УДК 512.543.5

Оценка ранга пересечения подгрупп в свободном произведении двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой

Захаров А.О.

Мы обобщаем оценку для ранга пересечения подгрупп в свободном произведении групп, доказанную ранее С.В.Ивановым и У.Диксом (аналог неравенства Х.Нейман в свободной группе), на случай свободного произведения двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой. Мы также доказываем неулучшаемость полученной оценки в случае, когда свободное произведение с объединенной подгруппой содержит инволюцию.

Свободные произведения с объединенной подгруппой, неравенство Х.Нейман

1. Введение.

Пусть сначала G — свободная группа, а H_1 и H_2 — конечно порождённые подгруппы в G. В 1954 году Хаусон в статье [1] доказал, что в этом случае подгруппа $H_1 \cap H_2$ также конечно порождена. Далее, в 1957 году Х.Нейман в статье [2] доказала следующую оценку для ранга пересечения подгрупп в свободной группе (неравенство Х.Нейман):

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \tag{1}$$

где $\overline{r}(H) = max(0, r(H) - 1)$ — редуцированный ранг подгруппы H.

С.В.Иванов и У.Дикс в статьях [3], [4], [8] обобщили эти результаты на случай, когда G — это свободное произведение групп. Везде далее рассматриваются только нетривиальные свободные произведения. Следующая теорема доказана в [4]:

Теорема 1. (У.Дикс, С.В.Иванов). *Пусть $G = G_1 * G_2$ — свободное произведение групп, а H_1 и H_2 — подгруппы в G , тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, по теореме Куроша [7], свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причём выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q^*}{q^*-2}\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \tag{2}$$

где q^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1, G_2, больших 2; $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, если $q^* = \infty$. Кроме того, первая оценка в (2) неулучшаема, если в G есть элемент порядка 2 и $G \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Как нетрудно видеть, эта теорема обобщает неравенство Х.Нейман. Нас будет интересовать дальнейшее обобщение неравенств (1) и (2) на случай свободного произведения двух групп с объединенной нормальной конечной подгруппой. Мы также рассмотрим вопрос о неулучшаемости полученной оценки.

Теорема 2. *Пусть $G = G_1 *_T G_2$ — свободное произведение групп с объединенной нормальной конечной подгруппой T, а H_1 и H_2 — подгруппы в G, тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям G_1 и G_2 (следовательно, как известно, свободные) и конечного ранга. Тогда ранг $H_1 \cap H_2$ также конечен, причем выполняется оценка*

$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leqslant 2\frac{q_f^*}{q_f^*-2}|T| \cdot \overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \leqslant 6|T| \cdot \overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2), \tag{3}$$

где q_f^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1/T, G_2/T, больших 2; $\frac{q_f^*}{q_f^*-2} = 1$, если $q_f^* = \infty$, а $|T|$ — порядок группы T. При этом первая оценка в (3) неулучшаема, если в G_1/T или G_2/T есть элемент порядка 2 и $G_1/T * G_2/T \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

2. Доказательство оценки теоремы 2.

Докажем, что выполняется оценка (3).

Поскольку T — нормальная подгруппа в $G_1 *_T G_2$, мы можем рассмотреть факторизацию по ней
$$\varphi : G_1 *_T G_2 \to G_1/T * G_2/T.$$

Пусть
$$\varphi(H_1) = H_1', \quad \varphi(H_2) = H_2', \quad \varphi(H_1 \cap H_2) = L \subseteq H_1' \cap H_2'$$
Здесь последнее включение выполняется, поскольку
$$L = \varphi(H_1 \cap H_2) \subseteq \varphi(H_1) \cap \varphi(H_2) = H_1' \cap H_2'$$

Лемма 1.
$$\overline{r}(H_1 \cap H_2) \leq 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}|H_1' \cap H_2' : L|\,\overline{r}(H_1)\overline{r}(H_2) \tag{4}$$

(Ниже, в лемме 2, будет показано, что индекс $|H_1' \cap H_2' : L|$ конечен.)

□ Поскольку H_1 и H_2 тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителями, они, в частности, тривиально пересекаются с объединенной подгруппой, поэтому
$$H_1 \simeq H_1', \quad H_2 \simeq H_2', \quad H_1 \cap H_2 \simeq L,$$
а, значит,
$$\overline{r}(H_1) = \overline{r}(H_1'), \quad \overline{r}(H_2) = \overline{r}(H_2'), \quad \overline{r}(H_1 \cap H_2) = \overline{r}(L).$$
Легко видеть, что H_1' и H_2' тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям. Так как H_1' и H_2' — подгруппы в свободном произведении $G_1/T * G_2/T$ (уже без объединенной подгруппы), мы можем воспользоваться теоремой 1. Из (2) имеем:
$$\overline{r}(H_1' \cap H_2') \leq 2\frac{q_f^*}{q_f^* - 2}\overline{r}(H_1')\overline{r}(H_2'). \tag{5}$$

Далее, L - подгруппа в свободной группе $H_1' \cap H_2'$, значит, согласно формуле Шрайера [5], имеем
$$\overline{r}(L) = |H_1' \cap H_2' : L|\,\overline{r}(H_1' \cap H_2')$$
Подставляя в (5), получаем требуемое неравенство (4). ■

Лемма 2.
$$|H_1' \cap H_2' : L| \leqslant |T| \tag{6}$$
А именно, все правые смежные классы $H_1' \cap H_2'$ по L имеют вид
$$\varphi(H_1 \cap H_2 t), \quad t \in T: \quad H_1 \cap H_2 t \neq \varnothing \tag{7}$$

□ **а)** $\bigcup_{t \in T} \quad \varphi(H_1 \cap H_2 t) = H_1' \cap H_2'$

Включение $\subseteq$ верно, так как $\varphi(H_1) = H_1'$, $\varphi(H_2 t) = \varphi(H_2) = H_2'$; включение $\supseteq$ выполняется, так как
$$g' \in H_1' \cap H_2' \quad \Rightarrow \quad g' = \varphi(h_1) = \varphi(h_2), \quad h_1 = h_2 t, \quad h_1 \in H_1, \quad h_2 \in H_2, \quad t \in T$$
$$\Rightarrow \quad g' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t)$$

б) Для каждого $t \in T$ $\varphi(H_1 \cap H_2 t)$ лежит в одном левом смежном классе по L, так как
$$a', b' \in \varphi(H_1 \cap H_2 t) \quad \Rightarrow \quad a' = \varphi(a), \quad b' = \varphi(b), \quad a, b \in H_1 \cap H_2 t, \quad ab^{-1} \in H_1 \cap H_2$$
$$\Rightarrow \quad a'b'^{-1} = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H_1 \cap H_2) = L$$

в) Наконец, $L\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2)\varphi(H_1 \cap H_2 t) = \varphi(H_1 \cap H_2 t)$ ■

Подставляя (6) в (4), мы получаем, что $r(H_1 \cap H_2)$ конечен и оценка (3) выполняется.

3. Граф подгруппы в свободном произведении групп.

Для доказательства неулучшаемости оценки теоремы 2 нам понадобится конструкция графа подгруппы в свободном произведении групп. Эта конструкция использовалась также в статьях [3], [8], [9], [10]. Здесь мы приведем основные сведения о графе подгруппы в необходимом нам случае.

Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ - подгруппа в G, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям G_α. Поставим H в соответствие граф $\Psi^*(H)$, устроенный следующим образом:

Вершины графа $\Psi^*(H)$ бывают 2 типов:

1) Вершины *1 рода* отвечают правым смежным классам G по H

2) Вершины *2 рода*, соответствующие сомножителю G_α, отвечают классам эквивалентности правых смежных классов G по H относительно следующего отношения: $Hg_1 \sim Hg_2$, если $\exists c \in G_\alpha : Hg_1c = Hg_2$ (класс эквивалентности будем обозначать $[Hg_1]_\alpha$).

Далее, ребра графа $\Psi(H)$ устроены следующим образом: вершина 1 рода Hg_1 соединена ребром с вершиной 2 рода $[Hg_1]_\alpha$ для всех α.

Ориентируем теперь произвольным образом все рёбра графа $\Psi^*(H)$ (если e — ребро, то под e^{-1} мы понимаем то же ребро с противоположной ориентацией) и расставим на рёбрах метки следующим образом.

Пусть e_1 — ребро с концом в вершине 2 рода $[Hg_1]_\alpha$, тогда $\varphi(e_1)$ — это элемент G_α и $\varphi(e_1^{-1}) = \varphi(e_1)^{-1}$.

Выберем метки так, что, если Hg_1, Hg_2 — вершины 1 рода, соединённые с вершиной 2 рода $[Hg_1]_\alpha$ рёбрами e_1, e_2 с метками $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ соответственно, то

$$Hg_1\varphi(e_1)\varphi(e_2)^{-1} = Hg_2 \tag{8}$$

(здесь мы считаем, что оба ребра ориентированы от вершин 1 рода к вершине 2 рода).

Отмеченной точкой назовём вершину 1 рода, отвечающую подгруппе H.

Меткой пути $p = e_1 \dots e_m$ в графе $\Psi^*(H)$ назовём $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_m)$

Несократимым назовем путь, не содержащий подпутей вида dd^{-1}, где d – ребро.

Пусть $\Psi(H)$ – подграф в графе $\Psi^*(H)$, состоящий из объединения несократимых циклов графа $\Psi^*(H)$, объединенного (при необходимости) также с путем до отмеченной точки.

Следующие 2 леммы доказаны также в статье [3].

Лемма 3. *Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$, w — непустое несократимое слово в алфавите $\bigcup G_\alpha$. Тогда $w \in H$ тогда и только тогда, когда в $\Psi(H)$ есть замкнутый несократимый путь с меткой w с началом в отмеченной точке.*

□ ($\Leftarrow$) w — метка пути с началом и концом в вершине 1 рода H, значит (по построению графа, из формулы (8)) $Hw = H$, то есть $w \in H$.

($\Rightarrow$) $w = s_1 \dots s_k, \quad s_i \in G_{\alpha_i}$. По построению графа $\Psi^*(H)$, в нём есть вершины 1 рода $H, Hs_1, Hs_1s_2, \dots, Hs_1s_2 \dots s_k = H$, и есть путь, соединяющий $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}$ и $Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j$ с меткой s_j (это путь из 2 ребер, проходящий через вершину 2 рода $[Hs_1s_2 \dots s_{j-1}]_{\alpha_j} = [Hs_1s_2 \dots s_{j-1}s_j]_{\alpha_j}$, легко понять, что он имеет метку s_j, так как иначе нарушалось бы условие, что подгруппа H тривиально пересекается с сопряженными к сомножителю G_{α_i}). Ясно также, что этот путь лежит в объединении несократимых циклов графа $\Psi^*(H)$ (в силу несократимости слова w), а следовательно лежит в $\Psi(H)$. ■

Далее, пусть T — максимальное поддерево в $\Psi(H)$, а C — множество рёбер, не вошедших в T. Для каждого ребра e из C найдем (единственный) путь по дереву T от отмеченной точки до начала этого ребра e и (единственный) путь от конца ребра e до отмеченной точки; мы получим следующие замкнутые пути с началом в отмеченной точке:

$$q_e e r_e, e \in C \tag{9}$$

Лемма 4. *Пусть $H \subseteq G = \prod^* G_\alpha$ – подгруппа, тривиально пересекающаяся с сопряженными к сомножителям. Тогда H свободно порождается элементами*

$$\varphi(q_e e r_e), e \in C. \tag{10}$$

Кроме того, H имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда граф $\Psi(H)$ конечен, и в этом случае

$$\overline{r}(H) = -\chi(\Psi(H)), \tag{11}$$

где $\chi(P)$ — эйлерова характеристика графа P, равная разности количества вершин и количества рёбер графа P.

□ Полное доказательство приведено в [3] и опирается на тот факт, что фундаментальная группа графа $\Psi(H)$ свободно порождается путями вида (9). Формула (11) следует из того, что

$$-\chi(\Psi(H)) = |C| - 1,$$

поскольку в T входят все вершины графа $\Psi(H)$ и рёбер в T на 1 меньше, чем вершин (T — дерево). Но, согласно (10), $|C| = r(H)$ и (11) выполняется. ■

Заметим, что в случае, когда подгруппа H имеет конечный индекс в G, $\Psi(H) = \Psi^*(H)$. Это легко видеть, поскольку, если бы в графе $\Psi^*(H)$ нашелся путь, не входящий в объединение несократимых циклов этого графа, то по построению нашелся бы такой бесконечный путь, что противоречит конечности индекса H (вершин 1 рода в $\Psi^*(H)$ конечное число).

Несложно видеть также, что если подгруппа H нормальна в G, то графу $\Psi^*(H)$ можно поставить в соответствие граф Кэли группы G/H (относительно порождающих, являющихся образами при факторизации порождающих из G_α), при этом вершинам графа Кэли соответствуют вершины 1 рода графа $\Psi^*(H)$.

4. Доказательство неулучшаемости оценки теоремы 2.

Снова рассмотрим факторизацию

$$\varphi : G = G_1 *_T G_2 \to G_1/T * G_2/T = G_1' * G_2' = G'.$$

По условию теоремы, в G' есть элемент порядка 2 и $G' \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Следующая лемма доказана также в [4]:

Лемма 5. *Пусть $G' = G_1' * G_2'$, q_f^* — минимальный из порядков подгрупп групп G_1', G_2', больших 2. Пусть также в G' есть элемент порядка 2 и $G' \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Тогда либо $q_f^* = \infty$, либо q_f^* — простое, $q_f^* > 2$, либо $q_f^* = 4$, причем G' содержит одну из следующих подгрупп:*

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \quad \text{если} \quad q_f^* = \infty \tag{12}$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p, \quad \text{если} \quad q_f^* = p, \quad p - \text{простое}, \quad p > 2 \tag{13}$$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \quad \text{или} \quad \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2), \quad \text{если} \quad q_f^* = 4. \tag{14}$$

□ Тот факт, что q_f^* равно ∞, 4 или простое, следует из определения q_f^* и теорем Силова.

Пусть a – элемент порядка 2 в G', тогда можно считать, что он лежит в одном из сомножителей, пусть для определенности $a \in G_1'$. Если $q_f^* < \infty$, то пусть Q – подгрупа

G_1' или G_2', состоящая из q_f^* элементов. Тогда подгруппа $\langle bab^{-1}\rangle * Q$, где $b \in G_2', \quad b \neq 1$, имеет искомый вид (13) или (14).

Если же $q_f^* = \infty$, то подгруппа $\langle a\rangle * \langle bab^{-1}\rangle * \langle cac^{-1}\rangle$, где $b, c \in G_2', \quad b, c \neq 1, \quad b \neq c$, имеет искомый вид (12) (можно считать, что в G_2' есть по крайней мере 3 различных элемента, так как $G' \ncong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$). ■

Мы хотим доказать, что в рассматриваемом нами случае первая оценка в (3) неулучшаема. Ясно, что мы можем перейти к подгруппе вида (12), (13) или (14) в G' и к ее полному прообразу при гомоморфизме φ в G и ограничить факторизацию φ на этот прообраз. Поэтому достаточно доказать неулучшаемость первой оценки в (3) (т.е. привести примеры соответствующих подгрупп H_1 и H_2) в том случае, когда G' есть одна из групп вида (12), (13) или (14).

Из доказательства пункта 2 видно, что первое неравенство в (3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда в равенство обращаются неравенства (5) и (6). Будем действовать следующим образом: для каждого $n = |T|$ сначала для каждой из групп вида (12), (13) и (14) построим в ней некоторые (свободные) подгруппы конечного индекса H_1' и H_2', такие, что для них достигается равенство в (5), а затем выберем некоторым образом прообразы свободных порождающих этих подгрупп при факторизации φ так, чтобы достигалось равенство в (6) для полученных прообразов H_1 и H_2. Более строго этот процесс будет описан далее.

Нам понадобится следующая лемма, доказанная также в статье [4].

Лемма 6. *Пусть H_1' и H_2' - подгруппы конечного индекса в G', тривиально пересекающиеся с сопряженными к сомножителям, G' есть одна из групп вида (12), (13) или (14). Тогда равенство в (5) достигается тогда и только тогда, когда*

$$|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_1'| \cdot |G' : H_2'| \tag{15}$$

□ Заметим сперва, что, в силу (11),

$$\overline{r}(H') = -\chi(\Psi(H')) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(\Psi(H'))} (\deg v - 2), \tag{16}$$

где $H' \subseteq G', \quad V(\Psi(H'))$ - множество вершин графа $\Psi(H')$. Обозначим также через $U(\Psi(H'))$ множество вершин 1 рода в $\Psi(H')$, а через $V_p(\Psi(H'))$ — множество вершин степени p в $\Psi(H')$. Ясно, что $|U(\Psi(H'))| = |G' : H'|$.

Здесь и далее под подгруппой H' мы будем понимать одну из подгрупп H_1', H_2' или $H_1' \cap H_2'$ в G' (все они имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G').

Рассмотрим сначала случай, когда G' имеет вид (13) или (14). Тогда вершины 1 рода графа $\Psi(H')$ имеют степень 2, вершины 2 рода этого графа, относящиеся к сомножителю $\mathbb{Z}_2$, также имеют степень 2, а вершины 2 рода, относящиеся к другому сомножителю, имеют степень p, где p — простое или 4. Заметим, что вершины степени 2 не дадут вклада в сумму в правой части (16), поэтому получим

$$\overline{r}(H') = \frac{p-2}{2} |V_p(\Psi(H'))|.$$

Далее, каждая вершина 1 рода соединена ровно с одной вершиной (2 рода) степени p, следовательно,

$$|G' : H'| = |U(\Psi(H'))| = p|V_p(\Psi(H'))| = \frac{2p}{p-2} \overline{r}(H').$$

Подставляя это выражение в (15) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $q^* = p$, получаем, что в данном случае (15) эквивалентно равенству в (5).

Остается рассмотреть случай, когда $G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $q^* = \infty$. В этом случае все вершины 2 рода в графе $\Psi(H')$ имеют степень 2 и потому не дают вклада в сумму в правой части (16), а все вершины 1 рода имеют степень 3, поэтому получаем:

$$\overline{r}(H') = \frac{|V_3(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|U(\Psi(H'))|}{2} = \frac{|G' : H'|}{2},$$

то есть $|G' : H'| = 2\overline{r}(H')$. Подставляя это выражение в (15) (для каждого из 3 индексов) и учитывая, что $\frac{q^*}{q^*-2} = 1$, получаем, что в этом случае также (15) эквивалентно равенству в (5). ■

Далее, общеизвестна следующая лемма:

Лемма 7. *Пусть*

$$H_1' \triangleleft G', \quad H_1'H_2' = G' \tag{17}$$

Тогда $|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_1'| \cdot |G' : H_2'|$

□

$$G'/H_1' = (H_1'H_2')/H_1' \cong H_2'/(H_1' \cap H_2'),$$

то есть $|G' : H_1'| = |H_2' : H_1' \cap H_2'|$, а значит

$$|G' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_2'| \cdot |H_2' : H_1' \cap H_2'| = |G' : H_2'| \cdot |G' : H_1'| \quad ■$$

Таким образом, из лемм 6 и 7 мы получаем, что в рассматриваемом случае условие (17) является достаточным для достижения равенства в (5).

Рассмотрим теперь неравенство (6). Как видно из (7), неравенство (6) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$H_1 \cap H_2t \neq \varnothing \quad \forall t \in T \tag{18}$$

Последнее же верно, если

$$T \subseteq H_1H_2. \tag{19}$$

Таким образом, в примерах, которые будут построены далее, достаточно проверять выполнение равенств (17) и (19), а также тот факт, что обе подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G', тогда будет достигаться равенство и в первой оценке (3).

Перейдем теперь к конкретному построению примеров. Пусть $|T| = n$.

1 случай. Пусть сначала

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_p \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = 1\rangle,$$

где p - простое, $p > 2$.

Построим сначала подгруппу H_1'.

Рассмотрим

$$G_0' = \langle\langle (ab)^6 \rangle\rangle \subseteq G', \quad R = G'/G_0' \cong \langle a, b \mid a^p = b^2 = (ab)^6 = 1\rangle = T(p, 2, 6).$$

Это треугольная группа; как известно, она бесконечна, поскольку

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \leq 1 \quad \text{при } p \geq 3.$$

Известно также, что треугольные группы финитно аппроксимируемы ([6]). Следовательно, для любого конечного подмножества M группы R существует гомоморфизм из R на конечную группу, инъективный на множестве M.

Далее, рассмотрим в группе G_0' слова вида

$$w_1' = (ab)^6, w_2' = ((ab)^6)^{ba^{-1}ba^{-2}}, w_3' = ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^2}, ..., w_n' = ((ab)^6)^{(ba^{-1}ba^{-2})^{n-1}} \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что эти элементы попарно различны.

Рассмотрим часть графа $\Psi(G_0')$, которая состоит из всех вершин 2 рода этого графа, лежащих на несократимых путях с метками вида (20), вместе с выходящими из них ребрами и их концами – вершинами 1 рода. Множество смежных классов, отвечающих этим вершинам 1 рода, возьмем в качестве M, тогда очевидно M есть подмножество факторгруппы $R = G'/G_0'$, причем $1, a, b \in M$.

Указанная часть графа $\Psi(G_0')$ для случая $n = 3$ изображена на рисунке 1.

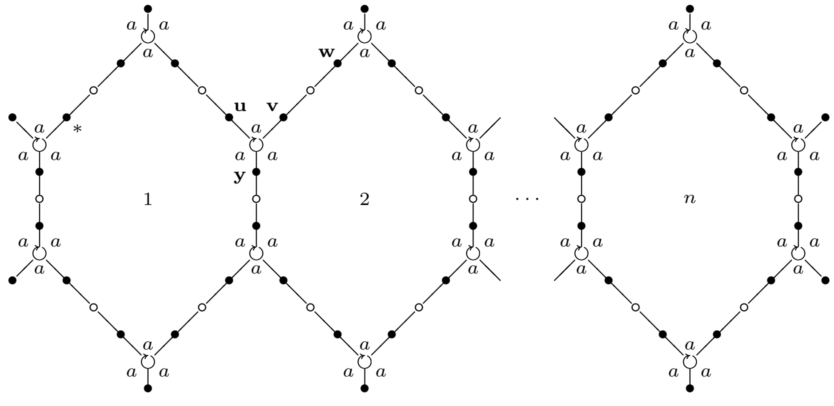

Рис.1

(Здесь вершины 1 рода обозначены символом $\bullet$, вершины 2 рода, соответствующие сомножителю $\langle b\rangle_2$ — символом $\circ$, а вершины 2 рода, соответствующие сомножителю $\langle a\rangle_3$ — символом $\circlearrowright$. При этом метка нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2 рода, которая отвечает сомножителю $\langle b\rangle_2$, равна b (и не отмечена на рисунке). Метка же нетривиального пути из 2 ребер, инцидентных вершине 2 рода, которая отвечает сомножителю $\langle a\rangle_3$, равна a или a^2 в соответствии с метками на рисунке рядом с этой вершиной 2 рода и направлением обхода этой вершины 2 рода (у нас здесь и далее все такие обходы совершаются по часовой стрелке). Так, например, метка пути (из 2 ребер) из $\mathbf{v}$ в $\mathbf{w}$ равна b; метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{v}$ равна a, а метка пути из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{y}$ равна a^2. Отмеченная точка здесь и далее выделена символом $*$.)

Вследствие сказанного выше, существует факторизация $\pi : R \to S = R/R_0$, инъективная на множестве M, где S – конечная группа. Тогда $S \cong G'/H_1'$, $H_1' \lhd G'$, $G_0' \subseteq H_1'$. Полученная таким образом подгруппа H_1' имеет конечный индекс в G' (так как S конечна). Кроме того, H_1' тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' (в частности, H_1' свободна), так как иначе, в силу нормальности H_1', в ней лежал бы элемент a или b, но это невозможно, поскольку $1, a, b \in M$ и, следовательно, инъективно отображаются на S.

Легко видеть, что свободные порождающие в G_0' можно выбрать так, чтобы n элементов (20) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(G_0')$, отвечающей элементам (20)). Более того, свободные порождающие в H_1' также можно выбрать так, чтобы элементы (20) входили в их число. Это следует из инъективности факторизации π на M: часть графа $\Psi(H_1')$, отвечающая элементам (20), будет такой же, как соответствующая часть графа $\Psi(G_0')$ (см. рис. 1), и, выбрав тем же образом максимальное поддерево в $\Psi(H_1')$, мы получим требуемое. Итак, можно считать, что элементы вида (20) входят в число свободных порождающих H_1'. Заметим также, что $(ba)^6 = ((ab)^6)^b \in H_1'$.

Построим теперь подгруппу H_2'.

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w'_1, ..., w'_n \quad \text{из (20)}, \quad (ba)^5, \quad (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2. \tag{21}$$

Граф $\Psi(K)$ для случая $n = 3$ изображен на рисунке 2.

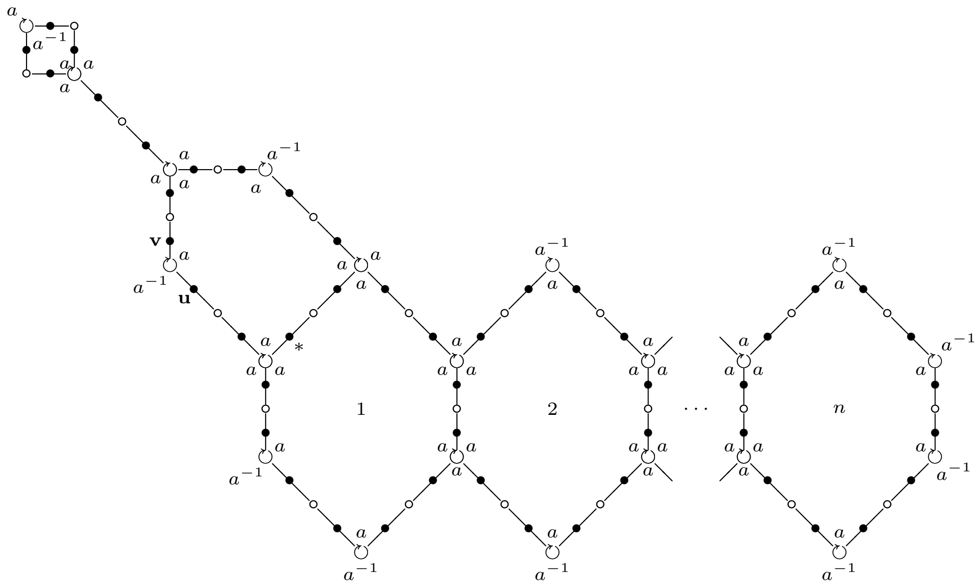

Рис.2

(Здесь обозначения те же, что и на рис.1; например, метка пути (из 2 ребер) из $\mathbf{u}$ в $\mathbf{v}$ равна a^{-1}.)

Подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G', однако K имеет бесконечный индекс в G'. Можно построить подгруппу $H'_2 \subseteq G'$, такую, что $K \subseteq H'_2$, H'_2 также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H'_2 имеет конечный индекс в G'. Для этого рассмотрим те из вершин 1 рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2 рода графа $\Psi(K)$. Пусть $Z = \{z_j, j = 1...J\}$ – множество путей до этих вершин (1 рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$, лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Пусть

$$s_1 = baba^{-2}b,\ s_2 = ba^3ba^{-4}b, ...,\ s_{(p-1)/2} = ba^{p-2}ba^{-(p-1)}b \tag{22}$$

Тогда в качестве порождающих подгруппы H'_2 возьмем объединение порождающих (21) подгруппы K с множеством слов

$$s_i^{z_j}, \quad i = 1...(p-1)/2, \quad j = 1...J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H'_2) = \Psi(H'_2)$ и в этом графе конечное число вершин 1 рода, следовательно, подгруппа H'_2 имеет конечный индекс в G'; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H'_1H'_2 = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H'_1,\ (ba)^5 \in H'_2 \Rightarrow (ba)^6,\ (ba)^5 \in H'_1H'_2 \Rightarrow ba \in H'_1H'_2.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2 \in H'_2 \Rightarrow (ba)^2(ba^{-1})^5(ba)^2,\ ba \in H'_1H'_2 \Rightarrow (ba^{-1})^5 \in H'_1H'_2.$$

Кроме того,

$$(ba^{-1})^6 = ((ab)^6)^{-1} \in H_1' \Rightarrow (ba^{-1})^5,\ (ba^{-1})^6 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba^{-1} \in H_1'H_2'.$$

Таким образом, $a^2 \in H_1'H_2'$, но $a^p = 1$, p - нечетное, следовательно, $a, b \in H_1'H_2'$, то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выберем теперь прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' при факторизации φ следующим образом. У элементов $w_1', ..., w_n'$ (из (20)) как порождающих подгруппы H_1' выберем произвольные прообразы $w_1, ..., w_n$ в G, а у тех же элементов $w_1', ..., w_n'$ как порождающих подгруппы H_2' выберем прообразы $w_1t_1, ..., w_nt_n$, где $T = \{t_1, ..., t_n\}$. Остальные прообразы порождающих подгрупп H_1' и H_2' выберем произвольным образом. Полученные прообразы групп H_1' и H_2' назовем H_1 и H_2 соответственно. Тогда ясно, что будет выполнено условие (19). Кроме того, как было показано ранее, выполняется также условие (17), а обе подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G'. Следовательно, для этого случая всё доказано.

2 случай. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_4 \cong \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1 \rangle$$

Построение подгруппы H_1' проводится аналогично предыдущему случаю (треугольная группа $T(4, 2, 6)$ также бесконечна и финитно аппроксимируема).

Построим подгруппу H_2'.

Рассмотрим подгруппу $K \subseteq G'$, (свободно) порождаемую следующими элементами:

$$w_1', ..., w_n' \quad \text{из (20)}, \quad (ba)^5, \quad (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2, \quad (ba^2)^2 \tag{23}$$

Граф $\Psi(K)$ изображен на рисунке 3.

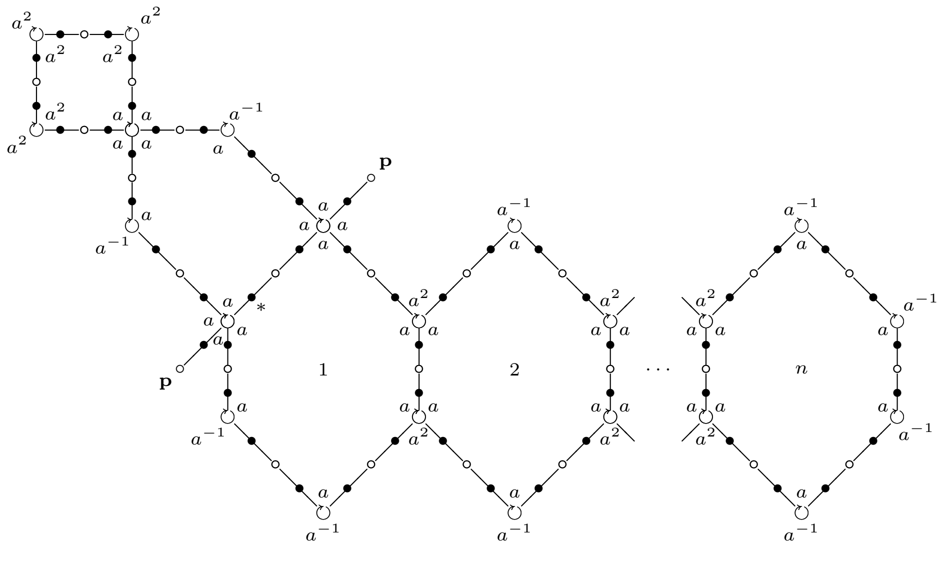

Рис.3

(Здесь обозначения те же, что и на рис.1,2; вершины 2 рода, отмеченные одинаковой буквой (**p**), совпадают.)

Как и в предыдущем случае, подгруппа K тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G', однако K имеет бесконечный индекс в G'. Снова можно построить подгруппу $H_2' \subseteq G'$, такую, что $K \subseteq H_2'$, H_2' также тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G' и H_2' имеет конечный индекс в G'. Для этого рассмотрим те из вершин 1 рода графа $\Psi^*(K)$, которые сами не лежат в графе $\Psi(K)$, но соединены ребром с вершиной 2 рода графа $\Psi(K)$. Легко видеть, что таких вершин четное число. Пусть $Z = \{z_j, j = 1...2J\}$ – множество путей до этих вершин (1 рода) из отмеченной точки графа $\Psi^*(K)$, лежащих в (фиксированном) максимальном поддереве графа $\Psi^*(K)$ (по одному пути до каждой из вершин). Тогда в качестве порождающих подгруппы H_2' возьмем объединение порождающих (23) подгруппы K с множеством слов

$$z_{2j-1}bz_{2j}^{-1}, j = 1...J.$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^*(H_2') = \Psi(H_2')$ и в этом графе конечное число вершин 1 рода, следовательно, подгруппа H_2' имеет конечный индекс в G'; остальные условия также выполнены.

Покажем, что $H_1'H_2' = G'$. Действительно,

$$(ba)^6 \in H_1',\ (ba)^5 \in H_2' \Rightarrow (ba)^6,\ (ba)^5 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba \in H_1'H_2'.$$

Далее,

$$(ba)^2(ba^2)^5(ba)^2 \in H_2' \Rightarrow (ba)^2(ba^2)^5(ba)^2,\ ba \in H_1'H_2' \Rightarrow (ba^2)^5 \in H_1'H_2'.$$

Кроме того,

$$(ba^2)^2 \in H_2' \Rightarrow (ba^2)^5,\ (ba^2)^2 \in H_1'H_2' \Rightarrow ba^2 \in H_1'H_2'.$$

Следовательно, $a, b \in H_1'H_2'$, то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' тем же способом, как и в предыдущем случае, мы получаем, что для этого случая также все доказано.

3 случай. Пусть теперь

$$G' = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = bcbc = 1\rangle$$

В качестве $H_1' \lhd G'$ возьмем следующую подгруппу:

$$H_1' = \langle\langle acac, \quad (ab)^{n+1}\rangle\rangle, \quad \text{тогда} \quad G'/H_1' \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2,$$

где D_n – диэдральная группа порядка $2n$. Граф $\Psi(H_1')$ изображен на рисунке 4.

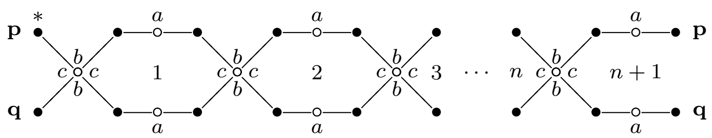

Рис.4

(Здесь вершины 1 рода обозначены символом •, а вершины 2 рода — символом ∘; остальные обозначения аналогичны обозначениям предыдущих рисунков. Вершины 2 рода, отмеченные одинаковыми буквами (**p** и **q**), совпадают.)

Легко видеть, что H_1' имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G'. Далее, рассмотрим в подгруппе H_1' слова

$$w_1' = (acac)^b,\ w_2' = (acac)^{bab}, ...,\ w_n' = (acac)^{(ba)^{n-1}b} \tag{24}$$

Заметим, что свободные порождающие в H_1' можно выбрать так, чтобы n элементов (24) входили в их число (для этого нужно соответствующим образом выбрать максимальное поддерево в части графа $\Psi(H_1')$, отвечающей элементам (24)).

Пусть теперь подгруппа $H_2' \subseteq G'$ порождается следующими элементами:

$$w_1', ..., w_n' \quad \text{из} \quad (24), \quad (ab)^{acac},\ acababa,\ abcac,\ (ac)^{(ba)^n b} \tag{25}$$

Граф $\Psi(H_2')$ изображен на рисунке 5.

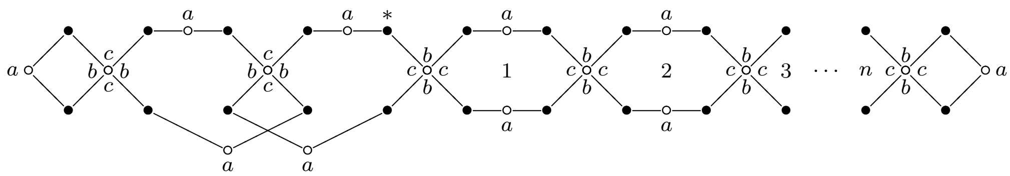

Рис.5

Легко видеть, что H_2' имеет конечный индекс в G' и тривиально пересекается с сопряженными к сомножителям G'.

Покажем, что $H_1'H_2' = G'$. Действительно,

$$acac \in H_1',\ (ab)^{acac} \in H_2' \Rightarrow acac,\ (ab)^{acac} \in H_1'H_2' \Rightarrow ab \in H_1'H_2'.$$

Далее,

$$abcac,\ ab \in H_1'H_2' \Rightarrow cac,\ acac \in H_1'H_2' \Rightarrow a, b \in H_1'H_2'.$$

Наконец,

$$acababa,\ a,\ b \in H_1'H_2' \Rightarrow c \in H_1'H_2',$$

то есть $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' тем же способом, что и в первом случае (только на этот раз надо брать $w_1', ..., w_n'$ из (24)), получаем, что в этом случае также всё доказано.

4 случай. Рассмотрим последний оставшийся случай. Пусть

$$G' = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1\rangle$$

Пусть G'_*, H'_{1*}, H'_{2*} обозначают соответственно группы G', H_1', H_2' из предыдущего случая. Тогда

$$G'_* = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong G'/\langle\langle bcbc\rangle\rangle$$

Рассмотрим подгруппу

$$H_1' \lhd G', H_1' = \langle\langle bcbc, acac, (ab)^{n+1}\rangle\rangle,$$

В качестве порождающих H_2' рассмотрим объединение элементов из (25) и следующих элементов:

$$(bcbc)^{r_j}, \quad r_j = 1, ba, (ba)^2, ..., (ba)^n, a, aca. \tag{26}$$

Тогда

$$G'/H_1' \cong D_{n+1} \times \mathbb{Z}_2 \cong G'_*/H'_{1*},$$

и легко видеть естественное соответствие между графами $\Psi(H'_{1*}), \Psi(H'_{2*})$ (графы подгрупп G'_*) и графами $\Psi(H_1'), \Psi(H_2')$ (графы подгрупп G') соответственно.

Несложно заметить также, что подгруппы H_1' и H_2' имеют конечный индекс в G' и тривиально пересекаются с сопряженными к сомножителям G'. Далее, те же рассуждения, что и в предыдущем пункте, показывают, что $H_1'H_2' = G'$.

Выбирая прообразы свободных порождающих подгрупп H_1' и H_2' так же, как и в предыдущих случаях, получаем, что и в этом случае всё доказано, а значит неулучшаемость первой оценки в (3) при указанных в теореме условиях доказана.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] A.G.Howson, *On the intersection of finitely generated free groups*, J. London Math. Soc. 29(1954), 428-434

[2] H.Neumann, *On the intersection of finitely generated free groups*, Publ.Math. 4(1956), 186-189; Addendum, Publ.Math. 5(1957), 128

[3] S.V.Ivanov, *On the Kurosh rank of the intersection of subgroups in free products of groups*, Adv. Math. 218(2008), 465-484

[4] W.Dicks and S.V.Ivanov, *On the intersection of free subgroups in free products of groups*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144(2008), 511-534

[5] O.Schreier, *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Hamburg. Abh.5 (1927), 161-183.

[6] Jones G.A. and Singerman D., *Theory of maps on orientable surfaces,* Proc. London Math. Soc. (3) **37** (1978), 273-307

[7] A.G.Kurosh, *Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen*, Ann.Math. **109**(1934), 647-660.

[8] S.V. Ivanov, *On the intersection of finitely generated subgroups in free products of groups.* Internat. J. Algebra Comput. 9 (1999), no. 5, 521-528.

[9] S.V. Ivanov, *Intersecting free subgroups in free products of groups.* Internat. J. Algebra Comput. 11 (2001), no. 3, 281-290.

[10] S.V. Ivanov, *A property of groups and the Cauchy-Davenport theorem.* J. Group Theory 13 (2010), no. 1, 21-39.

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 11-01-00945.

Автор благодарит А.А.Клячко за множество полезных замечаний.