и спектр возмущённого оператора, который вводится равенством

$$\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$$

и понимается как оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Основной целью является изучение поведения резольвенты и спектра такого оператора при $\tau(X) \to +\infty$.

Для формулировки основных результатов работы нам понадобятся дополнительные обозначения. Пусть $\sigma(\cdot)$ – спектр оператора, I – тождественный оператор, $\| \bullet \|_{\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_2}$ – норма линейного оператора, действующего из гильбертово пространства Y_1 в гильбертово пространство Y_2, $\mathcal{D}(\cdot)$ – область определения оператора. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ семейство операторов $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, k$, с областями определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Сформулируем первый результат второго параграфа настоящей работы.

Теорема 0.1. *Пусть множество* $K := \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$ *непусто. Тогда для достаточно больших* $\tau(X)$ *оператор* $\mathcal{H}_X$ *замкнут. Для любого* $\lambda \in K$ *и достаточно больших* $\tau(X)$ *верно представление*

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} :=& \Big[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) \\ & - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \Big] (\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1},\end{aligned} \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X :=& \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) \Big[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j) \\ & - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \Big],\end{aligned} \tag{0.7}$$

где $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0$ *при* $\tau(X) \to +\infty$.

Предположение о непустоте множества $K := \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$ в формулировке основного результата является достаточно естественным и весьма слабым. Это предположение справедливо для довольно широкого класса операторов. Например, множество K непусто, если невозмущённый оператор $\mathcal{H}_0$ и операторы $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, являются самосопряжёнными. Для самосопряжённости невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ достаточно, например, чтобы матрицы $\mathrm{a}_{\beta\gamma}$, b_β были бесконечно дифференцируемы и эрмитовы и матрицы b_β были все равны нулю кроме b_0. Дальнейшие примеры невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ приводятся в следующем разделе (магнитный и матричный оператор Шрёдингера, оператор теории упругости, оператор Паули и другие). Если же операторы $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, k$, симметричны и нормы данных операторов как операторов из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ достаточно малы, то по теореме Като-Реллиха (см., например, [15, Гл. 10, §X.2]) операторы $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, также будут самосопряжены.

Для формулировки дальнейших достаточных условий непустоты множества K напомним некоторые понятия из [11, Гл. V, §3, п.10]. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства Y_1 в пространство Y_2, будем называть квази-m–аккретивным, если найдётся некоторое число $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ такое, что для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ оператор $(\mathcal{A} + \widetilde{\lambda} - \lambda)^{-1}$ существует, ограничен и выполнена оценка $\left\|(\mathcal{A} + \widetilde{\lambda} - \lambda)^{-1}\right\|_{\mathrm{Y}_2 \to \mathrm{Y}_1} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$. Оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства Y_1 в пространство Y_2, является секториальным, если числовая область его значений $\{(\mathcal{A}u, u)_{\mathrm{Y}_2} : u \in \mathcal{D}(A)\}$ является подмножеством некоторого сектора $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \mu)| \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\}$, где θ – полуугол секториального оператора, а μ – вершина. Оператор $\mathcal{A}$ называется m–секториальным, если он секториален и квази–m–аккретивен.

Форма $\mathfrak{t}$ называется секториальной, если числовая область её значений $\mathfrak{t}(u)$, $u \in \mathcal{D}(t)$ является подмножеством некоторого сектора $|\arg(\lambda - \mu)| \leqslant \theta$, где $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ – полуугол секториальной формы, а μ – вершина.

Множество K заведомо непусто, если предположить, что операторы $\mathcal{H}_i$ либо операторы $-\mathcal{H}_i$, $i = 0, \ldots, k$, m-секториальны. Если, например, матрицы $\mathrm{a}_{\beta\gamma}$, b_β – бесконечно дифференцируемы и форма, соответствующая невозмущённому оператору $\mathcal{H}_0$, является секториальной, то оператор $\mathcal{H}_0$ будет m-секториальным. Выписать явные условия на возмущающие операторы $\mathcal{L}_i$ для случая m-секториальности операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, достаточно сложно, так как теорема, аналогичная теореме Като-Реллиха (см., например, [15, Гл. 10, §X.2]), нам не известна. Наиболее близким и известным нам результатом является теорема 3.4 из [11, Гл.6, §3, п.2] для секториальных форм, воспользовавшись которой можно показать, что формам, построенным по операторам $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots k$, соответствуют некоторые m-секториальные операторы. При таком подходе, основной трудностью является доказательство того, что полученные m-секториальные операторы совпадают с операторами $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots k$.

Обсудим теперь результат теоремы 0.1. Оператор $(\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1}$ можно представить в виде ряда Неймана

$$(\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \mathcal{P}_X^s,$$

так как $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0$ при $\tau(X) \to +\infty$. Следовательно, резольвента оператора $(\mathcal{H}_X - \lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} = &\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \Big[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1} \mathcal{S}(X_i) \\ &- (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \Big] \mathcal{P}_X^s,\end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{P}_X$ определён равенством (0.7). Данный ряд, являясь асимптотическим для резольвенты оператора $\mathcal{H}_X$, сходится в равномерной резольвентной норме $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$.

Для того, чтобы воспользоваться представлением (0.6), достаточно знать всего лишь оператор $\mathcal{P}_X$, так как остальные выражения в (0.6) достаточно явные. В свою очередь, согласно (0.7), оператор $\mathcal{P}_X$ вводится в терминах возмущающих операторов $\mathcal{L}_i$ и резольвент операторов $\mathcal{H}_j$ и фактически описывает взаимодействие этих операторов. Кроме того, если одно из возмущений $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, k$, равно нулю, то часть слагаемых в приведённой выше формуле для резольвенты возмущённого оператора и в формуле (0.7) обращаются в нуль, а сами формулы остаются верными. Если все возмущения, кроме, например, $\mathcal{L}_1$, равны нулю, то оператор $\mathcal{P}_X$ равен нулю, операторы $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \dots k$, равны оператору $\mathcal{H}_0$, а формула для резольвенты возмущённого оператора имеет вид

$$\Big(\mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(-X_1)\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1) - \lambda\Big)^{-1} = \mathcal{S}(-X_1)\Big(\mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_1 - \lambda\Big)^{-1}\mathcal{S}(X_1)$$

и фактически показывает унитарную эквивалентность операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_X$. В данном случае формула (0.6) перестаёт быть информативной и все утверждения о сходимости или асимптотическом поведении резольвенты теряют смысл.

Следующий результат второго параграфа описывает положение существенного спектра возмущённого оператора. Мы придерживаемся стандартного определения существенного спектра самосопряжённого оператора (см. [1, Гл. IX, §1]), как объединение непрерывного спектра и множества собственных значений бесконечной кратности.

Теорема 0.2. *Пусть операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathcal{H}_X$, самосопряжены. Тогда существенные спектры операторов $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$ совпадают с существенным спектром оператора $\mathcal{H}_0$.*

Последняя теорема означает устойчивость существенного спектра относительно возмущений, то есть, при добавлении к невозмущённому оператору $\mathcal{H}_0$ конечного числа разбегающихся возмущений его существенный спектр остаётся неизменным.

В следующей теореме описывается сходимость спектра возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ в случае самосопряжённых операторов $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Теорема 0.3. *Пусть операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathcal{H}_X$, самосопряжены и $\sigma_0 := \bigcup\limits_{i=0}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$. Тогда спектр возмущённого оператора $\sigma(\mathcal{H}_X)$ сходится к предельному спектру σ_0. А именно, для любого компакта Π и любого $\gamma > 0$ найдётся константа $K(\Pi, \gamma)$ такая, что $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_0 \bigcap \Pi) < \gamma$ для всех $\lambda \in \big(\sigma(\mathcal{H}_X) \bigcap \Pi\big)$ при $\tau(X) > K(\Pi, \gamma)$.*

Наш следующий результат касается сходимости собственных значений возмущённого оператора.

Теорема 0.4. *Пусть операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathcal{H}_X$, самосопряжены, а λ_0 – изолированное собственное значение конечной кратности p_i каждого из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, причём*

λ_0 не попадает в спектр оператора $\mathcal{H}_0$. Тогда существует ровно $p = p_1 + \ldots + p_k$ (с учётом кратности) изолированных собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p$, возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, сходящихся к λ_0 при $\tau(X) \to +\infty$.

Замечание 0.1. Если λ_0 не является собственным значением какого-то оператора $\mathcal{H}_i$, то в теореме 0.4 соответствующее p_i полагаем равным нулю.

Другими словами, в последней теореме говорится о том, что число собственных значений λ_X возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ может быть различным (впрочем как и кратность каждого из них), но это число (и их кратность) не превышает кратности предельного собственного значения λ_0. Например, если λ_0 – простое изолированное собственное значение одного из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, то собственное значение λ_X возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ также является простым. Если λ_0 – двукратное собственное значение одного из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 2, \ldots, k$, то у возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ может быть либо два простых собственных значения, либо одно собственное значение, но кратности два. Такая же ситуация наблюдается и в том случае, когда λ_0 является простым изолированным собственным значением любых двух операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, например, операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 3, \ldots, k$, и т.д.

Как уже было сказано выше, одним из главных результатов настоящей работы являются представления для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора в виде равномерно сходящихся рядов в случае простого предельного собственного значения и в двух наиболее типичных частных случаях кратности предельного собственного значения λ_0. Рассмотрим сначала случай простого предельного собственного значения. Пусть λ_0 – простое и изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 2,\ldots,k$, а ψ_0 – нормированная в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0. Через U будем обозначать малую фиксированную окрестность точки λ_0, замыкание которой не содержит никаких других точек спектров операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1,\ldots,k$, кроме самой точки λ_0. Символом $\mathcal{R}_1(\lambda)$ будем обозначать приведённую резольвенту оператора $\mathcal{H}_1$ в окрестности $\overline{U}$ и $\mathcal{R}_i(\lambda) = (\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}$, где $i \geqslant 2$, а $\lambda \in \overline{U}$. Под приведённой резольвентой $\mathcal{R}_1(\lambda)$ понимается (ср. [11, Гл. I, §5, п. 3]) голоморфная часть ряда Лорана оператора $(\mathcal{H}_1 - \lambda)^{-1}$ в точке λ_0. Положим

$$\begin{aligned}\varepsilon(X) = \max\Big\{ &\max_{j=1,\ldots,k} \big\|\mathcal{L}_j^0 \eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j - X_1)\psi_0\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)}, \\ &\max_{\lambda\in\overline{U}} \max_{\substack{i,j=1,\ldots,k\\ i\neq j}} \Big\|\mathcal{L}_i^0 \eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i - X_j) \\ &\mathcal{R}_j(\lambda)\varsigma_j(|\cdot|)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)}\Big\}.\end{aligned} \tag{0.8}$$

Сформулируем теорему о поведении собственных значений возмущённого оператора в случае простого предельного собственного значения.

Теорема 0.5. *Пусть операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $i = 1,\ldots,k$, $\mathcal{H}_X$, самосопряжены. Тогда при достаточно больших $\tau(X)$ в окрестности $\overline{U}$ существует единственное собственное значение λ_X оператора $\mathcal{H}_X$, которое сходится к λ_0 при $\tau(X) \to +\infty$. Собственное значение λ_X простое и изолированное и представимо в виде сходящегося для достаточно больших $\tau(X)$ ряда*

$$\lambda_X = \lambda_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \Lambda_j(X), \tag{0.9}$$

Соответствующую собственную функцию ψ_X можно выбрать так, что она будет представляться в виде сходящегося в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ для достаточно больших $\tau(X)$ ряда

$$\psi_X(x) = \psi_0(x - X_1) + \sum_{q=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_{q,j}(x - X_q, X). \tag{0.10}$$

Ряды (0.9), (0.10) сходятся равномерно по X для достаточно больших $\tau(X)$. Члены данных рядов определяются равенствами

$$\Lambda_j = \sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_q)\phi_{q,j-1}, \psi_0\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{0.11}$$

$$\begin{aligned}\phi_{q,j} =& \mathcal{R}_q(\lambda_0)\Big(\sum_{t=2}^{j}\Lambda_t\phi_{q,j-t} \\ &- \sum_{\substack{t=1\\ t\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q - X_t)\phi_{t,j-1}\Big), \quad q = 1,\ldots,k,\end{aligned} \tag{0.12}$$

$$\phi_{1,0} := \psi_0, \quad \phi_{q,0} := 0, \quad q = 2,\ldots,k. \tag{0.13}$$

Верны оценки

$$\big|\Lambda_j(X)\big| \leqslant C^j\varepsilon^j(X), \quad \|\phi_{q,j}\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C^j\varepsilon^j(X), \tag{0.14}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от q, j, X. Выполнено

$$\varepsilon(X) \to 0 \quad \textit{при} \quad \tau(X) \to +\infty. \tag{0.15}$$

В качестве двух наиболее типичных случаев кратности предельного собственного значения выберем следующие. В первом случае λ_0 – простое изолированное собственное значение операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 3,\ldots,k$, а $\psi_{0,j}$, $j = 1, 2$ – соответствующие нормированные в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ собственные функции операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. В этом случае будем говорить, что собственное значение λ_0 имеет кратность

$1+1$. Во втором случае λ_0 – двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, не принадлежащее спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_i$, $i=2,\ldots,k$, а $\psi_{0,j}$, $j=1,2$ – соответствующие нормированные в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ собственные функции. В этом случае будем говорить, что λ_0 имеет кратность $2+0$.

Как и в случае простого предельного собственного значения, символом U обозначаем малую фиксированную окрестность точки λ_0, замыкание которой не содержит никаких других точек спектра операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, кроме λ_0. Символом $\mathcal{R}_q(\lambda)$ будем обозначать приведённые резольвенты операторов $\mathcal{H}_q$ в окрестности $\overline{U}$, где $q\geqslant 3$ в случае кратности $1+1$ и $q\geqslant 2$ в случае кратности $2+0$. Положим $\mathcal{R}_q(\lambda)=(\mathcal{H}_q-\lambda)^{-1}$, где $q\geqslant 3$, $\lambda\in\overline{U}$, и

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(X) = \max\Bigg\{ & \max_{j=1,2}\max_{\substack{q=1,\ldots,k\\ q\neq j}} \left\|\mathcal{L}_q^0\eta_q(|\cdot|)\mathcal{S}(X_q-X_j)\psi_{0,j}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \\
& \max_{\lambda\in\overline{U}}\max_{\substack{i,q=1,\ldots,k\\ i\neq q}} \Big\|\mathcal{L}_i^0\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i-X_q) \\
& \mathcal{R}_q(\lambda)\varsigma_q(|\cdot|)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{0.16}
$$

Напомним, что под приведёнными резольвентами $\mathcal{R}_q(\lambda)$, где $q=1,2$ мы понимаем голоморфные части ряда Лорана каждого из операторов $(\mathcal{H}_q-\lambda)^{-1}$ в точке λ_0.

Теорема 0.6. *Пусть операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_X$, $i=1,\ldots,k$, самосопряжены, а λ_0 – собственное значение кратности $1+1$ и выполнено неравенство*

$$
\left|\left(\mathcal{L}_2\mathcal{S}(X_2-X_1)\psi_{0,1},\psi_{0,2}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\right|\geqslant C\varepsilon(X),\quad C>0, \tag{0.17}
$$

где C – некоторая константа, не зависящая от X. Тогда при достаточно больших $\tau(X)$ в окрестности $\overline{U}$ существует ровно два (с учётом кратности) собственных значения $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,2$, возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, которые сходятся к собственному *значению λ_0 при $\tau(X)\to+\infty$. Данные собственные значения $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,2$ представимы в виде сходящихся при достаточно больших $\tau(X)$ рядов*

$$\lambda_X^{(j)}=\lambda_0+\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_i^{(j)}(X). \tag{0.18}$$

Соответствующие собственные функции $\psi_X^{(j)}$, $j=1,2$, можно выбрать так, что они будут представляться в виде сходящихся в $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ для достаточно больших $\tau(X)$ рядов

$$\begin{aligned}\psi_X^{(j)}(x)=&r_{0,1}^{(j)}(X)\psi_{0,1}(x-X_1)+r_{0,2}^{(j)}(X)\psi_{0,2}(x-X_2)\\&+\sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{q,i}^{(j)}\big(x-X_q,X\big).\end{aligned} \tag{0.19}$$

Ряды (0.18), (0.19) сходятся равномерно по X для достаточно больших $\tau(X)$. Члены данных рядов определяются равенствами

$$\begin{aligned}&\Lambda_1^{(2)}(X)=-\Lambda_1^{(1)}(X),\\&\Lambda_1^{(1)}(X)=\Big|\Big(\mathcal{L}_2\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1},\psi_{0,2}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big|,\end{aligned} \tag{0.20}$$

$$\phi_{q,i}^{(j)}=\widehat{\phi}_{q,i}^{(j)}+r_{i,q}^{(j)}\psi_{0,q},\quad q=1,2,\quad i\geqslant1, \tag{0.21}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_{q,1}^{(j)}=&\mathcal{R}_q(\lambda_0)\Big(r_{0,q}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}\psi_{0,q}\\&-r_{0,3-q}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_{3-q}\big)\psi_{0,3-q}\Big),\ q=1,2,\end{aligned} \tag{0.22}$$

$$\begin{aligned}\phi_{q,1}^{(j)}=&-\big(\mathcal{H}_q-\lambda_0\big)^{-1}\Big(\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_1\big)\psi_{0,1}\\&+\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_2\big)\psi_{0,2}\Big),\ q\geqslant3,\end{aligned} \tag{0.23}$$

$$\Lambda_i^{(j)}=\Big(\mathrm{F}_i^{(j)},r_0^{(j)}\Big)_{\mathbb{C}^2},\quad i\geqslant2, \tag{0.24}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi}_{q,i}^{(j)} =&\mathcal{R}_q(\lambda_0)\Bigg(\sum_{s=1}^{i-1} r_{s,q}^{(j)}\Lambda_{i-s}^{(j)}\psi_{0,q}+\sum_{t=1}^{i-1}\Lambda_t^{(j)}\widehat{\phi}_{i-t,q}^{(j)}\\
&-r_{i-1,3-q}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_{3-q}\big)\psi_{0,3-q}\\
&-\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_{3-q}\big)\widehat{\phi}_{3-q,i-1}\\
&-\sum_{p=3}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_p\big)\phi_{p,i-1}\Bigg),\ q=1,2,\ i\geqslant 2
\end{aligned}
\tag{0.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{q,i}^{(j)} =&(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\Bigg(\sum_{s=1}^{i-1}\Lambda_s^{(j)}\phi_{q,i-s}^{(j)}\\
&-\sum_{\substack{t=1\\ t\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_t\big)\phi_{q,i-1}^{(j)}\Bigg),\ q\geqslant 3,\ i\geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{0.26}
$$

Здесь $\mathrm{F}_i^{(j)}=\begin{pmatrix} f_{i,1}^{(j)}\\ f_{i,2}^{(j)}\end{pmatrix}$ *– вектор с компонентами,*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}_{i,q}^{(j)} =&\Big(\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_{3-q}\big)\widehat{\phi}_{3-q,i-1}^{(j)},\psi_{0,q}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&+\sum_{p=1}^{k}\Big(\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_p\big)\phi_{p,i-1}^{(j)},\psi_{0,q}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\quad q=1,2,
\end{aligned}
\tag{0.27}
$$

$r_0^{(j)}=\begin{pmatrix} r_{0,1}^{(j)}\\ r_{0,2}^{(j)}\end{pmatrix}$ *– собственный вектор матрицы*

$$
\mathrm{B}:=\begin{pmatrix} 0 & b_{12}\\ \overline{b}_{12} & 0\end{pmatrix},\quad b_{12}=\Big(\mathcal{L}_2\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1},\psi_{0,2}\Big),
\tag{0.28}
$$

с компонентами

$$
r_{0,1}^{(j)}=\frac{b_{12}}{\sqrt{2}|b_{12}|},\quad r_{0,2}^{(j)}=\frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{2}},
\tag{0.29}
$$

а $r_i^{(j)}=\begin{pmatrix} r_{i,1}^{(j)}\\ r_{i,2}^{(j)}\end{pmatrix}$ *– вектора, удовлетворяющие уравнению*

$$
\Big(\mathrm{B}-\Lambda_1^{(j)}\mathrm{E}\Big)r_{i-1}^{(j)}=\sum_{s=1}^{i-1}r_s^{(j)}\Lambda_{i-s}^{(j)}+r_0^{(j)}\Lambda_i^{(j)}-\mathrm{F}_i^{(j)}
\tag{0.30}
$$

и ортогональные векторам $r_0^{(j)}$, $j=1,2$, $i\geqslant 1$. *Верны оценки*

$$\big|\Lambda_i^{(j)}(X)\big|\leqslant C^i\varepsilon^i(X),\quad \|\phi_{q,i}^{(j)}\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C^i\varepsilon^i(X), \tag{0.31}$$

где C *– некоторые константы, не зависящие от* i, j, q, X. *Выполнено*

$$\varepsilon(X)\to 0 \quad \textit{при} \quad \tau(X)\to+\infty. \tag{0.32}$$

Замечание 0.2. Заметим, что в формулах (0.29) знаменатель в нуль не обращается, так как коэффициент b_{12}, определяемый равенством (0.28), равномерно отделён от нуля в силу условия (0.17).

Замечание 0.3. Отметим, что решения задачи (0.30), ортогональные векторам $r_0^{(j)}$, $j=1,2$ при всех $i\geqslant 1$, существуют и единственны. Данный факт доказывается в параграфе 5 в процессе доказательства теоремы 0.6.

В случае кратности $2+0$ положим $\mathcal{R}_i(\lambda)=(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}$, где $i\geqslant 2$, $\lambda\in\overline{U}$, и

$$\begin{aligned}\varepsilon(X)=\max\Big\{&\max_{j=1,2}\max_{q=2,\ldots,k}\big\|\mathcal{L}_q^0\eta_q(|\cdot|)\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,j}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\\ &\max_{\lambda\in\overline{U}}\max_{\substack{i,q=1,\ldots,k\\ i\neq q}}\Big\|\mathcal{L}_i^0\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i-X_q)\\ &\mathcal{R}_q(\lambda)\varsigma_q(|\cdot|)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big\}.\end{aligned} \tag{0.33}$$

Теорема 0.7. *Пусть операторы* $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_X$, $i=1,\ldots,k$, *самосопряжены, а* λ_0 *– собственное значение кратности* $2+0$ *и выпол-*

нено неравенство

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\Bigg(\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_1)\psi_{0,1},\psi_{0,1}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&-\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_2)\psi_{0,2},\psi_{0,1}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Bigg)^2\\
&+4\Big|\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_2)\psi_{0,2},\psi_{0,1}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big|^2\Bigg|\\
&\geqslant C\varepsilon^4(X),
\end{aligned}
\tag{0.34}
$$

где $C>0$ – некоторая константа, не зависящая от X. Тогда при достаточно больших $\tau(X)$ в окрестности $\overline{U}$ существуют ровно два (с учетом кратности) собственных значения $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,2$, возмущенного оператора $\mathcal{H}_X$, которые сходятся к собственному значению λ_0 при $\tau(X)\to+\infty$. Собственные значения $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,2$, представимы в виде сходящихся для достаточно больших $\tau(X)$ рядов

$$
\lambda_X^{(j)}=\lambda_0+\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_i^{(j)}(X). \tag{0.35}
$$

Соответствующие собственные функции $\psi_X^{(j)}$, $j=1,2$, можно выбрать так, что они представимы в виде сходящихся в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ для достаточно больших $\tau(X)$ рядов

$$
\begin{aligned}
\psi_X^{(j)}(x)=&r_{0,1}^{(j)}(X)\psi_{0,1}(x-X_1)+r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}(X)(x-X_1)\\
&+\sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\phi_{q,i}^{(j)}\big(x-X_q,X\big).
\end{aligned}
\tag{0.36}
$$

Ряды (0.35), (0.36) сходятся равномерно по X для достаточно больших $\tau(X)$. Члены данных рядов определяются равенствами

$$
\Lambda_1^{(1)}=\Lambda_1^{(2)}=0, \tag{0.37}
$$

$$\Lambda_2^{(j)} = \frac{1}{2}\left(b_{11} + b_{22} + (-1)^j \sqrt{\big(b_{11} - b_{22}\big)^2 + 4|b_{12}|^2}\right), \quad j = 1, 2,$$

$$b_{ij} = \sum_{q=2}^{k} \Big(\mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) w_{q,j}, \psi_{0,i}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad i, j = 1, 2, \tag{0.38}$$

$$\phi_{1,i}^{(j)} = \widehat{\phi}_{1,i}^{(j)} + \sum_{t=1}^{2} r_{i,t}^{(j)} \psi_{0,t}, \quad i \geqslant 1, \quad \phi_{q,1}^{(j)} = \sum_{t=1}^{2} r_{0,t}^{(j)} w_{q,t}, \quad q \geqslant 2,$$

$$\widehat{\phi}_{1,1} = 0, \ w_{q,t} = -\big(\mathcal{H}_q - \lambda_0\big)^{-1} \mathcal{L}_q \mathcal{S}\big(X_q - X_1\big) \psi_{0,t}, \quad q \geqslant 2, \tag{0.39}$$

$$\widehat{\phi}_{1,2}^{(j)} = \mathcal{R}_1(\lambda_0)\left(\sum_{t=1}^{2} r_{0,t}^{(j)} \Big(\Lambda_2^{(j)} \psi_{0,t} - \sum_{q=2}^{k} \mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) w_{q,t}\Big)\right), \tag{0.40}$$

$$\widehat{\phi}_{q,2}^{(j)} = -\big(\mathcal{H}_q - \lambda_0\big)^{-1} \sum_{\substack{t=2 \\ t \neq q}}^{k} \mathcal{L}_t \mathcal{S}\big(X_t - X_q\big) \phi_{q,1}^{(j)}, \quad q \geqslant 2, \tag{0.41}$$

$$\begin{aligned}
&\phi_{q,i}^{(j)} = \widehat{\phi}_{q,i}^{(j)} + r_{q-1,1}^{(j)} w_{q,1} + r_{q-1,2}^{(j)} w_{q,2}, \quad q \geqslant 2, \quad i \geqslant 2, \\
&\Lambda_i^{(j)} = \Big(\mathrm{F}_i^{(j)}, r_0^{(j)}\Big)_{\mathbb{C}^2}, \\
&\mathrm{F}_i^{(j)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{q=2}^{k} \Big(\mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) \phi_{q,i-1}^{(j)}, \psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\ \sum\limits_{q=2}^{k} \Big(\mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) \phi_{q,i-1}^{(j)}, \psi_{0,2}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \end{pmatrix}, \ i \geqslant 3,
\end{aligned} \tag{0.42}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_{1,i}^{(j)} =& \mathcal{R}_1(\lambda_0)\left(\sum_{t=1}^{2} \Big(\sum_{s=2}^{i-1} r_{i-s,t}^{(j)} \Lambda_s^{(j)} \psi_{0,t}\right. \\
&- \sum_{q=2}^{k} r_{i-2,t}^{(j)} \mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) w_{q,t}\Big) \\
&\left. + \sum_{t=2}^{i-1} \Lambda_t^{(j)} \widehat{\phi}_{1,i-t}^{(j)} - \sum_{q=2}^{k} \mathcal{L}_1 \mathcal{S}\big(X_1 - X_q\big) \phi_{q,i-1}\right), \quad i \geqslant 3,
\end{aligned} \tag{0.43}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\phi}^{(j)}_{q,i} =&\big(\mathcal{H}_q-\lambda_0\big)^{-1}\Bigg(\sum_{s=2}^{i-1}\Lambda^{(j)}_s\phi^{(j)}_{q,i-s}-\sum_{\substack{t=2\\ t\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_t)\phi^{(j)}_{t,i-1}\\
&-\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\widehat{\phi}^{(j)}_{1,i-1}\Bigg),\quad q\geqslant 2,\quad i\geqslant 3.
\end{aligned}
\tag{0.44}
$$

Здесь $r^{(j)}_0=\begin{pmatrix} r^{(j)}_{0,1}\\ r^{(j)}_{0,2}\end{pmatrix}$ *– собственные вектора матрицы*

$$
\mathrm{B}:=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ \overline{b}_{12} & b_{22}\end{pmatrix}
\tag{0.45}
$$

с компонентами

$$
\begin{aligned}
r^{(j)}_{0,1}=&-\frac{b_{12}}{\sqrt{b^2_{12}+\frac{1}{4}\Big|b_{11}-b_{22}+(-1)^j\sqrt{\big(b_{11}-b_{22}\big)^2+4|b_{12}|^2}\Big|^2}},\\
r^{(j)}_{0,2}=&\frac{\frac{1}{2}\Big(b_{11}-b_{22}+(-1)^j\sqrt{\big(b_{11}-b_{22}\big)^2+4|b_{12}|^2}\Big)}{\sqrt{b^2_{12}+\frac{1}{4}\Big|b_{11}-b_{22}+(-1)^j\sqrt{\big(b_{11}-b_{22}\big)^2+4|b_{12}|^2}\Big|^2}},
\end{aligned}
\tag{0.46}
$$

$r^{(j)}_i=\begin{pmatrix} r^{(j)}_{i,1}\\ r^{(j)}_{i,2}\end{pmatrix}$ *– вектора, удовлетворяющие уравнению*

$$
\Big(\mathrm{B}-\Lambda^{(j)}_2\mathrm{E}\Big)r^{(j)}_{i-2}=\sum_{s=2}^{i-1}r^{(j)}_s\Lambda^{(j)}_{i-s}+r^{(j)}_0\Lambda^{(j)}_i-F^{(j)}_i,\quad i\geqslant 3,
\tag{0.47}
$$

и ортогональные векторам $r^{(p)}_0$, $p=1,2$.*Верны оценки*

$$
\big|\Lambda^{(j)}_i(X)\big|\leqslant C^i\varepsilon^i(X),\quad \|\phi^{(j)}_{q,i}\|_{W^{2m}_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C^i\varepsilon^i(X),
\tag{0.48}
$$

где C *– некоторые константы, не зависящие от* i, j, q, X. *Выполнено*

$$
\varepsilon(X)\to 0\quad\textit{при}\quad \tau(X)\to+\infty.
\tag{0.49}
$$

Замечание 0.4. Решения задачи (0.47), ортогональные векторам $r_0^{(p)}$, $p = 1, 2$ при всех $i \geqslant 1$ существуют и единственны. Данный факт доказывается в параграфе 5 в процессе доказательства теоремы 0.7.

Замечание 0.5. Отметим также, что ни один знаменатель в формуле (0.46) не обращается в нуль, так как выражение

$$\sqrt{\left(b_{11} - b_{22}\right)^2 + 4|b_{12}|^2},$$

имеет порядок ε, а коэффициенты b_{11} и b_{22} - порядок ε^2. Кроме того, выполнено условие (0.34), обеспечивающее равномерную отделённость от нуля внутренного корня.

Наиболее значимым результатом третьего параграфа являются ряды (0.9), (0.10), (0.18), (0.19), (0.35), (0.36), а также формулы и оценки для членов этих рядов. Ценность данного результата заключается в сходимости рядов к $\lambda_X^{(j)}$ и $\psi_X^{(j)}$ для достаточно больших $\tau(X)$. Более того, сходимость равномерна по X. Оценки (0.14), (0.31), (0.48) означают, что эти ряды сходятся как степенные. Эти оценки также означают, что ряды (0.9), (0.10), (0.18), (0.19), (0.35), (0.36) в определённом смысле можно трактовать и как асимптотические – порядок малости остатка увеличивается с увеличением номера остатка. Таким образом, эти ряды являются способом точного вычисления собственных значений $\lambda_X^{(j)}$ и соответствующих им собственных функций $\psi_X^{(j)}$. Члены данных рядов задаются формулами (0.11) – (0.13), (0.20) – (0.30), (0.37) – (0.47).

Отметим, что метод, с помощью которого были построены ряды (0.9), (0.10), (0.18), (0.19), (0.35), (0.36), применим и в общем случае, то есть, при произвольной кратности предельного собственного значения. Вместе с тем, как уже было отмечено выше, процесс построения рядов, аналогичных (0.9), (0.10), (0.18), (0.19), (0.35), (0.36), в общем случае крайне громоздкий. Именно поэтому в настоящей работе мы ограничились лишь двумя наиболее типичными

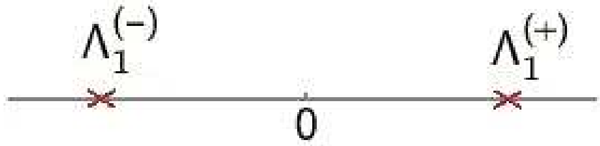

Рис. 3: Первые поправки собственных значений (случай кратности $1+1$)

случаями кратности $1+1$ и $2+0$ предельного собственного значения. При этом условия (0.17), (0.34) обеспечивают расщепление возмущённых собственных значений на уровне первых ненулевых поправок.

Обсудим теперь вид первых поправок собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ из теорем 0.6, 0.7. Как следует из (0.20), в случае кратности $1+1$ первые поправки возмущённых собственных значений равны по модулю, но противоположны по знаку, то есть, симметричны относительно нуля (см. рис. 3). Отметим, что при этом на возмущения не накладываются никакие существенных дополнительных условий, кроме условий (0.17), (0.34). Ранее подобный эффект был описан в работе [33] для оператора Шрёдингера с парой одинаковых разбегающихся потенциалов и в работах [23], [24] для оператора Лапласа с разбегающимися возмущениями, аналогичными нашим, если весовые функции считать финитными. Случай предельной кратности $2+0$ не исследовался для возмущений потенциалами. Согласно формуле (0.14), в этом случае первые поправки возмущённых собственных значений равны нулю и поэтому их также можно считать симметричными относительно нуля (см. рис. 4). Более того, симметричное расположение первых поправок возмущённых собственных значений относительно нуля является достаточно общим эффектом. А именно, предположим, что число разбегающихся возмущений равно двум ($k=2$), а λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$ кратности p и собственное значение оператора $\mathcal{H}_2$ кратности q. Символами $\psi_{0,1}^{(j)}$, $j=1,\ldots,p$ и

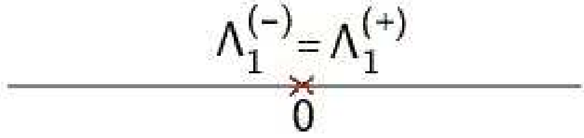

Рис. 4: Первые поправки собственных значений (случай кратности $2+0$)

$\psi_{0,2}^{(j)}$, $j=1,\ldots,q$ будем обозначать собственные функции операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, соответствующие собственному значению λ_0. Предполагаем, что $p\leqslant q$. Согласно теореме 0.4, существует ровно $p+q$ возмущённых собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, $j=1,\ldots,p+q$, сходящихся к λ_0. В этом случае также применима описанная выше схема построения рядов (0.18), (0.19), (0.35), (0.36). Её применение приводит к аналогичным рядам. Первые члены рядов для возмущённых собственных значений имеют вид

$$\lambda_X^{(j)}=\lambda_0+\Lambda_1^{(j)}+\ldots,$$

где $j=1,\ldots,p+q$. Из первых поправок $\Lambda_1^{(j)}$ первые $q-p$ равны нулю. Остальные $2p$ поправки имеют вид $\pm\sqrt{\mu_i}$, $i=1,\ldots,p$, где μ_i – собственные значения матрицы $\mathrm{B}\mathrm{B}^*$, а матрица B задаётся формулой

$$\mathrm{B}:=\begin{pmatrix}\left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_2)\psi_{0,2}^{(1)},\psi_{0,1}^{(1)}\right) & \ldots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_2)\psi_{0,2}^{(1)},\psi_{0,1}^{(q)}\right)\\ \ldots & \ddots & \ldots\\ \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_2)\psi_{0,2}^{(p)},\psi_{0,1}^{(1)}\right) & \ldots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_2)\psi_{0,2}^{(p)},\psi_{0,1}^{(q)}\right)\end{pmatrix}.$$

Здесь символ * означает эрмитово сопряжение, а под символом $(\cdot,\cdot)$ понимается скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Другими словами, если λ_0 – предельное собственное значение суммарной кратности $p+q$, то существует ровно $p+q$ собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. У $q-p$ таких собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ первые поправки равны нулю, а оставшиеся $2p$ собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ объединяются в p пар. В каждой такой паре собственных

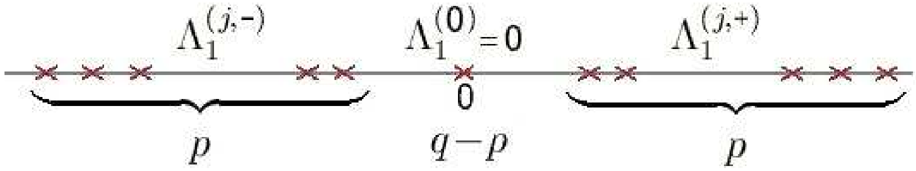

Рис. 5: Первые поправки собственных значений (случай произвольной кратности)

значений первые поправки равны по модулю, но противоположны по знаку (см. рис. 5).

Отметим, что результаты работы можно обобщить. Во-первых, вместо пространства $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать произвольную периодическую область. Во-вторых, невозмущённым оператором может быть не только дифференциальный оператор произвольного порядка, но и некоторый абстрактный оператор, удовлетворяющий определённому набору требований. Этот оператор с конечным числом разбегающихся возмущений в произвольной периодической области многомерного пространства рассматривался нами в работах [4], [30]. Техника, результаты и все эффекты там в целом остаются без изменений и именно поэтому для наглядности в диссертации рассматривается только случай дифференциального оператора во всем пространстве. Более того, технику можно перенести и для анализа других спектральных характеристик операторов с разбегающимися возмущениями, например, резонансов. Примером такого применения техники служит статья [26].

1 Примеры

В данной параграфе приводятся примеры невозмущённого оператора, возмущающих операторов и весовых функций, для которых справедливы все результаты настоящей работы.

1.1 Примеры невозмущённых операторов

В настоящем разделе мы приводим примеры невозмущённых операторов.

1. Дифференциальный оператор второго порядка.

В качестве первого примера невозмущённого оператора рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{a}_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{b}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathrm{b}_0(x), \qquad (1.1)$$

где $\mathrm{a}_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{b}_i \in C(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{b}_0 \in C(\mathbb{R}^d)$ – матрицы размерности $n \times n$, зависящие от x и периодические относительно решётки Г. Предполагается, что коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условию эллиптичности (0.3). Параметр m, участвовавший в определении невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ во Введении, здесь равен единице.

2. Матричный оператор Шрёдингера.

Вторым примером невозмущённого оператора является матричный оператор Шрёдингера

$$\mathcal{H}_0 = -\Delta + \mathrm{v},$$

который получается из равенства (1.1), если в нём положить $\mathrm{a}_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{E}_n$, $\mathrm{b}_i = 0$, $i = 1, \ldots, d$, $\mathrm{b}_0 = \mathrm{v}$, где δ_{ij} – символ Кронекера-Капелли, E_n – единичная матрица размера $n \times n$, v – вещественная матрица размера $n \times n$. Если в равенстве (1.1) положить $\mathrm{b}_i = 0$, $i = 1, \ldots, d$, то оператор $\mathcal{H}_0$ примет вид

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{a}_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{b}_0.$$

Данный оператор можно рассматривать как матричный оператор Шрёдингера с метрикой.

3. Магнитный оператор Шрёдингера.

В качестве третьего примера невозмущённого оператора рассмотрим магнитный оператор Шрёдингера

$$\mathcal{H}_0 = (\mathrm{i}\nabla + A)^2 + \mathrm{v}, \quad A = (A_1, \ldots, A_d),$$

который получается из равенства (1.1), если выбрать $n = 1$, $\mathrm{a}_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathrm{b}_i = 2\mathrm{i}A_i$, $\mathrm{b}_0 = \mathrm{v} + |A|^2 + \mathrm{i}\sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$.

4. Оператор теории упругости.

Четвёртым примером оператора $\mathcal{H}_0$ является оператор теории упругости

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{a}_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

который получается из оператора (1.1), если выбрать $\mathrm{b}_i = 0$, $i = 1, \ldots, d$, $\mathrm{b}_0 = 0$ и потребовать выполнения дополнительных условий симметричности на коэффициенты матрицы a_{ij} (см., например, [14, Гл. II, §3.1]).

5. Оператор Паули.

Следующим частным примером оператора $\mathcal{H}_0$ является двух- и трёхмерный оператор Паули (см., например, [16, §6])

$$\mathcal{H}_0 = (\mathrm{i}\nabla + A)^2 \mathrm{E}_2 + \mathrm{v} + B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3.$$

Здесь E_2 – единичная матрица размера 2×2, v – электрический потенциал, A – магнитный потенциал, σ_i – следующие матрицы:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{B} = (B_1, B_2, B_3)$ – магнитное поле, порождённое магнитным потенциалом

$$B = \left(0, 0, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right), \qquad \text{если} \quad d = 2,$$
$$B = \mathrm{rot}(A_1, A_2, A_3), \qquad \text{если} \quad d = 3.$$

Данный оператор получается из оператора (1.1), если положить $d = 2$ или $d = 3$, $n = 2$, $\mathrm{a}_{ij} = \delta_{ij}\mathrm{E}_2$, $\mathrm{b}_i = 2\mathrm{i}A_i\mathrm{E}_2$, где E_2 – единичная матрица размера 2×2, $A = (A_1, \ldots, A_d)$, $\mathrm{b}_0 = \mathrm{v} + |A|^2\mathrm{E}_2 + \mathrm{i}\sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\mathrm{E}_2 + B_3\sigma_3$ в случае $d = 2$, $\mathrm{b}_0 = \mathrm{v} + |A|^2\mathrm{E}_2 + \mathrm{i}\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\mathrm{E}_2 + B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3$ в случае $d = 3$.

6. δ – потенциал.

Ещё одним примером оператора $\mathcal{H}_0$ является δ – потенциал. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^d$ ориентированное периодическое многообразие S без края. Будем предполагать, что данное многообразие имеет коразмерность один и класс гладкости C^3. Пусть β – некоторая достаточно гладкая комплекснозначная функция, заданная на S. Определим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ оператор

$$\mathcal{H}_S := -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{a}_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \beta\delta(x - S), \tag{1.2}$$

действующий следующим образом:

$$\mathcal{H}_S u(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{a}_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x), \quad x \notin S,$$

на функциях $u \in W_2^2(\mathbb{R}^d \setminus S; \mathbb{C}) \cap W_2^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, удовлетворяющих условиям

$$u(s+0) = u(s-0) = u(s), \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_s = \beta u(s), \quad s \in S,$$

где $u(s+0)$, $u(s-0)$ – значения функции u на каждой из сторон ориентированного многообразия S, $\left[\frac{\partial}{\partial n}\right]_s$ – скачок производной по конормали в точке $s \in S$. Предполагается, что коэффициенты a_{ij} оператора (1.2) выбраны также, как и в первом примере. Данный оператор отвечает полуторалинейной m-секториальной форме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$

$$h_S(u, v) := \sum_{i,j=1}^{d} \left(\mathrm{a}_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})} + (\beta u, v)_{L_2(S;\mathbb{C})}$$

с областью определения $W_2^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ (см., например, [21, Приложение K, п. K.4.1]). С помощью преобразования, описанного в [23, п.8, пример 5], данный оператор можно привести к рассмотренному выше оператору (1.1). В данном случае $n = 1$, $m = 2$. Следовательно, все результаты настоящей работы применимы и к операторам вида (1.2).

7. Бигармонический оператор.

В качестве примера оператора высокого порядка можно взять бигармонический оператор:

$$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}.$$

Данный оператор получается, если в определении невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ во Введении положить $m = 2$, $n = 1$, $b_\beta = 0$, $a_{\beta\gamma} = 1$, если одна из компонент мультииндекса β равна двум, а все остальные – нулю, и тоже верно для мультииндекса γ, и $a_{\beta\gamma} = 0$ во всех остальных случаях.

1.2 Примеры весовых функций

В данном параграфе приводятся примеры функций ς_i, η_i и a.

1. Финитные функции.

Первым примером весовых функций являются финитные функции. Если ς_i, η_i – финитные, то функцию a вне носителей функций ς_i, η_i можно выбрать достаточно произвольно, например, константой. В таком случае все требуемые предположения (A1), (A2) выполнены, и возмущающие операторы соответствуют возмущениям, описанным в работах [23], [24].

Приведём теперь другие примеры функций ς_i, η_i и a. Напомним, что согласно условиям (A1), (A2) функции ς_i, η_i и a предполагаются бесконечно дифференцируемыми, а также $\eta_i \equiv 1$, $\varsigma_i \equiv 1$ и $a \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля.

2. Экспоненциально убывающие функции.

Следующим примером весовых функций являются функции, экспоненциально убывающие вне достаточно большой окрестности нуля. Вне данной окрестности определим эти функции равенствами

$$\eta_i(r) = e^{-\mu_i r^2}, \quad \varsigma_i(r) = e^{-\kappa_i r^2}, \quad a(r) = 2\kappa r + C,$$

где μ_i, κ_i – произвольные фиксированные положительные числа, C – некоторая константа, а $\kappa = \min\limits_i \kappa_i$. Введённые таким образом функции удовлетворяют всем требуемым условиям.

3. Степенные функции.

Для выполнения условий (A1), (A2) не нужно обязательно требовать от функций ς_i, η_i и a экспоненциального убывания, достаточно и степенного. А именно, если функции ς_i, η_i и a определить вне достаточно большой окрестности нуля равенствами

$$\eta_i(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\mu_i}}, \quad \varsigma_i(r) = \frac{1}{(1+r^2)^{\kappa_i}}, \quad a(r) = 2\kappa \frac{r}{r^2+1},$$

где μ_i, κ_i – произвольные фиксированные положительные числа, $\kappa = \min\limits_i \kappa_i$, то все требуемые предположения также будут выполнены.

4. Логарифмические функции.

При выборе функций η_i и ς_i важна не скорость их убывания, а сам факт их убывания вместе со всеми своими производными (т.е., выполнение условий (A1), (A2)). Следовательно, класс таких функций довольно широк и не ограничивается только экспоненциальным и степенным убыванием. Например, функции η_i и ς_i могут убывать логарифмически. Определим эти функции вне достаточно большой окрестности нуля следующим образом:

$$\eta_i(r) = \frac{1}{(1+\ln r)^{\mu_i}}, \quad \varsigma_i(r) = \frac{1}{(1+\ln r)^{\kappa_i}}, \quad a(r) = \frac{\kappa}{r(1+\ln r)},$$

где μ_i, κ_i – произвольные фиксированные положительные числа, $\kappa = \min\limits_i \kappa_i$.

Отметим, что функции ς_i и η_i на бесконечности могут убывать по-разному. Например, функции ς_i степенным образом, а функции η_i – экспоненциальным.

1.3 Примеры возмущающих операторов

В данном параграфе приведём примеры возмущающих операторов $\mathcal{L}_i^0$. Всюду далее проверяем ограниченность оператора $\mathcal{L}_i^0$ как оператора из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Вначале отметим, что все перечисленные выше примеры оператора $\mathcal{H}_0$ можно рассматривать в качестве возмущающих операторов $\mathcal{L}_i^0$.

1. Дифференциальный оператор порядка $2p$.

Основной пример возмущающего оператора – дифференциальный оператор порядка $2p$:

$$\mathcal{L}_i^0 := \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p}} \mathrm{b}_\beta(x)\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}, \quad p\leqslant m,$$

где $\mathrm{b}_\beta(x)$ – некоторые матричнозначные функции. Доказать ограниченность $\mathcal{L}_i^0$ как оператора из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ можно при различных условиях на коэффициенты b_β. Первое, самое простое и часто используемое условие на коэффициенты b_β – выбрать их ограниченными. В этом случае доказательство очевидно.

Опишем ещё одну возможность выбора коэффициентов. Согласно стандартным теоремам вложения [17, Гл. V, Теорема 5.4, случай C],

$$\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p}} \sup_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right|^2 \leqslant \|u\|^2_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

если $2m\geqslant 2p+1+\left[\frac{d}{2}\right]$. Следовательно, ограниченность оператора $\mathcal{L}_i^0$ как оператора из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ можно показать следующим образом:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_i^0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p}}\left|\mathrm{b}_\beta\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right|^2 dx \leqslant \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p}}\max_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right|^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\mathrm{b}_\beta|^2\,dx\\ &\leqslant C\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2p}}\|\mathrm{b}_\beta\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\|u\|^2_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где $2m\geqslant 2p+1+\left[\frac{d}{2}\right]$. Таким образом, при $2m\geqslant 2p+1+\left[\frac{d}{2}\right]$ достаточно выбрать коэффициенты $\mathrm{b}_\beta\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Например,

$$\mathrm{b}_\beta(x)=\frac{\chi(x)}{|x|^\gamma},$$

где $\gamma<\frac{d}{2}$, $\chi(x)\in C_0(\mathbb{R}^d)$ – матричнозначная функция.

Описанные выше способы доказательства ограниченности оператора $\mathcal{L}_i^0$ можно комбинировать, представляя коэффициенты b_β в виде:

$$\mathrm{b}_\beta = \widetilde{\mathrm{A}}_\beta + \widehat{\mathrm{A}}_\beta,$$

где $\widehat{\mathrm{A}}_\beta(x) \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а $\widetilde{\mathrm{A}}_\beta$ – ограниченные матричнозначные функции. Как показывает следующий пример, такой подход позволяет включить в рассмотрение кулоновские потенциалы.

2. Кулоновские потенциалы.

Пусть функции ς_i, η_i бесконечно дифференцируемы и $\eta_i \equiv 1$, $\varsigma_i \equiv 1$ в некоторой окрестности нуля, а вне большей окрестности они имеют вид $\varsigma_i = |x|^{-\frac{1}{2}}$, $\eta_i = |x|^{-\frac{1}{2}}$, а $\mathcal{L}_i$ – оператор умножения на $|x|^{-1}B_0(x)$, где $B_0(x)$ – некоторая матрица. Тогда

$$(\mathcal{L}_i^0)u(x) = \frac{\varsigma_i^{-1}(|x|)\eta_i^{-1}(|x|)}{|x|}B_0(x)u(x)$$

Представим теперь оператор $\mathcal{L}_i^0$ в виде

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_i^0 u)(x) =& \frac{\varsigma_i^{-1}(|x|)\eta_i^{-1}(|x|)}{|x|}B_0(x)\chi(x)u(x) \\ &+ \frac{\varsigma_i^{-1}(|x|)\eta_i^{-1}(|x|)}{|x|}B_0(x)(1-\chi)(x)u(x),\end{aligned}$$

где χ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, в окрестности нуля равная единице, а вне большей окрестности нуля равная нулю. В данном случае матрица $B_0(x)$ выбирается так, чтобы $B_0(x)|x|^{-1}\chi(x) \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, тогда $B_0(x)(1-\chi)(x)|x|^{-1}$ будет равномерно ограниченной функцией. При этом следует требовать выполнения условия $2m \geqslant 1 + \left[\frac{d}{2}\right]$. Наиболее физический случай $m = 1$, $d = 3$ также включается в рассмотрение.

3. Интегральный оператор.

В качестве следующего примера возмущённого оператора рассмотрим интегральный оператор:

$$(\mathcal{L}_i^0 u)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} L_i(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y,$$

где $L_i(x,y)$ – равномерно ограниченные в норме $L_2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ матричнозначные функции. В этом случае операторы $\mathcal{L}_i^0 : W_2^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ ограничены равномерно в силу оценок

$$|(\mathcal{L}_i^0 u)(x)|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} |L_i(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

$$\left\|\mathcal{L}_i^0 u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \|L_i\|_{L_2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.$$

4. Конечномерный оператор.

Возмущающим оператором также может быть конечномерный оператор, ограниченный как оператор из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Частным примером такого конечномерного оператора является линейный функционал:

$$\mathcal{L}_i^0 u := q l_i u,$$

где q – комплекснозначная функция из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Символ l_i означает ограниченный функционал из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathbb{C}$. В таком случае оператор $\mathcal{L}_i^0$, определённый выше, удовлетворяет всем необходимым требованиям.

5. Псевдодифференциальный оператор.

Ещё одним примером возмущающего оператора $\mathcal{L}_i^0$ является псевдодифференциальный оператор. Пусть функция $\ell_i(x,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию

$$\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha \ell_i(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{\rho(|\beta|-|\alpha|)+2m}, \tag{1.3}$$

где $0<\rho<1$, $|\alpha|\leqslant[\frac{d}{2}]+1$, $|\beta|\leqslant[\frac{d}{2}]+2$. Определим для функции $u(y)$ из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ преобразование Фурье следующим образом:

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}u(y)dy,$$

где символ $\cdot$ означает скалярное произведение векторов. Псевдодифференциальный оператор с символом $l_i(x,\xi)$ имеет вид

$$\left(\mathcal{L}_i u\right)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} l_i(x,\xi)e^{-i\xi\cdot x}\mathcal{F}[u](\xi)d\xi.$$

Умножив и разделив правую часть последнего равенства на $(1 + |\xi|^{2m})$, получим

$$(\mathcal{L}_i u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l_i(x,\xi)}{1+|\xi|^{2m}} e^{i\xi\cdot x}(1+|\xi|^{2m})\mathcal{F}[u](\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{l}_i(x,\xi)e^{i\xi\cdot x}\widetilde{v}(\xi)d\xi,$$

где

$$\widetilde{l}_i(x,\xi) = \frac{l_i(x,\xi)}{1+|\xi|^{2m}}, \quad \widetilde{v}(\xi) = (1+|\xi|^{2m})\mathcal{F}[u](\xi).$$

Полученные соотношения позволяют нам рассматривать $\mathcal{L}_i$ как псевдодифференциальный оператор с символом $\widetilde{l}_i$, действующим на функции, чьё преобразование Фурье равно $\widetilde{v}$. Согласно теореме 5.3 из [37], при выполнении условия

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \widetilde{l}_i(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}\left(1+|\xi|\right)^{\rho(|\beta|-|\alpha|)} \tag{1.4}$$

на символ $\widetilde{l}_i(x,\xi)$, этот оператор действует из пространства $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и выполнено неравенство

$$\|\mathcal{L}_i u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|\mathcal{L}_i\|_\rho \|\widetilde{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{1.5}$$

где $\|\mathcal{L}_i\|_\rho = \max\limits_{|\alpha|,|\beta|} C_{\alpha\beta}$, а константа C зависит только от d и ρ.

Покажем, что неравенство (1.4) справедливо для функции $\widetilde{l}_i(x,\xi)$. Из неравенства (1.3) и равенства

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\alpha l_i(x,\xi)(1+|\xi|^{2m})^{-1}\right| &= \Big|\sum_{\substack{\gamma,\tau\in\mathbf{Z}_+^d\\|\gamma|+|\tau|=|\alpha|}} C_{\gamma\tau}\partial_\xi^\gamma l_i(x,\xi)\partial_\xi^\tau(1+|\xi|^{2m})^{-1}\Big| \\ &= \Big|\sum_{\substack{\gamma,\tau\in\mathbf{Z}_+^d\\|\gamma|+|\tau|=|\alpha|}} C_{\gamma\tau}\left(\partial_\xi^\gamma l_i(x,\xi)\right) f_\tau(\xi)\Big|,\end{aligned}$$

где $|f_\tau(\xi)| \leqslant C_\tau(1+|\xi|)^{-2m-|\tau|}$, следует

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \widetilde{l}_i(x,\xi)\right| = \left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha l_i(x,\xi)(1+|\xi|^{2m})^{-1}\right|$$
$$\leqslant \sum_{\substack{\gamma,\tau\in\mathbf{Z}_+^d\\|\gamma|+|\tau|=|\alpha|}} C_{\gamma,\tau}|\partial_\xi^\gamma l_i(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-2m-|\tau|} \leqslant \sum_{\substack{\gamma,\tau\in\mathbf{Z}_+^d\\|\gamma|+|\tau|=|\alpha|}} C_{\gamma,\tau}(1+|\xi|)^{\rho(|\beta|-|\gamma|)-|\tau|}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\gamma,\tau\in\mathbf{Z}_+^d\\|\gamma|+|\tau|=|\alpha|}} C_{\gamma,\tau}(1+|\xi|)^{\rho(|\beta|-|\alpha|)+(\rho-1)|\tau|} \leqslant C(1+|\xi|)^{\rho(|\beta|-|\alpha|)}.$$

Пользуясь неравенством (1.5) и свойствами преобразования Фурье, получаем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_i u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &\leqslant C\|\mathcal{L}_i\|_\rho \|\widetilde{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|(1+|\cdot|^{2m})\mathcal{F}[u]\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&\leqslant C\Big(\|\mathcal{F}[u]\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \||\cdot|^{2m}\mathcal{F}[u]\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big)\\
&\leqslant C\Big(\|\mathcal{F}[u]\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \Big\|\mathcal{F}\Big[\sum_{i=1}^d \frac{\partial^{2m}u}{\partial x_i^{2m}}\Big]\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big)\\
&\leqslant C\|u\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}
\end{aligned}$$

Таким образом, если символ оператора $l_i(x,\xi)$ удовлетворяет условию (1.3), то псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}_i$ является ограниченным как оператор из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

2 Применение главных результатов к классическому примеру

В настоящем разделе приводятся главные результаты диссертационной работы, для классического примера оператора с двумя разбегающимися возмущениями, о котором шла речь во введении.

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка с двумя разбегающимися возмущениями

$$\mathcal{H}_\ell = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathrm{V}(\cdot+\ell) + \mathrm{W}(\cdot-\ell) \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_\ell) = W_2^2(\mathbb{R}),$$

где V, W – вещественные финитные непрерывные потенциалы, ℓ – большой положительный параметр. Оператор $\mathcal{H}_\ell$ получается из оператора $\mathcal{H}_X$, если выбрать $d=n=m=1$, $k=2$, $\mathrm{a}_{\beta\gamma}=1$, $\mathrm{a}_\beta=0$, $X_1=\ell$, $X_2=-\ell$, $\mathcal{L}_1^0=\mathrm{W}$, $\mathcal{L}_2^0=\mathrm{V}$, а функции ς_i, η_i – финитными так, что

$$\varsigma_i(|x|) \equiv 1, \quad \eta_i(|x|) \equiv 1 \quad \text{при} \quad x \in \operatorname{supp} \mathrm{V} \cup \operatorname{supp} \mathrm{W}.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим операторы

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad \mathcal{H}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathrm{W}, \quad \mathcal{H}_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathrm{V}, \tag{2.1}$$

с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Согласно теореме 0.1, при достаточно больших ℓ оператор $\mathcal{H}_\ell$ замкнут. Для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{2} \sigma(\mathcal{H}_i)$ и достаточно больших ℓ верно представление

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_\ell - \lambda)^{-1} =& \Big(\mathcal{S}(\ell)\Big(\mathcal{H}_2 - \lambda\Big)^{-1}\mathcal{S}(-\ell) + \mathcal{S}(-\ell)\Big(\mathcal{H}_1 - \lambda\Big)^{-1}\mathcal{S}(\ell) \\ & - \Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\Big)\big(\mathrm{I} + \mathcal{P}_\ell\big)^{-1}, \\ \mathcal{P}_\ell =& \mathcal{S}(\ell)\mathrm{V}\mathcal{S}(-\ell)\Big(\mathcal{S}(-\ell)\Big(\mathcal{H}_1 - \lambda\Big)^{-1}\mathcal{S}(\ell) - \Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\Big) \\ & + \mathcal{S}(-\ell)\mathrm{W}\mathcal{S}(\ell)\Big(\mathcal{S}(\ell)\Big(\mathcal{H}_2 - \lambda\Big)^{-1}\mathcal{S}(-\ell) - \Big(\mathcal{H}_0 - \lambda\Big)^{-1}\Big),\end{aligned}$$

где $\mathcal{S}(\ell)$ – оператор сдвига, действующий по правилу: $(\mathcal{S}(\ell)u)(\cdot) := u(\cdot + \ell)$ и $\|\mathcal{P}_\ell\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \to 0$ при $\ell \to +\infty$.

Пусть λ_0 – простое и изолированное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, не лежащее в спектре оператора $\mathcal{H}_2$, а ψ_0 – соответствующая ему собственная функция. Так как W – финитный потенциал, то справедливо равенство

$$\psi_0(x) = C_0 \mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

где C_0 – некоторая константа. Согласно теореме 0.5, при достаточно больших ℓ в замыкании малой фиксированной окрестности точки λ_0 существует единственное собственное значение λ_ℓ оператора $\mathcal{H}_\ell$, сходящееся к λ_0 при $\ell \to +\infty$. Данное собственное значение λ_ℓ простое и изолированное и представимо в виде сходящегося для достаточно больших ℓ ряда

$$\lambda_\ell = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-4j\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\Lambda}_j(\ell). \tag{2.2}$$

Соответствующую собственную функцию ψ_ℓ можно выбрать так, что она будет представима в виде сходящегося в $W_2^2(\mathbb{R})$ для достаточно больших ℓ ряда

$$\begin{aligned}\psi_\ell(x) =&\psi_0(x-\ell)+\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(4j-2)\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{2,j}(x+\ell,\ell)\\ &+\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-4j\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{1,j}(x-\ell,\ell).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Члены данных рядов определяются равенствами

$$\widetilde{\Lambda}_j(\ell)=\big(\mathrm{W}Q_{2,j}(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot},\psi_0\big)_{L_2(\mathbb{R})},\quad j\geqslant 1,$$

$$\widetilde{\phi}_{2,1}=-C_0(\mathcal{H}_2-\lambda_0)^{-1}\mathrm{V}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot},$$

$$\widetilde{\phi}_{1,j}=\mathcal{R}_1(\lambda_0)\Big(\sum_{p=1}^{j}\widetilde{\Lambda}_p(\ell)\widetilde{\phi}_{1,j-p}-\mathrm{W}Q_{2,j-1}(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Big),\quad j\geqslant 1,$$

$$\widetilde{\phi}_{2,j}=(\mathcal{H}_2-\lambda_0)^{-1}\Big(\sum_{p=1}^{j-1}\widetilde{\Lambda}_p(\ell)\widetilde{\phi}_{2,j-p}-\mathrm{V}Q_{1,j-1}(\cdot-2\ell,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Big),\quad j\geqslant 2,$$

$$\widetilde{\phi}_{1,j}(x,\ell)=Q_{1,j}(x,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x}\qquad\text{при}\quad x\to-\infty,\quad j\geqslant 1,$$

$$\widetilde{\phi}_{2,j}(x,\ell)=Q_{2,j}(x,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x}\qquad\text{при}\quad x\to+\infty,\quad j\geqslant 1,$$

где $Q_{p,j}(x,\ell)$ – некоторые полиномы по x и ℓ, причём $Q_{1,0}(x,\ell)\equiv C_0$, $\mathcal{R}_1(\lambda_0)$, напомним, приведённая резольвента оператора $\mathcal{H}_1$. Описанное поведение функций $\widetilde{\phi}_{p,j}$ на бесконечности следует непосредственно из определения этих функций и финитности потенциалов V, W – достаточно лишь выписать уравнения на функции $\widetilde{\phi}_{p,j}$. Кроме того, при выводе формул для $\widetilde{\Lambda}_j$ и $\widetilde{\phi}_{p,j}$ мы воспользовались тем, что в силу финитности потенциалов V, W для достаточно больших ℓ выполнены равенства

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{V}\mathcal{S}(-2\ell)\widetilde{\phi}_{1,j}\big)(x,\ell)&=\mathrm{e}^{-2\ell\sqrt{-\lambda_0}}\mathrm{V}(x)Q_{1,j}(x-2\ell,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x},\\ \big(\mathrm{W}\mathcal{S}(2\ell)\widetilde{\phi}_{2,j}\big)(x,\ell)&=\mathrm{e}^{-2\ell\sqrt{-\lambda_0}}\mathrm{W}(x)Q_{2,j}(x+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться, что функции $\widetilde{\Lambda}_j(\ell)$, $\widetilde{\phi}_{p,j}(\cdot,\ell)$ являются полиномами по ℓ, причём степень этих полиномов, вообще говоря, растёт с ростом j. Отметим еще, что члены рядов (2.2), (2.3) и (0.9), (0.10) связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{2j} = \mathrm{e}^{-4j\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\Lambda}_j, && \Lambda_{2j-1} = 0,\\
&\phi_{1,2j} = \mathrm{e}^{-4j\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{1,j}, && \phi_{1,2j-1} = 0,\\
&\phi_{2,2j-1} = \mathrm{e}^{-(4j-2)\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{2,j}, && \phi_{2,2j} = 0.
\end{aligned}$$

Пусть теперь λ_0 – простое собственное значение каждого из операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, а $\psi_{0,1}$, $\psi_{0,2}$ – соответствующие ему собственные функции. Так как W, V – финитные потенциалы, то справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\psi_{0,1}(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x} \qquad \text{при} \quad x \to -\infty,\\
&\psi_{0,2}(x) = C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x} \qquad \text{при} \quad x \to +\infty,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где C_1, C_2 – некоторые константы. Согласно теореме 0.6, при достаточно больших ℓ в малой фиксированной окрестности точки λ_0 существует ровно два собственных значения $\lambda_\ell^{(j)}$ оператора $\mathcal{H}_\ell$, сходящихся к λ_0 при $\ell \to +\infty$. Данные собственные значения представимы в виде сходящихся для достаточно больших ℓ рядов

$$\lambda_\ell^{(j)} = \lambda_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\Lambda_p^{(j)}(\ell).$$

Соответствующие собственные функции $\psi_\ell^{(j)}$ можно выбрать так, что они будут представимы в виде сходящихся в $W_2^2(\mathbb{R})$ рядов для достаточно больших ℓ ряда

$$\begin{aligned}
\psi_\ell^{(j)}(x) =& r_{0,1}^{(j)}\psi_{0,1}(x-\ell) + r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}(x+\ell)\\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\phi_{2,p}^{(j)}(x+\ell,\ell)\\
&+ \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\phi_{1,p}^{(j)}(x-\ell,\ell).
\end{aligned}$$

Равенства (0.20)–(0.26) в этом случае принимают следующий вид

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1^{(2)}(\ell) = -\Lambda_1^{(1)}(\ell),\\
&\Lambda_1^{(1)}(\ell) = \left|C_1\Big(\mathrm{V}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}, \psi_{0,2}\Big)_{L_2(\mathbb{R})}\right|,\\
&\phi_{q,p}^{(j)} = \widehat{\phi}_{q,p}^{(j)} + r_{p,q}^{(j)}\psi_{0,q}, \quad q=1,2, \quad p\geqslant 1,\\
&\widehat{\phi}_{1,1}^{(j)} =\mathcal{R}_1(\lambda_0)\Big(r_{0,1}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}(\ell)\psi_{0,1} - r_{0,2}^{(j)}C_2\mathrm{W}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Big),\\
&\widehat{\phi}_{2,1}^{(j)} =\mathcal{R}_2(\lambda_0)\Big(r_{0,2}^{(j)}\Lambda_2^{(j)}(\ell)\psi_{0,2} - r_{0,1}^{(j)}C_1\mathrm{V}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Big),\\
&\Lambda_p^{(j)} = \Big(\mathrm{F}_p^{(j)}, r_0^{(j)}\Big)_{\mathbb{C}^2}, \quad p\geqslant 2,\\
&\widehat{\phi}_{1,p}^{(j)} =\mathcal{R}_1(\lambda_0)\Bigg(\sum_{s=1}^{p-1} r_{s,1}^{(j)}\Lambda_{p-s}^{(j)}(\ell)\psi_{0,1} + \sum_{t=1}^{p-1}\Lambda_t^{(j)}(\ell)\widehat{\phi}_{p-t,1}^{(j)}\\
&\qquad - r_{p-1,2}^{(j)}C_2\mathrm{W}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot} - \mathrm{W}\breve{Q}_{2,p-1}^{(j)}(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Bigg),\\
&\widehat{\phi}_{2,p}^{(j)} =\mathcal{R}_2(\lambda_0)\Bigg(\sum_{s=1}^{p-1} r_{s,2}^{(j)}\Lambda_{p-s}^{(j)}(\ell)\psi_{0,2} + \sum_{t=1}^{i-1}\Lambda_t^{(j)}(\ell)\widehat{\phi}_{p-t,2}^{(j)}\\
&\qquad - r_{p-1,1}^{(j)}C_1\mathrm{V}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot} - \mathrm{V}\breve{Q}_{1,p-1}^{(j)}(\cdot-2\ell,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Bigg),\\
&\widehat{\phi}_{1,p}^{(j)}(x,\ell) = \breve{Q}_{1,p}^{(j)}(x,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x} \qquad \text{при} \quad x\to-\infty, \quad p\geqslant 2,\\
&\widehat{\phi}_{2,p}^{(j)}(x,\ell) = \breve{Q}_{2,p}^{(j)}(x,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x} \qquad \text{при} \quad x\to+\infty, \quad p\geqslant 2.
\end{aligned}
$$

Аналогично последним формулам описывается и поведение на бесконечности функций $\psi_{i,p}^{(j)}$, необходимо лишь заменить $\breve{Q}_{i,p}^{(j)}$ на некоторые функции $Q_{i,p}^{(j)}$. В последних формулах $\mathrm{F}_p^{(j)} = \begin{pmatrix} f_{p,1}^{(j)} \\ f_{p,2}^{(j)} \end{pmatrix}$ – вектор с компонентами,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}_{p,1}^{(j)} &= \Big(\mathrm{W}\breve{Q}_{2,p}^{(j)}(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}, \psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R})},\\
\mathrm{f}_{p,2}^{(j)} &= \Big(\mathrm{V}\breve{Q}_{1,p}^{(j)}(\cdot-2\ell,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}, \psi_{0,2}\Big)_{L_2(\mathbb{R})},
\end{aligned}
$$

$r_0^{(j)}$ – собственные вектора матрицы B из (0.28), компоненты которых вычисляются по формуле (0.29), $r_p^{(j)}$ – вектора, удовлетворяющие уравнению (0.30) и ортогональные векторам $r_0^{(j)}$, $\breve{Q}_{p,j}(x,\ell)$ – некоторые полиномы по x и ℓ, $\breve{Q}_{1,0}(x,\ell)\equiv C_1$, $\breve{Q}_{2,0}(x,\ell)\equiv C_2$. При выводе формул для Λ_p и $\phi_{i,p}$ мы, как и в случае кратности $1+0$, пользовались равенствами, аналогичными (2.4).

Пусть теперь λ_0 – двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, а $\psi_{0,1}$, $\psi_{0,2}$ – соответствующие ему собственные функции. Так как W – финитный потенциал, то справедливы равенства

$$\psi_{0,j}(x)=C_j\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x}\quad\text{при}\quad x\to-\infty,$$

где C_j – некоторые константы, $j=1,2$. Согласно теореме 0.7, при достаточно больших ℓ в малой фиксированной окрестности точки λ_0 существует ровно два собственных значения $\lambda_\ell^{(j)}$ оператора $\mathcal{H}_\ell$, сходящихся к λ_0 при $\ell\to+\infty$. Эти собственные значения $\lambda_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, представимы в виде сходящихся для достаточно больших ℓ рядов

$$\lambda_\ell^{(j)}=\lambda_0+\sum_{p=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-4p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\Lambda}_p^{(j)}(\ell). \tag{2.6}$$

Соответствующие собственные функции $\psi_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, можно выбрать так, что они представимы в виде сходящихся в $W_2^2(\mathbb{R})$ для достаточно больших ℓ рядов

$$\begin{aligned}\psi_\ell^{(j)}(x)=&r_{0,1}^{(j)}(\ell)\psi_{0,1}(x-\ell)+r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}(x-\ell)\\&+\sum_{p=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-(4p-2)\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{2,p}^{(j)}\big(x+\ell,\ell\big)\\&+\sum_{p=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-4p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{1,p}^{(j)}\big(x-\ell,\ell\big).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Равенства (0.37)–(0.44) в данном случае имеют вид

$\widetilde{\Lambda}_1^{(1)}(\ell)=\widetilde{\Lambda}_1^{(2)}(\ell)=0,$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Lambda}_2^{(j)}(\ell)=\frac{1}{2}\left(b_{11}+b_{22}+(-1)^j\sqrt{\big(b_{11}-b_{22}\big)^2+4|b_{12}|^2}\right),\quad j=1,2,\\
&b_{it}=\left(\mathrm{W}\breve{Q}_i(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x},\psi_{0,t}\right)_{L_2(\mathbb{R})},\quad i,t=1,2,\\
&\widetilde{\phi}_{1,p}^{(j)}=\breve{\phi}_{1,p}^{(j)}+\sum_{t=1}^{2}r_{p,t}^{(j)}\psi_{0,t},\quad \widetilde{\phi}_{2,1}^{(j)}=\sum_{t=1}^{2}r_{0,t}^{(j)}w_{2,t},\quad p\geqslant 1,\\
&w_{2,t}=-r_{0,t}^{(j)}C_t\big(\mathcal{H}_2-\lambda_0\big)^{-1}\mathrm{V}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x},\quad t=1,2,\\
&\breve{\phi}_{1,1}^{(j)}=\mathcal{R}_1(\lambda_0)\left(\sum_{t=1}^{2}r_{0,t}^{(j)}\left(\widetilde{\Lambda}_2^{(j)}(\ell)\psi_{0,t}-\sum_{q=1}^{2}\mathrm{W}\breve{Q}_t(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\right)\right),\\
&\widetilde{\phi}_{2,p}^{(j)}=\breve{\phi}_{2,p}^{(j)}+r_{1,1}^{(j)}w_{2,1}+r_{1,2}^{(j)}w_{2,2},\quad p\geqslant 2,\\
&\widetilde{\Lambda}_p^{(j)}(\ell)=\left(\mathrm{F}_p^{(j)},r_0^{(j)}\right)_{\mathbb{C}^2},\\
&\mathrm{F}_p^{(j)}=\begin{pmatrix}\left(\mathrm{W}Q_{2,p-1}^{(j)}(\cdot+2\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot},\psi_{0,1}\right)_{L_2(\mathbb{R})}\\ \left(\mathrm{W}Q_{2,p-1}^{(j)}(\cdot+2\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot},\psi_{0,2}\right)_{L_2(\mathbb{R})}\end{pmatrix},\ p\geqslant 3,\\
&\breve{\phi}_{1,p}^{(j)}=\mathcal{R}_1(\lambda_0)\Bigg(\sum_{t=1}^{2}\left(\sum_{s=2}^{p-1}r_{p-s,t}^{(j)}\widetilde{\Lambda}_s^{(j)}(\ell)\psi_{0,t}-r_{p-2,t}^{(j)}\mathrm{W}\breve{Q}_t(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\right)\\
&\qquad+\sum_{t=2}^{p-1}\widetilde{\Lambda}_t^{(j)}(\ell)\breve{\phi}_{1,p-t}^{(j)}-\mathrm{W}Q_{2,p-1}^{(j)}(\cdot+2\ell,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\Bigg),\quad p\geqslant 3,\\
&\breve{\phi}_{2,p}^{(j)}=\big(\mathcal{H}_2-\lambda_0\big)^{-1}\left(\sum_{s=2}^{p-1}\widetilde{\Lambda}_s^{(j)}(\ell)\breve{\phi}_{2,p-s}^{(j)}-\mathrm{V}\breve{Q}_{1,p-1}^{(j)}(\cdot-2\ell,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}\cdot}\right),\quad p\geqslant 3,\\
&\breve{\phi}_{1,p}^{(j)}(x,\ell)=\breve{Q}_{1,p}^{(j)}(x,\ell)\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda_0}x}\qquad \text{при}\quad x\to-\infty,\quad p\geqslant 2,\\
&\breve{\phi}_{2,p}^{(j)}(x,\ell)=\breve{Q}_{2,p}^{(j)}(x,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x}\qquad \text{при}\quad x\to+\infty,\quad p\geqslant 1,\\
&w_{2,t}(x,\ell)=\breve{Q}_t(x,\ell)\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}x}\qquad \text{при}\quad x\to+\infty,\quad t=1,2.
\end{aligned}
$$

Аналогично последним формулам описывается и поведение на бесконечности функций $\widetilde{\psi}_{i,p}^{(j)}$, необходимо лишь заменить $\breve{Q}_{i,p}^{(j)}$ на некоторые функции $Q_{i,p}^{(j)}$.

Здесь $r_0^{(j)}$ – собственные вектора матрицы B из (0.45), компоненты которых вычисляются по формуле (0.46), $r_p^{(j)}$ – вектора, удовлетворяющие уравнению (0.47), (с учётом приведённых ниже формул (2.8)), и ортогональные векторам $r_0^{(j)}$, $\breve{Q}_{p,j}(x,\ell)$ – некоторые полиномы по x и ℓ, $\breve{Q}_{1,0}(x,\ell)\equiv C_1$, $\breve{Q}_{2,0}(x,\ell)\equiv C_2$. При выводе формул для $\widetilde{\Lambda}_j$ и $\widetilde{\phi}_{p,j}$ мы вновь воспользовались формулами, аналогичными (2.4). В данном случае функции $\widetilde{\Lambda}_j(\ell)$, $\widetilde{\phi}_{p,j}(\cdot,\ell)$ также как и в предыдущих двух случаях являются полиномами по ℓ. Члены рядов (0.35), (0.36) и (2.6), (2.7) связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{2p}^{(j)}=\mathrm{e}^{-4p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\Lambda}_p^{(j)}, && \Lambda_{2p-1}^{(j)}=0,\\
&\phi_{1,2p}^{(j)}=\mathrm{e}^{-4p\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{1,p}^{(j)}, && \phi_{1,2p-1}^{(j)}=0,\\
&\phi_{2,2p-1}^{(j)}=\mathrm{e}^{-(4p-2)\sqrt{-\lambda_0}\ell}\widetilde{\phi}_{2,p}^{(j)}, && \phi_{2,2p}^{(j)}=0.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Аналогом оператора (0.1) в многомерном пространстве является оператор

$$\mathcal{H}_\ell=-\Delta+\mathrm{W}(x-\ell)+\mathrm{V}(x+\ell)\quad\text{в}\quad L_2(\mathbb{R}^d),\quad \mathcal{D}(\mathcal{H}_\ell)=W_2^2(\mathbb{R}^d),$$

где W, V – ограниченные измеримые финитные потенциалы, $d\geqslant 2$, $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_d)$. Операторы $\mathcal{H}_j$ здесь вводятся аналогично (2.1):

$$\mathcal{H}_0=-\Delta,\quad \mathcal{H}_1=-\Delta+\mathrm{W},\quad \mathcal{H}_2=-\Delta+\mathrm{V},$$

с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Поведение на бесконечности собственной функции ψ_0, соответствующей простому изолированному собственному значению λ_0, оператора $\mathcal{H}_1$ определяется поведением на бесконечности функции Грина:

$$\psi_0(x)=O\Big(|x|^{-(d-1)/2}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0}|x|}\Big),\quad x\to\infty.\tag{2.9}$$

Для доказательства последней формулы следует записать уравнение на собственную функцию ψ_0 в виде $-\Delta\psi_0=-\mathrm{W}\psi_0$. Рассматривая затем $-\mathrm{W}\psi_0$ как правую часть, решение ψ_0 последнего уравнения можно выразить с помощью функции Грина.

Аналогично легко проверить, что для $f \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и для финитных функций ς_j имеет место соотношение

$$\big(\mathcal{R}_i(\lambda)\varsigma_i(|\cdot|)f\big)(x) = O\Big(|x|^{-(d-1)/2}\mathrm{e}^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}|x|}\Big), \tag{2.10}$$

$x \to \infty$, $i = 1, 2$. Подставляя соотношения (2.9), (2.10) в представления (0.8), выводим

$$\varepsilon(X) = O\Big(|\ell|^{-(d-1)/2}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda_0-\beta}|\ell|}\Big), \quad \ell \to \infty,$$

где β – некоторое фиксированное число. При этом структура рядов (0.9), (0.10) в многомерном случае будет сложнее по сравнению с одномерным, так как поведение собственной функции ψ_0 существенно сложнее, чем в (2.2), (2.3). Аналогичная ситуация имеет место и в случаях кратности $1+1$ и $2+0$.

3 Резольвента и сходимость спектра

В данном параграфе будут доказаны теоремы 0.1, 0.2, 0.3, 0.4. В первом разделе данного параграфа формулируются и доказываются вспомогательные утверждения, необходимые нам для доказательства этих теорем. Во втором разделе доказывается теорема 0.1, в третьем – теорема 0.2, в четвёртом – теоремы 0.3, 0.4.

3.1 Вспомогательные утверждения

В настоящем разделе будет доказан ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 0.1.

Лемма 3.1. *Для любого $u \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ верна оценка*

$$\|u\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\Big(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big), \tag{3.1}$$

где константа C не зависит от u.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^d$ выберем разбиение единицы $1 = \sum\limits_p \chi_p^2(x)$, такое, что для каждой из функций χ_p выполнено неравенство

$$0 \leqslant \|\chi_p\|_{C^{2m}(\operatorname{supp}\chi_p)} \leqslant C,$$

где константа C не зависит от p, χ_p – бесконечно дифференцируемые срезающие функции. Будем предполагать, что сдвигом носитель каждой из срезающих функций можно поместить в некоторую ограниченную область Ω, не зависящую от p.

Пусть $\mathcal{H}_0 u = f$, тогда

$$\mathcal{H}_0 \chi_p u = \chi_p f + g_p, \quad g_p := \sum_{\substack{\rho \in \mathbf{Z}_+^d \\ 0 \leqslant |\rho| \leqslant 2m-1}} \mathrm{B}_\rho^p \frac{\partial^\rho u}{\partial x^\rho}, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{B}_\rho^p \in C(\mathbb{R}^d)$ – финитные матричнозначные функции с носителями в $\operatorname{supp}\chi_p$ такие, что верна оценка

$$\|g_p\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\, \|u\|^2_{W_2^{2m-1}(\operatorname{supp}\chi_p;\mathbb{C}^n)}\,, \tag{3.3}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от u и p.

Введём обозначения: $u_p := \chi_p u$, $f_p := \chi_p f$. Пусть $d \geqslant 2$. Условие сильной эллиптичности (0.3) и определение сильной эллиптической системы из [18, Гл. I, §2] позволяет воспользоваться теоремой 10.5 из [18, Гл. IV, §10.2], согласно которой выполнено неравенство

$$\|u_p\|^2_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\Big(\|u_p\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|\mathcal{H}_0 u_p\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big), \tag{3.4}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от p и u. Из последнего неравенства, (3.2), (3.3) и равенства

$$\chi_p \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\chi_p u - u\frac{\partial^\beta \chi_p}{\partial x^\beta} - \sum_{\substack{\rho \in \mathbf{Z}_+^d \\ 1 < |\rho| < |\beta|}} \frac{\beta!}{\rho!(\beta-\rho)!}\frac{\partial^\rho \chi_p}{\partial x^\rho}\frac{\partial^{\beta-\rho} u}{\partial x^{\beta-\rho}},$$

где $|\beta| = 2m$, следует

$$\sum_{\substack{\beta \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta| \leqslant 2m}} \left\|\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{Z}_+^d \\ |\beta| \leqslant 2m}} \sum_p \left\|\chi_p \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\right\|^2_{L_2(\operatorname{supp}\chi_p;\mathbb{C}^n)}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_p \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\ |\beta|\leqslant 2m}} \Big\|\frac{\partial^\beta u_p}{\partial x^\beta}\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \sum_p \|u\|^2_{W_2^{2m-1}\left(\operatorname{supp}\chi_p;\mathbb{C}^n\right)}\Big)$$

$$\leqslant C\sum_p \left(\|\chi_p f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|u\|^2_{W_2^{2m-1}(\operatorname{supp}\chi_p;\mathbb{C}^n)}\right)$$

$$\leqslant C\Big(\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|u\|^2_{W_2^{2m-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big),$$

где C – некоторая константа, не зависящая от u. Вновь пользуясь теоремой 4.14 из [17, Гл. IV, §2], имеем

$$\|u\|^2_{W_2^{2m-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \delta\,\|u\|^2_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + C(\delta)\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)}\,,$$

где δ – произвольная малая константа, $C(\delta)$ – некоторая константа, не зависящая от u. Из последних двух неравенств вытекает утверждение леммы для $d \geqslant 2$.

Пусть теперь $d = 1$. Доказательство в этом случае по сути воспроизводит приведенные выше аргументы для многомерного случая, необходимо лишь отдельно доказать неравенство (3.4), так как в цитированной выше работе [18] разбирался только многомерный случай. Докажем его. С учётом определения оператора $\mathcal{H}_0$ имеем:

$$\mathcal{H}_0 u_p = \mathrm{a}_{mm}\frac{d^{2m}u_p}{dx^{2m}} + \sum_{\rho=0}^{2m-1} \widehat{\mathrm{b}}_\rho \frac{d^\rho u_p}{dx^\rho}$$

где $\widehat{\mathrm{b}}_\rho \in C(\mathbb{R})$ – периодические матричнозначные функции, a_{mm} – коэффициент при старшей производной в определении оператора $\mathcal{H}_0$. В силу условия эллиптичности (0.3) все элементы матрицы $\mathrm{a}_{mm}^{-1}(x)$ равномерно ограничены. Умножая уравнение (3.2) на матрицу a_{mm}^{-1} слева, получим

$$\frac{d^{2m}u_p}{dx^{2m}} + \sum_{\rho=0}^{2m-1} \mathrm{a}_{mm}^{-1}\widehat{\mathrm{b}}_\rho \frac{d^\rho u_p}{dx^\rho} = \mathrm{a}_{mm}^{-1}\mathcal{H}_0 u_p. \tag{3.5}$$

Согласно [17, Гл. IV, §2, Теорема 4.14] выполнено неравенство

$$\|u_p\|^2_{W_2^{2m-1}(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)} \leqslant \delta\big\|u_p^{(2m)}\big\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)} + C(\delta)\,\|u_p\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)}\,,$$

где δ – произвольная малая константа, $C(\delta)$ – некоторая константа, не зависящая от u_p. Пользуясь последним неравенством, ограниченностью матриц $\widehat{\mathrm{b}}_\rho$, a_{mm}^{-1} и описанными выше свойствами функций χ_p из уравнения (3.5), выводим оценку

$$\|u_p^{(2m)}\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)} \leqslant \delta\|u_p^{(2m)}\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)} + C(\delta)\|u_p\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)} \\ + C\|\mathcal{H}_0 u_p\|^2_{L_2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)},$$

где δ – произвольная малая константа, $C(\delta)$, C – некоторые константы, не зависящие от u_p. Выбрав теперь δ достаточно малым, получаем требуемую оценку (3.4) в одномерном случае. □

Лемма 3.2. *Оператор $\mathcal{H}_0$ замкнут.*

Доказательство. Пусть u_p и $\mathcal{H}_0 u_p$ – последовательности функций, сходящиеся в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к элементам u и v соответственно. Для доказательства замкнутости оператора $\mathcal{H}_0$ нужно показать, что $u \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{H}_0 u = v$. Так как пространство $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ полное, то достаточно показать, что последовательность u_p фундаментальна в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Докажем этот факт.

Из леммы 3.1 и сходимости последовательностей $u_p, \mathcal{H}_0 u_p$ получаем:

$$\big\|u_p - u_s\big\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\Big(\big\|\mathcal{H}_0 u_p - \mathcal{H}_0 u_s\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\ + \big\|u_p - u_s\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big) \to 0$$

при $p, s \to +\infty$. Следовательно, последовательность u_p фундаментальна и $u_p \to u$ в $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Равенство $\mathcal{H}_0 u = v$ выполнено в силу ограниченности оператора $\mathcal{H}_0$, действующего из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathcal{H}_0 u_p - \mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\,\|u_p - u\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

□

Лемма 3.3. *Для любых ограниченных в пространстве $\mathbb{R}^d$ функций $f(x)$ и $g(x)$, таких что*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

имеет место равенство

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)g(x-p)| = 0.$$

Доказательство. Согласно условию леммы, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся ограниченная область $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ такая, что для всех x, не принадлежащих области Ω_ε, имеет место оценка $|f(x)| < \varepsilon$. Из последнего неравенства и ограниченности функции $g(x)$ выводим:

$$|f(x)g(x-p)| \leqslant C\varepsilon \tag{3.6}$$

для всех x, не принадлежащих области Ω_ε, и для любого $p \in \mathbb{R}^d$. Здесь C – некоторая константа. Аналогичные рассуждения верны и для функции $g(x)$. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся ограниченная область Q_ε такая, что для всех x, не принадлежащих области Q_ε имеет место неравенство

$$|g(x)| < \varepsilon.$$

Выберем теперь $p_0 \in \mathbb{R}$ так, чтобы для всех x из области Ω_ε и всех $|p| > p_0$ точки $x - p$ не принадлежали области Q_ε. Из ограниченности функции $f(x)$ и неравенства (3.1) выводим оценку

$$|f(x)g(x-p)| \leqslant C\varepsilon,$$

которая верна для всех x, не принадлежащих области Ω_ε при $|p| > p_0$. Справедливость леммы теперь следует из последнего неравенства и (3.6). $\square$

Лемма 3.4. *Для любых $\lambda \in K$, $h \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и функции ς, удовлетворяющей условию (A1), существует единственное решение уравнения*

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda)u = \varsigma(|\cdot|)h \tag{3.7}$$

в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$*, которое представимо в виде*

$$u = \mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt} v, \tag{3.8}$$

где $0<\varepsilon<1$ *– некоторая константа,* v *– некоторая функция из пространства* $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$*. Справедлива оценка*

$$\|\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(Y)u\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C(Y)\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{3.9}$$

где функции η_i *удовлетворяют условию (A2),* $Y\in\Gamma$*, а* $C(Y)$ *– некоторая функция, такая что* $C(Y)\to 0$ *при* $Y\to\infty$*.*

Доказательство. Подставляя (3.8) в уравнение (3.7), получаем:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_0-\lambda)u =& \mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}(\mathcal{H}_0-\lambda)v\\ &+\sum_{\beta,\rho\in\mathbf{Z}_+^d}\widetilde{\mathrm{B}}_{\beta\rho}\frac{\partial^\beta \mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}}{\partial x^\beta}\frac{\partial^\rho v}{\partial x^\rho}=\varsigma h,\end{aligned}$$

где $0\leqslant|\rho|\leqslant 2m-1$, $1\leqslant|\beta|\leqslant 2m$, $|\beta+\rho|\leqslant 2m$, $\widetilde{\mathrm{B}}_{\beta\rho}\in C(\mathbb{R}^d)$ – матричнозначные функции, периодические относительно решётки Γ.

Вычисляя все производные функции $\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}$ до порядка $2m$ включительно, учитывая ограниченность производных функции a и деля последнее уравнение на $\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}$, получаем

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)v+\varepsilon\mathcal{A}v = g,\quad g:=\varsigma \mathrm{e}^{\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}h, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{A} := \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\ 0\leqslant|\rho|2m-1}}\widetilde{\mathrm{b}}_\rho\frac{\partial^\rho}{\partial x^\rho}, \tag{3.11}$$

где $\widetilde{b}_\rho$ – равномерно ограниченные функции, $\mathcal{A}$ – оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Для доказательства разрешимости уравнения (3.7) достаточно показать существование решения у последнего уравнения. Так как $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_0)$, то в силу обратимости оператора $\mathcal{H}_0 - \lambda$ уравнение (3.10) можно переписать в виде

$$\left(\mathrm{I} + \varepsilon \mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\right)(\mathcal{H}_0 - \lambda)v = g. \tag{3.12}$$

Для доказательства однозначной разрешимости последнего уравнения (3.12) достаточно доказать, что оператор $\varepsilon\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ является сжимающим. Докажем этот факт.

В силу ограниченной обратимости оператора $(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)^{-1}$, равномерной ограниченности функций $\widetilde{\mathrm{b}}_\rho$ и леммы 3.1 следует, что для любого $f \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &\leqslant C\|(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} f\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\ &\leqslant C\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от f. Выбирая ε достаточно малым, получаем, что оператор $\varepsilon\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}$ является сжимающим.

В свою очередь, это гарантирует обратимость оператора $\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}\left(\mathcal{H}_0 - \lambda\right)^{-1}$ и выполнение оценки

$$\left\|\left(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}\left(\mathcal{H}_0 - \lambda\right)^{-1}\right)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} < C, \tag{3.14}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от v и g. Так как операторы $(\mathcal{H}_0 - \lambda)$, $\left(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}\left(\mathcal{H}_0 - \lambda\right)^{-1}\right)$ обратимы, то уравнение (3.12) разрешимо и его решение представимо в виде

$$v = \left(\mathcal{H}_0 - \lambda\right)^{-1}\left(\mathrm{I} + \varepsilon\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\right)^{-1} g. \tag{3.15}$$

Пользуясь условием (A1) на функцию ς, убыванием на бесконечности функции $\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}$ и выбирая дополнительно $0 < \varepsilon < 1$, выводим оценку

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \Big\|\varsigma \mathrm{e}^{\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt} h\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\Big\|\mathrm{e}^{(\varepsilon-1)\int\limits_0^{|x|} a(t)dt} h\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$
$$\leqslant C\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

где C – некоторая константа, не зависящая от h. Из уравнения (3.15), неравенства (3.14), леммы 3.1 и последнего неравенства получаем

$$\|v\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \Big\|(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big(\mathrm{I}+\varepsilon\mathcal{A}\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\Big)^{-1} g\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$
$$\leqslant C\,\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

где C – некоторые константы, не зависящие от v и g.

Покажем справедливость оценки (3.9). В силу последнего неравенства, представления функции u в виде произведения двух функций v и $\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}$, выполнения условий (A1), (A2) и убывания функции $\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}$ имеем

$$\Big\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\left(\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(Y)u\right)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \Big\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\Big(\eta_i(|\cdot-Y|)\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|\cdot|} a(t)dt} v\Big)\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}} \Big\|C_{\beta\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\eta_i(|\cdot-Y|)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^{\rho-\alpha}\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|\cdot|} a(t)dt}}{\partial x^{\rho-\alpha}}\frac{\partial^{\beta-\rho}v}{\partial x^{\beta-\rho}}\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}} \Big\|b_{\alpha\beta\rho}\frac{\partial^\alpha\eta_i(|\cdot-Y|)}{\partial x^\alpha}\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|\cdot|} a(t)dt}\frac{\partial^{\beta-\rho}v}{\partial x^{\beta-\rho}}\Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$

$$\leqslant C_\beta(Y)\|h\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},$$

где $b_{\alpha\beta\rho}$ – равномерно ограниченные функции, зависящие от x,

$$C_\beta(Y) = C\sup_{\mathbb{R}^d}\Bigg\{\sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\ \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}^d_+\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\Big|\frac{\partial^\alpha\eta_i(|\cdot-Y|)}{\partial x^\alpha}\mathrm{e}^{-\varepsilon\int\limits_0^{|\cdot|} a(t)dt}\Big|^2\Bigg\},$$

C – некоторая константа, не зависящая от β и Y. В силу леммы 3.3 выполнено $C_\beta(Y) \to 0$ при $Y \to \infty$. Суммируя полученные оценки по β, приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 3.5. *Для любого $\lambda \in K$ верно*

$$\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \tau(X) \to +\infty.$$

Доказательство. Всюду в доказательстве леммы под символом $\|\cdot\|$ будем понимать норму линейного оператора, действующего в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Представим операторы $(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}$, где $j=1,\ldots,k$, в следующем виде

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1} &= \mathcal{S}(X_j)\left(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\right)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\\ &= \mathcal{S}(X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)\\ &\quad \big(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\big)^{-1}\mathcal{S}(-X_j).\end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$(\mathcal{H}_0-\lambda) = (\mathcal{H}_0-\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda),$$

оператор $(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}$ перепишем в виде

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1} =&\mathcal{S}(X_j)\big(\mathcal{H}_0-\lambda\big)^{-1}\\ &\big(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\big)\\ &\big(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\big)^{-1}\mathcal{S}(-X_j).\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в правой части последнего равенства, получаем

$$\begin{aligned}&(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1} = \mathcal{S}(X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\\ &\Big(\mathrm{I}-\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\big(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\big)^{-1}\Big)\mathcal{S}(-X_j)\\ &= \big(\mathcal{H}_0-\lambda\big)^{-1}-\big(\mathcal{H}_0-\lambda\big)^{-1}\mathcal{L}_j\big(\mathcal{H}_0+\mathcal{L}_j-\lambda\big)^{-1}\\ &= \left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}-\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\mathcal{L}_j\left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1} = -\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\mathcal{L}_j\left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}.$$

Подставляя последнее равенство в (0.7) и применяя лемму 3.4, выводим

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_X\| &= \Big\| \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\mathcal{L}_j\left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}\mathcal{S}(X_j)\Big\| \\
&\leqslant \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \Big\|\mathcal{S}(-X_i)\varsigma_i(|\cdot|)\mathcal{L}_i^0\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i-X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\varsigma_j(|\cdot|)\mathcal{L}_j^0\eta_j(|\cdot|) \\
&\qquad \left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}\mathcal{S}(X_j)\Big\| \\
&\leqslant C\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \Big\|\eta_i(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i-X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\varsigma_j(|\cdot|)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\
&\leqslant C(X),
\end{aligned}$$

где $C(X)\to 0$ при $\tau(X)\to+\infty$. $\square$

Введём в рассмотрение оператор

$$\mathcal{Q}_X = -\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i),$$

действующий в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Лемма 3.6. *Для любого $\lambda\in K$ верно соотношение*

$$\|\mathcal{Q}_X\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \tau(X)\to+\infty.$$

Доказательство. Всюду в доказательстве леммы под символом $\|\cdot\|$ будем понимать норму линейного оператора, действующего в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Из определения оператора $\mathcal{Q}_X$, учитывая лемму 3.4 и ограниченность операторов $\mathcal{L}_i^0$ как операторов из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, выводим

$$\big\|\mathcal{Q}_X\big\| = \Big\| \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\Big\|$$

$$
\begin{aligned}
=&\Big\| \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda_0)^{-1}\varsigma_j(|\cdot|)\mathcal{L}_j^0\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\varsigma_i(|\cdot|)\\
&\qquad \mathcal{L}_i^0\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i)\Big\|\\
\leqslant&\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k}\Big\|\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda_0)^{-1}\varsigma_j(|\cdot|)\mathcal{L}_j^0\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\varsigma_i(|\cdot|)\\
&\qquad \mathcal{L}_i^0\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_i)\Big\|\\
\leqslant& C\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k}\Big\|\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j-X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\varsigma_i(|\cdot|)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&\leqslant C(X),
\end{aligned}
$$

где $C(X)\to 0$ при $\tau(X)\to+\infty$. $\square$

3.2 Равномерная резольвентная сходимость

В данном параграфе мы доказываем теорему 0.1.

Доказательство. Положим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 :=&(\mathcal{H}_X-\lambda)\Big(\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big)\\
=&\Big(\mathcal{H}_0+\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda\Big)\\
&\Big(\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big).
\end{aligned}
$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$
\mathcal{T}_1 = k\mathrm{I}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (k-1)\mathrm{I} - (k-1)\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1} \\
=&\mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1} \\
&- (k-1)\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Прибавим и вычтем $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}$ в правой части последнего равенства:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 =&\mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1} \\
&+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1} - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1} \\
&- (k-1)\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Сгруппируем второе и четвёртое слагаемые и вынесем $\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$ за скобки:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 =&\mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\big[(\mathcal{H}_0+\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-\lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big] \\
&+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1} \\
&- (k-1)\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}.
\end{aligned}
$$

В предпоследней сумме можно провести суммирование по j и сократить её затем с последней суммой. В результате всех проделанных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 =&\mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\left[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\right]\\ =&\mathrm{I}+\mathcal{P}_X.\end{aligned}$$

Так как $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0$ при $\tau(X)\to+\infty$, то $\mathcal{P}_X$ – сжимающий оператор, а оператор $(\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)$ ограничен и обратим.

Таким образом, для любого $f\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ функция

$$u=\left[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\right](\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)^{-1}f$$

является решением уравнения

$$(\mathcal{H}_X-\lambda)u=f. \tag{3.16}$$

Для доказательства единственности решения уравнения (3.16) рассмотрим оператор $\mathcal{T}_2$, который имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 :=&\Big(\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big)(\mathcal{H}_X-\lambda)\\ =&\Big(\sum_{j=1}^{k}\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Big)\\ &\Big(\mathcal{H}_0+\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)-\lambda\Big).\end{aligned}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 =&k\mathrm{I}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)-(k-1)\mathrm{I}\\ &-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\\ =&\mathrm{I}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\end{aligned}$$

$$- (k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j).$$

Воспользовавшись равенством $\mathrm{I} = (\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}(\mathcal{H}_0-\lambda)$, получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 =& \mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0-\lambda)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\\
&- (k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\\
=& \mathrm{I} + \Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}(\mathcal{H}_0-\lambda)\mathcal{S}(X_i) - (k-1)\mathrm{I}\Big)\\
&(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j).
\end{aligned}$$

Учитывая равенство $(\mathcal{H}_0-\lambda) = (\mathcal{H}_0-\mathcal{L}_i+\mathcal{L}_i-\lambda)$, оператор $\mathcal{T}_2$ перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_2 =& \mathrm{I} + \Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}(\mathcal{H}_0-\mathcal{L}_i+\mathcal{L}_i-\lambda)\mathcal{S}(X_i) - (k-1)\mathrm{I}\Big)\\
&(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\\
=& \mathrm{I} - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_j)(\mathcal{H}_0-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\\
=& \mathrm{I} + \mathcal{Q}_X.
\end{aligned}$$

Так как $\|\mathcal{Q}_X\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \to 0$ при $\tau(X)\to\infty$, то $\mathcal{Q}_X$ – сжимающий оператор, а оператор $(\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X)$ ограничен и обратим. Таким образом, доказаны равенства

$$\begin{aligned}
&\Bigg[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)\\
&\qquad - (k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Bigg](\mathcal{H}_X-\lambda) = \big(\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X\big),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X\Big)^{-1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(\,-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)& \\
-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Bigg]&(\mathcal{H}_X-\lambda)=\mathrm{I}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Докажем теперь единственность решения уравнения (3.16). Предположим, что таких решений два u_1 и u_2. Их разность – функция $u = u_1 - u_2$ является решением уравнения $(\mathcal{H}_X-\lambda)u = 0$. Подействовав на последнее уравнение слева оператором

$$
u=(\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\right]
$$

и учитывая (3.17), (3.18) получим:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}+\mathcal{Q}_X)^{-1}\Bigg[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(\,-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)& \\
-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Bigg]&(\mathcal{H}_X-\lambda)u=0.
\end{aligned}
$$

И потому $u = 0$. Таким образом, доказано существование единственного решение уравнения (3.16), следовательно, единственного обратного оператора $(\mathcal{H}_X-\lambda)^{-1}$ для достаточно больших $\tau(X)$. С учётом определения оператора $\mathcal{T}_1$ обратный оператор $(\mathcal{H}_X-\lambda)^{-1}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}_X-\lambda)^{-1}=\Bigg[\sum_{i=1}^{k}\mathcal{S}(\,-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i)& \\
-(k-1)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\Bigg]&\left(\mathrm{I}+\mathcal{P}_X\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Доказательство замкнутости оператора $\mathcal{H}_X$ проводится аналогично доказательству леммы 3.2. Единственным отличием является вывод априорной оценки (3.1). В данном случае она следует из равенства (3.19), ограниченности оператора $\mathcal{H}_X - \lambda$ как оператора из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и теоремы Банаха об обратном операторе, см., например, [12, Гл. IV, §5, п. 4, Теорема 3]. $\square$

3.3 Существенный спектр

В этом разделе доказывается инвариантность существенного спектра относительно возмущений. Символом i будем обозначать мнимую единицу, а $\sigma_{ess}(\cdot)$ – существенный спектр оператора.

Доказательство теоремы 0.2. Введём следующие обозначения. Пусть $\varsigma(r)$ – функция, удовлетворяющая условию (A1), а $\eta(r)$ – функция, удовлетворяющая условию (A2). Через $\mathcal{L}^0$ обозначим либо один из операторов $\mathcal{L}_i^0$, либо один из операторов $-\mathcal{L}_i^0$, либо положим $\mathcal{L}^0 = 0$. Определим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{L}$, действующий по правилу

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x) := \varsigma(|x|)\,\big(\mathcal{L}^0\eta(|\cdot|)u\big)\,(x), \tag{3.20}$$

с областью определения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с областью определения – пространством $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Будем предполагать, что оператор $\mathcal{H}$ самосопряжён. Если $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{R}$, то в силу критерия Вейля существует характеристическая последовательность, то есть, ограниченная и некомпактная в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ последовательность $\{u_p\} \subset W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ такая, что $f_p = (\mathcal{H} - \lambda)u_p \to 0$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при $p \to \infty$. Так как $(\lambda - \mathrm{i})$ попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}$, то в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ определён ограниченный оператор $(\mathcal{H} - \lambda + \mathrm{i})^{-1}$. По теореме Банаха об обратном операторе он ограничен как оператор из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Следовательно, последовательность $u_p = (\mathcal{H}-\lambda+\mathrm{i})^{-1}\,(f_p + \mathrm{i}u_p)$ ограничена в $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и слабо сходится в этом пространстве к некоторому элементу w с точностью до выделения подпоследовательности.

Обозначим $w_p = u_p - w$. Так как последовательность u_p сходится в w в пространстве $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, то

$$w_p \to 0 \quad \text{слабо в } W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{3.21}$$

Следовательно, $(\mathcal{H}-\lambda)u_p$ сходится слабо к $(\mathcal{H}-\lambda)w$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и ввиду сильной сходимости последовательности $(\mathcal{H}-\lambda)u_p$ к нулю получаем

$$(\mathcal{H}-\lambda)w_p \to 0 \qquad \text{сильно в } L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \qquad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{3.22}$$

Очевидно, что последовательность w_p ограничена и некомпактна в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Символом B_r далее будем обозначать шар радиуса r с центром в нуле. Используя компактность вложения $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $W_2^{2m-1}(B_r;\mathbb{C}^n)$ для всех r и применяя стандартный диагональный процесс, нетрудно проверить, что с точностью до выделения подпоследовательности

$$\|w_p\|_{W_2^{2m-1}(B_{p+1};\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{3.23}$$

Пусть $\chi_p \in C^{2m}(\mathbb{R}^d)$ – срезающие функции такие, что $\chi_p = 0$ в B_p, $\chi_p = 1$ в $\mathbb{R}^d \backslash B_{p+1}$, а все их производные до порядка $2m$ равномерно ограничены по p и по x для всех $x \in \overline{B_{p+1}\backslash B_p}$. Покажем, что последовательность $\chi_p w_p$ будет характеристической для оператора $\mathcal{H}+\widehat{\mathcal{L}}$ в точке λ, где $\widehat{\mathcal{L}}$ определяется аналогично оператору $\mathcal{L}$ равенством (3.20) с заменой ς, η, $\mathcal{L}^0$ на $\widehat{\varsigma}$, $\widehat{\eta}$, $\widehat{\mathcal{L}}^0$. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}^0$ – это либо один из операторов $\mathcal{L}_i^0$, либо один из операторов $-\mathcal{L}_i^0$, либо $\widehat{\mathcal{L}}^0 = 0$, а $\widehat{\varsigma}$ и $\widehat{\eta}$ – функции, удовлетворяющие условиям (A1) и (A2) соответственно. В качестве области определения оператора $\mathcal{H}+\widehat{\mathcal{L}}$ вновь выбираем пространство $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и предполагаем, что данный оператор самосопряжён.

Из (3.23) следует, что

$$\|(1-\chi_p)w_p\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \|(1-\chi_p)w_p\|_{L_2(B_{p+1};\mathbb{C}^n)} \leqslant \|w_p\|_{L_2(B_{p+1};\mathbb{C}^n)} \to 0$$

при $p\to\infty$. Так как $\chi_p w_p = w_p - (1-\chi_p)w_p$, то из последней сходимости и некомпактности последовательности w_p вытекает некомпактность последовательности $\chi_p w_p$. Ясно, что

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}+\widehat{\mathcal{L}}-\lambda)\chi_p w_p =&(\mathcal{H}_0-\lambda)\chi_p w_p + (\mathcal{L}+\widehat{\mathcal{L}})\chi_p w_p\\ =&\chi_p(\mathcal{H}-\lambda)w_p + (\mathcal{L}+\widehat{\mathcal{L}})\chi_p w_p\\ &-\chi_p\mathcal{L}w_p + g_p,\end{aligned} \tag{3.24}$$

где функции g_p выражаются линейно через производные χ_p и w_p и удовлетворяют оценкам

$$\|g_p\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|w_p\|_{W_2^{2m-1}(B_{p+1};\mathbb{C}^n)}\to 0, \tag{3.25}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от p. В силу определения срезающих функций χ_p, убывания на бесконечности функций ς и η, а также леммы 3.3 следует:

$$\sup_{\mathbb{R}^d}|\chi_p\varsigma(|\cdot|)|\to 0,\quad \max_{|\beta|\leqslant 2m}\sup_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial^\beta(\eta(|\cdot|)\chi_p)}{\partial x^\beta}\Big|\to 0,$$
$$\max_{|\beta|\leqslant 2m}\sup_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial^\beta\big(\widehat{\eta}(|\cdot|)\chi_p\big)}{\partial x^\beta}\Big|\to 0$$

при $p\to+\infty$. Таким образом:

$$\begin{aligned}\big\|\chi_p\mathcal{L}w_p\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &= \big\|\chi_p\varsigma(|\cdot|)\mathcal{L}^0\eta w_p\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &\leqslant \sup_{\mathbb{R}^d}\big|\chi_p\varsigma(|\cdot|)\big|\big\|\mathcal{L}^0\eta(|\cdot|)w_p\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &\leqslant C\sup_{\mathbb{R}^d}\big|\chi_p\varsigma(|\cdot|)\big|\big\|w_p\big\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\to 0,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\big\|(\mathcal{L}+\widehat{\mathcal{L}})\chi_p w_p\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\leqslant C\Big(\big\|\eta(|\cdot|)\chi_p w_p\big\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &+\big\|\widehat{\eta}(|\cdot|)\chi_p w_p\big\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big)\leqslant C\Big(\max_{|\beta|\leqslant 2m}\sup_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial^\beta\big(\eta(|\cdot|)\chi_p\big)}{\partial x^\beta}\Big|\\ &+\max_{|\beta|\leqslant 2m}\sup_{\mathbb{R}^d}\Big|\frac{\partial^\beta\big(\widehat{\eta}(|\cdot|)\chi_p\big)}{\partial x^\beta}\Big|\Big)\big\|w_p\big\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\to 0\end{aligned}$$

при $p \to \infty$, где C – некоторые константы, не зависящие от p. Из ограниченности последовательности w_p, соотношений (3.21), (3.22), (3.24), (3.25) и последних сходимостей следует, что $(\mathcal{H}+\widehat{\mathcal{L}}-\lambda)\chi_p w_p \to 0$ при $p \to +\infty$. Таким образом, доказано вложение $\sigma_{ess}(\mathcal{H}) \subseteq \sigma_{ess}(\mathcal{H}+\widehat{\mathcal{L}})$.

Полагая теперь $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, $\mathcal{L} = 0$, $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_i$, $\varsigma = \widehat{\varsigma} = \varsigma_i$, $\eta = \widehat{\eta} = \eta_i$, получаем, что $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_0) \subseteq \sigma_{ess}(\mathcal{H}_i)$. Аналогично доказываем обратное вложение $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_i) \subseteq \sigma_{ess}(\mathcal{H}_0)$, выбирая $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_i$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$, $\widehat{\mathcal{L}} = -\mathcal{L}_i$, $\varsigma = \widehat{\varsigma} = \varsigma_i$, $\eta = \widehat{\eta} = \eta_i$. Равенство $\sigma_{ess}(\mathcal{H}_0) = \sigma_{ess}(\mathcal{H}_X)$ доказывается аналогично рассуждениям, приведённым выше. Следует вначале положить $\mathcal{L} = 0$ и $\widehat{\mathcal{L}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$, а затем $\mathcal{L} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$, $\widehat{\mathcal{L}} = -\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$. При этом все приведённые выше сходимости и оценки остаются верными. $\square$

3.4 Сходимость спектра

Доказательство теоремы 0.3. Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что для любого $\gamma > 0$ и любого компакта Π найдётся $\tau_0(\gamma,\Pi)$ такое, что при всех $\tau(X) > \tau_0(\gamma,\Pi)$ существует резольвента возмущённого оператора для всех λ, расстояние от которых до спектра σ_0 больше γ.

Пусть $(\mathcal{H}_0 - \lambda)u = f$. В силу формулы (3.16) из [11, Гл. V,§3, п.5] имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma_0(\mathcal{H}_0))}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.$$

Из леммы 3.1, учитывая предыдущее неравенство, выводим оценку

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &\leqslant C\Big(\big\|\lambda u + f\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big)\\ &\leqslant C\Big(\big\|f\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} + (|\lambda|+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big) \qquad (3.26)\\ &\leqslant C\frac{|\lambda|+1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(\mathcal{H}_0))}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где C – некоторые константы, не зависящие от u и λ. Аналогичные неравенства справедливы для операторов $\mathcal{H}_j$, $j = 1, \ldots, k$. Действительно, пусть $(\mathcal{H}_j - \lambda)u_j = f$, $j = 1, \ldots, k$. Вновь пользуясь формулой (3.16) из [11, Гл. V,§3, п.5], выводим

$$\|u_j\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_j))}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.$$

Представим уравнение $(\mathcal{H}_j - \lambda)u_j = f$, $j = 1, \ldots, k$ в виде $(\mathcal{H}_j - \mathrm{i})u_j = g$, где $g = f + (\lambda - \mathrm{i})u_j$. В силу самосопряжённости $\mathcal{H}_j$ операторы $(\mathcal{H}_j - \mathrm{i})^{-1}$, $j = 1, \ldots, k$, ограничены как операторы из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Кроме того, операторы $\mathcal{H}_j - \mathrm{i}$ ограничены как операторы из $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Поэтому в силу теоремы Банаха об обратном операторе операторы $(\mathcal{H}_j - \mathrm{i})^{-1}$, $j = 1, \ldots, k$, ограничены как операторы из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то есть,

$$\begin{aligned}
\|u_j\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &= \|(\mathcal{H}_j - \mathrm{i})^{-1}(f + (\lambda - \mathrm{i})u_j)\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\
&\leqslant C\|(f + (\lambda - \mathrm{i})u_j)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\
&\leqslant C\Big(1 + \frac{|\lambda + \mathrm{i}|}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_j))}\Big)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от λ и f.

С учётом последней оценки и (3.26), неравенство (3.13) в лемме 3.4 для оператора $\mathcal{A}$, определённого равенством (3.11), примет вид

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} &\leqslant C\|(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}f\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \\
&\leqslant C\frac{|\lambda| + 1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_0)}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},
\end{aligned}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от λ. Выберем теперь ε так, чтобы

$$C\varepsilon\frac{|\lambda| + 1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_0)} < 1$$

равномерно для всех $\lambda \in \mathrm{M}_\gamma := \{\lambda : \operatorname{dist}(\lambda, \sigma_0 \bigcap \Pi) > \gamma\}$. Тогда справедлива оценка (3.9) из леммы 3.4, в которой $C(Y) \to 0$ при

$Y \to \infty$ равномерно по $\lambda \in M_\gamma$. Откуда следует справедливость неравенства $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C(X)$, где $C(X) \to 0$ при $\tau(X) \to +\infty$ равномерно по $\lambda \in M_\gamma$.

Таким образом, для любого $\gamma > 0$ и любого компакта Π существует $\tau_0 = \tau_0(\gamma, \Pi)$ такое, что при всех $\tau(X) > \tau_0(\gamma, \Pi)$ существует резольвента возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, определённая равенством (0.6) при всех $\lambda \in \mathrm{M}_\gamma$, то есть, $\big(\sigma(\mathcal{H}_X) \bigcap \Pi\big) \subset \{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma_0 \bigcap \Pi) < \gamma\}$. Последнее вложение доказывает теорему. $\square$

Замечание 3.1. Если операторы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_X$, $i = 1, \ldots, k$ – самосопряжены, $\lambda \in M_\gamma$, то представление (3.8) для решения уравнения (3.7) верно одновременно для всех $\lambda \in M_\gamma$ с параметром ε и константой C, зависящими лишь от γ и не зависящими от $h \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\lambda \in M_\gamma$.

Доказательство теоремы 0.4. Всюду в доказательстве под символом $\|\cdot\|$ будем понимать операторную норму $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$.

Пусть K_r – окружность с центром в точке λ_0 и достаточно малым радиусом r, так что $K_r \subset \overline{U}$. Из теоремы 0.1 и рассуждений предыдущего доказательства и замечания 3.1 следует справедливость равенства

$$\Big\|(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} - \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\Big\| \to 0.$$

равномерно по $\lambda \in K_r$. Проинтегрировав последнее соотношение по замкнутому контуру K_r, получаем

$$\begin{aligned} \Big\| \int\limits_{K_r} (\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} d\lambda - \int\limits_{K_r} \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) d\lambda \\ - (k-1) \int\limits_{K_r} (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} d\lambda \Big\| \to 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

В силу того, что оператор $\mathcal{H}_0$ самосопряжен, а окружность K_r не содержит точек спектра, верно равенство

$$\int\limits_{K_r} (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} d\lambda = 0. \tag{3.29}$$

Так как λ_0 – собственное значение кратности $p = p_1 + \ldots + p_k$, то есть, λ_0 является собственным значением кратности p_i каждого из операторов $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, k$, а $\psi_{0,i}^{(j)}$, где $j = 1, \ldots, p_i$ – соответствующие собственные функции, то согласно формуле (3.21) из [11, Гл. V, §3, п. 5] выполнены соотношения

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{K_r} (\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1} d\lambda = \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{0,i}^{(j)} \big(\bullet, \psi_{0,i}^{(j)}\big),$$

где $\psi_{0,i}^{(j)}$ – собственные функции, соответствующие предельному собственному значению λ_0, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, p_i$. В силу последнего равенства и (3.29) соотношение (3.28) примет вид

$$\Big\| \int\limits_{K_r} (\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} d\lambda - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{0,i}^{(j)}(\cdot - X_i) \Big(\bullet, \psi_{0,i}^{(j)}(\cdot - X_i)\Big) \Big\| \to 0. \tag{3.30}$$

Второе слагаемое в последнем соотношении отлично от нуля. Следовательно, внутри любой окружности K_r при достаточно малых r существует по крайней мере p собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ и соответствующие ему собственные функции, то есть, существуют по крайней мере p собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к λ_0 при $\tau(X) \to +\infty$. Покажем, что число собственных значений не превосходит p.

Интеграл по окружности K_r в левой части (3.30) – это проектор на собственные функции возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, соответствующие собственным значениям, сходящимся к λ_0 при $\tau(X) \to +\infty$. Второе слагаемое в (3.30) – это проектор на функции $\mathcal{S}(-X_i)\psi_{0,i}^{(j)}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, p_i$. Ранг последнего равен p. Тогда в силу сходимости (3.30), формул (4.33), (4.43) из [11, Гл. I, §4, п. 6] и формулы (1.19) из [11, Гл. II, §1, п. 4] следует, что тоже верно и для проектора в (3.30), представленного интегралом при достаточно больших $\tau(X)$. То есть, существует ровно p собственных значений λ_X^j, $j = 1, \ldots, p$ возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, сходящихся к λ_0 при $\tau(X) \to +\infty$. $\square$

4 Собственные значения и собственные функции – случай простого предельного собственного значения

В данном параграфе будет доказана теорема 0.5. В первом разделе уравнение на собственные значения возмущённого оператора сводится к некоторому регулярно возмущённому уравнению в специальном гильбертовом пространстве с помощью новой оригинальной методики. Часть этой методики основана на несамосопряжённой версии метода Бирмана-Швингера, предложенной в работах [5], [3]. Во втором разделе полученное регулярно возмущённое уравнение анализируется и сводится к отысканию нулей некоторой голоморфной функции. На основе последнего факта строятся ряды для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора. Доказывается их равномерная сходимость и выводятся формулы для их членов.

4.1 Редукция уравнения на собственные значения

В настоящем разделе с помощью версии метода Бирмана – Швингера, предложенной в работах [5], [3], уравнение на собственное значение возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ сводится к некоторому регулярно возмущённому уравнению в специальном гильбертовом пространстве.

Рассмотрим уравнение на собственные значения:

$$\mathcal{H}_X\psi_X = \lambda_X\psi_X. \tag{4.1}$$

Перепишем его в виде

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_X)\psi_X = -\sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j)\psi_X.$$

Так как правая часть этого уравнения представляет собой сумму, то и решение данного уравнения – функция $\psi_X(x)$ – будем искать в виде суммы

$$\psi_X(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\psi_j(x), \tag{4.2}$$

где ψ_j – некоторые функции. Подставив теперь (4.2) в (4.1), получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i) - \lambda_X\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\psi_j(x)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathcal{S}(-X_j)\Big[(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i\Big]. \end{aligned}$$

Для справедливости последнего равенства достаточно выполнения k уравнений

$$(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i = 0, \quad j = 1, \dots k. \tag{4.3}$$

Далее вместо уравнений (4.3) будем рассматривать более общие уравнения

$$(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j + \delta\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i = 0, \tag{4.4}$$

где δ – дополнительный малый положительный параметр, $\varepsilon(X)$ – функция из (0.16). При $\delta = \varepsilon(X)$ уравнения (4.4) совпадают с уравнениями (4.3). Далее нашей целью будет нахождение таких чисел λ_X, близких к λ_0, при которых уравнения (4.4) имеют нетривиальное решение. Под нетривиальным решением здесь понимается набор функций ψ_j, в которых хотя бы одна из функций не равна тождественно нулю.

Из уравнения (4.4) выводим:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{H}_j - \lambda_X)\psi_j = \varsigma_j(|\cdot|)g_j, \\
&g_j := -\delta \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)} \mathcal{L}_j^0 \eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j - X_i)\psi_i \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Введём в рассмотрение гильбертово пространство

$$
\mathfrak{L} := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_k \end{pmatrix}, h_i \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), i = 1,\dots,k \right\} \tag{4.6}
$$

со скалярным произведением

$$
(u,v)_{\mathfrak{L}} = \sum_{i=1}^{k} (u_i, v_i)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{4.7}
$$

Обозначим

$$
\Psi_X := \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}, \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}. \tag{4.8}
$$

В пространстве $\mathfrak{L}$ определим операторы

$$\mathcal{H}:=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mathcal{H}_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{H}_k\end{pmatrix},\quad \mathcal{P}:=\begin{pmatrix}\varsigma_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varsigma_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \varsigma_k\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_X:=-\frac{1}{\varepsilon(X)}\begin{pmatrix}0 & \mathcal{L}_1^0\eta_1\mathcal{S}(X_1-X_2) & \dots & \mathcal{L}_1^0\eta_1\mathcal{S}(X_1-X_k)\\ \mathcal{L}_2^0\eta_2\mathcal{S}(X_2-X_1) & 0 & \dots & \mathcal{L}_2^0\eta_2\mathcal{S}(X_2-X_k)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathcal{L}_k^0\eta_k\mathcal{S}(X_k-X_1) & \mathcal{L}_k^0\eta_k\mathcal{S}(X_k-X_2) & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

С учётом введённых обозначений уравнения (4.4), (4.5) можно переписать как уравнения в пространстве $\mathfrak{L}$

$$(\mathcal{H}-\lambda_X)\Psi_X-\delta\mathcal{P}\mathcal{T}_X\Psi_X=0, \tag{4.9}$$

$$(\mathcal{H}-\lambda_X)\Psi_X=\mathcal{P}g,\quad \Psi_X=(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g. \tag{4.10}$$

Так как λ_0 не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_i$ при $i\geqslant 2$, то операторы $(\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}$, $i\geqslant 2$, ограничены как операторы из пространства $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и голоморфны по $\lambda\in\overline{U}$. Напомним, что под U мы понимаем некоторую малую фиксированную окрестность точки λ_0, замыкание которой не содержит никаких других точек спектров операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, кроме самой точки λ_0. В силу того, что λ_0 – простое собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, то согласно формуле (3.21) из [11, Гл. V, §3, п. 5] резольвента этого оператора представима в виде

$$(\mathcal{H}_1-\lambda_X)^{-1}f=\frac{(f,\psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}}{\lambda_0-\lambda_X}\psi_0+\mathcal{R}_1(\lambda_X)f, \tag{4.11}$$

где $f\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и, напомним, $\mathcal{R}_1(\lambda)$ – приведённая резольвента, голоморфная по λ для всех λ из $\overline{U}$, действующая в ортогональном дополнении к функции ψ_0. С учётом формулы (4.11) действие оператора $(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}$ выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}h &= \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_1-\lambda_X)^{-1}h_1 \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_k-\lambda_X)^{-1}h_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{(h_1,\psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}}{\lambda_0-\lambda_X}\begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(\lambda_X)h_1 \\ \vdots \\ \mathcal{R}_k(\lambda_X)h_k \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_0-\lambda_X}(h,\Psi_0)_{\mathfrak{L}}\Psi_0 + \mathcal{R}(\lambda_X)h,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

где

$$
\mathcal{R}(\lambda) := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{R}_k(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \Psi_0 := \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}
$$

и $h \in \mathfrak{L}$. Напомним, что $\mathcal{R}_i(\lambda) = (\mathcal{H}_i-\lambda)^{-1}$, $i \geqslant 2$. Воспользуемся (4.10) и заменим в (4.9) выражения $(\mathcal{H}-\lambda_X)\Psi_X$ на $\mathcal{P}g$, а Ψ_X на $(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g$. Тогда получим:

$$
\mathcal{P}\Big(g - \delta\mathcal{T}_X(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g\Big) = 0.
$$

Для справедливости последнего равенства достаточно выполнения уравнения

$$
g - \delta\mathcal{T}_X(\mathcal{H}-\lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g = 0.
$$

Перенося второе слагаемое из левой части последнего равенства в правую часть и учитывая равенство (4.12), получаем

$$
\begin{gathered}
g = \frac{\delta}{\lambda_0-\lambda_X}(\mathcal{P}g,\Psi_0)_{\mathfrak{L}}\mathcal{T}_X\Psi_0 + \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g, \\
\Big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}\Big)g = \frac{\delta}{\lambda_0-\lambda_X}(\mathcal{P}g,\Psi_0)_{\mathfrak{L}}\mathcal{T}_X\Psi_0.
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

Для дальнейшего исследования последнего уравнения докажем вспомогательные леммы.

Лемма 4.1. *Собственная функция* ψ_0 *оператора* $\mathcal{H}_1$ *представима в виде*

$$\psi_0(x) = e^{-\rho\int\limits_0^{|x|} a(t)dt}\widehat{\psi}_0(x), \tag{4.15}$$

где $0 < \rho < 1$ *– некоторое фиксированное достаточно малое число,* $\widehat{\psi}_0 \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *– некоторая функция, и*

$$\|\mathcal{L}_j^0\eta_j(|\cdot|)\mathcal{S}(X_j - X_1)\psi_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \tau(X) \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение на собственное значение

$$(\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\psi_0 = 0.$$

Представим его в виде

$$(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)\psi_0 = -\varsigma_1(|\cdot|)g_1, \quad \text{где} \quad g_1 = \mathcal{L}_1^0\eta_1(|\cdot|)\psi_0 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Число λ_0 попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}_0$ и справедливость леммы теперь непосредственно следует из последнего представления и леммы 3.4 в параграфе 3. $\square$

Лемма 4.2. *Для любой функции* $h \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедливы равномерные по* $\lambda \in \overline{U}$ *оценки*

$$\|\mathcal{R}_j(\lambda)h\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant c\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{4.16}$$

$$\left\|\mathcal{L}_p^0\eta_p(|\cdot|)\mathcal{S}(X_p - X_j)\mathcal{R}_j(\lambda)\varsigma_j(|\cdot|)h\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C(X)\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{4.17}$$

где $p, j = 1, \ldots, k$, $j \neq p$, c *– некоторая константа, не зависящая от* h, λ *и* j, $C(X)$ *– некоторая функция, не зависящая от* h, λ, p, j, *причём* $C(X) \to 0$ *при* $\tau(X) \to \infty$.

Доказательство. Для $h \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\lambda \in \overline{U}$ положим $v_j := \mathcal{R}_j(\lambda)h$, $j = 1, \ldots, k$. В силу определения оператора $\mathcal{R}_j(\lambda)$ верны равномерные по λ и h оценки

$$\|v_j\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\|h\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \tag{4.18}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от h, λ, j. Также нетрудно проверить, что функции v_j представимы в виде

$$\begin{aligned} v_j &= (\mathcal{H}_j - \mathrm{i})^{-1}\big(h + (\lambda - \mathrm{i})v_j\big), \quad j = 2, \ldots, k, \\ v_1 &= (\mathcal{H}_1 - \mathrm{i})^{-1}\big(h - (h, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\psi_0 + (z - \mathrm{i})v_1\big). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Из (3.27), (4.18), (4.19) следует справедливость оценки (4.16).

Для $\lambda \in \overline{U}$ положим $u_j = \mathcal{R}_j\varsigma_j(|\cdot|)h \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $j = 1, \ldots, k$. Функции u_j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} (\mathcal{H}_j - \lambda)u_j = \varsigma_j(|\cdot|)h, \quad j = 2, \ldots, k, \\ (\mathcal{H}_1 - \lambda)u_1 = \varsigma_1(|\cdot|)h - (\varsigma_1(|\cdot|)h, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\psi_0... \end{gathered}$$

Данные уравнения можно переписать в следующем виде

$$\begin{gathered} (\mathcal{H}_0 - \lambda)u_j = \varsigma_j(|\cdot|)g_j, \quad j = 2, \ldots, k, \\ (\mathcal{H}_0 - \lambda)u_1 = \varsigma_1(|\cdot|)f - \mathrm{e}^{-\rho\int\limits_0^{|\cdot|}a(t)dt}(\varsigma_1(|\cdot|)h, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\widehat{\psi}_0, \end{gathered}$$

где $g_j = h - \mathcal{L}_j^0\eta_j(|\cdot|)u_j \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $f = h - \mathcal{L}_1^0\eta_1(|\cdot|)u_1 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу леммы 3.4 и с учётом замечания 3.1 для функций u_j верны представления (3.8) с параметром ε и константой C, не зависящей от $\lambda \in \overline{U}$. Используя теперь оценку (4.16) и равенство (4.15), получаем неравенство (4.17). $\square$

Из лемм 4.1, 4.2 следует сходимость (0.15).

Вернёмся теперь к уравнению (4.14). Компоненты оператора $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}$ имеют вид

$$\varepsilon^{-1}(X)\mathcal{L}_i^0\eta_i(|\cdot|)\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(X_i - X_j)\mathcal{R}_j(\lambda)\varsigma_j(|\cdot|).$$

Из выбора функции $\varepsilon(X)$ вытекает, что каждая компонента оператора $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{P}$ является равномерно ограниченным по X оператором, действующим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Таким образом, доказана

Лемма 4.3. *Оператор* $\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{P}$ *равномерно ограничен по* X *и* $\lambda \in \overline{U}$.

Из этой леммы следует, что оператор $\delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{P}$ при достаточно малых δ является сжимающим для всех $X \in \Gamma$ и $\lambda \in \overline{U}$. Тогда существует оператор $(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{P})^{-1}$. Подействуем теперь оператором $(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}$ на обе части уравнения (4.14):

$$g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0. \tag{4.20}$$

Применяя оператор $\mathcal{P}$, получим

$$\mathcal{P}g = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}}\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0.$$

Вычислим скалярные произведения левой и правой частей последнего равенства с функцией Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{L}$:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X}&\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} \\ &\Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Скалярное произведение $(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}$ отлично от нуля, так как в противном случае $g = 0$ в силу (4.20), и из второй формулы в (4.10) вытекает $\Psi_X = 0$, в то время как ищется нетривиальное решение уравнений (4.4). Сократив (4.21) на $(\mathcal{P}g, \Psi_0)_{\mathfrak{L}}$, выводим

$$\lambda_X = \lambda_0 - \delta\Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}. \tag{4.22}$$

Последнее равенство – это уравнение на числа λ_X, при которых уравнения (4.4) имеют нетривиальное решение. Данное нетривиальное решение удаётся найти явно; выпишем для него формулу.

Так как решение уравнения (4.9) определяется с точностью до умножения на константу, то в силу (4.20) функция g представима в виде

$$g = C(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0,$$

где C – произвольная константа. С учётом последнего равенства уравнение (4.22) примет вид

$$\lambda_X = \lambda_0 - \delta C^{-1}\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}}.$$

Из двух предыдущих равенств, (4.9), (4.12) и уравнения

$$\Psi_X = (\mathcal{H} - \lambda_X)^{-1}\mathcal{P}g = \frac{\Psi_0}{\lambda_0 - \lambda_X}\big(\mathcal{P}g, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} + \mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g$$

выводим:

$$\Psi_X = \delta^{-1}C\Psi_0 + \mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}g.$$

Выбрав $C = \delta$, находим Ψ_X:

$$\Psi_X = \Psi_0 + \delta\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P})^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0. \tag{4.23}$$

Данная вектор-функция является нетривиальным решением уравнений (4.4), соответствующим числу λ_X, определяемым уравнением (4.22). Выполнение уравнений (4.4) можно проверить непосредственной подстановкой (4.8), (4.22), (4.23) в эти уравнения. Вектор-функция Ψ_X из (4.23) отлична от нуля при достаточно малых δ и достаточно больших $\tau(X)$, так как из (4.22) и (4.13) следуют соотношения

$$\|\Psi_X - \Psi_0\|_{\mathfrak{L}} = \mathcal{O}(\delta), \quad \Psi_0 \neq 0. \tag{4.24}$$

Так как уравнения (4.4) при $\delta = \varepsilon(X)$ совпадают с уравнениями (4.3), то решение уравнения (4.22) при $\delta = \varepsilon(X)$ является собственным значением возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, сходящимся к λ_0 при $\tau(X) \to 0$. Соответствующая собственная функция даётся подстановкой (4.23) и равенства $\delta = \varepsilon(X)$ в (4.2). Полученная собственная функция вновь отлична от нуля в силу (4.24).

4.2 Ряды для возмущённых собственного значения и собственной функции

В данном разделе будет завершено доказательство теоремы 0.5. Для этого мы докажем разрешимость уравнения (4.22) и выясним зависимость решения от параметров X и δ. Будут построены ряды для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора, доказана их равномерная сходимость и выведены формулы для их членов.

Сделаем в уравнении (4.22) замену переменной $z = \lambda_X - \lambda_0$. Тогда оно примет вид

$$\begin{aligned} &F(\delta, z, X) := z + \delta G(\delta, z, X) = 0, \\ &G(\delta, z, X) := \Big(\mathcal{P}(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}(z+\lambda_0)\mathcal{P})^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0, \Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}. \end{aligned}$$

Функция $G(\delta, z, X)$ аналитична по (δ, z) в области $|\delta| \leqslant \delta_0$, $|z| \leqslant z_0$, где δ_0, z_0 – некоторые достаточно малые положительные числа.

Функция $z \mapsto z$ имеет единственный простой нуль в точке $z = 0$. Легко видеть, что при всех X для функции $G(\delta, z, X)$ справедлива оценка

$$|G(\delta, z, X)| \leqslant C \quad \text{для всех} \quad |z| \leqslant z_0, \quad |\delta| \leqslant \delta_0,$$

где C – некоторая константа, не зависящая от δ, z, X. Тогда имеет место неравенство

$$\delta |G(\delta, z, X)| \leqslant \delta C < z_0 \quad \text{при} \quad |z| = z_0 \quad \text{и достаточно малых} \quad \delta.$$

Из последней оценки следует, что к функции $F(\delta, z, X)$ можно применить теорему Руше [13, Гл. IV, §3], согласно которой она имеет только один простой корень в области $|z| \leqslant z_0$. Обозначим данный корень через $z_1(\delta, X)$. Применяя теорему Коши [13, Гл. III, §2] о вычетах, нетрудно проверить справедливость следующего представления для корня $z_1(\delta, X)$:

$$\begin{aligned} z_1(\delta, X) =& \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z|=z_0} z \frac{\frac{\partial F}{\partial z}(\delta, z, X)}{F(\delta, z, X)} dz \\ =& \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z|=z_0} z \frac{1 + \delta \frac{\partial G}{\partial z}(\delta, z, X)}{z + \delta G(\delta, z, X)} dz. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Из аналитичности функции $G(\delta, z, X)$ в области $|\delta| \leqslant \delta_0$, $|z| \leqslant z_0$ и неравенства нулю функции $F(\delta, z, X)$ при $|\delta| \leqslant \delta_0'$, $|z| = z_0$, где $\delta_0' < \delta_0$ – некоторое достаточно малое положительное число, следует, что функция

$$\Phi(\delta, z, X) := z \frac{1 + \delta \frac{\partial G}{\partial z}(\delta, z, X)}{z + \delta G(\delta, z, X)}$$

также является аналитической по δ в круге $|\delta| \leqslant \delta_0'$ при $|z| = z_0$. Поэтому её можно представить в виде ряда

$$\Phi(\delta, z, X) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j K_j(z, X), \tag{4.26}$$

где $K_j(z, X)$ – некоторые функции, зависящие от z и X. Данный ряд сходится равномерно по δ при $|\delta| \leqslant \delta_0'$, $|z| = z_0$ и по всем X.

Лемма 4.4. *При $|z| = z_0$ для коэффициентов $K_j(z, X)$ ряда (4.26) справедлива оценка*

$$|K_j(z, X)| \leqslant C^j,$$

где C – некоторая константа, не зависящая от j, X и z.

Доказательство. Из определения функций $G(\delta, z, X)$ и $\Phi(\delta, z, X)$ следует выполнение оценки

$$|\Phi(\delta, z, X)| \leqslant C,$$

для всех $|\delta| \leqslant \delta_0'$ и $|z| = z_0$ при достаточно малых δ_0'. Здесь C – некоторая константа, не зависящая от j, δ, z и X. Коэффициенты $K_j(z, X)$ определяются по формуле

$$K_j(z, X) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\delta| = \delta_0'} \frac{\Phi(\delta, z, X)}{\delta^{j+1}} d\delta.$$

Поэтому

$$\left|K_j(z, X)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\delta| = \delta_0'} \frac{|\Phi(\delta, z, X)|}{|\delta|^{j+1}} d\delta \leqslant \frac{C}{2\pi} \int\limits_{|\delta| = \delta_0'} \frac{d\delta}{|\delta|^{j+1}} = C(\delta_0')^{-j}.$$

□

Вернёмся теперь к равенству (4.25). Покажем, что корень $z_1(\delta, X)$ можно представить в виде ряда, сходящегося равномерно по малым δ и X. Представление в виде сходящегося ряда непосредственно следует из равенства

$$z_1(\delta, X) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z|=z_0} \Phi(\delta, z, X) dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z|=z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j K_j(z, X) dz$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \int\limits_{|z|=z_0} K_j(z, X) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \lambda_j(X),$$

где

$$\lambda_j(X) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z|=z_0} K_j(z, X) dz$$

и в силу леммы 4.4 справедлива оценка

$$|\lambda_j(X)| \leqslant C^j, \tag{4.27}$$

с константой C не зависящей от j и X для достаточно больших $\tau(X)$. Из последнего неравенства получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\delta^j \lambda_j(X)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} C^j \delta^j,$$

где ряд в правой части сходится для всех достаточно малых δ и X. Следовательно, тоже верно для ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \delta^j \lambda_j(X)$.

Таким образом, существует единственное решение уравнения (4.22), которое представимо в виде ряда

$$\lambda_X(\delta) = \lambda_0 + z_1(\delta, X) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \lambda_j(X), \tag{4.28}$$

сходящегося равномерно по малым δ и X. Положим $\delta = \varepsilon(X)$, тогда данное решение будет являться собственным значением оператора $\mathcal{H}_X$, сходящимся к λ_0 при $\tau(X) \to \infty$. Так как такое собственное значение единственно согласно теореме 0.4, то полученный ряд (4.28) при $\delta = \varepsilon(X)$ является представлением для данного собственного значения:

$$\lambda_X(\varepsilon(X)) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j(X)\lambda_j(X). \tag{4.29}$$

Полученный ряд сходится равномерно по X.

Рассмотрим теперь равенство (4.23). Так как оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ аналитичен по λ, а $\lambda_X(\delta)$ – аналитичен по δ, то оператор $\mathcal{R}(\lambda_X(\delta))$ является аналитичным по δ. Следовательно, имеет место равенство

$$\Psi_X(\delta) = \Psi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \Psi_j(X), \tag{4.30}$$

где $\Psi_j(X)$ определяются по формуле

$$\Psi_j(X) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|\delta|=\delta_0'} \delta^{-j}\mathcal{R}\big(\lambda_X(\delta)\big)\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}\big(\lambda_X(\delta)\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0 d\delta. \tag{4.31}$$

Из последней формулы аналогично доказательству леммы 4.4 выводим оценки

$$\big\|\Psi_j(X)\big\|_{\mathfrak{L}} \leqslant C^j, \tag{4.32}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от j, δ и X. Следовательно, нетривиальное решение Ψ_X уравнения (4.9), соответствующее λ_X, представляется в виде ряда (4.30) сходящегося в $\mathfrak{L}$ равномерно по X и по достаточно малым δ.

Введём гильбертово пространство

$$\widetilde{\mathfrak{L}} := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_k \end{pmatrix}, h_i \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), i = 1, \dots, k \right\} \tag{4.33}$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_{\widetilde{\mathfrak{L}}} = \sum_{i=1}^{k} (u_i, v_i)_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{4.34}$$

Аналогично неравенствам (4.32), пользуясь оценкой (4.16) и формулой (4.31), выводим:

$$\big\|\Psi_j(X)\big\|_{\widetilde{\mathfrak{L}}} \leqslant C^j, \tag{4.35}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от j, δ и X. Таким образом, ряд (4.30) сходится равномерно по X и по достаточно малым δ в норме пространства $\widetilde{\mathfrak{L}}$. Выбрав теперь $\delta = \varepsilon(X)$, получим

$$\Psi_X(\varepsilon(X)) = \Psi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j(X)\Psi_j(X). \tag{4.36}$$

Из последнего равенства и (4.2) получим выражения для собственной функции ψ_X, соответствующей собственному значению $\lambda_X(\varepsilon(X))$, в виде равномерно сходящегося по X ряда. Оценки (0.14) для членов ряда (0.10) вытекают из (4.35) и равенства $\delta = \varepsilon(X)$.

Определим члены λ_j и Ψ_j разложений (4.29) и (4.36) соответственно. Распишем равенство (4.30) покомпонентно

$$\psi_q = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \widetilde{\phi}_{q,j}, \quad q = 1, \ldots, k,$$

где $\widetilde{\phi}_{q,j}(x, X)$ – компоненты векторов Ψ_j. Обозначим

$$\phi_{q,j}(x, X) := \varepsilon^j(X)\widetilde{\phi}_{q,j}(x, X).$$

В силу (4.30) и определения Ψ_0 справедливы соотношения

$$\phi_{1,0} = \psi_0, \quad \phi_{q,0} = 0, \quad q = 2, \ldots, k, \tag{4.37}$$

и в силу (4.35) верны оценки (0.14) для функций $\phi_{q,j}(x, X)$. Коэффициенты λ_j будем искать в виде

$$\lambda_j(X) = \Lambda_j(X)\varepsilon^{-j}(X),$$

где Λ_j – некоторые функции, для которых, согласно неравенству (4.27), справедливы оценки (0.14). Теперь подставим (5.35) и ряды

$$\lambda_X(\delta) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \varepsilon^{-j}(X)\Lambda_j(X), \quad \psi_q = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \varepsilon^{-j}(X)\phi_{q,j},$$

в уравнение (4.4):

$$\Big(\mathcal{H}_q - \lambda_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \varepsilon^{-j}(X)\Lambda_j(X)\Big) \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s \varepsilon^{-s}(X)\phi_{q,s}$$
$$+ \delta\varepsilon^{-1}(X) \sum_{\substack{t=1\\ t\neq q}}^{k} \mathcal{L}_q \mathcal{S}(X_q - X_t) \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s \varepsilon^{-s}(X)\phi_{t,s} = 0, \quad q = 2, \ldots, k.$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим

$$\begin{aligned} &(\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\phi_{1,1} = \Lambda_1 \psi_0, \\ &(\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\phi_{1,j} = \Lambda_j \psi_0 + \sum_{t=1}^{j-1} \Lambda_t \phi_{1,j-t} - \sum_{t=2}^{k} \mathcal{L}_1 \mathcal{S}(X_1 - X_t)\phi_{t,j-1}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} &(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,1} = -\mathcal{L}_q \mathcal{S}(X_q - X_1)\psi_0, \\ &(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,j} = \sum_{t=1}^{j-1} \Lambda_t \phi_{q,j-t} - \sum_{\substack{t=1\\ t\neq q}}^{k} \mathcal{L}_q \mathcal{S}(X_q - X_t)\phi_{t,j-1}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

где $q = 2, \ldots, k$, $j \geqslant 2$.

Лемма 4.5. *Верны соотношения*

$$(\phi_{1,j}, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = 0, \quad j \geqslant 1.$$

Доказательство. Вычислим скалярное произведение:

$$\big(\Psi_X, \Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} = (\psi_1, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \varepsilon^{-j}(X)(\phi_{1,j}, \psi_0)_{L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)}. \tag{4.40}$$

С другой стороны, согласно формулам (4.13), (4.23) и нормировке функции ψ_0, скалярное произведение $(\Psi_X,\Psi_0)_{\mathfrak{L}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\big(\Psi_X,\Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} &= \big(\Psi_0,\Psi_0\big)_{\mathfrak{L}} - \delta\Big(\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}\big(\mathrm{I}+\delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0,\Psi_0\Big)_{\mathfrak{L}}\\ &= 1+\delta\Big(\mathcal{R}_1(\lambda_X)h,\psi_0\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где $h\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ – первая компонента вектора $\mathcal{P}\big(\mathrm{I}-\delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}(\lambda_X)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Psi_0$. Оператор $\mathcal{R}_1(\lambda_0)$ действует в ортогональном дополнении к функции ψ_0, а потому

$$\Big(\mathcal{R}_1(\lambda_X)h,\psi_0\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}=0.$$

Следовательно,

$$\big(\Psi_X,\Psi_0\big)_{\mathfrak{L}}=1.$$

Из последнего равенства и (4.40) вытекает утверждение леммы. $\square$

Так как оператор $\mathcal{H}_1$ самосопряжен, то условием разрешимости уравнений (4.38) является ортогональность правых частей уравнений функции ψ_0 в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Применяя это условие разрешимости и учитывая лемму 4.5, приходим к равенствам $\Lambda_1=0$ и (0.11). Вновь учитывая лемму 4.5 и определение оператора $\mathcal{R}_1$, получаем равенства (0.12), (0.13). Теорема 0.5 полностью доказана.

Поясним теперь как формально вывести уравнения на коэффициенты рядов (0.9), (0.10). Для этого подставим ряды (0.9), (0.10) в уравнение (4.1). Тогда получим уравнения

$$\mathcal{S}(-X_1)\Theta_1=0,\quad \mathcal{S}(-X_q)\Theta_q=0,\quad q=2,\ldots,k, \tag{4.41}$$

где

$$\Theta_1=\big(\mathcal{H}_1-\lambda_0\big)\sum_{t=1}^{\infty}\phi_{1,t}-\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\Lambda_s\phi_{1,t},$$

$$\Theta_q = \left(\mathcal{H}_q - \lambda_0\right) \sum_{t=1}^{\infty} \phi_{q,t} - \sum_{s,t=1}^{\infty} \Lambda_s \phi_{q,t} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{i,q=1\\ q\neq i}}^{k} \mathcal{L}_q \mathcal{S}\left(X_q - X_i\right) \phi_{i,t}$$
$$+ \mathcal{L}_q \mathcal{S}(X_q - X_1)\psi_0 - \sum_{t=1}^{\infty} \Lambda_s \psi_0.$$

Для выполнения равенств (4.41) достаточно выполнения соотношений

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_i = 0, \tag{4.42}$$

Предполагаем, что каждый из коэффициентов рядов (0.9), (0.10), то есть, Λ_s и $\phi_{q,s}$, $q = 1, \ldots, k$, $s \geqslant 1$, имеет порядок $\varepsilon^s(X)$, а действие оператора $\mathcal{L}_q \mathcal{S}(X_q - X_i)$ при $q \neq i$, где $q, i = 1, \ldots, k$ на функцию ψ_0 и функции $\phi_{q,s}^{(j)}$, $q = 1, \ldots, k$, $s \geqslant 1$ увеличивает порядок малости на $\varepsilon(X)$. Выделяя теперь члены одного порядка в каждом из равенств (4.42), получаем уравнения (4.38), (4.39), из которых легко уже выводятся коэффициенты для построенных рядов (0.9), (0.10).

5 Собственные значения и собственные функции – случай двукратного предельного собственного значения

В первых двух разделах данного параграфа будут доказаны теоремы 0.6, 0.7. Методика доказательства данных теорем в целом аналогична доказательству теорему 0.5. Имеются лишь некоторые особенности, связанные с кратностью предельного собственного значения. На них мы останавливаемся подробнее. Кроме того, в последнем разделе настоящего параграфа описывается эффект симметричности первых поправок возмущённых собственных значений в случае произвольной кратности предельного собственного значения для оператора с двумя разбегающимися возмущениями.

5.1 Редукция уравнения на собственные значения

В настоящем параграфе уравнение на собственные значения возмущённого оператора будет сведено к регулярно возмущённому операторному уравнению в специальном гильбертовом пространстве с помощью методики, описанной в параграфе 4.1.

Рассмотрим уравнение на собственные значения возмущённого оператора

$$\mathcal{H}_X \psi_X^{(j)} = \lambda_X^{(j)} \psi_X^{(j)}, \quad j = 1, 2. \tag{5.1}$$

Аналогично случаю простого предельного собственного значения, решение этого уравнения будем искать в виде

$$\psi_X^{(j)}(x) = \sum_{q=1}^{k} \mathcal{S}(-X_q)\psi_q^{(j)}(x), \tag{5.2}$$

где $\psi_q^{(j)}$ – некоторые функции. Подставляя (5.2) в (5.1), аналогично случаю простого предельного собственного значения, приходим к системе k уравнений

$$\big(\mathcal{H}_q - \lambda_X^{(j)}\big)\psi_q^{(j)} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{k} \mathcal{L}_q \mathcal{S}\big(X_q - X_i\big)\psi_i^{(j)} = 0, \quad q = 1, \ldots, k, \tag{5.3}$$

где $j = 1, 2$. Далее вместо уравнений (5.3) вновь будем рассматривать уравнения более общего вида

$$\big(\mathcal{H}_q - \lambda_X^{(j)}\big)\psi_q^{(j)} + \delta \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)} \mathcal{L}_q \mathcal{S}\big(X_q - X_i\big)\psi_i^{(j)} = 0, \quad q = 1, \ldots, k, \tag{5.4}$$

где δ – дополнительный положительный малый параметр, $\varepsilon(X)$ – функция из (0.16). Нашей целью будет отыскание таких чисел $\lambda_X^{(j)}$, близких к λ_0, при которых уравнения (5.4) имеют нетривиальное решение. Под нетривиальным решением понимается набор функций $\psi_q^{(j)}$, $q = 1, \ldots, k$, по меньшей мере одна из которых не равна тождественно нулю. При $\delta = \varepsilon(X)$ уравнение (5.4) совпадает с уравнением (5.3), поэтому числа $\lambda_X^{(j)}$, найденные для уравнений (5.4), при $\delta = \varepsilon(X)$ будут собственными значениями оператора $\mathcal{H}_X$.

Из (5.4) выводим:

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathcal{H}_q - \lambda_X^{(j)}\big)\psi_q^{(j)} = \varsigma_q g_q^{(j)}, \quad q = 1, \dots, k, \quad j = 1, 2, \\
&g_q^{(j)} = -\delta \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{k} \frac{1}{\varepsilon(X)} \mathcal{L}_q^0 \eta_q \mathcal{S}(X_q - X_i)\psi_q^{(j)} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Как и в случае простого предельного собственного значения, далее будем рассматривать специальные гильбертовы пространства $\mathfrak{L}$, $\widetilde{\mathfrak{L}}$, определённые равенствами (4.6), (4.33), со скалярными произведениями (4.7), (4.34) соответственно. Обозначим

$$
\Psi_X^{(j)} := \begin{pmatrix} \psi_1^{(j)} \\ \vdots \\ \psi_k^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}, \quad g^{(j)} := \begin{pmatrix} g_1^{(j)} \\ \vdots \\ g_k^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{L},
\tag{5.6}
$$

а через $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}_X$ – операторы, введённые в четвёртом параграфе для случае простого предельного собственного значения. С учётом введённых обозначений уравнения (5.4), (5.5) в пространстве можно переписать в виде

$$
\big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)\Psi_X^{(j)} - \delta \mathcal{P}\mathcal{T}_X \Psi_X^{(j)} = 0,
\tag{5.7}
$$

$$
\big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)\Psi_X^{(j)} = \mathcal{P} g^{(j)}, \quad \Psi_X^{(j)} = \big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} \mathcal{P} g^{(j)}.
\tag{5.8}
$$

Так как в случае кратности $1+1$ собственное значение λ_0 не принадлежит спектрам операторов $\mathcal{H}_i$ при $i \geqslant 3$, то операторы $(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}$, $i \geqslant 3$ ограничены как операторы из пространства $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и голоморфны по $\lambda \in \overline{U}$. В случае кратности $2+0$ по аналогичным причинам операторы $(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}$, $i \geqslant 2$ являются голоморфными по $\lambda \in \overline{U}$ и ограниченными как операторы, действующие из пространства $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Напомним, что под $\overline{U}$ мы понимаем некоторую малую фиксированную окрестность точки λ_0, не содержащую никаких других точек спектра операторов $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, кроме самой точки λ_0, где $i = 3, \dots, k$ в случае кратности $1 + 1$ и $i = 2, \dots, k$ в случае кратности 2+0. Так как в случае кратности 1+1 число λ_0 – простое собственное значение операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, согласно формуле (3.21) из [11, Гл. V, §3, п. 5] резольвенты этих операторов представимы в виде

$$\big(\mathcal{H}_i - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} f = \frac{\big(f, \psi_{0,j}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \psi_{0,j} + \mathcal{R}_i\big(\lambda_X^{(j)}\big) f, \quad i = 1, 2, \tag{5.9}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathcal{R}_i(\lambda)$ – приведённые резольвенты, голоморфные по λ для всех λ из $\overline{U}$, действующие в ортогональном дополнении к соответствующей собственной функции $\psi_{0,j}$, $j = 1, 2$. В случае кратности $2 + 0$ число λ_0 – двукратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_1$, и вновь согласно формуле (3.21) в [11, Гл. V, §3, п. 5] справедливо представление

$$\big(\mathcal{H}_1 - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} f = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \big(f, \psi_{0,i}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \psi_{0,i} + \mathcal{R}_1(\lambda_X^{(j)}) f, \tag{5.10}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathcal{R}_1(\lambda)$ – приведённая резольвента, голоморфная по λ для всех λ из $\overline{U}$, действующая в ортогональном дополнении к соответствующей собственной функции $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, 2$. С учётом формул (5.9), (5.10) действие оператора $(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)})^{-1}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} h &= \begin{pmatrix} \big(\mathcal{H}_1 - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} h_1^{(j)} \\ \vdots \\ \big(\mathcal{H}_k - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1} h_k^{(j)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \big(h, \Psi_0^{(i)}\big)_{\mathfrak{L}} \Psi_0^{(i)} + \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big) h,\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $h \in \mathfrak{L}$, в случае кратности $1 + 1$ под $\Psi_0^{(j)}$, $j = 1, 2$, будем понимать векторы

$$\Psi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \psi_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{0,2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В случае же кратности $2+0$ под $\Psi_0^{(j)}$, $j = 1, 2$, будем понимать векторы

$$\Psi_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \psi_{0,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \psi_{0,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Здесь оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ имеет вид

$$\mathcal{R}(\lambda) := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{R}_k(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

где в случае предельной кратности $1+1$ операторы $\mathcal{R}_1(\lambda)$, $\mathcal{R}_2(\lambda)$ – приведённые резольвенты операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ в окрестности $\overline{U}$ и $\mathcal{R}_i(\lambda) = (\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}$, $i \geqslant 3$, $\lambda \in \overline{U}$. В случае предельной кратности $2+0$ оператор $\mathcal{R}_1(\lambda)$ – приведённая резольвента оператора $\mathcal{H}_1$ в окрестности $\overline{U}$ и $\mathcal{R}_i(\lambda) = (\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}$, $i \geqslant 2$, $\lambda \in \overline{U}$.

Подставим теперь (5.8), (5.11) в (5.7):

$$\mathcal{P}\Big(g^{(j)} - \delta\mathcal{T}_X\big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1}\mathcal{P}g^{(j)}\Big) = 0.$$

Для справедливости последнего равенства достаточно выполнения уравнения

$$g^{(j)} - \delta\mathcal{T}_X\big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1}\mathcal{P}g^{(j)} = 0.$$

Перенося второе слагаемое из левой части последнего равенства в правую часть и учитывая равенство (5.11), находим

$$g^{(j)} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)} + \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}(\lambda_X^{(j)}) \mathcal{P} g^{(j)},$$

$$\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\Big) g^{(j)} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}. \tag{5.14}$$

Совершенно аналогично лемме 4.3 доказывается, что компоненты оператора $\mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}$ равномерно ограничены по X, а оператор $\delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}$ при достаточно малых δ является сжимающим. Следовательно, оператор $\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\Big)^{-1}$ определён корректно. Подействуем им на обе части уравнения (5.14):

$$g^{(j)} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\Big)^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}.$$

Применив теперь к последнему уравнению оператор $\mathcal{P}$, получим:

$$\mathcal{P}g^{(j)} = \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \mathcal{P}\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\Big)^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}. \tag{5.15}$$

Вычислим скалярные произведения левой и правой части последнего равенства с функцией $\Psi_0^{(q)}$:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(q)}\big)_{\mathfrak{L}} =& \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \Big(\mathcal{P}g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \\ & \left(\mathcal{P}\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\Big)^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}, \Psi_0^{(q)}\right)_{\mathfrak{L}}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(\lambda, \delta, X) &:= \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}(\lambda, \delta, X) & \mathrm{A}_{12}(\lambda, \delta, X) \\ \mathrm{A}_{21}(\lambda, \delta, X) & \mathrm{A}_{22}(\lambda, \delta, X) \end{pmatrix}, \\ \mathrm{A}_{qi}(\lambda, \delta, X) &:= \left(\mathcal{P}\Big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}(\lambda)\mathcal{P}\Big)^{-1} \mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}, \Psi_0^{(q)}\right)_{\mathfrak{L}},\end{aligned} \tag{5.17}$$

где $q, i = 1, 2$, $\lambda \in \overline{U}$ – комплексный параметр. Через $\mathbf{z}^{(j)}$ обозначим вектор, компонентами которого являются величины

$$z_i^{(j)} := \big(\mathcal{P} g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\big)_{\mathfrak{L}}, \quad i, j = 1, 2.$$

С учётом введённых обозначений равенство (5.16) примет вид

$$\Big(\delta \mathrm{A}(\lambda_X^{(j)}, \delta, X) - \big(\lambda_X^{(j)} - \lambda_0\big)\mathrm{E}\Big)\mathbf{z}^{(j)} = 0, \quad \text{где} \quad j = 1, 2. \tag{5.18}$$

Будем искать ненулевое решение последнего уравнения, так как в противном случае $\mathbf{z}^{(j)} \equiv 0$, $g_j \equiv 0$ и соответствующее решение уравнений (5.4) оказывается тривиальным. Последнее уравнение имеет ненулевое решение, если выполнено соотношение

$$\det \Big(\delta \mathrm{A}(\lambda_X^{(j)}, \delta, X) - \big(\lambda_X^{(j)} - \lambda_0\big)\mathrm{E}\Big) = 0, \quad \text{где} \quad j = 1, 2. \tag{5.19}$$

Вычисляя данный определитель, получаем уравнение на значения $\lambda_X^{(j)}$, при которых уравнения (5.4) имеют нетривиальное решение. Найдем теперь представление для данных нетривиальных решений. Подставляя (5.15) в (5.8) и учитывая (5.11), выводим

$$\begin{aligned}
\Psi_X^{(j)} =& \big(\mathcal{H} - \lambda_X^{(j)}\big)^{-1}\mathcal{P} g^{(j)} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\Psi_0^{(i)}}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \big(\mathcal{P} g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\big)_{\mathfrak{L}} + \mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P} g^{(j)} \\
&= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} \big(\mathcal{P} g^{(j)}, \Psi_0^{(i)}\big)_{\mathfrak{L}} \\
&\Big(\Psi_0^{(i)} + \delta \mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}} \\
&= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_X^{(j)}} \sum_{i=1}^{2} z_i^{(j)} \Big(\Psi_0^{(i)} + \delta \mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X \Psi_0^{(i)}\Big)_{\mathfrak{L}}.
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что решение уравнений (5.4) определяется с точностью до константы, и вводя обозначение

$$\Phi_0^{(j)} = \sum_{i=1}^{2} z_i^{(j)} \Psi_0^{(i)},$$

получаем

$$\Psi_X^{(j)} = C_j(\delta, X)\big(\Phi_0^{(j)} + \delta\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Phi_0^{(j)}\big), \tag{5.20}$$

где $C_j(\delta, X)$ – некоторые константы.

Совершенно аналогично случаю простого предельного собственного значения доказываются сходимости (0.32), (0.49). И так как при $\delta = \varepsilon(X)$ уравнения (5.4) и (5.3) совпадают, то уравнение (5.19) при $\delta = \varepsilon(X)$ определяет искомые собственные значения оператора $\mathcal{H}_X$, а формулы (5.20), (5.6), (5.2) – соответствующие собственные функции.

5.2 Ряды для возмущённых собственных значений и собственных функций

В данном разделе завершается доказательство теорем 0.6, 0.7. Для этого сначала доказывается разрешимость уравнения (5.18), находятся решения данного уравнения и выясняется зависимость этих решений от параметров X и δ. Затем строятся ряды для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, доказывается их равномерная сходимость и выводятся формулы для их членов.

Вычисляя определитель (5.19) и делая замену переменной $u = \lambda_X^{(j)} - \lambda_0$, получаем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} u^2 &- \delta\Big(\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0, \delta, X) + \mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0, \delta, X)\Big)u \\ &+ \delta^2\Big(\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0, \delta, X)\mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0\delta, X) \\ &- \mathrm{A}_{12}(u+\lambda_0, \delta, X)\mathrm{A}_{21}(u+\lambda_0, \delta, X)\Big) = 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Оно равносильно паре уравнений

$$u = \delta G_1(u+\lambda_0, \delta, X), \quad u = \delta G_2(u+\lambda_0, \delta, X), \tag{5.22}$$

где

$$
\begin{aligned}
G_1(u+\lambda_0,\delta,X) =& \frac{1}{2}\Big(\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0,\delta,X)+\mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0,\delta,X) \\
&+\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)\Big),
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

$$
\begin{aligned}
G_2(u+\lambda_0,\delta,X) =& \frac{1}{2}\Big(\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0,\delta,X)+\mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0,\delta,X) \\
&-\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)\Big),
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(u+\lambda_0,\delta,X) =& \Big(\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0,\delta,X)-\mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0,\delta,X)\Big)^2 \\
&+4\mathrm{A}_{12}(u+\lambda_0,\delta,X)\mathrm{A}_{21}(u+\lambda_0,\delta,X).
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Здесь ветвь корня выбирается из условия $\sqrt{1}=1$. Всюду далее u и δ меняются в малой комплексной окрестности нуля $|\delta|<\delta_0$, $|u|<u_0$. Ниже мы будем рассматривать функции вида $f(\delta,X)$ или $f(u,\delta,X)$, голоморфные по δ или по u, δ, коэффициенты рядов Тейлора которых ограничены равномерно по X. Для краткости такие функции будем называть голоморфными по δ или по u, δ равномерно по X.

Покажем, что функции $G_i(u+\lambda_0,\delta,X)$, $i=1,2$, являются голоморфными по u, δ равномерно по X. Из определения (5.17) непосредственно следует, что функции A_{st}, $s,t=1,2$, голоморфны по u, δ равномерно по X. Поэтому функция $\mathrm{D}(u+\lambda_0,\delta,X)$ также голоморфна по u и δ равномерно по X.

Рассмотрим случай кратности $1+1$. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5.1. *В случае кратности* $1+1$ *верно равенство*

$$
\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_2\big)\psi_{0,2},\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}=\Big(\psi_{0,2},\mathcal{L}_2\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.
$$

Доказательство. Из самосопряжённости операторов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ следует симметричность оператора $\mathcal{L}_1$. Отсюда и из самосопряжённости оператора $\mathcal{H}_0$, а также уравнений на собственные функции

$\psi_{0,j}$, $j=1,2$, выводим

$$
\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_2\big)\psi_{0,2},\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}=\Big(\mathcal{S}\big(X_1-X_2\big)\psi_{0,2},\mathcal{L}_1\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&=-\Big(\big(\mathcal{H}_0-\lambda_0\big)\mathcal{S}\big(X_1-X_2\big)\psi_{0,2},\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&=-\Big(\big(\mathcal{H}_0-\lambda_0\big)\psi_{0,2},\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\
&=\Big(\mathcal{L}_2\psi_{0,2},\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}=\Big(\psi_{0,2},\mathcal{L}_2\mathcal{S}\big(X_2-X_1\big)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Используя (5.17) и лемму 5.1, получаем:

$$
\mathrm{A}_{11}(u+\lambda_0,0,X)=\mathrm{A}_{22}(u+\lambda_0,0,X), \tag{5.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{12}(u+\lambda_0,0,X)=&\Big(\mathcal{P}\mathcal{T}_X\Psi_0^{(1)},\Psi_0^{(2)}\Big)_{\mathfrak{L}}\\
=&\varepsilon^{-1}(X)b_{12}=\overline{\mathrm{A}}_{21}(u+\lambda_0,0,X).
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

Из последних равенств, (5.25) и условия (0.17) следует

$$
\big|\mathrm{D}(\lambda_0,0,X)\big|=2\varepsilon^{-1}(X)|b_{12}|\geqslant C>0,
$$

где C – некоторая константа, не зависящая от X. Тогда функция $\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)$ представима в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)\\
&=\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(\lambda_0,0,X)\left(1+u\frac{\mathrm{D}_1(u+\lambda_0,\delta,X)}{\mathrm{D}(\lambda_0,0,X)}+\delta\frac{\mathrm{D}_2(u+\lambda_0,\delta,X)}{\mathrm{D}(\lambda_0,0,X)}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

Откуда вытекает голоморфность функции $\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)$ по u и δ равномерно по X.

Рассмотрим теперь случай кратности 2+0. Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 5.2. *В случае кратности* $2+0$ *выполнено равенство* $b_{12}=\overline{b}_{21}$, *где* b_{ij} *определяются равенством (0.38),* $w_{q,1}$, $w_{q,2}$ *– равенством (0.39). Функции* b_{11}, b_{22} *вещественны.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям доказательства леммы 5.1 имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_q)w_{q,2},\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}&\\ =\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{S}(X_1-X_q)w_{q,2},\mathcal{L}_1\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}&\qquad(5.29)\\ =-\sum_{q=2}^{k}\Big((\mathcal{H}_0-\lambda_0)w_{q,2},\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.&\end{aligned}$$

Учитывая теперь (0.39), получаем:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_0-\lambda_0)w_{q,2}&=-(\mathcal{H}_0-\lambda_0)(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2}\\ &=-(\mathcal{H}_0+\mathcal{L}_q-\mathcal{L}_q-\lambda_0)(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2}\\ &=-\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2}+\mathcal{L}_q(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2}.\end{aligned}$$

Подставляя теперь последнее равенство в (5.29), выводим:

$$\begin{aligned}b_{12}&=-\sum_{q=2}^{k}\Big((\mathcal{H}_0-\lambda_0)w_{q,2}\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &=\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2},\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &\quad-\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{L}_q(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2},\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.\end{aligned}$$

Пользуясь симметричностью операторов $\mathcal{L}_q$ и $(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}$, $q=2,\ldots,k$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}b_{12}&=\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2},\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\\ &\quad-\sum_{q=2}^{k}\Big(\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,2},\mathcal{L}_q(\mathcal{H}_q-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_q\mathcal{S}(X_q-X_1)\psi_{0,1}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.\end{aligned}$$

Сделав те же выкладки для b_{21}, получим формулу аналогичную последней с заменой $\psi_{0,1}$ на $\psi_{0,2}$. Сравнивая обе эти формулы, учитывая симметричность операторов $\mathcal{L}_i$, $(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}$, приходим к выводу, что b_{12} и b_{21} совпадают с точностью до сопряжения. $\square$

Напомним, что рассматривается случай кратности $2+0$. Из (5.17) и (5.12) следует, что $\mathrm{A}_{qi}(u+\lambda_0,0,X)=0$, $q,i=1,2$. Поэтому в силу (5.25) верны представления

$$\mathrm{A}_{qi}(u+\lambda_0,\delta,X)=\delta\widetilde{\mathrm{A}}_{qi}(u,\delta,X),\quad \mathrm{D}(u+\lambda_0,0,X)=\delta^2\widetilde{\mathrm{D}}(u,\delta,X),$$
$$\widetilde{\mathrm{D}}(0,0,X)=\varepsilon^{-4}(X)$$
$$\Bigg|\Bigg(\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_1)\psi_{0,1},\psi_{0,1}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}$$
$$-\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_1)\psi_{0,2},\psi_{0,2}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Bigg)^2$$
$$+4\Big|\sum_{i=2}^{k}\big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1-X_i)(\mathcal{H}_i-\lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_1)\psi_{0,1},\psi_{0,2}\big)_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}\Big|^2\Bigg|,$$

где $\widetilde{\mathrm{A}}_{qi}(u,\delta,X)$, $\widetilde{\mathrm{D}}(u,\delta,X)$ голоморфны по u и δ равномерно по X. В силу (0.34) справедлива равномерная по X оценка

$$\big|\widetilde{\mathrm{D}}(0,0,X)\big|\geqslant C>0,$$

где C – некоторая константа. Аналогично (5.28) теперь доказывается равенство

$$\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(u+\lambda_0,\delta,X)=\delta\widetilde{\mathrm{D}}^{\frac{1}{2}}(u,\delta,X),$$

где функция $\widetilde{\mathrm{D}}^{\frac{1}{2}}(u,\delta,X)$ голоморфна по u и δ равномерно по X. Таким образом функции $G_i(u+\lambda_0,\delta,X)$, $i=1,2$, определяемые равенствами (5.23), голоморфны по δ, u равномерно по X как в случае кратности $1+1$, так и в случае кратности $2+0$. Аналогично рассуждениям четвёртого параграфа (см. лемму 4.1 и выкладки после неё), можно показать, что существует единственное решение каждого из уравнений (5.22), которое представимо в виде равномерно сходящегося по δ ряда

$$\lambda_X^{(j)}(\delta) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \lambda_i^{(j)}(X), \quad j = 1, 2, \tag{5.30}$$

с равномерно ограниченными по X коэффициентами. Согласно теореме 0.4 и равенствам (5.2), (5.3), (5.4), существуют ровно два (с учётом кратности) собственных значения $\lambda_X^{(j)}$ возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, сходящихся к собственному значению λ_0. Выбрав в последнем равенстве $\delta = \varepsilon(X)$, приходим к выводу, что данные собственные значения $\lambda_X^{(j)}$ возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ представимы в виде равномерно сходящихся по X рядов

$$\lambda_X^{(j)}(\varepsilon(X)) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i(X) \lambda_i^{(j)}(X), \quad j = 1, 2. \tag{5.31}$$

Рассмотрим равенство (5.20). Так как $\mathcal{R}(u+\lambda_0)$ – голоморфен по u, а $\lambda_X^{(j)}$ – голоморфно по δ равномерно по X, то оператор $\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)}(\delta))$ является голоморфным по δ. Из равенства (5.20), голоморфности собственных значений $\lambda_X^{(j)}$ и леммы 4.4 следует справедливость равенства

$$\Psi_X^{(j)}(\delta) = C_j(\delta, X)\Big(\Phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i \Psi_i^{(j)}(X)\Big), \quad j = 1, 2, \tag{5.32}$$

где $C_j(\delta, X)$ – некоторые константы, коэффициенты $\Psi_i^{(j)}(X)$ определяются по формуле

$$\Psi_i^{(j)}(X) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|\delta|=\delta_0'} \delta^{-i} \mathcal{R}(\lambda_X^{(j)}(\delta)) \mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta \mathcal{T}_X \mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}(\delta)\big)\mathcal{P}\big)^{-1} \mathcal{T}_X \Phi_0^{(j)} d\delta, \tag{5.33}$$

где $\delta_0' < \delta_0$ – некоторое достаточно малое положительное число. Из последней формулы нетрудно вывести оценку

$$\big\|\Psi_i^{(j)}(X)\big\|_{\mathfrak{L}} \leqslant C^i, \tag{5.34}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от i, δ, u и X. Аналогично случаю простого предельного собственного значения, из (4.16), (5.33), (5.34) нетрудно вывести оценки

$$\|\Psi_i^{(j)}(X)\|_{\widetilde{\mathfrak{L}}} \leqslant C^i, \tag{5.35}$$

где константа C не зависит от i, j и X.

Таким образом, нетривиальные решения $\Psi_X^{(j)}$ уравнений (5.4) представимы в виде произведения некоторой функции $C_j(\delta, X)$ и ряда, равномерно сходящегося по X для достаточно больших X и по достаточно малым δ, см. равенство (5.32). Свойства функций $C_j(\delta, X)$ будут определены ниже. Выбрав теперь $\delta = \varepsilon(X)$, получим

$$\Psi_X^{(j)}(\varepsilon(X)) = C_j(\delta, X)\Big(\Phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i(X)\Psi_i^{(j)}(X)\Big), \quad j = 1, 2, \tag{5.36}$$

где $C_j(\delta, X)$ – некоторые константы. Из последнего равенства (5.2), 5.6, учитывая определение функций $\Phi_0^{(j)}$, получим выражения для собственной функции ψ_X возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, соответствующей собственному значению λ_X, в виде равномерно сходящегося по X ряда.

Определим коэффициенты $\lambda_i^{(j)}$ и $\Psi_i^{(j)}$ разложений (5.31) и (5.36) соответственно. Рассмотрим сначала случай кратности $1 + 1$. Распишем в данном случае равенство (5.32) покомпонентно

$$\psi_1^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \widetilde{\phi}_{1,i}^{(j)}, \quad \psi_2^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \widetilde{\phi}_{2,i}^{(j)}, \quad \psi_q^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \widetilde{\phi}_{q,i}^{(j)}, \ q \geqslant 3, \tag{5.37}$$

$$\widetilde{\phi}_{q,i}^{(j)}(x, X) = \varepsilon^{-i}(X)\phi_{q,i}^{(j)}(x, X) \tag{5.38}$$

– некоторые функции из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \phi_{1,0}^{(j)} = r_{0,1}^{(j)}\psi_{0,1}, \quad \phi_{2,0}^{(j)} = r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}, \quad \phi_{q,0}^{(j)} = 0, \\ \|\phi_{q,i}^{(j)}\|_{W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C\varepsilon^i(X), \end{gathered} \tag{5.39}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от X, $r_{0,1}^{(j)}$, $r_{0,2}^{(j)}$ – некоторые константы, зависящие от X. Функции $\phi_{q,i}^{(j)}$, $j=1,2$ при $q=1$ и $q=2$ будем искать в виде

$$\phi_{1,i}^{(j)} = \widehat{\phi}_{1,i}^{(j)} + r_{i,1}^{(j)}\psi_{0,1}, \quad \phi_{2,i}^{(j)} = \widehat{\phi}_{2,i}^{(j)} + r_{i,2}^{(j)}\psi_{0,2}, \quad i \geqslant 1, \tag{5.40}$$

где $\widehat{\phi}_{1,i}^{(j)}$, $\widehat{\phi}_{2,i}^{(j)}$ – некоторые функции из пространства $W_2^{2m}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $r_{i,1}^{(j)}$, $r_{i,2}^{(j)}$ – некоторые константы, зависящие от X. Функции $\lambda_i^{(j)}$ будем искать в виде

$$\lambda_i^{(j)}(X) = \varepsilon^{-i}(X)\Lambda_i^{(j)}(X), \tag{5.41}$$

где $\Lambda_i^{(j)}$ – некоторые функции.

Теперь подставим равенства (5.41), (5.30), (5.38), (5.37) в уравнение (5.4) и соберём коэффициенты при одинаковых степенях параметра δ. Тогда получим

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,1}^{(j)} =& r_{0,q}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}\psi_{0,q} \\ & - r_{0,3-q}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_{3-q}\big)\psi_{0,3-q}, \quad q=1,2,\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,1}^{(j)} =& -\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_1\big)\psi_{0,1} \\ & - \mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_2\big)\psi_{0,2}, \quad q \geqslant 3,\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,i}^{(j)} =& \sum_{s=1}^{i-1} r_{s,q}^{(j)}\Lambda_{i-s}^{(j)}\psi_{0,q} - r_{i-1,3-q}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_{3-q}\big)\psi_{0,3-q} \\ & + \sum_{t=1}^{i-1}\Lambda_t^{(j)}\widehat{\phi}_{i-t,q}^{(j)} - \mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_{3-q}\big)\widehat{\phi}_{3-q,i-1} \\ & - \sum_{p=3}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_p\big)\phi_{p,i-1}, \quad q=1,2, \quad i \geqslant 2,\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_q - \lambda_0)\phi_{q,i}^{(j)} =& \sum_{s=1}^{i-1}\Lambda_s^{(j)}\phi_{q,i-s}^{(j)} \\ & - \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q - X_t\big)\phi_{q,i-1}^{(j)}, \quad q \geqslant 3, \quad i \geqslant 2,\end{aligned} \tag{5.45}$$

где $j=1,2$. Применяя к уравнениям (5.42) условия разрешимости (ортогональность правой части каждого уравнения соответствующей собственной функции $\psi_{0,j}$, $j=1,2$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$) и используя лемму 5.1, приходим к уравнению

$$\Big(\mathrm{B}-\Lambda_1^{(j)}\mathrm{E}\Big)r_0^{(j)}=0, \tag{5.46}$$

где B – матрица из (0.28), E – единичная матрица размера 2×2. Вектора $r_0^{(j)}$, $j=1,2$, не могут быть равны нулю, так как иначе в силу (5.2), (5.6), (5.20) собственные функции возмущённого оператора также равны нулю. Поэтому (5.46) – уравнение на собственные значения $\Lambda_1^{(j)}$, $j=1,2$ матрицы B, $r_0^{(j)}$ – собственные вектора соответствующие собственным значениям $\Lambda_1^{(j)}$.

Вернёмся к уравнению (5.46). Вычисляя теперь собственные значения и собственные вектора матрицы B с учётом леммы 5.1, получаем формулы (0.20), (0.29). Найдём теперь первые члены $\psi_{q,1}^{(j)}$ асимптотики собственных функций $\psi_X^{(j)}$ возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. Так как собственные функции $\psi_{0,j}$, $j=1,2$, определяются с точностью до константы, то имеют место формулы (0.21). Из формул (5.42), учитывая определение операторов $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, получаем формулы (0.22).

Лемма 5.3. *Если λ_0 – собственное значение кратности $1+1$, то функции $C_j(\delta,X)$ в (5.36) можно выбрать голоморфными по δ равномерно по X так, что будут выполнены равенства*

$$\big(\Psi_X^{(i)},\widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}}=1,\quad \text{где}\quad \widetilde{\Phi}_0^{(j)}:=\begin{pmatrix} r_{0,1}^{(j)}\psi_{0,1}\\ r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad j=1,2, \tag{5.47}$$

где $r_{0,1}^{(j)}$, $r_{0,2}^{(j)}$ из (0.29).

Доказательство. Согласно формулам (5.13), (5.20) и нормировке собственных функций $\psi_{0,j}$, скалярное произведение $\big(\Psi_X^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\big(\Psi_X^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} =& C_j(\delta, X)\Bigg(\big(\Phi_0^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} \\
&+ \delta\Big(\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Phi_0^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\Big)_{\mathfrak{L}}\Bigg) \\
=& C_j(\delta, X)\big(\Phi_0^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} + \delta C_j(\delta, X)\big(\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})h_j^{(i)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}},
\end{aligned}
$$

где $h_j^{(i)}$ – j-ая компонента вектора $\mathcal{P}\big(\mathrm{I} - \delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Phi_0^{(i)}$, $i = 1, 2$. Так как операторы $\mathcal{R}_1(\lambda_0)$ и $\mathcal{R}_2(\lambda_0)$ действуют в ортогональном дополнении к собственным функциям $\psi_{0,j}$, $j = 1, 2$, то

$$
\big(\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})h_j^{(i)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} = 0, \quad \big(\Psi_X^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} = C_j(\delta, X)\big(\Phi_0^{(j)}, \widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}} \quad i, j = 1, 2.
$$

Из последнего соотношения и (5.36) выводим, что равенство (5.47) эквивалентно следующему:

$$
C_j(\delta, X)(\mathbf{z}^{(j)}, r_0^{(j)})_{\mathbb{C}^2} = 1, \quad C_j(\delta, X) = \frac{1}{(\mathbf{z}^{(j)}, r_0^{(j)})_{\mathbb{C}^2}}. \tag{5.48}
$$

Покажем, что функции $C_j(\delta, X)$ голоморфны по δ. Для этого решим уравнение (5.18). Решение системы уравнений (5.18) можно выбрать в виде

$$
\begin{aligned}
z_1^{(j)}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big) =& -\mathrm{A}_{12}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big), \\
z_2^{(j)}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big) =& \frac{1}{2}\Big(\mathrm{A}_{11}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big) - \mathrm{A}_{22}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big) \\
&+ (-1)^j\sqrt{\mathrm{D}\big(\lambda^{(j)}(\delta, X), \delta, X\big)}\Big), \quad j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Согласно формулам (5.26) имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{11}(\lambda_X^{(j)}(\delta), \delta, X) = \delta\widehat{\mathrm{A}}_{11}(\delta, X), \\
&\mathrm{A}_{12}(\lambda_X^{(j)}(\delta), \delta, X) = \varepsilon^{-1}(X)b_{12} + \delta\widehat{\mathrm{A}}_{12}(\delta, X), \\
&\mathrm{A}_{22}(\lambda_X^{(j)}(\delta), \delta, X) = \delta\widehat{\mathrm{A}}_{22}(\delta, X), \\
&\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}(\lambda_X^{(j)}(\delta), \delta, X) = \varepsilon^{-1}(X)|b_{12}| + \delta\widehat{\mathrm{D}}(\delta, X),
\end{aligned}
$$

где $\widehat{\mathrm{A}}_{qi}(u,\delta,X)$, $\widehat{\mathrm{D}}(u,\delta,X)$, $q,i=1,2$, голоморфны по u и δ равномерно по X. Учитывая условие (0.17) и (5.48), заключаем, что функции $C_j(\delta,X)$ голоморфны по u и δ равномерно по X. $\square$

В силу голоморфности собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, предыдущей леммы и леммы 5.1 функции $\Psi_X^{(j)}(\delta)$ в случае кратности $1+1$ представимы в виде

$$\Psi_X^{(j)}(\delta)=\widetilde{\Phi}_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{\infty}\delta^i\Phi_i^{(j)}(X),\quad j=1,2, \tag{5.49}$$

где $\Phi_i^{(j)}(X)=C_j(\delta,X)\Psi_i^{(j)}(X)$. Для коэффициентов $\Phi_i^{(j)}(X)$ справедлива формула

$$\begin{aligned}\Phi_i^{(j)}(X)=&-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|\delta|=\delta_0}\delta^{-i-1}C_j(\delta,X)\big(\Phi_0^j\\ &+\mathcal{R}(\lambda_X^{(j)})\mathcal{P}\big(\mathrm{I}-\delta\mathcal{T}_X\mathcal{R}\big(\lambda_X^{(j)}\big)\mathcal{P}\big)^{-1}\mathcal{T}_X\Phi_0^{(j)}\big)d\delta.\end{aligned}$$

Из оценки (5.34) выводим

$$\big\|\Phi_i^{(j)}(X)\big\|_{\mathfrak{L}}\leqslant C^i, \tag{5.50}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от i, δ, u и X.

Применяя условия разрешимости к уравнениям (5.44), и учитывая определение функций $\widehat{\phi}_{qi}$, $q=1,\ldots,k$, $i\geqslant 1$ и предыдущую лемму, приходим к уравнению (0.30), в котором функция $\mathrm{F}_i^{(j)}$ определяется равенством (0.27). Условием разрешимости уравнения (0.30) является ортогональность его правой части собственному вектору $r_0^{(j)}$, пользуясь которым получаем формулы (0.24). Из формул (5.44), (5.45), учитывая определение операторов $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ и равенства (0.21), получаем формулы (0.25), (0.26). Ряды для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора в случае кратности $1+1$ построены, а теорема 0.6 полностью доказана. Формальный метод получения уравнений на коэффициенты рядов (0.18), (0.19), (0.35), (0.36) аналогичен методу получения коэффициентов ряда (0.9), (0.10), то есть, случаю простого предельного собственного значения.

В случае кратности $2+0$ коэффициенты $\lambda_i^{(j)}$ и $\Psi_i^{(j)}$ разложений (5.31) и (5.36) соответственно определяются аналогично случаю кратности $1+1$. Сначала равенство (5.32) расписывается покомпонентно с учётом кратности $2+0$. Затем подставляем (5.41), (5.31), (5.38), (5.37) в уравнение (5.4) и собираем коэффициенты сначала при первой степени параметра δ. Тогда получим

$$\big(\mathcal{H}_1-\lambda_0\big)\phi_{1,1}^{(j)}=r_{0,1}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}\psi_{0,1}-r_{0,2}^{(j)}\Lambda_1^{(j)}\psi_{0,2}, \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{H}_q-\lambda_0\big)\phi_{q,1}^{(j)}=&-r_{0,1}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_1\big)\psi_{0,1}\\&-r_{0,2}^{(j)}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_2\big)\psi_{0,2},\quad q\geqslant 2,\end{aligned} \tag{5.52}$$

где $j=1,2$. Применяя к уравнению (5.51) условия разрешимости (ортогональность правой части уравнения каждой собственной функции $\psi_{0,j}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, где $j=1,2$), приходим к соотношениям (0.14). Так как собственные функции $\psi_0^{(j)}$, $j=1,2$ определяются с точностью до константы и в силу того, что λ_0 является двукратным собственным значением оператора $\mathcal{H}_1$ и не принадлежит спектрам остальных операторов $\mathcal{H}_q$, $q=2,\ldots,k$, из уравнения (5.52) следует справедливость формул (0.39). Вновь подставляя (5.41), (5.31), (5.38), (5.37) в уравнение (5.4) и собирая теперь коэффициенты при одинаковых степенях параметра δ, начиная со второй, получаем

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{H}_1-\lambda_0\big)\phi_{1,2}^{(j)}=&r_{0,1}^{(j)}\Lambda_2^{(j)}\psi_{0,1}+r_{0,2}^{(j)}\Lambda_2^{(j)}\psi_{0,2}\\&-\sum_{i=1}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_i\big)\phi_{i,1}^{(j)},\end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\big(\mathcal{H}_q-\lambda_0\big)\phi_{q,2}^{(j)}=-\sum_{\substack{i=1\\i\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_i\big)\phi_{i,1}^{(j)},\quad q\geqslant 2, \tag{5.54}$$

$$
\begin{aligned}
\big(\mathcal{H}_1-\lambda_0\big)\phi_{1,i}^{(j)} =& \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=2}^{i-1} r_{i-s,q}^{(j)}\Lambda_s^{(j)}\psi_{0,q} + \sum_{t=2}^{i-1}\Lambda_t^{(j)}\widehat{\phi}_{1,i-t}^{(j)} \\
& - \sum_{p=2}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_p\big)\phi_{p,i-1} \\
& - \sum_{q=1}^{2} r_{i-2,q}^{(j)}\sum_{p=2}^{k}\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_p\big)w_{p,q}, \quad i\geqslant 3,
\end{aligned} \tag{5.55}
$$

$$
\begin{aligned}
\big(\mathcal{H}_q-\lambda_0\big)\phi_{q,i}^{(j)} =& \sum_{s=2}^{i-1}\Lambda_s^{(j)}\phi_{q,i-s}^{(j)} - \sum_{\substack{t=2\\ t\neq q}}^{k}\mathcal{L}_q\mathcal{S}\big(X_q-X_t\big)\phi_{t,i-1}^{(j)} \\
& - \mathcal{L}_i\mathcal{S}\big(X_i-X_1\big)\widehat{\phi}_{1,i-1}^{(j)}, \quad q\geqslant 2, \quad i\geqslant 3.
\end{aligned} \tag{5.56}
$$

Применяя условия разрешимости, к уравнению (5.53) и учитывая (0.39), $\widehat{\phi}_{1,1}^{(j)}=0$, приходим к уравнению на собственные значения

$$
\Big(\mathrm{B}-\Lambda_2^{(j)}\mathrm{E}\Big)r_0^{(j)}=0, \quad \mathrm{B}:=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}, \quad r_0^{(j)}=\begin{pmatrix} r_{0,1}^{(j)}\\ r_{0,2}^{(j)}\end{pmatrix}, \tag{5.57}
$$

где $b_{ij}=\sum\limits_{q=1}^{k}\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}\big(X_1-X_q\big)w_{q,j},\psi_{0,i}\Big)$, E – единичная матрица размера 2×2, $r_0^{(j)}$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\Lambda_2^{(j)}$.

Вычисляя теперь собственные значения и собственные вектора матрицы B с учётом леммы 5.2, получаем формулы (0.38), (0.46). Из (5.53), учитывая определение оператора $\mathcal{R}_1$, (0.39), (5.53), приходим к равенствам (0.40), (0.41). Аналогично лемме 5.3 доказывается

Лемма 5.4. *Если λ_0 собственное значение кратности $2+0$, то функции $C_j(\delta,X)$ в (5.36) можно выбрать голоморфными по δ*

равномерно по X так, что будут выполнены равенства

$$\big(\Psi_X^{(j)},\widetilde{\Phi}_0^{(j)}\big)_{\mathfrak{L}}=1,\quad \text{где}\quad \widetilde{\Phi}_0^{(j)}:=\begin{pmatrix} r_{0,1}^{(j)}\psi_{0,1}+r_{0,2}^{(j)}\psi_{0,2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad j=1,2,$$

где $r_{0,1}^{(j)}$, $r_{0,2}^{(j)}$ – компоненты собственного вектора $r_0^{(j)}$ матрицы B *из (0.46).*

Из последней леммы следует, что в случае кратности 2+0 функции $\Psi_X^{(j)}$ представимы в виде ряда (5.49), для коэффициентов которого справедливы оценки (5.50).

Применяя условия разрешимости к уравнению (5.55), учитывая лемму (5.4) и определение функций $\widehat{\phi}_{qi}$, $q=1,\ldots,k$, $i\geqslant 1$, приходим к уравнению (0.47), в котором функция $\mathrm{F}_i^{(j)}$ определяется вторым равенством (0.42). Условием разрешимости уравнения (0.47) является ортогональность его правой части собственному вектору $r_0^{(j)}$, пользуясь которым получаем первое равенство в формулах (0.42). Из формул (5.55), (5.56), учитывая определение операторов $\mathcal{R}_1$, получаем равенства (0.43), (0.44). Полные ряды для собственных значений и соответствующих им собственных функций возмущённого оператора в случае кратности $2+0$ построены, а теорема 0.7 полностью доказана. Формальный метод получения уравнений на коэффициенты рядов (0.35), (0.36) аналогичен методу получения коэффициентов ряда (0.18), (0.19), то есть, случаю кратности $1+1$.

5.3 Случай произвольной кратности предельного собственного значения

Рассмотрим случай произвольной кратности предельного собственного значения λ_0 для возмущённого оператора с двумя разбегающимися возмущениями, то есть, при $k = 2$. В этом случае возмущённый оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ имеет вид

$$\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(-X_1)\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1) + \mathcal{S}(-X_2)\mathcal{L}_2\mathcal{S}(X_2).$$

Пусть λ_0 является собственным значением оператора $\mathcal{H}_1$ кратности p и собственным значением оператора $\mathcal{H}_2$ кратности q. Вычислим первые поправки возмущённых собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, где $j = 1, \dots, t$, $t = p+q$, сходящихся к λ_0. Будем действовать согласно описанному выше формальному методу построения коэффициентов рядов, аналогичных рядам (0.18), (0.19). Подставляем в уравнение на собственные значения представления для возмущённого собственного значения и возмущённой собственной функции

$$\begin{aligned} \lambda_X^{(j)} &= \lambda_0 + \Lambda_1^{(j)}(X) + \dots, \\ \psi_X^{(j)}(x) &= \sum_{i=1}^{p} r_1^{(i)} \psi_{0,1}^{(i)}(x + X_1) + \sum_{i=1}^{q} r_2^{(i)} \psi_{0,2}^{(i)}(x + X_2) \\ &\quad + \Big(\phi_{1,1}^{(j)}(x + X_1) + \phi_{2,1}^{(j)}(x + X_2)\Big) + \dots \end{aligned}$$

и, выделяя члены одного порядка, получаем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_1 - \lambda_0)\phi_{1,1}^{(j)} &= \Lambda_1^{(j)} \sum_{i=1}^{p} r_1^{(i)} \psi_{0,1}^{(i)} - \sum_{i=1}^{q} r_2^{(i)} \mathcal{L}_1 \mathcal{S}(X_1 - X_2) \psi_{0,2}^{(i)}, \\ (\mathcal{H}_2 - \lambda_0)\phi_{2,1}^{(j)} &= \Lambda_1^{(j)} \sum_{i=1}^{q} r_2^{(i)} \psi_{0,2}^{(i)} - \sum_{i=1}^{p} r_1^{(i)} \mathcal{L}_2 \mathcal{S}(X_2 - X_1) \psi_{0,1}^{(i)}. \end{aligned}$$

Условием разрешимости данных уравнений является ортогональность их правых частей каждой собственной функции $\psi_{0,1}^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$ и $\psi_{0,2}^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$. Применяя данные условия разрешимости к последним уравнениям, получаем матричное уравнение

$$\Big(\mathrm{B} - \lambda_1^{(j)}\mathrm{E}\Big) r_0^{(j)} = 0, \quad \mathrm{B} := \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\mathrm{B}} \\ \widetilde{\mathrm{B}}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, t, \tag{5.58}$$

где $\widetilde{\mathrm{B}}$ – матрица размера $p \times q$ вида

$$\widetilde{\mathrm{B}} := \begin{pmatrix} \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,1}^{(1)}\right) & \dots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(1)}\psi_{0,1}^{(q)}\right) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(p)}\psi_{0,1}^{(1)}\right) & \dots & \left(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(X_1 - X_2)\psi_{0,2}^{(p)}\psi_{0,1}^{(q)}\right) \end{pmatrix},$$

$r_0^{(j)}$ – собственный вектор, соответствующий собственным значениям $\Lambda_1^{(j)}$, компонентами которого являются числа $r_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ и $r_2^{(j)}$, $j = 1, \dots, q$, E – единичная матрица размера $t \times t$. Символ * здесь означает эрмитово сопряжение, а символ $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Для нахождения $\Lambda_1^{(j)}$ остаётся выписать условие разрешимости уравнения (5.58), то есть решить уравнение

$$\det\left(\mathrm{B} - \Lambda_1^{(j)}\mathrm{E}\right) = 0.$$

Приводя данный определитель к диагональному виду, получаем

$$\det\left(\mathrm{B} - \Lambda_1^{(j)}\mathrm{E}\right) = \left(\Lambda_1^{(j)}\right)^{q-p} \det\left(\left(\Lambda_1^{(t)}\right)^2\mathrm{E} - \widetilde{\mathrm{B}}\widetilde{\mathrm{B}}^*\right) = 0.$$

Из последнего равенства видно, что у $q - p$ собственных значений $\lambda_X^{(j)}$, $j = 1, \dots, t$, возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ первая поправка $\Lambda_1^{(j)}$ равна нулю. Остальные $t - (q - p) = p + q - q + p = 2p$ собственных значений возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ группируются в p пар. У каждой такой пары первые поправки вычисляются по формулам

$$\Lambda_1^{(j,\pm)} = \pm\sqrt{\mu_j}, \quad j = 1, \dots, p, \tag{5.59}$$

где μ_j – собственные значения матрицы $\widetilde{\mathrm{B}}\widetilde{\mathrm{B}}^*$ (см. рисунок 2.1).

Литература

[1] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. Санкт-Петербург: Издательство Ленинградского университета, 1980. – 264 с.

[2] Борисов Д.И. О спектре двумерного периодического оператора с малым локализованным возмущением. // Известия РАН, Серия математическая. – 2011. – Т. 75. – № 2. – С. 29-64.

[3] Борисов Д.И. Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном. // Математический сборник. – 2006. – Т. 197. – № 4. – С. 3-32.

[4] Борисов Д.И., Головина А.М. О резольвентах периодических операторов с разбегающимися возмущениями. // Уфимский математический журнал. – 2012. – Т. 4. – № 2. – С. 65-74.

[5] Гадыльшин Р.Р. О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси. // Теоретическая и математическая физика. – 2002. – Т. 132. – № 1. – С. 97-104.

[6] Головина А.М. Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями. // Математические заметки. – 2012. – V. 91. – № 3. – С. 464-466.

[7] Головина А.М. О дискретном спектре возмущённого периодического дифференциального оператора. // Доклады АН. – 2013. – Т. 448. – № 3. – С. 1-3.

[8] Головина А.М. О спектре периодических эллиптических операторов с разбегающимися возмущениями в пространстве. // Алгебра и анализ. – 2013. – Т. 25. – № 5. – С. 32-60.

[9] Доброхотов С.Ю., Колокольцов В.Н. Об амплитуде расщепления нижних энергетических уровней оператора Шрёдингера с двумя симметричными ямами. // Теоретическая и математическая физика. – 1993. – Т. 94. – № 3. – С. 426-434.

[10] Доброхотов С.Ю., Колокольцов В.Н, Маслов В.П. Расщепление нижних энергетических уровней уравнения Шрёдингера и асимптотика фундаментального решения уравнения. // Теоретическая и математическая физика. – 1991. – Т. 87. – № 3. – С. – 323-375.

[11] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва: Издательство Мир, 1972. – 740 с.

[12] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Издательство Физматлит, 2004. – 572 с.

[13] Маркушевич А.И. Теория аналических функций. Москва: Издательство Наука, 1968. – Т. 1. – 486 с.

[14] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. Москва: Издательство МГУ, 1990. – 311 с.

[15] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. II: Гармонический анализ. Самосопряжённость. Москва: Издательство Мир, 1978. – 394 с.

[16] Цикон Х., Фрёзе Р., Кирш В., Саймон Б. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. Москва: Издательство МГУ, 1990. – 311 с.

[17] Adams R.A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975. – 268 p.

[18] Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II. // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1964. – V. 17. – P. 35-92.

[19] Ahlrichs R. Convergence properties of the intermolecular Force series ($\frac{1}{R}$ – expansion). // Theoretica Chemica Acta. – 1976. – V. 66. – № 1. – P. 7-15.

[20] Aktosun T., Klaus M. and Cornelis van der Mee. On the number of bound states for the one-dimensional Srödinger equation. // Journal of Mathematical Physics. – 1998. – V. 39. – № 9. – P. 4249-4259.

[21] Albeverio S., Gesztesy S., Høegh-Krohn, H. Holden R. Solvable models in quantum mechanics. 2nd ed. AMS Chelsea Publishing. Providence, Rhode Island, 2005. – 488 p.

[22] Aventini P. and Seiler R. On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion. // Communications in Mathematical Physics. – 1975. – V. 41. – № 2. – P. 119-134.

[23] Borisov D.I. Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation. // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 2007. – V. 10. – № 2. – P. 155-196.

[24] Borisov D.I. Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space. // Annales Henri Poincaré. – 2007. – V. 8. – № 7. – P. 1371-1399.

[25] Borisov D.I. and Exner P. Exponential splitting of bound in a waveguide with a pair of distant windows. // Journal of Physics A: Mathematics and General. – 2004. – V. 37. – № 10. – P. 3411-3428.

[26] Borisov D., Exner P., Golovina A. Tunneling resonances in system without a classical trapping. // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – V. 54. – № 1. – id. 012102.

[27] Davies E.B. The twisting trick for double well Hamiltonians. // Communications in Mathematical Physics. – 1982. – V. 85. – № 3. – P. 471-479.

[28] Davies E.B. Spectral theory and differential operators. New York: Cambridge University Press, 1995. – 182 p.

[29] Dobrohotov S.Yu., Kolokoltsov V.N, Maslov V.P. Quantization of the Bellman Equation, Exponential Asymptotics and Tunneling. // Advances in Soviet mathematics. – 1992. – V. 13. – P. 1-46.

[30] Golovina A.M. Discrete eigenvalues of periodic operators with distant perturbations. // Journal of Mathematical sciences. – 2013. – V. 189. – № 3. – P. 342-364.

[31] Golovina A.M. On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations in the space. // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2012. – V. 19. – № 2. – P. 182-192.

[32] Graffi V., Harrell II E.V and Silverstone H.J. The $\frac{1}{R}$ expansion for H_2^+: analyticity, summability and asymptotics. // Annals of Physics. – 1985. – V. 165. – № 2. – P. 441-483.

[33] Harrell E.M. Double wells. // Communications in Mathematical Physics. – 1980. – V. 75. – № 3. – P. 239-261.

[34] Harrell E.M. and Klaus M. On the double-well problem for Dirac operators. // Annales de l'Institut Henri Poincaré. – 1983. – V. 38. – № 2. – P. 153-166.

[35] Høegh-Krohn R. and Mebkhout M. The $\frac{1}{r}$ Expansion for the Critical Multiple Well Problem. // Communications in Mathematical Physics. – 1983. – V. 91. – № 1. – P. 65-73.

[36] Hunziker W. Cluster properties of multiparticle systems. // Journal of Mathematical Pysics. – 1965. – V. 6. – № 1. – P. 6-10.

[37] Като T. Boundedness of some pseudo–differential operators.// Osaka Journal of Mathematics. – 1976. – V. 13. – № 1. – P. 1–9.

[38] Klaus M. Some remarks on double-wells in one and three dimensions. // Annales de l'Institut Henri Poincaré. – 1981. – V. 34. – № 4. – P. 405-417.

[39] Klaus M. On the bound state of Schrödinger operators in one dimension. // Annals of Physics. – 1977. – V. 108. – № 2. – P. 288-300.

[40] Klaus M. and Simon B. Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells. // Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A. – 1979. – V. 30. – № 2. – P. 83-87.

[41] Klaus M. and Simon B. Coupling constants threshold in nonrelativistic quantum mechanis. I. Short-range two-body case. // Annals of Physics. – 1980. – V. 130. – № 2. – P. 251-281.

[42] Kondej S. and Veselić I. Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians. // Annales Henri Poincaré. – 2007. – V. 8. – № 1.– P. 109-134.

[43] Kostrykin V. and Schrader R. Cluster properties of one particle Schrödinger operators, I. // Reviews in Mathematical Physics. – 1994. – V. 6. – № 5. – P. 833-853.

[44] Kostrykin V. and Schrader R. Scattering theory approach to random Schrödinger operators in one dimension. // Reviews in Mathematical Physics. – 1999. – V. 11. – № 2. – P. 187–242.

[45] Morgan J.D.(III) and Simon B. Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations. // International journal of quantum chemistry. – 1980. – V. 17. – № 2. – P. 1143-1166.

[46] Pinchover Y. On the localization of binding for Srödinger operators and its extension to elliptic operators. // Journal of mathematical analysis and its applications. – 1995. – V. 41. – № 6. – P. 57–83.

[47] Reity O.K. Asymptotic expansions of the potential curves of the relativistic quantum-mechanical two-Coulomb-center promlem. // Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – V. 43. – № 2. – P. 672–675.

[48] Tamura H. Existense of bound states for double well potentials and the Efimov effect. // Lecture notes in Mathematics. – 1990. – V. 1450. – P. 173–186.

[49] Wang X. On the existence of the N-body Efimov effect. // Journal of functional analysis. – 2004. – V. 209. – № 1. – P. 137-161.

[50] Wang X., Wang Y. Existence of two-cluster threshold resonanse and the N-body efimov effect. // Journal of mathematical physics. – 2005. – V. 46. – № 11. – P. 156-182.