Количество граней центрально-симметричных многогранников

Автор Артемьев М.А.
Научный руководитель к.ф.-м.н Эстеров А.И.

Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
Факультет математики

Вступление

Существует 3^d-гипотеза: выпуклый центрально-симметричный d-мерный многогранник имеет не меньше 3^d грайней всех размерностей. Она несложно доказывается в 3-мерном случае, и значительно сложнее в 4-мерном (доказана в 2007 году [1]). Для размерностей $d \geq 5$ она не доказана. Оценка $N_P = \sum_{i=0}^{d} f_i \geq 3^d$ достигается на классе многогранников Ханнера (отрезок — одномерный многогранник Ханнера, остальные многогранники Ханнера являются прямым произведением или кроссом пары многогранников Ханнера меньших размерностей), однако достигается ли она на других многогранниках, также неизвестно.

Мне удалось классифицировать $x : \exists P : N_P = x$ в 3-мерном случае, почти удалось в 4-мерном (открытым остался вопрос, достигается ли $N_P = 89$), а также удалось выяснить кое-что об общем виде таких N в больших размерностях.

Случай d = 3.

Утверждение 1

Пусть P — выпуклый центрально-симметричный (далее ц-с) трехмерный многогранник, точка O — центр его симметрии f_d — количество его d-мерных граней, $N_P = \sum_{i=0}^{3} f_i$. Тогда $N_P = 27 + 4k$, где k — целое неотрицательное число. Кроме того, $\forall k\ \exists P$ такой, что $N_P = 27 + 4k$.

Лемма (трехмерный случай 3^d-гипотезы):

$N_P \geq 27$.

Доказательство леммы

Для любой грани S есть грань S' такая, что S и S' центрально симметричны относительно O. Также $S \parallel S'$. Если P - параллелепипед или октаэдр, то $N_P = 27$. Иначе, раз у 3-мерного центрально-симметричного многогранника не бывает меньше 6 нульмерных граней(их четное число, и если их 4, то получится параллелограмм), а 6 только у октаэдра, у P их хотя бы 8. Аналогично, раз P не параллелепипед, у него больше 6, т.е. хотя бы 8 двумерных граней (если есть всего 2 пары параллельных двуменрых граней, многогранник будет неограниченным, если 3 - параллелепипедом). Каждая из них содержит по крайней мере 3 одномерные, а каждая из одномерных содержится ровно в 2-х двумерных. Значит, одномерных граней по крайней мере 12. Трехмерная грань одна. Отсюда получаем, что если P - не параллелепипед и не октаэдр, $N_P \geq 29 > 27$. $\square$

Доказательство утверждения 1

Пусть P_i — правильная $2(i+1)$-уголная призма с единичными ребрами. Тогда P_i - выпуклый ц-с многогранник, у которого $f_0 = 4i+4$, $f_1 = 6i+6$, $f_2 = 2i+4$, $f_3 = 1$. Итого $N_{P_i} = 12i+15$. Т.е., подставляя натуральные i, получим всевозможные N_P вида $27+12k$. Теперь выберем в P_i пару центрально-симметричных относительно O ребер AB и CD (A и B лежат на одном основании призмы, C и D — на другом, A центрально-симметрична C, а B — D). Заменим вершину B вершиной B' такой, что $\overrightarrow{AB'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, а вершину D вершиной такой D', что $\overrightarrow{CD'} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$, а остальные вершины оставим на месте. Выпуклая оболочка полученного множества вершин - выпуклый ц-с многогранник P с $N_P = 31+12k$ (кол-во 0-мерных граней не изменится, две 1-мерные и две 2-мерные добавятся, т.к. две старые 2-мерные грани "сломаются"на 2 треугольника каждая, а кол-во 3-мерных не изменится). Если сдвинуть вершину не вдоль ребра, а в сторону центра основания призмы, в которой лежит данная вершина, сломаются сразу 2 примыкающие боковые грани, сделав эту операцию с также с центрально-симметричной вершиной, получаем многогранник P с $N_P = 12k+35$. Поскольку любое число вида $27+4k$ представимо в виде $27+12l$, $31+12l$ или $35+12l$, $\forall k$ среди полученных многогранников найдется искомый. Осталось доказать, что никакие другие значения N_P принимать не может.

По лемме, $N_P \geq 27$. Поскольку все грани, кроме трехмерной, разбиваются на пары центрально- симметричных относительно O, N_P нечетно. Кроме того $N_P \geq 27$. Значит, если $N_P \neq 27+4k$, есть 2 выпуклых ц-с многогранника P и P' таких, что $|N_P - N'_P| = 2$. Применим теорему Эйлера для многогранников: $f_0 - f_1 + f_2 = f'_0 - f'_1 + f'_2 = 2$. Поскольку все f четные, если мы рассмотрим g, вдвое меньшие f, они будут целые. $g_0 - g_1 + g_2 = g'_0 - g'_1 + g'_2 = 1$. Значит, четность количества нечетных среди g_0, g_1 и g_2 совпадает с четностью количества нечетных среди g'_0, g'_1 и g'_2. Однако $|g_0+g_1+g_2-(g'_0+g'_1+g'_2)|=1$, т.е. чётности не совпадают, противоречие. $\square$

Случай $\mathbf{d = 4}$.

Утверждение 2

В 4-мерном случае не достигаются никакие значения N_P кроме $N_P = 81+4k$, а также достигаются все значения $N_P = 81+4k$, кроме, возможно, $N_P = 89$. Ниже приведено доказательство этого факта.

Оценка

Во-первых, как доказано в статье [1], $N_P \geq 81$. Значение 81 достигается, например, у 4-куба, а значения $83+4k$ не достигаются, доказательство аналогично 3-мерному случаю и использует обобщение формулы Эйлера для многогранников.

Почти все примеры

N_P может принимать все значения вида $81+12k$. Действительно, пусть у 3-мерного политопа P было $27+4k$ граней. Тогда расположим его в гиперплоскости $x=0$ так, чтобы его центр симметрии O совпал с началом координат, затем добавим к нему точки $a_1=(1,0,0,0)$ и $a_2=(-1,0,0,0)$ и возьмем выпуклую оболочку получившегося множества точек (будем называть это прибавлением к многограннику отрезка). Получится, очевидно, снова ц-с многогранник. Назовем его P'. Каждая грань $f \subset P$, кроме 3-мерной, является также гранью P'. Также в P' от f отходит 2 грани размерности на 1 больше, чем размерность f, а именно выпуклая оболочка f с a_1 и f с a_2, т.е. каждой грани в P соответствует 3 грани в P' (3-мерной грани в P можно поставить в соответствие в P' 4-мерную, а также a_1 и a_2). Значит, в P' $81+12k$ граней.

Теперь пусть у четырехмерного выпуклого многогранника P есть грань-тетраэдр f. Посмотрим, как изменится N_P, если к f "приклеить"4-симплекс с основанием f и малой высотой (иными словами, добавить над центром грани f точку и взять выпуклую оболочку P с этой точкой). Возьмем ε-окрестность грани f, в которую не попало никаких вершин P кроме вершин f (добавленная точка тем не менее находится так близко, что попадает в эту окрестность). До добавления точки в окрестности целиком лежало $2^4-1=15$ граней (по количеству граней в тетраэдре), после добавления будет лежать $2^5-1-2=29$ граней (в ε-окрестности будет лежать добавленный симплекс, в нем 2^5-1 грань, однако сам симплекс и грань f не будут являться гранями нового многогранника, поэтому вычитаем двойку). Итого, добавилось 14 граней, а если применить эту операцию к ц-с граням ц-с многогранника, добавится 28 граней, необходимо только, чтобы у исходного многогранника была пара гранейсимплексов старшей размерности (кстати, у полученного многогранника такая пара будет, так что операцию можно повторять сколько угодно). Заметим теперь, что у всех многогранников из последовательности, построенной для 3-мерного случая, есть пара вершин степени 3. Значит, у двойственных к ним есть пара граней-треугольников, а если прибавить к полученным многогранникам отрезки, получатся 4-мерные многогранники с $81 + 12k$ гранями, у которых есть грани-тетраэдры. Приклеивая к ним симплексы, как было описано выше, получим 4-мерные выпуклые ц-с многогранники с $N_P = 81, 93, 105, 109, 117, 121$ и $129 + 4k$ гранями, остается выяснить, достигается ли $N_P = 85, 89, 97, 101, 113$ и 125.

Оставшиеся примеры

Многогранники с соответствующими N_P придумывались из довольно общих соображений, а чтобы проверить, что у них именно такое суммарное количество граней, я написал программу, которая по набору точек в 4-мерном просрансстве проводит через них всевозможные гиперплоскости, те из них, относительно которых все остальные врешины лежат с одной стороны - плоскости граней размерности 3. После этого она смотрит, какие вершины лежат в каждой из этих граней, и дальше работает только с наборами вершин, а не с уравнениями плоскостей. Пересекая множества вершин, содержащихся в разных 3-мерных гранях и проверяя эти пересечения на невырожденность, программа находит все 2-мерные, 1-мерные и 0-мерные грани (т.е. фактически по данному конечному множеству точек программа считает кол-во граней каждой размерности выпуклой оболочки этих точек). Итак, найденные примеры:

$N_P = 85$. Возьмем 3-мерный куб $\{0\} \times [-1, 1]^3$ и добавим к нему вершины $(1, \frac{1}{10}, 0, 0)$, $(1, -\frac{1}{10}, 0, 0)$, $(-1, \frac{1}{10}, 0, 0)$ и $(-1, -\frac{1}{10}, 0, 0)$ и возьмем выпуклую обоочку. У полученного многогранника f-вектор $= (12, 30, 30, 12)$ и $N_P = 85$. Действительно, если к 3-кубу добавить 1 пару вершин, получится многогранник Ханнера с $N_P = 81$, а у нашего многогранника по сравнению с ним пара вершин "раздвоилась т.е. вершину заменили на 2, соединенные ребром, и то же самое произошло с противоположной стороны, при этом кол-во 2-мерных и 3-мерных граней не изменилось.

$N_P = 97, 125$. Возьмем 4-мерный куб $[-1, 1]^4$ и заменим вершины $(1, 1, 1, 1)$ и $(-1, -1, -1, -1)$ вершинами $(1, 1, 1, \frac{9}{10})$ и $(-1, -1, -1, -\frac{9}{10})$. У полученного многогранника f-вектор $= (16, 38, 32, 10)$ и $N_P = 97$. У этого многогранника вершины $(1, 1, 1, \frac{9}{10}), (1, 1, -1, 1), (1, -1, 1, 1)$ и $(-1, 1, 1, 1)$ образуют грань-тетраэдр, так что, приклеив к нему 2 4-симплекса, получаем многогранник с $97 + 28 = 125$ гранями.

Чтобы получить $N_P = 101$, можно, например, взять пирамиду над 3-октаэдром и сдвинуть вершину октаэдра в сторону соседней вершины того же октаэдра (и сделать то же самое с противоположной стороны). Получим многогранник, комбинoторно эквивалентный многограннику с вершинами $(1, \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1)$ и ещё шестью, симметричными данным относительно начала координат. f-вектор полученного многогранника $(12, 36, 38, 14)$.

Возьмем теперь куб $[-1, 1]^4$, и 2 соседние по ребру вершины сдвинем друг к другу, то же самое сделаем с противоположной стороны (То есть получится многогранник с вершинами $(1, 1, 1, \frac{9}{10})$, $(1, 1, 1, -\frac{9}{10})$, $(1, 1, -1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)$,$(1, -1, -1, 1)$,$(1, -1, -1, -1)$ и ещё 8, симметричными данным). У полученного многогранника f-вектор будет $(16, 44, 40, 12)$ и $N_P = 113$. Утверждение 2 доказано. $\square$

$\mathbf{N_P = 89}$

Открытым пока остается вопрос, достигается ли $N_P = 89$. Пусть существует такой многогранник P. Во-первых, симплициальные многогранники перебираются на компьютере, достаточно генерировать, например, случайные точки на единичной сфере и брать их выпуклую оболочку, так что симплициальные (и простые) многогранники можно не рассматривать. Для несимплициальных в статье [1] доказано неравенство $f_2 \geq \frac{3f_0+7f_3}{4} - 2$ и, соответственно, $f_1 \geq \frac{7f_0+3f_3}{4} - 2$. Отсюда $f_1 + f_2 \geq \frac{10}{4}(f_0 + f_3) - 4$ и $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \geq \frac{7}{2}(f_0 + f_3) - 4$ Значит, $P_N = 89 \Rightarrow f_0 + f_3 \leq 26$. Октаэдр не подходит, т.к. у него $N_P \neq 89$, поэтому можно считать $10 \leq f_0 \leq f_3 \leq 16$

Несимплициальные 4-мерные ц-с многогранники с 10 вершинами довольно просто устроены: возьмем грань такого многогранника P, не являющуюся симплексом. В ней 5 вершин, а остальные 5 — в грани, центрально-симметричной ей. То есть данный многогранник — скрученная призма над 3-мерным многогранником P'. 3-мерных многогранника с 5 вершинами существует 2: 4-угольная пирамида (тогда, если P' - пирамида над параллелограммом, $N_P = 81$, иначе $N_P \geq 93$) и бипирамида над треугольником. Во втором случае, поскольку $N_P = 2N'_P + N_{P'+P'}$, где $P' + P'$ — сумма Минковского P' с собой, $N_P = 42 + N_{P'+P'}$, т.е. должно выполняться $N_{P'+P'} = 57$. Пусть ABC — треугольник-основание бипирамиды, D_1 и D_2 - вершины. $N_{P'+P'}$ определяется количеством вырожденностей вида $ABD_1 \| CD_2$ (каждая такая вырожденность равносильна "склеиванию"2-х боковых граней P). Максимум таких вырожденностей может быть 3 (например, у многогранника с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$), при этом получается f-вектор $(10, 32, 16, 14)$ и $N_P = 93$.

Значит, $12 = l_0 \leq l_3 \leq 14$, причем по крайней мере 10 из 12 вершин образуют скрученную призму над одним из вышеописанных 3-мерных многогранников, остается расположить последнюю пару центрально-симметричных вершин. Для этого можно, например перебрать на компьютере всевозможные расположения последней пары вершин относительно уже имеющихся граней для каждой из 10-вершинных скрученных призм. Видимо, основная техническая сложность такого решения будет заключаться в генерации точек, соответствующим образом расположенных относительно граней, а также, скорее всего, временем работы программы (хотя, например, скрученную призму над бипирамидой над треугольником с 3 вырожденностями, скорее всего, реально перебрать, а она с добавленной парой вершин - основной претендент, т.к. если вырожденностей меньше, количество грайней резко растет. Любопытно, кстати, что эта скрученная призма является двойственной к другой, 14-вершинной скрученной призме).

Размерности d ≥ 5

В любой размерности $\exists P: N_P = 3^d$. Например, подходят d-куб и двойственный ему d-октаэдр. По 3^d-гипотезе (не доказанной при $d \geq 5$), $\nexists P$: $N_P < 3^d$. Аналогично 3- и 4-мерным случаям доказывается, что $N_P \neq 3^d + 4k + 2$. Что интереснее, оказывается, что, как и в 3- и 4-меном случае верно следующее

Утверждение 3
$\exists n: \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \exists P: N_P = n + 4k.$

Доказательство утверждения 3
Для начала возьмем d-мерный октаэдр и начнем приклеивать к нему пары d-симплексов, как это делалось в 4-мерном случае. Получим последовательность (q_n) многогранников, чьи N_P образуют арифметическую прогрессию, начинающуюся с 3^d и с шагом $2^{d+1} - 4$. Возьмем теперь аналогичную последовательность (p_n) $d-1$-мерных многогранников и прибавим к каждому из них отрезок (т.е. возьмем выпуклую оболочку прямой суммы многогранника из последовательности и отрезка). Получим последовательность (p'_n) d-мерных многогранников, причем $(N_{p'_n})$ - арифметическая прогрессия с шагом $3(2^d - 4)$ и первым элементом 3^d. Поскольку у каждого из элементов (p'_n) среди граней старшей размерности есть симплексы (более того, p'_i симплициальны), к каждому из них также можно приклеивать d-симплексы. Значит, если объединить последовательности (q_n) и (p'_n) в последовательность (r_n), почти вся последовательность (N_{r_n}) окажется арфиметической прогрессией с шагом

НОД($2^{d+1}-4, 3(2^d-4)$)=НОД($2^{d+1}-4, 8$). При четном d этот НОД уже равен 4, и искомые многогранники найдены. В нечетных размерностях пока гарантирован шаг 8 и отдельно шаг 12, однако из этого напрямую не следует, что будет шаг 4. Поэтому придется рассмотреть ещё многогранники, полученные следующим образом: у элемента последовательности симплициальных многогранников (p'_n) выберем грань f старшей размерности и расположим над ней 2 точки на малой высоте так, чтобы отрезок, соединяющий их, был параллелен одной из 1-мерных граней грани f. Посчитаем, сколько граней при этом добавится. Аналогично случаю с приклеиванием симплекса, на месте 2^d-1 граней грани f появится $N_{P_d}-2$ граней, где P_d - четырехугольная пирамида при $d=3$ и пирамида над P_{d-1} при $d \geq 4$. Индукцией по размерности доказывается, что $N_{P_d} = 10 \cdot 2^{d-2} - 1$ (действительно, $N_{P_3} = 19$, а при переходе от размерности d к размерности $d+1$ над каждой гранью P_d добавляется грань на 1 большей размерности, а также добавляется 1 вершина. Также по индукции доказывается, что у P_d ровно 4 грани-симплекса старшей размерности). Итак, при приклеивании P_d за грань-симплекс N_P увеличится на $(10 \cdot 2^{d-2}-1)-2-(2^d-1) = 3 \cdot 2^{d-1}-2$, и на столько же, если приклеить P_d с противоположной стороны, т.е. всего на $3 \cdot 2^d - 4$, причем количество граней-симплексов при этой операции только увеличится, т.е. её можно повторять сколько угодно раз или, например, комбинировать с приклеиванием симплексов. В даном случае достаточно применять её к элементам (r_n), чтобы получить последовательность (r'_n), у которой начиная с некоторого момента будет шаг НОД$(8, 3 \cdot 2^d - 4) = 4$ □

Литература

[1] Raman Sanyal, Alex Werner, Günter M. Ziegler, *On Kalai's conjectures concerning centrally symmetrix polytopes.* Discr. and Comput. Geom., 41 (2009), 2, 183-198, arXiv:0708.3661