

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ РОДА 1 С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ 5 КЛАССИЧЕСКИМИ ПЕРЕКРЕСТКАМИ

Работа посвящена табулированию виртуальных узлов рода 1, имеющих ≤ 5 классических перекрестков. Сначала мы строим все нелокальные строго примарные узлы в утолщенном торе $T \times I$, которые имеют диаграммы с ≤ 5 перекрестками и не допускают дестабилизаций. Затем используем обобщенную версию полинома Кауфмана, чтобы доказать, что все найденные узлы различны. После этого преобразуем диаграммы узлов в торе T , полученные таким образом, в диаграммы виртуальных узлов на плоскости.

Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

Введение

Теория виртуальных узлов была предложена Л. Кауфманом в 1996, см. [7]. Эта теория близка к теории узлов в утолщенных поверхностях вида $S \times I$, где S - замкнутая ориентируемая поверхность и I - отрезок $[0, 1]$. Мы табулируем все строго примарные узлы в утолщенном торе $T \times I$, которые имеют диаграммы с ≤ 5 перекрестками и не допускают дестабилизаций. В соответствии с теоремой Куперберга в работе [9], это эквивалентно составлению таблицы примарных виртуальных узлов, имеющих диаграммы с ≤ 5 классическими перекрестками. Табулированию узлов и зацеплений в трехмерных многообразиях посвящены работы [3,5,6], виртуальных узлов - [4], проекций тэнглов - статья [2].

1. Основной результат

Напомним, что виртуальный узел - это класс эквивалентности диаграмм виртуальных узлов относительно обобщенных преобразований Рейдемейстера. Виртуальный узел также можно определить как класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях с точностью до гомеоморфизма утолщенных поверхностей и операций стабилизаций(дестабилизаций). Операция стабилизации (дестабилизации) увеличивает (уменьшает) род поверхности, не затрагивая узла, см. [10]. Род узла K - это наименьший род такой поверхности S , что K расположен в $S \times I$.

Мы рассматриваем виртуальные узлы рода 1, т.е. те узлы в утолщенном торе $T \times I$, которые не допускают дестабилизаций.

Узлы в $T \times I$, как и классические узлы, могут быть заданы проекциями и диаграммами. Проекция узла $K \subset T \times I$ представляет собой регулярный граф $G \subset T$ степени 4, для которого прохождение вершин по правилу "прямо вперед" определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма узла K получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой - ниже другого в смысле величины координаты $t \in I$. Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом тора на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно

изменять типы всех перекрестков (проходы на переходы и наоборот), что соответствует гомеоморфизму $h : T \times I \rightarrow T \times I$, индуцированному нетривиальной симметрией $\varphi : I \rightarrow I$.

Определение 1. *Диаграмма узла $K \subset T \times I$ является минимальной, если её сложность (число перекрестков) не превосходит сложности каждой диаграммы любого узла, эквивалентного K . Проекция $G \subset T$ минимальна, если минимальна хотя бы одна из соответствующих ей диаграмм.*

Будем называть узел $K \subset T \times I$ составным, если K имеет один из следующих двух типов:

1. K есть связная сумма нетривиального (т.е. не ограничивающего диск) узла в $T \times I$ и нетривиального узла в S^3 .
2. K есть нетривиальная круговая связная сумма узлов в $T \times I$, см. [13]. Это означает, что K может быть получен из заузленных дуг $l_i \subset A_i \times [0, 1]$, соединяющих A_i (где A_i - кольца, $i = 1, 2$) путём отождествления $A_1 \times \{0\}$ с $A_2 \times \{1\}$, $A_1 \times \{1\}$ с $A_2 \times \{0\}$.

Определение 2. *Узел в $T \times I$ - строго примарный, если он не является составным и не допускает дестабилизаций.*

Проекция (или диаграмма) строго примарна, если она отвечает некоторому строго примарному узлу в $T \times I$.

Удобно представлять тор T как квадрат с отождествленными противоположными сторонами. Мы будем изображать проекции и диаграммы узлов в $T \times I$ в виде набора из собственных дуг в квадратах так, что отождествление противоположных сторон определяет соединение соответствующих концов дуг на этих сторонах.

Теорема 1. *Существуют ровно 90 различных строго примарных узлов в $T \times I$, имеющих диаграммы с не более чем 5 перекрестками. Диаграммы этих узлов показаны на Рис. 15 в конце работы.*

Виртуальный узел является составным, если он может быть представлен в виде связной суммы двух нетривиальных виртуальных узлов. Определение связной суммы виртуальных узлов можно найти в работе [12]. Нетривиальные виртуальные узлы, не являющиеся составными, называются примарными.

Из теоремы Куперберга [9] следует, что существует естественная биекция между виртуальными узлами рода 1 и узлами в $T \times I$, не допускающими дестабилизаций. Поэтому следующая теорема, которая является основным результатом работы, эквивалентна Теореме 1.

Теорема 2. *Существуют ровно 90 различных примарных виртуальных узлов рода 1, имеющих диаграммы с не более чем 5 классическими перекрестками. Диаграммы этих узлов показаны на Рис. 16 в конце работы.*

2. Перечисление графов и проекций

Лемма 1. 1. Существуют ровно 5 абстрактных регулярных мультиграфов степени 4, имеющих 2 и 3 вершины (включая мультиграфы, содержащие не более 2 петель), см. Рис. 1.

2. Существуют ровно 11 абстрактных регулярных графов степени 4, имеющих не более 5 вершин и не содержащих петель, см. Рис. 2. Каждый из этих графов (кроме графа k , который есть полный граф с 5 вершинами) имеет кратное ребро.



Рис. 1: Регулярные мультиграфы с 2 и 3 вершинами

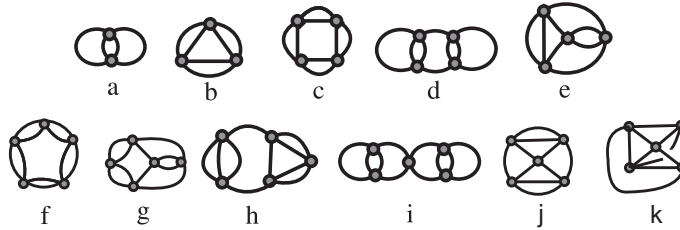


Рис. 2: Регулярные графы с не более чем 5 вершинами и без петель

Доказательство. Пусть G_n - регулярный граф степени 4, имеющий $n \leq 5$ вершин. Мы утверждаем, что, если G_n отличен от графа k (который есть полный граф с 5 вершинами), то G_n содержит петлю или кратное ребро. Действительно, если G_n не содержит петель и кратных ребер, то G_n вкладывается в полный граф K_n с n вершинами. Поскольку G_n и K_n имеют $2n$ и $n(n-1)/2$ ребер соответственно, мы имеем неравенство $2n \leq n(n-1)/2$. Для $n \leq 5$ это неравенство выполнено только при $n = 5$, т.е. $G_n = k$. Следовательно, все остальные регулярные графы степени 4 с $n \leq 5$ вершинами могут быть получены из окружности последовательным выполнением операций следующих двух типов: 1) добавление петли и 2) отождествление точки на петле с точкой на другом ребре графа. Для доказательства первой части леммы 1 необходимо построить все графы, которые могут быть получены из окружности выполнением $n = 2$ и 3 таких операций и устранить все дубликаты. Для доказательства второй части леммы 1 мы выполняем $n = 2, 3, 4, 5$ таких операций и устраняем все дубликаты и графы с петлями. ■

Теорема 3. *Существуют ровно 47 различных строго примарных проекций в T с не более чем 5 вершинами, см. Рис. 3 .*

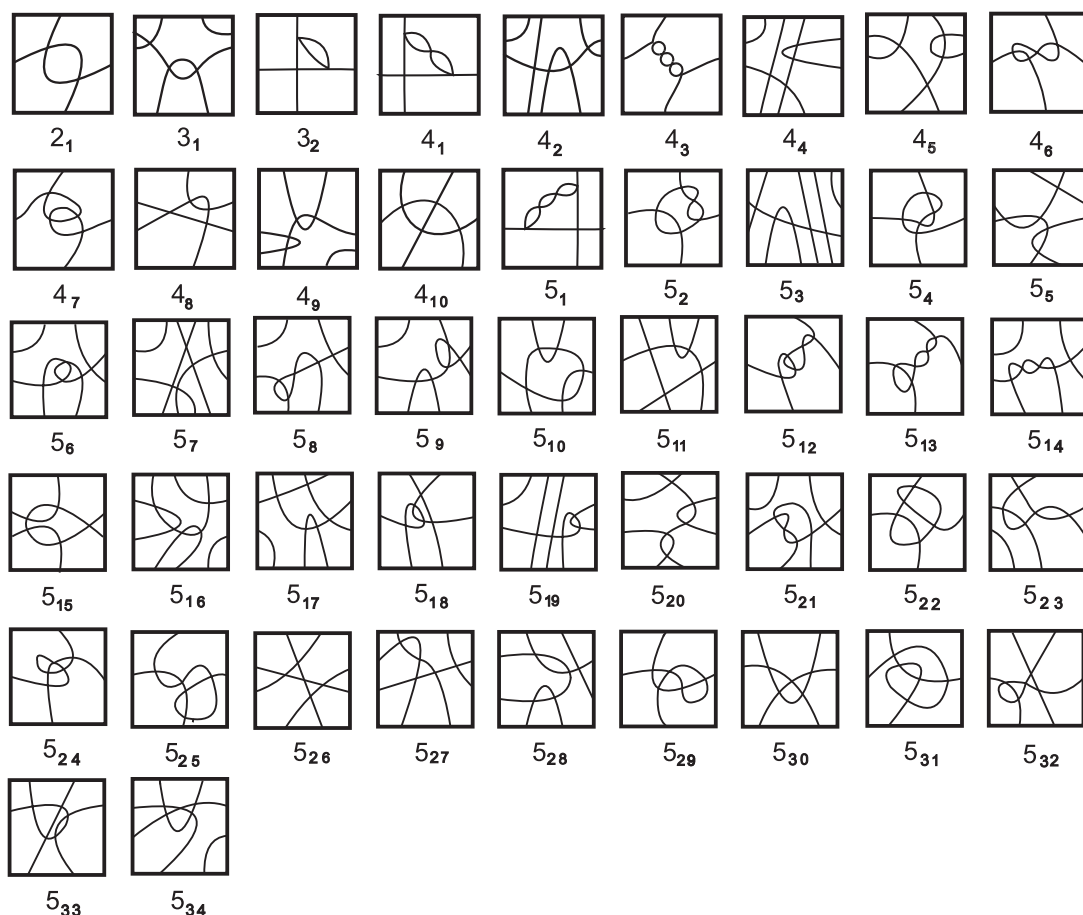


Рис. 3: Строго примарные проекции с не более чем 5 вершинами в T , который представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Доказательство. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1.

Определение 3. Пусть G - проекция узла в T . Выберем диск D такой, что $G \cap D$ состоит из двух непересекающихся собственных дуг $l_1, l_2 \subset D$.

Пусть $l'_1, l'_2 \subset D$ - две новые дуги такие, что они имеют те же концы и пересечение $l'_1 \cap l'_2$ состоит из одной нетрансверсальной точки. Тогда добавление нетрансверсальной точки состоит в замене $l_1, l_2 \subset D$ на $l'_1, l'_2 \subset D$, см. Рис. 6. Обратная операция называется устранением нетрансверсальной точки.

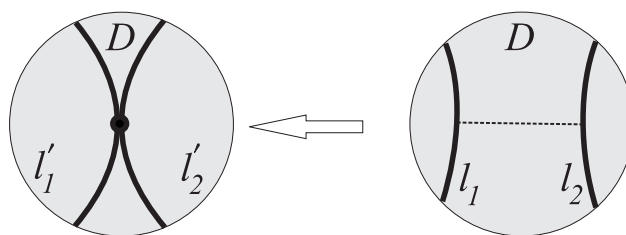


Рис. 4: Добавление нетрансверсальной точки

Пусть G - проекция типа a , см. Рис. 2. Тогда G может быть представлена как пара окружностей, имеющих две общие точки пересечения такие, что ровно одна из них трансверсальна. Устраним нетрансверсальную точку пересечения, используя малую изотопию одной окружности, см. Рис. 4. Мы получим пару окружностей, которые имеют только одну трансверсальную точку пересечения и поэтому могут быть рассмотрены как меридиан-параллель пара для T . Существует единственная возможность восстановить G , потому что дополнение к этой паре в T есть диск. Применяв операцию добавления нетрансверсальной точки к стандартной меридиан-параллель паре для T , мы получаем единственную проекцию $\mathbf{2}_1$ типа a .

Шаг 2. Пусть G_n , $3 \leq n \leq 5$ - проекция типа b, c или f (см. Рис. 2), где n - число вершин в G_n . Тогда G_n может быть представлена как циклическая замкнутая цепочка из n окружностей такая, что каждая окружность имеет единственную общую точку со следующей окружностью.

Предположим, что пересечение некоторой пары окружностей трансверсально. Тогда они образуют меридиан-параллель пару для T , дополнение к этой паре в T есть диск. Легко видеть, что существует единственная возможность расположить в T оставшуюся часть G_n . Мы получаем проекции $\mathbf{3}_2, \mathbf{4}_1, \mathbf{5}_1$ типов b, c, f соответственно.

Предположим, что во всех n общих точках окружностей пересечение нетрансверсально. Как и в шаге 1, удалим все эти точки. Мы получим циклический упорядоченный набор из отдельных окружностей в T таких, что каждая окружность соединена со следующей пунктирной линией. Все нетривиальные окружности параллельны в T , в то время как тривиальные лежат в областях между ними. Пусть t и $\tau = n - t$ - числа соответственно тривиальных и нетривиальных окружностей в некотором наборе из n окружностей. Заметим, что существует единственный (с точностью до изотопии тора) способ соединить окружности, добавив нетрансверсальные точки пересечения (см. Рис. 4) так, чтобы каждая окружность имела ровно 2 таких точки. Пример показан на Рис. 5. Перебор всех возможностей дает, что строго примарные проекции получаются только в случаях, когда число тривиальных окружностей нечетно (3 или 1). Мы имеем проекции $\mathbf{3}_1, \mathbf{4}_2, \mathbf{4}_3, \mathbf{5}_3, \mathbf{5}_{14}, \mathbf{5}_{20}$. Заметим, что случай 5 тривиальных окружностей даёт 2 непримарные проекции (первая содержится в кольце $S^1 \times I$, вторая - в S^2).

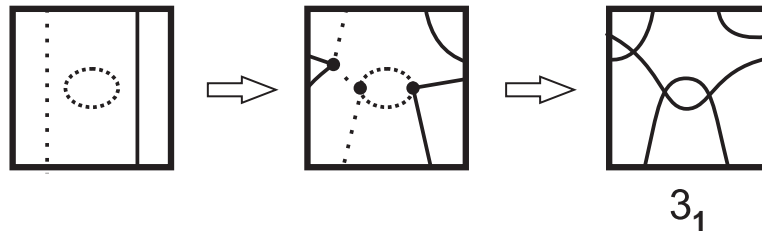


Рис. 5: Проекция $\mathbf{3}_1$ получается добавлением нетрансверсальных точек

Шаг 3. Покажем, что не существует строго примарных проекций типа d, h или i , см. Рис. 2. Действительно, G имеет тройное ребро E , т.е. две его вершины v_1, v_2 соединены тремя ребрами. Соединим v_1, v_2 простой частью $l \subset G$, составленной из двух или трех ребер G . Мы получим регулярный граф $G' = E \cup l \subset G$ типа a . Заметим, что объединение первого и последнего ребра l разбивает G . Следовательно, G' - это проекция, эквивалентная $\mathbf{2}_1$, и поэтому дополнение к ней состоит из двух дисков. Остается отметить, что не существует пути добавить остальные ребра G в эти диски так, чтобы получить строго примарную проекцию.

Шаг 4. Рассмотрим строго примарную проекцию G , имеющую тип e , см. Рис. 2.

Определение 4. По аналогии с определением 3, пусть $l'_1, l''_2 \subset D$ - две новые дуги такие, что они имеют те же концы и пересечение $l'_1 \cap l''_2$ состоит из двух трансверсальных точек, т.е. дуги пересекаются по правилу "прямо вперед". Тогда добавление двуугольника состоит в замене $l_1, l_2 \subset D$ на $l'_1, l''_2 \subset D$, см. Рис. 6. Обратная операция называется устранением двуугольника.

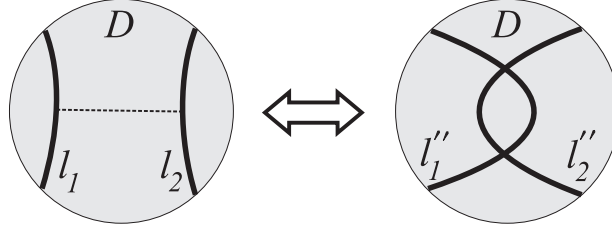


Рис. 6: Добавление и устранение двуугольника

Шаг 4.1. Предположим, что G имеет 2 двуугольника (которые не содержат общих точек, поскольку G отвечает графу e). Удалим оба двуугольника из G , воспользовавшись операцией на Рис. 6. Мы получим проекцию (обозначим её G') с 0 вершинами, а потому G' - тривиальная или нетривиальная окружность в T . Следовательно, проекцию G можно получить из G' , дважды добавив двуугольник. Перебор всех возможностей даёт проекцию 4_6 в случае нетривиальной окружности и 4_9 - в случае тривиальной.

Шаг 4.2. Предположим, что G типа e содержит только один двуугольник. Чтобы построить такие проекции (это $4_4, 4_5, 4_7, 4_8$, см. Рис. 3), воспользуемся описанным выше методом добавления двуугольника. Составим список L_2 всех проекций нелокальных узлов с $n - 2 = 2$ перекрестками, имеющими не более двух петель (включая проекции составных узлов, проекции с тривиальными петлями и проекции, содержащиеся в кольце), используя регулярные мультиграфы a_1, b_1 , имеющие 2 вершины (см. Рис. 1) следующим образом. Пусть G' - проекция типа a_1 . Выбираем некоторую ориентацию в G' и разрезаем G' во всех вершинах так, чтобы сохранить эту ориентацию. Так мы получим 3 окружности, не имеющие общих точек. Каждая из них может быть либо тривиальной в T , либо нет. Перебираем все комбинации их типов и соединяем окружности обратно. Так мы получим 5 проекций, включая 3 проекции с тривиальными петлями. Существует ровно одна проекция типа b_1 (это было доказано выше). Все возможные способы добавить двуугольник к каждой проекции из списка L_2 так, чтобы получить примарную проекцию типа e , показаны на Рис. 7. Заметим, что в случае проекций типа a_1 достаточно рассмотреть только пути, соединяющие петли.

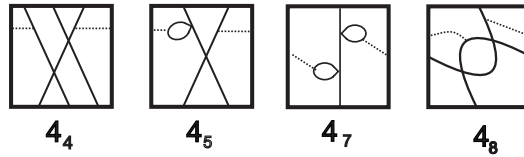


Рис. 7: Проекции $4_4 - 4_8$ получаются добавлением двуугольника

Шаг 4.3. Предположим, что проекция G типа e не содержит двуугольника. В таком случае её двойные ребра определяют две нетривиальные окружности в T , не имеющие общих точек. Каждая из окружностей содержит две вершины проекции, а их объединение разбивает T на два кольца. Оставшиеся четыре ребра должны содержаться в этих кольцах (m - в одном, n - в другом) и соединять каждую вершину первой окружности с каждой вершиной во второй. Существуют три возможности: $(m, n) = (0, 4), (2, 2)$ и $(1, 3)$. Мы получаем проекцию, лежащую в кольце, и проекцию зацепления в первом и во втором случаях, а проекцию 4_{10} - в третьем.

Шаг 5. Пусть проекция G_n , $n=5$, имеет тип g или j .

Шаг 5.1. Пусть G_n содержит двуугольник. Устраним его из G_n , воспользовавшись операцией на Рис. 6. Мы получим проекцию G'_{n-2} с $n-2$ вершинами, а потому G'_{n-2} отвечает одному из графов $c_1 - e_1$ на Рис. 1. Следовательно, проекцию G_n можно получить из проекции G'_{n-2} добавлением двуугольника, см. [1].

Пусть L_3 - список всех проекций нелокальных узлов с 3 перекрестками, имеющими не более двух петель. Для построения L_3 мы используем графы c_1, d_1 и e_1 следующим образом. Все 9 проекций типа c_1 (включая 6 проекций с тривиальными петлями) получаются также, как и проекции типа a_1 . Все 3 проекции типа d_1 могут быть получены из проекции 2_1 добавлением тривиальной петли. Все 3 проекции типа f_1 , лежащие в кольце, строятся также, как и примарные проекции $3_1, 3_2$. Итак, список L_3 получен и осталось посмотреть, вдоль каких дуг можно добавить двуугольник к каждой проекции из этого списка так, чтобы получить строго примарную проекцию типа g или j . В случае проекций типа c_1 достаточно рассмотреть только пути, соединяющие петли, таким образом мы получаем проекции $5_5 - 5_9, 5_{12}, 5_{13}, 5_{16}, 5_{19}$ типа g . Аналогично, в случае проекций типа d_1 - только пути, соединяющие петлю с другим ребром; имеем проекции $5_{17}, 5_{18}, 5_{22}, 5_{24}, 5_{25}, 5_{29}, 5_{31}, 5_{32}$ типа j , см. Рис. 9. Заметим, что мы не рассматриваем пути, соединяющие петлю со смежным ей ребром, поскольку такой случай даёт проекцию составного узла. Все возможные способы добавить двуугольник к оставшимся проекциям из списка L_3 так, чтобы получить примарные проекции типа g или j , также показаны на Рис. 9. Итак, мы имеем проекции $5_{15}, 5_{23}, 5_{26} - 5_{28}, 5_{33}$ типа j , проекции $5_2, 5_4, 5_{10}, 5_{11}, 5_{21}$ типа g . Заметим, что для каждого ребра e_1 в проекции 3_1 найдется другое ребро e_2 такое, что e_1 может быть переведено в e_2 выбором другого меридиана (или параллели) в T и зеркальным отображением проекции, см. Рис. 8.

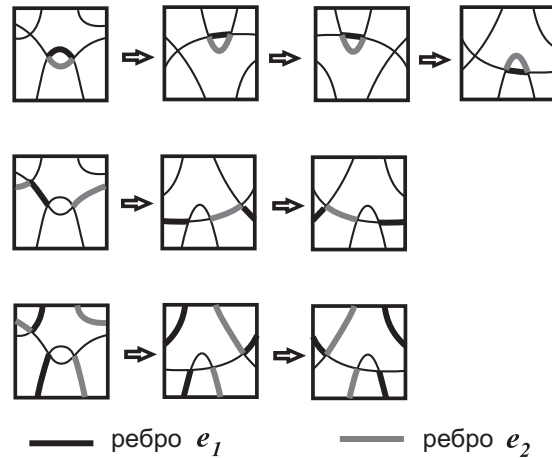


Рис. 8: Ребро e_1 преобразуется в ребро e_2

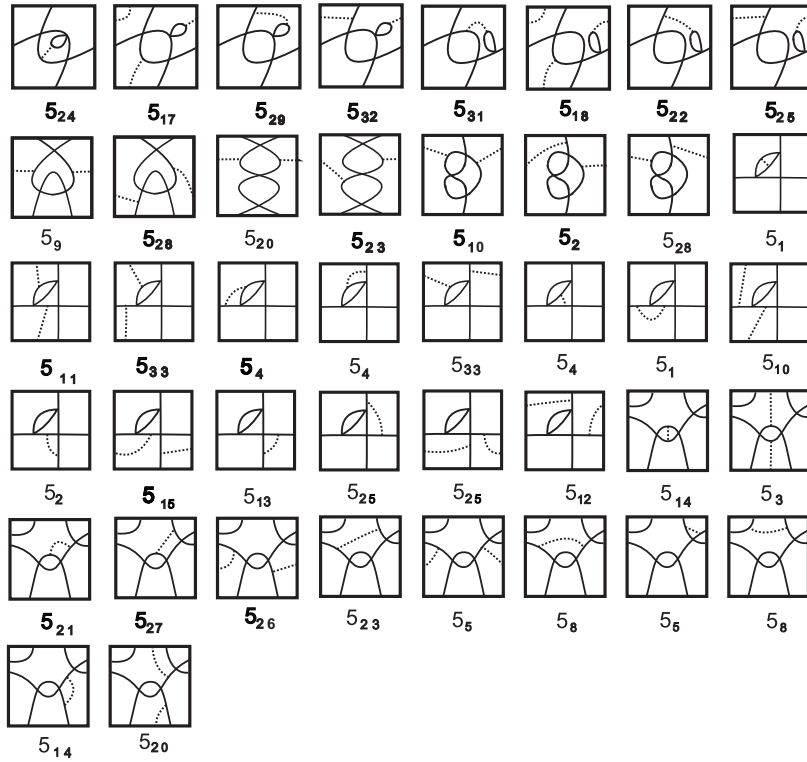


Рис. 9: Проекции $5_2, 5_4, 5_{10}, 5_{11}, 5_{15}, 5_{17}, 5_{18}, 5_{21} - 5_{29}, 5_{31} - 5_{33}$ получаются добавлением двуугольника

Шаг 5.2. Предположим, что G_n не содержит двуугольника.

Покажем, что не существует строго примарной проекции G без двуугольника, отвечающей графу g , который содержит 3 двойных ребра таких, что 2 из них имеют общую вершину. Эти 6 ребер определяют 3 нетривиальные окружности в T . Каждая из окружностей содержит две вершины. Путём добавить оставшиеся ребра таким образом, чтобы получить строго примарную проекцию, не существует.

Рассмотрим строго примарную проекцию G типа j без двуугольников. Её двойные ребра определяют нетривиальные окружности в T , не имеющие общих точек. Каждая из окружностей содержит по две вершины. Предположим, что дополнение к G в T содержит грань P с 4 вершинами такую, что P вложено без петель. В этом случае одна из нетривиальных окружностей должна иметь общее ребро с P , что даёт проекцию зацепления. В случае, когда дополнение к G в T не содержит грани с 4 вершинами, подсчет характеристики Эйлера показывает, что это дополнение содержит по крайней мере три треугольные грани. Одна из этих граней имеет по общему ребру с каждой из двух других. Существует единственный путь добавить остальные ребра так, чтобы получить строго примарную проекцию типа j (это 5_{30}).

Шаг 6. Покажем, что не существует проекций типа i , см. Рис. 2. От противного, пусть существует проекция G типа i . Заметим, что граф i содержит разбивающую вершину v . Разрежем G по вершине, отвечающей v , так, чтобы получить две проекции, не имеющие общих точек (обе они соответствуют графу a). Существует единственная проекция такого типа (это 2_1). Её дополнение состоит из двух дисков. Это противоречит утверждению, что две проекции не имеют общих точек.

Шаг 7. Теперь рассмотрим примарную проекцию G типа k , см. Рис. 2. Предположим, что дополнение к G в T имеет грань P с 4 вершинами такую, что P вложена без петель. Пусть x, y - ребра, соединяющие противоположные вершины P , см. Рис. 10, а. Тогда до-

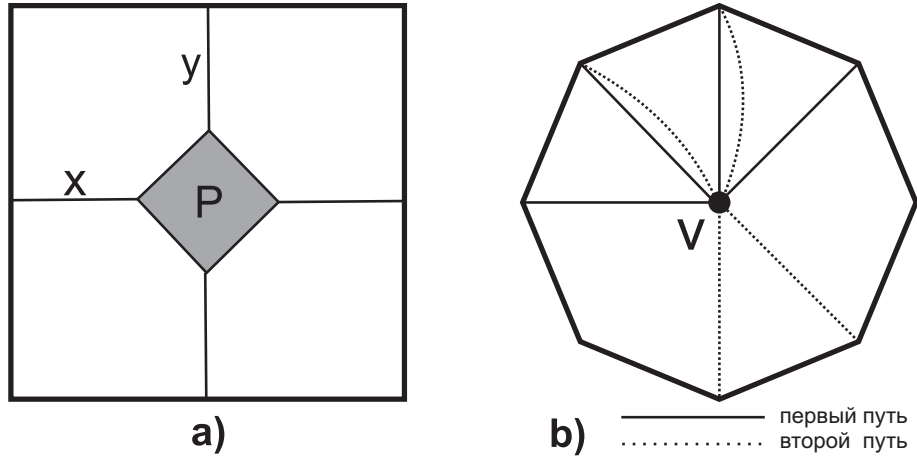


Рис. 10:

полнение к $x \cup y \cup P$ в T (обозначим его Q) - это диск. Q содержит оставшуюся вершину (обозначим её v). С точностью до симметрии, существуют ровно 2 способа соединить противоположные вершины P двумя вложенными дугами, пересекающимися ровно в одной трансверсальной точке (т.е. вершине v), см. Рис. 10, б. Они дают примарную проекцию 5_{34} и проекцию зацепления.

Предположим, что дополнение к G в T не содержит грани с 4 вершинами. В этом случае подсчёт характеристики Эйлера показывает, что это дополнение содержит хотя бы 3 треугольные грани. Одна из этих треугольных граней имеет по одному общему ребру с каждой из двух других. Существует только один путь добавить остальные рёбра так, чтобы получить строго примарную проекцию, это 5_{34} .

Покажем, что все проекции на Рис. 3 различны. Для этого мы вычисляем число углов в каждой грани дополнения к каждой проекции. Оказывается, что полученные наборы чисел (с учётом наличия общих вершин и рёбер некоторых граней) различают все проекции на Рис. 3. ■

2. Перечисление диаграмм

Восстановим по проекциям, описанным в теореме 3 (см. рис. 3) строго примарные диаграммы узлов в T , указав тип каждого перекрестка. Для проекции с n вершинами это можно сделать 2^n , то есть в нашем случае ≤ 32 , способами. Однако, перебор комбинаций типов можно существенно сократить за счет следующих соображений, см [1]:

1. При одновременной смене типов всех перекрестков класс эквивалентности узла не меняется. Поэтому тип одного перекрестка можно выбрать произвольно, что сокращает перебор в 2 раза.
2. Из четырех возможных расстановок типов вершин двуугольника достаточно рассмотреть только те 2, которые не допускают устранения двуугольника вторым преобразованием Рейдемейстера. Поэтому каждый двуугольник сокращает перебор ещё в 2 раза.
3. Существуют только два способа указать типы перекрестков во фрагментах проекций, показанных в центре Рис. 11. Все остальные дадут неминимальные диаграммы.

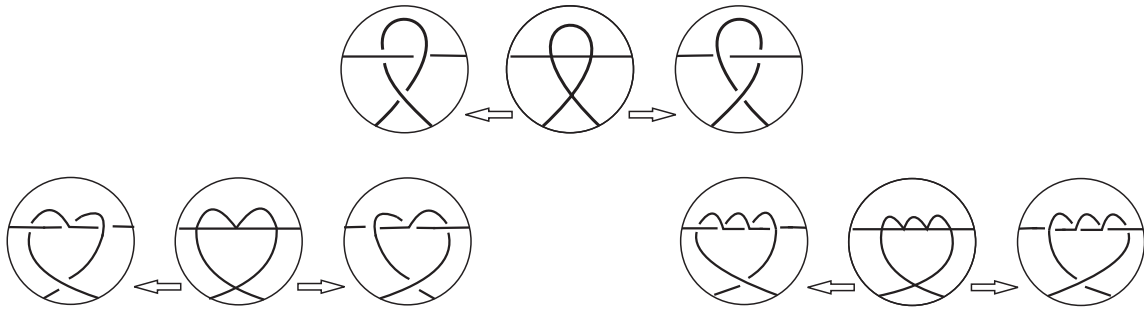


Рис. 11:

Различность всех приведенных в таблице узлов доказывается с помощью вычисления их обобщенных полиномов Кауфмана [8,14], см. [1]. В отличие от обычной нормализованной скобки Кауфмана от одной переменной, мы используем две переменные a и x , которые нужны для учета числа тривиальных и числа нетривиальных окружностей в T , полученных после разрешения всех перекрестков диаграммы узла. Дополнительно мы применяем нестандартную нормировку, полагая, что полином тривиального узла равен $(-a^2 - a^{-2})$, а не 1, как обычно. Причина в том, что довольно часто разрешение перекрестков не дает тривиальных окружностей, и полученные полиномы пришлось бы делить на $(-a^2 - a^{-2})$. Точная формула такова:

$$X(K) = (-a)^{-3w(K)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ - числа разрешений типа A и B в состоянии s , а $\gamma(s)$ и $\delta(s)$ - числа тривиальных и нетривиальных окружностей в торе, полученных в результате разрешения всех перекрестков, которое соответствует состоянию s . Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а $w(K)$ обозначает число скручивания диаграммы. Список, полученный путем прямого вычисления полиномов, см. в Приложении. Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы на Рис. 15 различны.

3. Построение диаграмм виртуальных узлов рода 1 на плоскости

Виртуальные узлы можно определить двумя эквивалентными способами: как узлы в утолщенных поверхностях и как диаграммы на плоскости, имеющие классические и виртуальные перекрестки. Напомним, что две диаграммы определяют один и тот же виртуальный узел, если их можно связать последовательностью из обобщенных преобразований Рейдемейстера. Эти преобразования: классические преобразования Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, их виртуальные $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ и полувиртуальная Ω''_3 версии, см. Рис. 12. См. [11].

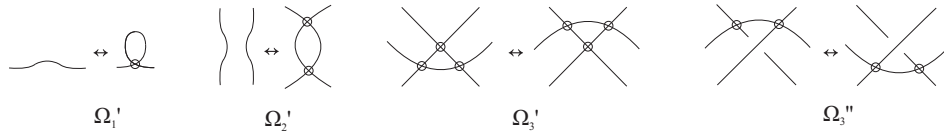


Рис. 12: Виртуальные $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ и полувиртуальная Ω''_3 версии движений Рейдемейстера

Таблицу диаграмм виртуальных узлов рода 1 на плоскости (см. Рис. 16) нетрудно получить из таблицы узлов в $T \times I$, см. Рис. 15, в два этапа. Сначала замкнем диаграммы на плоскости (см. Рис. 15) по аналогии с замыканием косы. Это означает, что мы попарно соединим дугами соответствующие концы нитей на противоположных сторонах квадрата. Добавляемые дуги пересекаются по виртуальным перекресткам. Затем мы применим последовательности из виртуальных и полувиртуального преобразований Рейдемейстера, чтобы устранить некоторые виртуальные перекрестки. Начальные и конечные состояния фрагментов диаграммы, которые преобразовывается с использованием двух наиболее полезных последовательностей, показаны на Рис. 13.

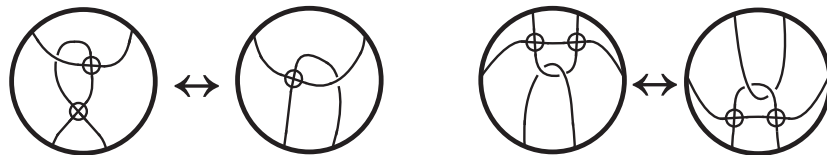


Рис. 13: Два полезных преобразования

Пример показан на Рис. 14.

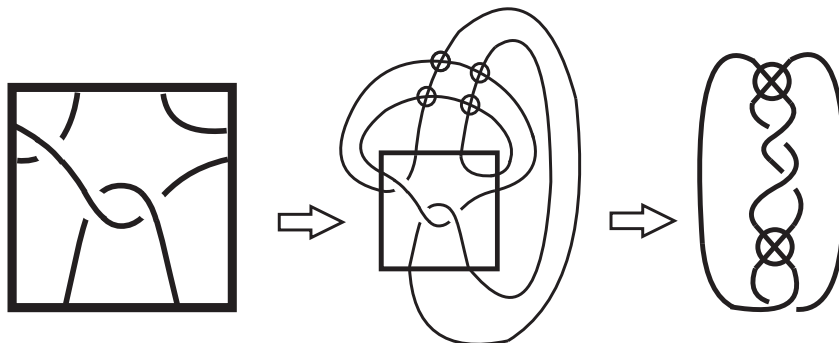


Рис. 14: Пример

Заключительные замечания

1. В каждом полиноме степени переменной x имеют одну и ту же четность, которая зависит только от того, тривиален или нет отвечающий узлу элемент группы $H_1(T; \mathbb{Z}_2)$. Эта четность совпадает с четностью наибольшего общего делителя чисел точек пересечения узла со смежными сторонами квадрата.
2. Таблица содержит ровно 7 гомологически тривиальных узлов: $4_{16}, 4_{17}, 5_{21}, 5_{22}, 5_{56} - 5_{58}$.
3. Таблица содержит ровно 16 альтернированных диаграмм: $3_2, 4_{10}, 4_{16}, 5_6, 5_{12}, 5_{13}, 5_{17}, 5_{21}, 5_{31}, 5_{44}, 5_{46}, 5_{49}, 5_{51}, 5_{53}, 5_{56}, 5_{68}$.
4. Максимальное число узлов (оно равно 6) задают проекции **5₃** и **5₇**.

Список цитированной литературы

1. Акимова, А.А. Классификация узлов в $T \times I$ с не более чем 4 перекрестками/А.А. Акимова, С.В. Матвеев//Вестник НГУ. - 2012. - Т.12, №3.
2. Bogdanov, A. Enumerating the k-tangle projections/A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov// J. of Knot Theory and its Ramifications.- 2012. - Vol. 21, № 7, 17 pp.
3. Gabrovsek, B. Knots in the solid torus up to 6 crossings/B. Gabrovsek, M. Mroczkowski// Journal of Knot Theory and Its Ramifications. -2012. - Vol. 21, №. 11 (43 pages)
4. Green, J. A table of virtual knots/J. Green// <http://www.math.toronto.edu/drorbn/Students/GreenJ/>
5. Дроботухина, Ю.В. Аналог полинома Джонса для зацеплений в RP^3 и обобщение теоремы Кауффмана Мурасуги/ Ю.В. Дроботухина// Алгебра и анализ. - 1991. - Т. 2, №3. - С. 613 - 630
6. Drobotukhina, Yu.V. Classification of links in $\mathbb{R}P^3$ with at most six crossings/ Yu.V. Drobotukhina// Advances in Soviet Mathematics. - 1994. - Vol. 18, № 1. - P. 87 - 121.
7. Kauffman, L.H. Virtual knot theory/ L.H. Kauffman// Eur. J. Comb. - 1999. V. 20, № 7. P. 663-691.
8. Kauffman, L. State models and the Jones polynomial/L. Kauffman// Topology. - 1987. - Vol. 26, №3. - P. 395 - 407.
9. Kuperberg, G What is a virtual link?/ G. Kuperberg. - Algebraic and Geometric Topology. - 2003. - Vol. 3, P. 587-591.
10. Мантуров, В.О. Компактные и длинные виртуальные узлы /В.О. Мантуров//Труды Московского Математического Общества -2009.-Т .69.
11. Manturov, V.O. Knot theory /V.O. Manturov. - Routledge Chapman and Hall, 2004. - 400 p.
12. Manturov, V.O. Virtual Knots: The State of the Art/ V.O. Manturov, D.P. Ilyutko. - World Scientific, 2012. - 521 P.
13. Matveev, S.V. Prime decompositions of knots in $T \times I$ /S.V. Matveev//Topology and its Applications - 2012. - V.159, №.7.
14. Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия./В.В. Прасолов, А.Б. Соинский. - М.: МЦНМО, 1997. - 352 с.

Приложение (список полиномов)

- $2_1: (a^{-4} + a^{-6} - a^{-10})x$
 $3_1: 2a^{-6} + a^{-10} - a^{-14} + (-a^{-6} - a^{-10} + a^{-14})x^2$
 $3_2: a^2 + 2a^{-2} - a^{-10} + (-2a^{-2} + a^{-6})x^2$
 $3_3: (1 + a^2 - a^{-2} - a^{-4} + a^{-8})x$
 $4_1: (a^{-4} + a^{-6} - a^{-8} - a^{-10} + a^{-12} + a^{-14} - a^{-18})x$
 $4_2: (a^{-8} - 2a^{-14} + 2a^{-18})x + (a^{-14} - a^{-18})x^3$
 $4_3: (-a^{-2} + a^{-4} + a^{-14})x + (a^{-6} - a^{-10})x^3$
 $4_4: (1 - a^6 - a^2 + a^{-2} + a^{-6})x + (a^2 - a^{-2})x^3$
 $4_5: (a^{-8} + a^{-10} - a^{-14} + a^{-18} - a^{-22})x$
 $4_6: (-1 - a^{-4} + a^{-6} - a^{-8} - a^{-10})x + a^{-4}x^3$
 $4_7: (-1 - a^4 + a^2 - a^{-2} - 2a^{-4} + a^{-8})x + x^3$
 $4_8: (-3a^{-8} + a^{-12} + a^{-14} - a^{-16} - a^{-18})x + a^{-8}x^3$
 $4_9: 2a^6 - a^{-2} + a^{-6} + (-a^6 + a^{-2} - a^{-6})x^2$
 $4_{10}: a^2 + a^{-2} - a^{-6} + a^{-14} + (-2a^{-2} + 2a^{-6} - a^{-10})x^2$
 $4_{11}: (a^{-4} - a^{-8} + 2a^{-12} + a^{-14} - a^{-16} - a^{-18})x$
 $4_{12}: (a^{-14} - 2a^{-10} - a^{-8} + a^{-6} + 2a^{-4})x$
 $4_{13}: (a^{-16} - a^{-14} + a^{-12} + a^{-10} + a^{-8})x$
 $4_{14}: (2 - a^{-4} + a^2 - a^6)x$
 $4_{15}: (-a^{-12} - a^{-10} + a^{-8} + 2a^{-6} + a^{-4} - a^{-2})x$
 $4_{16}: -a^{-2} + a^{-6} + a^{-10} - 2a^{-14} - a^{-18} + (-2a^{-10} + 2a^{-14})x^2$
 $4_{17}: a^6 - 2a^2 - 2a^{-2} + a^{-6} + (-a^6 + a^2 + a^{-2} - a^{-6})x^2$
 $5_1: (1 + a^{-16} - a^{-12} - a^{-10} + a^{-8} + a^{-6} - a^{-4} - a^{-2} + a^2)x$
 $5_2: (-a^{-24} - a^{-22} + a^{-20} + 2a^{-18} - 2a^{-14} + a^{-10} + a^{-8})x$
 $5_3: (-1 + a^{-14} - 2a^{-10} - a^{-8} + 2a^{-6} + 2a^{-4} - a^{-2} + a^4)x$
 $5_4: a^{-18} + a^{-6} + (-a^{-18} - a^{-14} + a^{-10})x^2 + (a^{-14} - a^{-10})x^4$
 $5_5: a^{-22} - a^{-18} + 2a^{-10} + (-3a^{-22} + 3a^{-18} - a^{-10})x^2 + (a^{-22} - a^{-18})x^4$
 $5_6: a^{-14} + 2a^{-2} - a^6 + (-2a^{-10} + a^{-6} - 2a^{-2} + 2a^2)x^2 + (a^{-6} - a^{-2})x^4$
 $5_7: a^{-6} + a^{-2} + (-a^{-10} - a^{-6} + a^2)x^2 + (a^{-6} - a^{-2})x^4$
 $5_8: -a^{-10} + 2a^{-2} + a^2 + (a^{-10} + 2a^{-6} - 3a^{-2} - a^2)x^2 + (-a^{-6} + a^{-2})x^4$
 $5_9: -a^{-14} + a^{-10} + 2a^{-6} - x^2a^{-18} + (a^{-14} - a^{-10})x^4$
 $5_{10}: (a^{-20} - 2a^{-16} - a^{-14} + 2a^{-12} + a^{-10} - a^{-8} - a^{-6} + a^{-4} + a^{-2})x$
 $5_{11}: -a^{-22} + 2a^{-18} + a^{-14} - a^{-10} + a^{-6} + (a^{-22} - a^{-18} - a^{-14} + a^{-10} - a^{-6})x^2$
 $5_{12}: a^{-10} + 2a^{-6} - a^{-2} + a^6 - a^{10} + (-2a^{-6} + 2a^{-2} - a^2)x^2$
 $5_{13}: -a^{-18} - a^{-14} + 2a^{-10} + a^{-6} + a^2 + (2a^{-14} - 3a^{-10} + a^{-6} - a^{-2})x^2$
 $5_{14}: -2a^{-22} + a^{-18} + 2a^{-14} + a^{-6} + (a^{-22} - 2a^{-14} + a^{-10} - a^{-6})x^2$
 $5_{15}: -a^{-14} - a^{-2} + (a^{-14} + 2a^{-6} + a^{-2})x^2 - x^4a^{-6}$
 $5_{16}: -2a^{-22} + a^{-18} + a^{-14} - 2a^{-10} + (a^{-22} - a^{-14} + 4a^{-10})x^2 - x^4a^{-10}$
 $5_{17}: a^{-14} - a^{-10} - 2a^{-6} + a^{-2} - a^6 + (-a^{-10} + 4a^{-6} - a^{-2} + 2a^2)x^2 - x^4a^{-2}$
 $5_{18}: -a^{-18} - 2a^{-14} + a^{-10} + a^{-6} - a^{-2} + (2a^{-14} - a^{-10} + 2a^{-6} + a^{-2})x^2 - x^4a^{-6}$
 $5_{19}: a^{-6} - 2a^{-2} - 2a^2 + a^6 + (3a^{-2} + 2a^2 - a^6)x^2 - x^4a^{-2}$
 $5_{20}: -a^{-10} - a^{-6} + (2a^{-6} + a^{-2} + a^2)x^2 - x^4a^{-2}$
 $5_{21}: a^{-14} - a^{-10} - 2a^{-6} + a^{-2} - a^6 + (-a^{-10} + 3a^{-6} - 3a^{-2} + a^2)x^2$
 $5_{22}: -2a^{-22} + a^{-18} + a^{-14} - 2a^{-10} + (a^{-22} - 2a^{-14} + 2a^{-10} - a^{-6})x^2$
 $5_{23}: (-a^{-24} + 2a^{-20} + a^{-18} - 2a^{-16} - 3a^{-14} + a^{-12} + 2a^{-10} + a^{-8})x$
 $5_{24}: (-1 - a^{-12} - a^{-10} + a^{-8} + 3a^{-6} + a^{-4} - 2a^{-2} + a^4)x$
 $5_{25}: (3 + a^{-8} - a^{-6} - 2a^{-4} + 2a^2 - a^4 - a^6)x$

$$\begin{aligned}
5_{26}: & (a^{-16} - a^{-12} - 2a^{-10} + 2a^{-6} + a^{-4})x \\
5_{27}: & (2 + a^{-10} + a^{-8} - a^{-6} - 2a^{-4} - a^{-2} + a^2)x \\
5_{28}: & (a^{-14} + a^{-12} - 2a^{-10} - 2a^{-8} + 2a^{-4} + a^{-2})x \\
5_{29}: & (2 + a^{-10} + a^{-8} - a^{-6} - 2a^{-4} - a^4 + a^8)x \\
5_{30}: & -a^{-26} + a^{-14} + 2a^{-10} + (a^{-26} - a^{-22} + a^{-18} - a^{-14} - a^{-10})x^2 \\
5_{31}: & -a^{-22} + 2a^{-6} + a^{-2} + (a^{-18} - a^{-14} + a^{-10} - 2a^{-6})x^2 \\
5_{32}: & (-2a^{-18} - a^{-16} + 2a^{-14} + 3a^{-12} - 2a^{-8} + a^{-4})x \\
5_{33}: & (a^{-20} - a^{-18} + a^{-14} + a^{-12} - 2a^{-8} + a^{-4})x + (-a^{-16} + a^{-12})x^3 \\
5_{34}: & (a^{-16} + a^{-12} - a^{-10} - a^{-8} + a^{-6})x + (-a^{-12} + a^{-8})x^3 \\
5_{35}: & (3 + a^{-10} + a^{-8} - a^{-6} - a^{-4} - 2a^4)x + (-1 + a^4)x^3 \\
5_{36}: & (2 - a^{-12} - a^{-2} + a^2)x + (a^{-8} - a^{-4})x^3 \\
5_{37}: & (-a^{-18} + 2a^{-14} + a^{-12} - a^{-8} + a^{-4} - a^{-2})x + (-a^{-10} + a^{-6})x^3 \\
5_{38}: & (1 + a^{-8} + a^{-6} - a^{-4} - a^6)x + (-a^{-2} + a^2)x^3 \\
5_{39}: & (-1 - 3a^{-10} + 3a^{-6} + a^{-4} - a^{-2} + a^2 + a^4)x + (a^{-10} - a^{-6})x^3 \\
5_{40}: & (-1 - a^{-16} - a^{-12} - a^{-10} + a^{-6})x + (a^{-12} - a^{-8} + a^{-4})x^3 \\
5_{41}: & (-a^{-12} - a^{-4} - a^{-2} + a^2 - a^4)x + (1 + a^{-8} - a^{-4})x^3 \\
5_{42}: & (2 + a^{-10} - a^{-6} - 3a^{-4} - 2a^4)x + (-1 + a^{-4} + a^4)x^3 \\
5_{43}: & a^{-22} - a^{-18} + 2a^{-10} + (a^{-26} - 2a^{-22} + 2a^{-18} - a^{-14} - a^{-10})x^2 \\
5_{44}: & a^{-14} + 2a^{-2} - a^6 + (-a^{-10} + 2a^{-6} - 3a^{-2} + a^2)x^2 \\
5_{45}: & -a^{-22} + a^{-18} + 2a^{-6} + (a^{-22} - a^{-18} - a^{-6})x^2 \\
5_{46}: & -a^{-18} + a^{-10} + a^{-2} + a^2 + (a^{-14} - 2a^{-10} + 2a^{-6} - 2a^{-2})x^2 \\
5_{47}: & (2 - a^{-12} + 2a^{-8} + a^{-6} - 2a^{-4} - 2a^{-2} + 2a^2 - a^6)x \\
5_{48}: & a^{-26} - 2a^{-18} + a^{-14} + 2a^{-10} + (-a^{-22} + 3a^{-18} - 2a^{-14} - a^{-10})x^2 \\
5_{49}: & a^{-14} - a^{-10} + a^{-6} + 3a^{-2} - a^2 - a^6 + (a^{-6} - 4a^{-2} + 2a^2)x^2 \\
5_{50}: & (-1 + a^{-14} - 2a^{-10} + 2a^{-6} + a^{-4} - 2a^{-2} + a^2 + a^4)x \\
5_{51}: & -a^{-22} + a^{-18} - a^{-14} - a^{-10} + 3a^{-6} + a^{-2} + (2a^{-10} - 3a^{-6})x^2 \\
5_{52}: & -a^{-10} + 2a^{-6} + 2a^{-2} - a^2 + (a^{-10} - a^{-6} - 2a^{-2} + a^2)x^2 \\
5_{53}: & a^{-14} - a^{-10} - a^{-6} + 3a^{-2} + a^2 - a^6 + (-a^{-10} + 3a^{-6} - 4a^{-2} + a^2)x^2 \\
5_{54}: & a^{-18} - 2a^{-14} + 3a^{-6} + (-a^{-18} + 2a^{-14} - 2a^{-6})x^2 \\
5_{55}: & -a^{-18} - 2a^{-14} + 2a^{-10} + 3a^{-6} + (2a^{-14} - 2a^{-10} - a^{-6})x^2 \\
5_{56}: & a^{-26} - a^{-22} - 3a^{-18} + a^{-14} + a^{-10} - a^{-6} + (-a^{-22} + 4a^{-18} - 3a^{-14})x^2 \\
5_{57}: & a^{-18} - 3a^{-14} - 2a^{-10} + 2a^{-6} + (-a^{-18} + 2a^{-14} + a^{-10} - 2a^{-6})x^2 \\
5_{58}: & -2a^{-10} + a^{-6} + 2a^{-2} - 2a^2 - a^6 + (a^{-10} - 3a^{-2} + 2a^2)x^2 \\
5_{59}: & (1 - a^{-12} - a^{-10} + 2a^{-8} + 2a^{-6} - a^{-4} - 2a^{-2} + 2a^2 - a^6)x \\
5_{60}: & (-a^{-12} + 3a^{-8} + 2a^{-6} - 2a^{-4} - 4a^{-2} + 2a^2 + a^4)x \\
5_{61}: & (a^{-8} + a^{-6} - a^{-4} - 2a^{-2} + a^2 + a^4)x \\
5_{62}: & (-1 - a^{-10} + a^{-8} + 2a^{-6} - 2a^{-2} + a^2 + a^4)x \\
5_{63}: & (-a^{-18} + 2a^{-14} + a^{-12} - 2a^{-10} - 2a^{-8} + a^{-6} + 2a^{-4})x \\
5_{64}: & (2 + a^{-8} - 2a^{-4} - a^{-2} + 2a^2 - a^6)x \\
5_{65}: & (a^{-16} + a^{-14} - a^{-12} - 3a^{-10} - a^{-8} + 2a^{-6} + 2a^{-4})x \\
5_{66}: & (3 + a^{-10} + a^{-8} - a^{-6} - 3a^{-4} - a^{-2} + 2a^2 - a^6)x \\
5_{67}: & -2a^{-10} + a^{-6} + 3a^{-2} + (a^{-10} - 3a^{-2} + a^2)x^2 \\
5_{68}: & a^{-14} - 2a^{-10} + 4a^{-2} - a^6 + (2a^{-6} - 5a^{-2} + 2a^2)x^2 \\
5_{69}: & -a^{-22} - a^{-18} + 2a^{-14} + 2a^{-10} + (2a^{-18} - 2a^{-14} - a^{-10})x^2
\end{aligned}$$

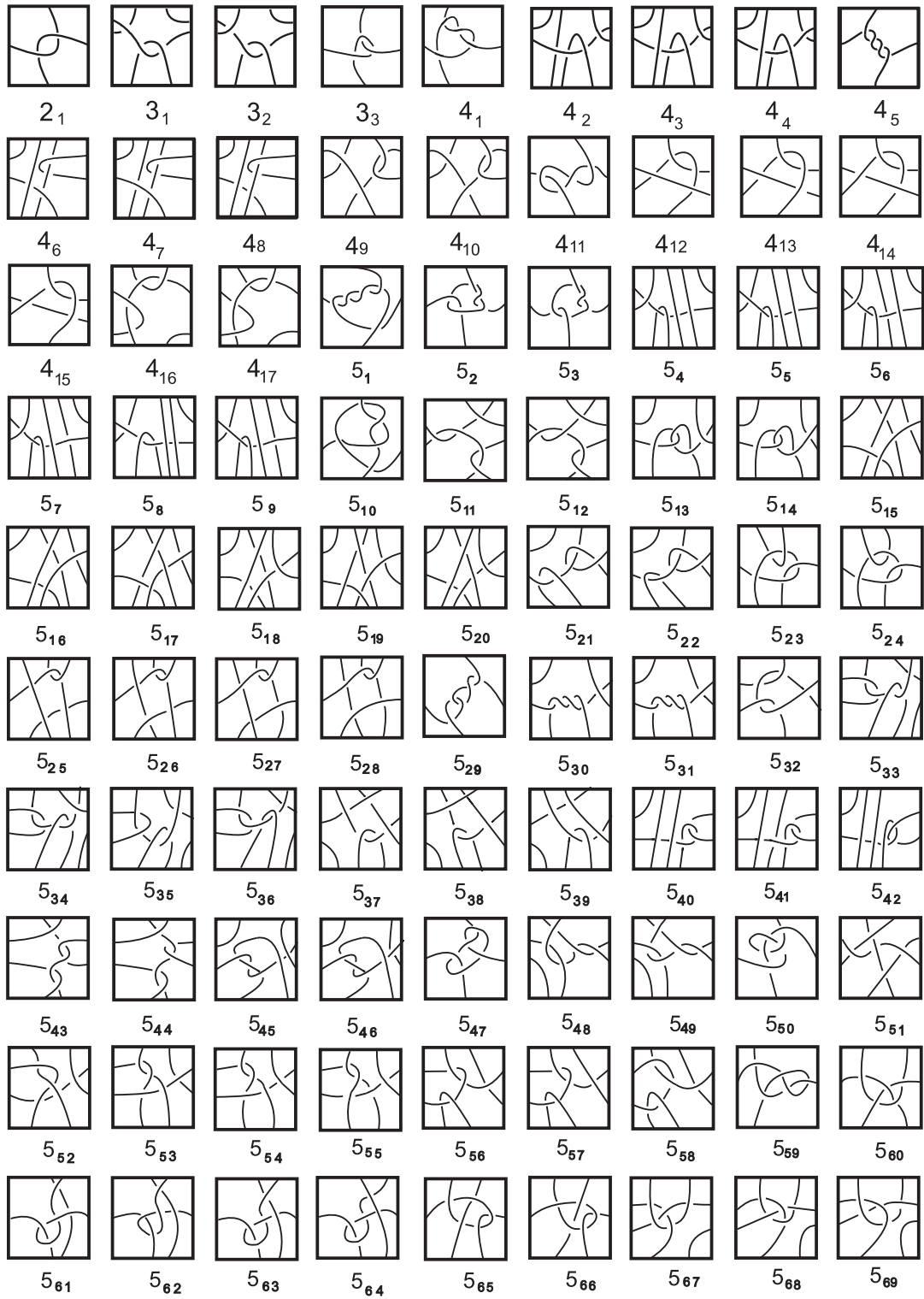


Рис. 15: Диаграммы примарных виртуальных узлов рода 1 с не более чем 5 перекрестками, где T представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

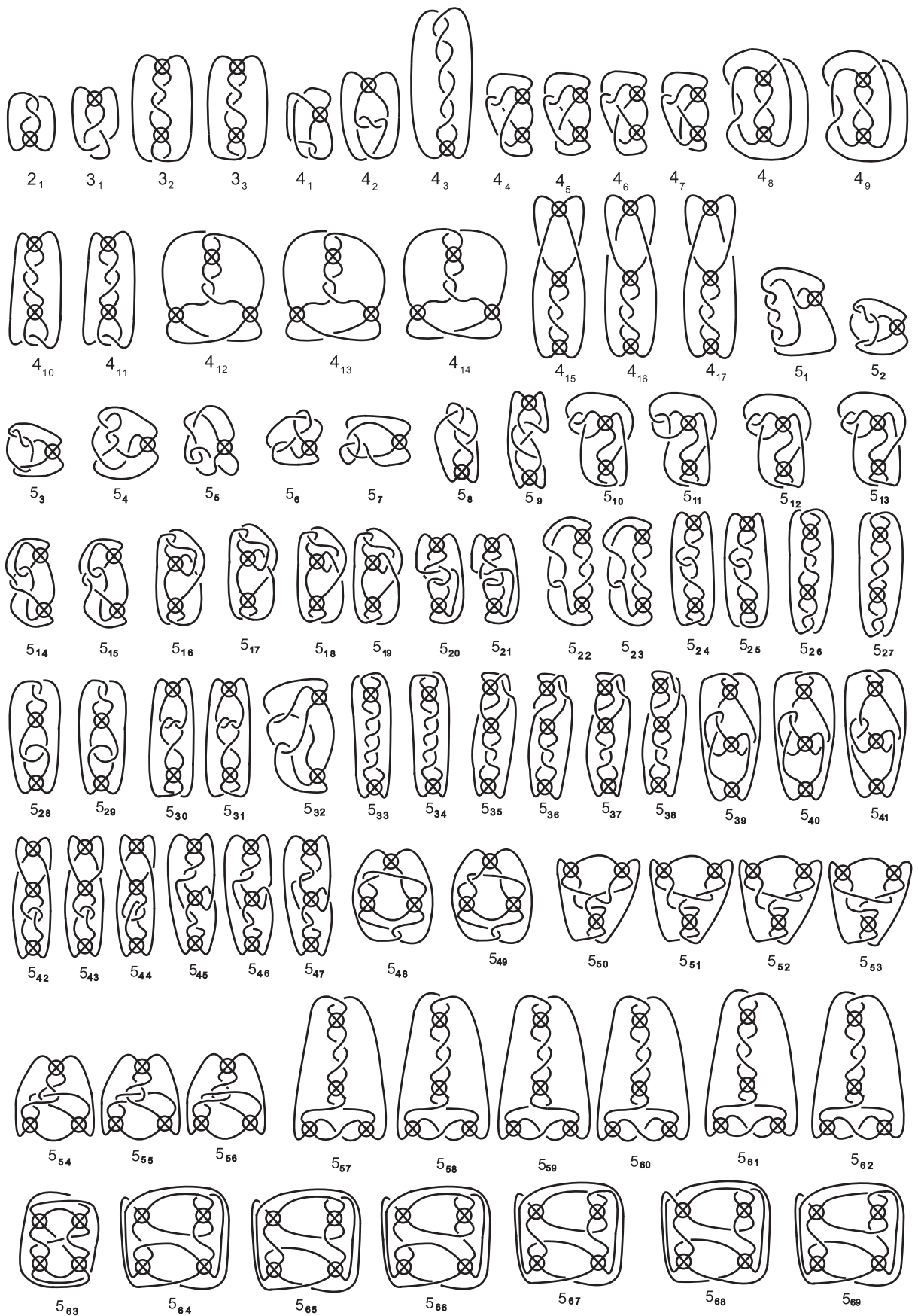


Рис. 16: Виртуальные узлы рода 1, имеющие не более 5 классических перекрестков